

УДК 519.63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТОВ ОСНОВАНИЙ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ¹⁾

П.Н. ВАБИЩЕВИЧ¹, С.П. ВАРЛАМОВ², М.В. ВАСИЛЬЕВА³, С.П. СТЕПАНОВ³

¹ *Институт безопасного развития атомной энергетики РАН, г. Москва*

² *Институт мерзлотоведения им.П.И.Мельникова СО РАН, г. Якутск*

³ *Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, г. Якутск*

E-mail sepe2a@inbox.ru

MATHEMATICAL MODELING OF THE THERMAL CONDITION OF THE RAILWAY FOUNDATION GROUND

P.N. VABISHEVICH¹, S.P. VARLAMOV², M.V. VASILIEVA³, S.P. STEPANOV³

¹ *Nuclear Safety Institute Russian Academy of Sciences, Moscow*

² *Permafrost Institute of the Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Yakutsk*

³ *North-Eastern Federal University, Yakutsk*

Аннотация

Проводится численное исследование температурного режима полотна железной дороги в условиях криолитозоны. Вычислительная реализация базируется на методе конечных элементов, позволяющего проводить численное моделирование в сложной геометрической области. Рассматривается влияния сезонных колебаний температуры окружающей среды, наличия теплоизоляционных материалов (пенноплекс), снежного и надпочвенного покровов на температурный режим основания железной дороги. Представлены результаты численного решения задачи в трехмерной постановке.

Ключевые слова: железнодорожное полотно, задача Стефана, метод конечных элементов, численное моделирование, криолитозона.

Summary

Numerical study of the temperature of the railway line in the conditions of permafrost. Numerical implementation is based on the finite element method, which allows a numerical simulation in complex geometric area. We consider the impact of seasonal fluctuations of ambient temperature, the presence of thermal insulation (penoplex), snow-ground covers on the temperature regime of grounds of the railway is provided. Numerical solution is performed in the general three-dimensional case.

Key words: railway, Stefan's problem, finite elements method, numerical simulation, permafrost.

Введение

Изучение изменения температуры грунтов под насыпью железнодорожного полотна является необходимым элементом инженерно-геокриологического обоснования строительства железнодорожных путей в районах вечномёрзлых грунтов. При сезонном оттаивании мёрзлых грунтов изменяются его физико-механические свойства, что приводит к активации нежелательных криогенных процессов способных нарушить устойчивость земляного полотна и в целом воспрепятствовать нормальному функционированию инфраструктур Севера.

Для моделирования теплового режима грунта оснований железнодорожного полотна в условиях криолитозоны используется классическая модель Стефана, характеризующаяся заданием постоянной температуры на границе фазового перехода [1, 2]. Дискретизация по пространству начально-краевой задачи

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00719А) и НОФМУ РС(Я) (2014-01-0017)

проводится методом конечных элементов. Для аппроксимации по времени уравнения используется конечно-разностная схема с линеаризацией с предыдущего временного слоя. При построении математической модели также необходимо учитывать сезонные колебания температуры воздуха, высоту снежного покрова и радиационный баланс подстилающей поверхности, влияющие на глубину протаивания грунта под насыпью железной дороги.

1. Математическая модель

Рассмотрим математическую модель, описывающую распределение температуры при наличии фазовых переходов твердая фаза – жидкая фаза при некоторой заданной температуре фазового перехода T^* в области $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$ (рис. 1). Для моделирования процессов теплопереноса с фазовыми перехода-

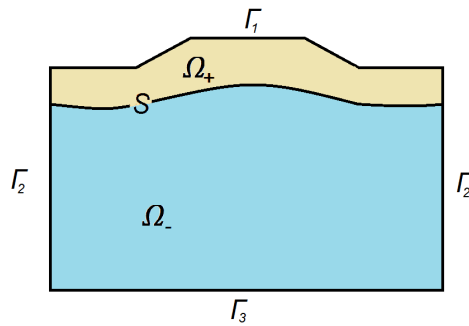


Рис. 1: Расчетная область

ми используется классическая модель Стефана, описывающая тепловые процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями среды, поглощением и выделением скрытой теплоты

$$(\alpha(\phi) + \rho^+ L \phi') \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(\phi) \operatorname{grad} T) = 0, \quad (1)$$

где L – удельная теплота фазового перехода.

Для коэффициентов уравнения имеем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(\phi) &= \rho^- c^- + \phi(\rho^+ c^+ - \rho^- c^-), \\ \lambda(\phi) &= \lambda^- + \phi(\lambda^+ - \lambda^-), \end{aligned}$$

и

$$\phi = \begin{cases} 0 & T < T^*, \\ 1 & T > T^*, \end{cases}$$

где ρ^+, c^+ и ρ^-, c^- – плотность и удельная теплоемкость талой и мерзлой зоны, соответственно.

Поскольку рассматривается процесс распространения тепла в пористой среде, то для коэффициентов имеем:

$$c^- \rho^- = (1 - m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_i\rho_i, \quad c^+ \rho^+ = (1 - m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_w\rho_w,$$

где m – пористость. Индексы sc, w, i обозначают соответственно каркас пористой среды, воду и лед. Для коэффициентов теплопроводности в талой и мерзлой зоне имеем аналогичные соотношения

$$\lambda^- = (1 - m)\lambda_{sc} + m\lambda_i, \quad \lambda^+ = (1 - m)\lambda_{sc} + m\lambda_w.$$

На практике, фазовые превращения не происходят мгновенно и могут происходить в малом интервале температуры $[T^* - \Delta, T^* + \Delta]$. В качестве функции ϕ можно взять ϕ_Δ :

$$\phi_\Delta = \begin{cases} 0, & T \leq T^* - \Delta, \\ \frac{T - T^* + \Delta}{2\Delta}, & T^* - \Delta < T < T^* + \Delta, \\ 1, & T \geq T^* + \Delta, \end{cases} \quad \phi'_\Delta = \begin{cases} 0, & T \leq T^* - \Delta, \\ \frac{1}{2\Delta}, & T^* - \Delta < T < T^* + \Delta, \\ 0, & T \geq T^* + \Delta. \end{cases}$$

Тогда получим следующее уравнение для температуры в области Ω :

$$(\alpha(\phi_\Delta) + \rho^+ L\phi'_\Delta) \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(\phi_\Delta) \operatorname{grad} T) = 0. \quad (2)$$

Полученное уравнение (2) является стандартным нелинейным параболическим уравнением.

Уравнение (2) дополняется начальным условием

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T}{\partial n} &= \frac{Q(1-A) + I - \alpha(T - T_{air})}{\alpha R + 1}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ -k \frac{\partial T}{\partial n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \\ T &= T_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ и Q – суммарная коротковолновая радиация, A – альbedo, α – коэффициент конвективного теплообмена, I – длинноволновое излучение, T_{air} – температура наружного воздуха, R – термического сопротивление наземного покрова (зимой – снега) [4].

2. Конечно-элементная дискретизация.

Для численного решения задачи проведем аппроксимацию уравнения (2) с учетом граничных условий с использованием метода конечных элементов. Умножим уравнение для температуры на функцию v и проинтегрируем с использованием формулы Грина

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\alpha(\phi_\Delta) + \rho^+ L\phi'_\Delta) \frac{\partial T}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} (\lambda(\phi_\Delta) \operatorname{grad} T, \operatorname{grad} v) \, dx - \\ - \int_{\Gamma_1} \frac{Q(1-A) + I - \alpha(T - T_{air})}{\alpha R + 1} v \, ds = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $H^1(\Omega)$ – пространство Соболева, состоящее из функций v таких, что v^2 и $|\nabla v|^2$ имеют конечный интеграл.

Определим равномерную для простоты сетку по времени

$$\omega_\tau = \{t^n = n \cdot \tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau N_0 = t_{max}\},$$

и проведем аппроксимацию по времени с использованием стандартной чисто неявной схемы. Для линеаризации уравнения воспользуемся простейшей линеаризацией, когда коэффициенты зависят от значения функции с предыдущего временного слоя:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\alpha(\phi_\Delta^n) + \rho^+ L\phi'_\Delta^n) \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} v \, dx + \int_{\Omega} (\lambda(\phi_\Delta^n) \operatorname{grad} T^{n+1}, \operatorname{grad} v) \, dx - \\ - \int_{\Gamma_1} \frac{Q(1-A) + I - \alpha(T^{n+1} - T_{air})}{\alpha R + 1} v \, ds = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $T^n = T(t^n) \in H^1(\Omega)$.

Таким образом, мы приходим к следующей классической вариационной постановке задачи: Определить $T \in H^1(\Omega)$, $(T(\mathbf{x}, t) - T_c(\mathbf{x}, t))|_{\Gamma_D} \in H_0^1(\Omega)$ такую, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (\alpha(\phi_\Delta^n) + \rho^+ L\phi'_\Delta^n) T^{n+1} v \, dx + \int_{\Omega} (\lambda(\phi_\Delta^n) \operatorname{grad} T^{n+1}, \operatorname{grad} v) \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\alpha}{\alpha R + 1} T^{n+1} v \, ds = \\ = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (\alpha(\phi_\Delta^n) + \rho_l L\phi'_\Delta^n) T^n v \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{Q(1-A) + I + \alpha T_{air}}{\alpha R + 1} v \, ds \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (7)$$

Для численного решения мы должны перейти от непрерывной вариационной задачи (7) к дискретной. Введем конечномерные пространства V_h, \hat{V}_h , ($V_h, \hat{V}_h \in H^1(\Omega)$) и определим в них следующую задачу: Определить $T_h \in V_h$ такую, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (\alpha(\phi_{\Delta}^n) + \rho^+ L \phi_{\Delta}^n) T_h^{n+1} v_h dx + \int_{\Omega} (\lambda(\phi_{\Delta}^n) \text{grad } T_h^{n+1}, \text{grad } v_h) dx + \\ + \int_{\Gamma_1} \frac{\alpha}{\alpha R + 1} T_h^{n+1} v ds = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (\alpha(\phi_{\Delta}^n) + \rho_1 L \phi_{\Delta}^n) T_h^n v_h dx + \\ + \int_{\Gamma_1} \frac{Q(1-A) + I + \alpha T_{air}}{\alpha R + 1} v ds \quad \forall v_h \in \hat{V}_h. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что выбор пространства \hat{V}_h непосредственно вытекает из типа применяемых конечных элементов. В простейшем случае используется линейные базисные функции.

3. Численные результаты.

Представлено численное моделирование температурного поля под железнодорожным полотном АЯМ "Беркаит–Томмот–Якутск". В практике для увеличения охлаждения грунта на телах бермы и насыпи используется теплоизоляционные материалы из пеноплекса.

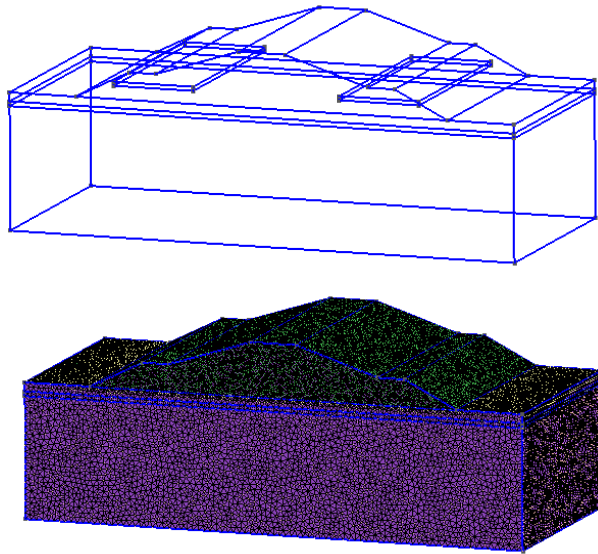


Рис. 2: Расчетная геометрия и сетка

Расчетная область состоит из нескольких слоев грунта (песок, суглинок, щебенистый грунт) и пеноплекс (рис. 2). Грунт имеет начальную температуру $T^0 = -3^{\circ}\text{C}$. Будем предполагать, что таяние грунта происходит при $T^* = 0^{\circ}\text{C}$. Температура на поверхности задавалась с учетом амплитуды колебания температуры воздуха по рассматриваемой территории, которая варьирует в пределах от -55°C – зимой и $+30^{\circ}\text{C}$ – летом. Граничные условия учитывают также снежный покров, который играет большую роль на формирование теплового режима грунтов, поскольку характеризуется большим термическим сопротивлением вследствие его незначительной плотности и низкого коэффициента теплопроводности.

Распространение температуры осенью 3 года представлено на рис. 3. Расчеты проводились с шагом по времени $\tau = 1$ день. Заметим, результаты иллюстрируют, что наличие теплоизоляционных материалов из пеноплекса ведет к охлаждению грунтов основания насыпи.

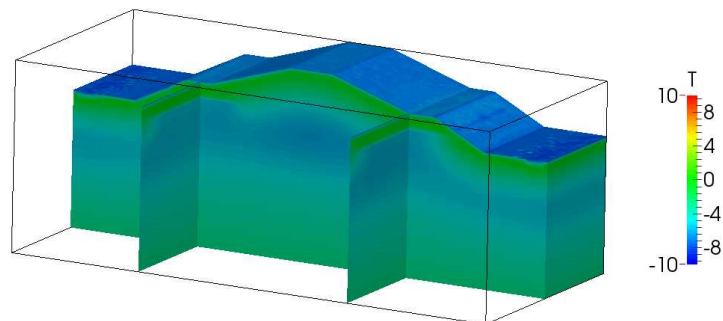


Рис. 3: Распространение температуры

Геометрическая область и расчетная сетка построены с помощью программы Gmsh. Численная реализация проводится с использованием вычислительного пакета FEnics, который реализует метод конечных элементов [3]. Для визуализации численных результатов используется программа Paraview.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вабищевич П.Н., Самарский А.А.** Вычислительная теплопередача. – М: Едиториалл УРСС, 2003. – 784 с.
2. **Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г.** Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М: Наука, 1996. – 227 с.
3. **Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells** Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. – The FEniCS Book, 2011.
4. **Павлов А.В.** Теплофизика ландшафтов. – Новосибирск: Наука, 1979. – 284 с.

REFERENCES

1. **Vabishchevich P.N., Samarskii A.A.** Computational Heat Transfer. V. 1, Mathematical Modelling. V. 2, The Finite Difference Methodology. – New York: Wiley, 1995.
2. **Vasiliev V.I., Maksimov A.M., Petrov E.E., Tsyarkin G.G.** Heat and mass transfer in freezing and thawing soils [Teplomassoperenos v promerzayuschich i protaivayuschich gruntach] – Moscow: Nauka, 1996. – 227 p. (in Russian)
3. **Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells** Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. – The FEniCS Book, 2011.
4. **Pavlov A.V.** Thermophysics landscapes [Teplofizika landshaftov]. – Novosibirsk: Nauka, 1979. – 284 p. (in Russian)