УДК 517.95

# ДЕКОМПОЗИЦИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ; ОЦЕНКА ГЛАДКОСТИ РЕГУЛЯРНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

**В.Б. АНДРЕЕВ**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
*E-mail: andreev@cs.msu.su*

# DECOMPOSITION OF THE SOLUTION TO ONE-DIMENSIONAL SINGULARLY PERTURBED CONVECTION-DIFFUSION EQUATION; SMOOTHNESS ESTIMATE OF THE REGULAR COMPONENT

**V.B. ANDREEV**

*Lomonosov Moscow State University*

### Аннотация

На конечном отрезке рассматривается первая краевая задача для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии с переменными коэффициентами. Для регулярной составляющей решения получены неулучшаемые априорные оценки в гёльдеровых нормах.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенное уравнение, конвекция-диффузия, декомпозиция решения, неулучшаемые оценки, гёльдеровы пространства.

### Summary

We consider the Dirichlet boundary-value problem for singularly perturbed convection-diffusion equation with variable coefficients on a finite interval. Unimprovable a priori estimates in Holder norms for the regular component of the solution are obtained.

**Key words:** singularly perturbed equation, convection-diffusion, decomposition of the solution, unimprovable estimates, Holder spaces.

## 1. Постановка задачи и основной результат.

Рассматривается задача:

$$-\varepsilon u''(x) + r(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Предполагается, что

$$r(x) \geqslant r_0 = \text{const} > 0 \tag{2}$$

и, кроме того,

$$r(x), q(x), f(x) \in C^{k,\lambda}[0,\,1], \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad 0 \leqslant \lambda < 1, \tag{3}$$

где $C^{k,\lambda}[0,\,1]$ — пространство $k$ раз непрерывно дифференцируемых на $[0,\,1]$ функций, у которых $k$-я производная удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\lambda$.

Обозначим через $|\cdot|_{C^{k,\lambda}}$ полунорму в $C^{k,\lambda}$.

**Теорема 1.** *Существуют такие декомпозиция решения задачи* (1) – (3)

$$u(x) = v(x) + w(x),$$

*где $v(x)$ — регулярная, а $w(x)$ — сингулярная составляющие, и постоянная $c$, не зависящая от $\varepsilon$, что*

$$\varepsilon |v|_{C^{k+2,\lambda}} + \|v\|_{C^{k+1,\lambda}} \leqslant c\,\left(\|f\|_{C^{k,\lambda}} + |u_0|\right), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad 0 \leqslant \lambda < 1, \tag{4}$$

*в то время как $|w(x)| \leqslant c\,e^{-(1-x)r_0/\varepsilon}$.*

**Декомпозиция решения**. Продолжим заданные для $x \in [0,\,1]$ коэффициенты $r(x)$ и $q(x)$ и правую часть $f(x)$ уравнения (1) на всю полуось $x > 0$ с сохранением класса и нормы. Сказанное означает, что, например,

$$f^*(x) = f(x) \quad \text{при } x \in [0,\,1], \quad f^*(x) \in C^{k,\lambda}[0,\infty), \quad \|f^*\|_{C^{k,\lambda}[0,\infty)} \leqslant c\,\|f\|_{C^{k,\lambda}[0,\,1]}.$$

Будем предполагать, что $r^*(x) \geqslant r_0/2, \quad x \in (0,\infty)$. Более того, пусть

$$r^*(x) = 2\alpha > 0, \quad q^*(x) = Q > 0, \quad f^*(x) = 0, \quad x \geqslant 3/2.$$

На полуоси $x > 0$ рассмотрим задачу

$$-\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} u^*(x) + r^*(x) \frac{d}{dx} u^*(x) + q^*(x) u^*(x) = f^*(x), \quad u^*(0) = u_0, \quad \lim_{x\to\infty} u^*(x) = 0. \tag{5}$$

**Теорема 2.** *Если $\varepsilon_0$ достаточно мало, то при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ для решения задачи* (5) *справедлива априорная оценка $\|u^*\|_C \leqslant c\,(\|f^*\|_C + |u_0|)$.*

Обозначим сужение решения задачи (5) на $[0,\,1]$ через $v(x)$:

$$v(x) := u^*(x), \quad x \in [0,\,1]. \tag{6}$$

Представим решение задачи (1) в виде

$$u(x) = v(x) + w(x). \tag{7}$$

Очевидно, что

$$Lv(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad v(0) = u_0, \quad v(1) = u^*(1),$$

$$Lw(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad w(0) = 0, \quad w(1) = u_1 - u^*(1),$$

причем (см., напр., [1]) $|w(x)| \leqslant c\,e^{-r_0(1-x)/2\varepsilon}$.

Соотношение (7) будет искомой декомпозицией из теоремы 1, если для функции $v(x)$ из (6), (7) будет установлена оценка (4). В свою очередь эта оценка будет доказана, если будет установлена справедливость оценки

$$\varepsilon |u^*|_{C^{k+2,\lambda}[0,\infty)} + \|u^*\|_{C^{k+1,\lambda}[0,\infty)} \leqslant c\,\left(\|f\|_{C^{k,\lambda}[0,\,1]} + |u_0|\right). \tag{8}$$

Оценка (8) доказывается при помощи аналогичной оценки для уравнения с постоянными коэффициентами.

**2. Уравнение с постоянными коэффициентами на полупрямой**.

Ищется решение следующей задачи:

$$-\varepsilon U''(x) + 2\alpha U'(x) + QU(x) = F(x), \quad 0 < x < \infty, \quad U(0) = u_0, \quad \left|U(\infty)\right| < \infty, \tag{9}$$

где $\alpha$ и $Q$ — положительные постоянные, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Сделаем в (9) растяжение переменной $x/\varepsilon = \hat{x}$. Оставляя за решением и новой переменной старые обозначения, найдем, что в новых переменных задача (9) принимает вид

$$LU := -U''(x) + 2\alpha U'(x) + \varepsilon Q U(x) = \varepsilon F(x), \quad 0 < x < \infty, \quad U(0) = u_0, \quad \left|U(\infty)\right| < \infty. \tag{10}$$

Решением этой задачи является функция

$$U(x) = \varepsilon \int\limits_0^\infty G(x,\xi) F(\xi) d\xi + u_0 e^{-(a-\alpha)x},$$

где $a = \sqrt{\alpha^2 + \varepsilon Q}$, а

$$G(x,\xi) := g(x,\xi) e^{\alpha(x-\xi)} = \frac{1}{2a}\left[e^{-a|x-\xi|} - e^{-a(x+\xi)}\right] e^{\alpha(x-\xi)} \geqslant 0, \quad 0 < x < \infty,$$

и, следовательно,

$$U'(x) = \varepsilon \int\limits_0^\infty \left[\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial x} + \alpha g(x,\xi)\right] e^{\alpha(x-\xi)} F(\xi) d\xi + u_0(\alpha - a) e^{-(a-\alpha)x}. \tag{11}$$

Так как

$$\max_x \int\limits_0^\infty G(x,\xi) d\xi = (\varepsilon Q)^{-1}, \quad \max_x \int\limits_0^\infty \left|\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial x} + \alpha g(x,\xi)\right| e^{\alpha(x-\xi)} d\xi = a^{-1},$$

то

$$\left\|U'\right\|_C + \varepsilon \left\|U\right\|_C \leqslant \left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{Q}\right)\|F\|_C + \left(\frac{Q}{a+\alpha} + 1\right)|u_0|\right].$$

Вторая производная оценивается с использованием уравнения (10), а старшие производные – из продифференцированного уравнения (10) и уже полученных оценок $U^{(k)}(0)$. После возвращения к нерастянутым переменным находим, что справедлива

**Теорема 3.** *Если $\alpha$ и $Q$ суть положительные постоянные, то для решения задачи* (9) *справедливы равномерные по $\varepsilon > 0$ априорные оценки*

$$\varepsilon |U|_{C^{k+2}} + \|U\|_{C^{k+1}} \leqslant c(\alpha, Q, k)(\|F\|_{C^k} + |u_0|), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

При получении оценок в гёльдеровых нормах ключевой является оценка коэффициента Гёльдера первой производной. Пусть $x$ и $\bar{x} < x$ – точки положительной полуоси. Преобразуем разность значений производной (11) в этих точках к виду

$$U'(x) - U'(\bar{x}) = \varepsilon \int\limits_0^\infty \left[\frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) - \frac{\partial G}{\partial \bar{x}}(\bar{x},\xi)\right][F(\xi) - F(\bar{x})] d\xi + \\ + \frac{\varepsilon}{a+\alpha}\left[-Q u_0 + F(\bar{x})\right]\left[e^{-(a-\alpha)x} - e^{-(a-\alpha)\bar{x}}\right],$$

разобьем интеграл на три интеграла по $(0, \bar{x})$, $(\bar{x}, x)$ и $(x, \infty)$ и представим разности $\partial G/\partial x$ в первом и третьем интегралах в виде интеграла от производной. Используя представление $G$, находим оценку $|U'|_{C^\lambda}$ в растянутых переменных, которая после перехода к нерастянутым переменным принимает вид $|U|_{C^{1,\lambda}} \leqslant c\left(\|F\|_C + |u_0|\right)$. Оценки коэффициентов Гёльдера старших производных получаются так же, как и оценки старших производных в теореме 3.

**Теорема 4.** *Если $\alpha$ и $Q$ суть положительные постоянные, то для решения задачи* (9) *справедливы равномерные по $\varepsilon > 0$ априорные оценки*

$$\varepsilon |U|_{C^{k+2,\lambda}} + \|U\|_{C^{k+1,\lambda}} \leqslant c(\alpha, Q, k)\left(\|F\|_{C^{k,\lambda}} + |u_0|\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 0 \leqslant \lambda < 1.$$

Интересующая нас оценка (8) выводится из теоремы 4 при помощи разбиения единицы.

**Разбиение единицы**. Пусть

$$\omega(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|\leqslant 1/4,\\ \dfrac{1}{2}\left[1-\operatorname{th}\dfrac{|\xi|-1/2}{(|\xi|-1/4)(3/4-|\xi|)}\right], & \dfrac{1}{4}\leqslant|\xi|\leqslant\dfrac{3}{4},\\ 0, & |\xi|\geqslant\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

Эта функция является финитной с носителем $\operatorname{supp}\omega(\xi)=[-3/4,\,3/4]$ и бесконечно дифференцируемой. Более того, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\omega(x-n)=1,\quad -\infty<x<\infty$, т.е. сдвиги этой функции осуществляют разбиение единицы на всей оси. Пусть

$$\zeta_n(x):=\omega(xN-n),\quad \operatorname{supp}\zeta_n(x)=\left[\frac{n-3/4}{N},\,\frac{n+3/4}{N}\right]=:\Delta_n,\quad \operatorname{mes}\Delta_n=\frac{3}{2N}=:\delta,$$

а

$$\eta(x)=\begin{cases}\zeta_{2N}(x), & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1, & 2\leqslant x<\infty.\end{cases}$$

Тогда искомое разбиение есть

$$\sum_{n=0}^{2N-1}\zeta_n(x)+\eta(x)=1\quad \text{при } x\in[0,\,\infty). \tag{12}$$

В соответствии с (12) представим функцию $u^*(x)$ в виде

$$u^*(x)=\sum_{n=0}^{2N}u_n(x),\quad u_n(x)=u^*(x)\zeta_n(x),\quad n=0,1,\ldots,2N-1,\quad u_{2N}=u^*(x)\eta(x).$$

Поскольку

$$u_n'(x)=(\zeta_n(x)u^*(x))'=\zeta_n(x)\frac{d}{dx}u^*(x)+\zeta_n'(x)u^*(x),$$
$$u_n''(x)=\zeta_n(x)\frac{d^2}{dx^2}u^*(x)+2\zeta_n'(x)\frac{d}{dx}u^*(x)+\zeta_n''(x)u^*(x),$$

то умноженное на $\zeta_n(x)$ уравнение (5) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}&-\varepsilon u_n''(x)+2\alpha_n u_n'+Qu_n(x)=\\ &=f^*(x)\zeta_n+[2\alpha_n-r^*(x)]u_n'(x)+[Q-q^*(x)]u_n(x)-\\ &-2\varepsilon\zeta_n'\frac{d}{dx}u^*(x)+[r^*(x)\zeta_n'-\varepsilon\zeta_n'']u^*(x),\quad n=0,1,\ldots,2N-1,\end{aligned}$$

где $\alpha_n$ и $Q$ − некоторые положительные постоянные.

Пусть сначала $n=1,2,\ldots,2N-1$. Поскольку для этих значений $n$ носители $\Delta_n\in(0,\,\infty)$, то функции $u_n(x)$, определенные на $[0,\,\infty)$, можно рассматривать как решения задачи (10) с соответствующими коэффициентами и правыми частями.

Применяя к каждому такому решению теорему 4 при $k=0$, будем иметь

$$\begin{aligned}&\varepsilon|u_n|_{C^{2,\lambda}}+|u_n|_{C^{1,\lambda}}+\|u_n\|_{C^1}\leqslant\\ &\leqslant c\left\{\|f^*\zeta_n\|_{C^\lambda}+\underline{|(2\alpha_n-r^*(x))u_n'|_{C^\lambda}}+\|(2\alpha_n-r^*(x))u_n'\|_C+\right.\\ &\left.+\|(Q-q^*(x))u_n\|_{C^\lambda}+2\varepsilon\|\zeta_n'(u^*)'\|_{C^\lambda}+\|(r^*\zeta_n'-\varepsilon\zeta_n'')u^*\|_{C^\lambda}\right\}.\end{aligned} \tag{13}$$

Изучим сначала второе слагаемое правой части. Принимая во внимание правила вычисления постоянной Гёльдера для произведения двух функций, найдем, что

$$c\,|(2\alpha_n-r^*(x))u_n'|_{C^\lambda(\Delta_n)}\leqslant c\sup_{x\in\Delta_n}|2\alpha_n-r^*(x)|\,|u_n|_{C^{1,\lambda}}+c_1\|u_n\|_{C^1}.$$

Выберем теперь $\alpha_n$ из условия

$$2\alpha_n = \left[\sup_{\Delta_n} r^*(x) + \inf_{\Delta_n} r^*(x)\right]/2 = r^*(x_n), \quad x_n \in \Delta_n.$$

Будем считать, что длина $\delta$ отрезка $\Delta_n$ — носителя $\zeta_n(x)$ — столь мала, что

$$c \sup_{x\in\Delta_n} |r^*(x_n) - r^*(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Принимая во внимание вышесказанное и используя очевидные оценки для других слагаемых правой части, будем иметь

$$\begin{aligned}&\varepsilon|u_n|_{C^{2,\lambda}} + \frac{1}{2}|u_n|_{C^{1,\lambda}} + \|u_n\|_{C^1} \leqslant \\ &\leqslant c_2\left(\|f^*\|_{C^\lambda(\Delta_n)} + \varepsilon|u^*|_{C^{1,\lambda}(\Delta_n)} + \|u^*\|_{C^1(\Delta_n)} + \|u^*\|_{C^\lambda(\Delta_n)}\right), \\ &\quad n = 1, 2, \ldots, 2N-1.\end{aligned} \tag{14}$$

Для $u_0(x)$ справедлива аналогичная оценка с добавлением $|u_0|$ в правую часть.

При $N \geqslant 2$ уравнение для $u_{2N}$ изначально имеет постоянные коэффициенты, так что и для $u_{2N}$ имеют место оценки типа (14). Суммируя найденные оценки по $n$ и используя интерполяционные неравенства для гёльдеровых норм, получим оценку

$$\varepsilon|u^*|_{C^{2,\lambda}} + \frac{1}{4}|u^*|_{C^{1,\lambda}} + \|u^*\|_{C^1} \leqslant c_3\left(\|f\|_{C^\lambda([0,1])} + \varepsilon|u^*|_{C^{1,\lambda}} + |u_0|\right) + c_4\|u^*\|_C.$$

Слагаемые с $\|u^*\|_C$ и $\varepsilon|u^*|_{C^{1,\lambda}}$ удаляются из правой части этой оценки путем использования теоремы 2 и предположения о малости $\varepsilon$.

Мы получили оценку (8) при $k = 0$, постоянная $c$ в которой зависит от числа $N$ из разбиения единицы. Но поскольку $N$ связано с длиной $\delta$ носителей $\zeta_n(x)$ соотношением $N = 3/(2\delta)$, а в использованных рассуждениях $\delta$ выбрано малым, но конечным и не зависящим от $\varepsilon$, мы получим искомую оценку. Оценки для старших производных находятся так же, как и в теореме 3. Теорема 1 доказана.

В [1—3] имеется обзор предшествующих результатов по декомпозиции решения задачи (1)—(3).

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted numerical methods for singular perturbation problems. — Singapore: World Scientific, М.: Наука, 1996. — 1973.
2. **Dobrovolski M., Roos H.-G.** A priori estimates for the solution of convection-diffusion problems and interpolation on Shishkin meshes // Z. Anal. Anwendungen. — 1997. —**16**, № 4. — P. 1001-1012.
3. **Linß T.** Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems. Lecture Notes in Mathematics. **1985**. — Berlin: Springer, 2010.


## REFERENCES


1. **Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted numerical methods for singular perturbation problems. — Singapore: World Scientific, 1996.
2. **Dobrovolski M., Roos H.-G.** A priori estimates for the solution of convection-diffusion problems and interpolation on Shishkin meshes // Z. Anal. Anwendungen. — 1997. —**16**, № 4. — P. 1001-1012.
3. **Linß T.** Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems. Lecture Notes in Mathematics. **1985**. — Berlin: Springer, 2010.