

УДК 519.6

**ОБОСНОВАНИЕ ОБЩЕГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДРОБНО–ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Ю.Р. АГАЧЕВ, А.Ф. ГАЛИМЯНОВ

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail jagachev@gmail.com; anis_59@mail.ru

**JUSTIFICATION GENERAL POLYNOMIAL METHOD FOR SOLVING
A ONE CLASS OF PERIODIC FRACTIONAL INTEGRAL EQUATIONS**

J.R. AGACHEV, A.F. GALIMJANOV

Kazan Federal University

Аннотация

В паре пространств Гёльдера дается теоретическое обоснование общего полиномиального проекционного метода решения одного класса периодических дробно–интегральных уравнений. В частности, из полученных результатов следует равномерная сходимость построенных полиномиальных приближений к точному решению уравнения.

Ключевые слова: Пространство Гёльдера, дробно–интегральное уравнение, полиномиальный проекционный метод, сходимость метода

Summary

In a pair of Holder spaces we give theoretical justification general polynomial projection method for solving a one class of periodic fractional integral equations. In particular, from our results we obtain the uniform convergence constructed polynomial approximations to the exact solution of the equation.

Key words: Holder space, fractional integral equation, polynomial projection method, convergence of the method

Введение

В работе дается обоснование в паре пространств Гёльдера общего полиномиального проекционного метода решения дробно–интегральных уравнений вида

$$K\varphi \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{\pm}^{\alpha}(x-t)\varphi(t) dt + (A\varphi)(x) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

где A – известный линейный (в частности, интегральный) оператор, α ($0 < \alpha < 1$) – заданное число, $f(t), \varphi(t)$ – данная и искомая функции соответственно, функция

$$\Psi_{\pm}^{\alpha}(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt \mp \alpha\pi/2)}{k^{\alpha}} \quad (2)$$

задает дробно–интегральный оператор G , определяемый дробным интегралом Вейля (см., напр., в [1, с. 264]) порядка α :

$$G\varphi \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{\pm}^{\alpha}(x-t)\varphi(t) dt.$$

1. Вспомогательные результаты и определения

Пусть $C \equiv C_{2\pi}$ есть пространство непрерывных 2π -периодических функций с обычной \max -нормой $\|\cdot\|_C$. Обозначим через H_δ ($0 < \delta \leq 1$) пространство 2π -периодических функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $\delta > 0$, с нормой

$$\|\varphi\|_\delta = \|\varphi\|_C + H(\varphi; \delta),$$

где $H(\varphi; \delta)$ – наименьшая постоянная Гельдера. Как хорошо известно, H_δ с так введенной нормой является банаховым пространством. Через $H_{0,\delta}$ будем обозначать подпространство пространства H_δ функций $f(x)$, для которых $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$.

Для произвольно фиксированного числа $\beta, 0 < \beta < 1 - \alpha$, зафиксируем два пространства гильбертовых функций: $\Phi = H_{0,\beta}, F = H_{0,\alpha+\beta}$.

Справедлива следующая (см., напр., в [1], с. 275, следствие к теореме 19.8)

Лемма 1. *Оператор G изоморфно отображает Φ на F .*

Лемма 1 позволяет уравнение (1) при соответствующих условиях на A рассматривать в паре (Φ, F) .

Обозначим через \mathbf{H}_n^T множество тригонометрических полиномов порядка не выше $n \in \mathbf{N}$. Справедлива следующая (см. в [2], а также в [3, с. 102, лемма 3])

Лемма 2. *Пусть $0 < \beta < \gamma < \infty$, функция $f \in C$ и полином $f_n \in \mathbf{H}_n^T$ таковы, что*

$$\|f - f_n\|_C \leq c_1 n^{-\gamma},$$

где c_1 – абсолютная положительная постоянная.

Тогда имеет место неравенство

$$H(f - f_n; \beta) \leq c_2 n^{\beta-\gamma}, \quad c_2 = c_2(\beta, \gamma).$$

Следствие 1. *В условиях леммы 2*

$$\|f - f_n\|_\beta = O(n^{\beta-\gamma}), \quad 0 < \beta < \min(1; \gamma).$$

Приведем здесь еще один результат, непосредственно вытекающий из леммы 2.

Лемма 3. *Пусть $0 < \beta < \gamma < \infty$, функция $f \in C$ и полином $f_n \in \mathbf{H}_n^T$ таковы, что*

$$\|f - f_n\|_C \leq c_3 \cdot \frac{\ln n}{n^\gamma},$$

где c_3 – абсолютная положительная постоянная.

Тогда имеет место порядковая оценка

$$\|f - f_n\|_\beta = O\left(\frac{\ln n}{n^{\gamma-\beta}}\right), \quad 0 < \beta < \min(1; \gamma).$$

2. Общий полиномиальный проекционный метод

Пусть P_n есть произвольно фиксированный оператор проектирования F на \mathbf{H}_n^T . Тогда проекционный метод решения уравнения (1), определяемый оператором P_n , задается уравнением

$$K_n \varphi_n \equiv P_n K \varphi_n = P_n f \quad (\varphi_n \in \Phi_n). \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть выполнены предположения:

- 1) функция $f \in H_{0,\gamma} \equiv F_1, \alpha + \beta < \gamma \leq 1$;
- 2) оператор $A : \Phi \rightarrow F_1$ является непрерывным;
- 3) уравнение (1) при $f = 0$ имеет лишь нулевое решение;
- 4) оператор P_n является проекционным и ограниченным в C при каждом фиксированном n , причем $\|P_n\|_{C \rightarrow C} = O(\ln n), n \rightarrow \infty$.

Тогда уравнение (3) имеет единственное решение (хотя бы для всех n , начиная с некоторого натурального). Приближенные решения, найденные методом (3), сходятся к точному решению уравнения (1) в пространстве Φ со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{\Phi} = O\left(\frac{\ln n}{n^{\gamma-\alpha-\beta}}\right).$$

Доказательство. Уравнение (1) запишем в операторной форме

$$K\varphi \equiv G\varphi + A\varphi = f (\varphi \in \Phi, f \in F).$$

Из предположений 1) и 4) теоремы следует, что

$$\|f - P_n f\|_C \leq 2\|P_n\|_{C \rightarrow C} E_n(f) = O\left(\frac{\ln n}{n^{\gamma}}\right).$$

Отсюда по лемме 3 находим

$$\delta_n \equiv \|f - P_n f\|_F = O(n^{\alpha+\beta-\gamma} \cdot \ln n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Далее, для любого $\varphi_n \in \Phi_n, \varphi_n \neq 0$, обозначим через $\psi_n = \varphi_n / \|\varphi_n\|_{\Phi}$. Тогда, с учетом свойства $G\varphi_n \in \mathbf{H}_n^T$, имеем

$$\|K\varphi_n - K_n\varphi_n\|_F = \|A\varphi_n - P_n A\varphi_n\|_F = \|\varphi_n\|_{\Phi} \cdot \|A\psi_n - P_n A\psi_n\|_F \leq \|\varphi_n\|_{\Phi} \cdot \sup_{\substack{\psi \in \Phi \\ \|\psi\| \leq 1}} \|A\psi - P_n A\psi\|_F,$$

что приводит к оценке

$$\|K\varphi_n - K_n\varphi_n\|_F \leq \bar{\varepsilon}_n \|\varphi_n\|_{\Phi},$$

где

$$\bar{\varepsilon}_n = \sup_{u \in AS(0;1)} \|u - P_n u\|_F,$$

а $S(0;1) \subset \Phi$ есть единичный шар с центром в нуле.

Так как оператор $A : \Phi \rightarrow F_1$ непрерывен, то он, как оператор из Φ в F , будет вполне непрерывным (компактным). Учитывая сильную сходимости (по теореме Банаха–Штейнхауса) оператора P_n при $n \rightarrow \infty$ к единичному оператору (см., напр., в [4, с. 129], [5, с. 271]) в пространстве F и применяя теорему Гельфанда¹⁾ о равномерной сходимости таких операторов на компакте (см., напр., в [5, с. 322]), заключаем, что $\bar{\varepsilon}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда величина

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{\Phi_n \rightarrow F} \leq \bar{\varepsilon}_n$$

также стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, все предположения теоремы 7 гл. I из монографии [3] выполнены, что дает утверждения о разрешимости уравнения (3) и сходимости приближенных решений к точному по норме пространства Φ .

Для получения скорости сходимости воспользуемся теоремой 6 гл. I из [3] о представлении погрешности:

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{\Phi} = \|(E - K_n^{-1} P_n V)G^{-1}(G\varphi^* - P_n G\varphi^*)\|_{\Phi},$$

¹⁾В части необходимости эта теорема верна и для несепарабельного пространства F .

где E – единичный оператор в пространстве Φ . Учитывая соотношение

$$\|K_n^{-1}\|_{F_n \rightarrow \Phi_n} = O(1), n \rightarrow \infty,$$

вытекающее из той же теоремы 7 [3], имеем

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{\Phi} = O\left(\|G\varphi^* - P_n G\varphi^*\|_F\right).$$

Так как $G\varphi^* = f - A\varphi^* \in F_1$, то согласно (4)

$$\|G\varphi^* - P_n G\varphi^*\|_F = O(n^{\alpha+\beta-\gamma} \cdot \ln n)$$

и, следовательно,

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{\Phi} = O(n^{\alpha+\beta-\gamma} \cdot \ln n).$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. С помощью леммы 3 нетрудно доказать, что с улучшением дифференциальных свойств исходных данных скорость сходимости приближенных решений к точному растет. А именно, если выполнены предположения:

$$f \in W^r H_\gamma, A\varphi \in W^r H_\gamma (\varphi \in \Phi),$$

где $r \in N, 0 < \gamma \leq 1$, то для погрешности приближенных решений справедлива порядковая оценка

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{\Phi} = O(n^{\alpha+\beta-r-\gamma} \cdot \ln n).$$

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 сохранится, если отказаться в методе (3) от проекционности оператора P_n , а в предположении 4) потребовать от P_n выполнения условия:

$$\text{Для любой функции } f \in H_{0,\gamma}, 0 < \gamma \leq 1, \|f - P_n f\|_C = O(n^{-\gamma}).$$

Замечание 3. Из теоремы 1 следует сходимость конкретных полиномиальных проекционных методов решения уравнения (1); в частности, метода Галеркина и методов коллокации и подобластей по равноотстоящим точкам.

Вкратце остановимся на случае, когда проекционный метод задается непроекционным оператором P_n . Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1)–3) теоремы 1 и

4) оператор P_n ограничен в C равномерно относительно n .

Тогда уравнение (3) имеет единственное решение (хотя бы при всех достаточно больших n). Приближенные решения, найденные методом (3), сходятся к точному решению уравнения (1) в пространстве Φ со скоростью

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{\Phi} = O(n^{\alpha+\beta-\gamma}).$$

Доказательство. Проводится с использованием леммы 2 по аналогии с доказательством теоремы 1.

Эта теорема позволяет нам для построения полиномиальных приближений к решению уравнения (1) использовать операторы P_n , построенные на основе λ -методов суммирования рядов Фурье и интерполяционных полиномов.

3. Заключение.

В данной работе мы провели исследование вопросов применимости общих полиномиальных проекционных методов для периодических дробно-интегральных уравнений. Из полученных результатов вытекает сходимость ряда известных проекционных методов решения указанных уравнений. Следует отметить, что рассмотренные уравнения относятся к уравнениям первого рода и поэтому в известных функциональных пространствах являются некорректно поставленными по Адамару. Найденные оценки для погрешности приближенных решений свидетельствуют об эффективности проекционного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. **Габдулхаев Б.Г.** Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и метод механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений // Труды международной конференции по конструктивной теории функций. — Варна, 1970. — С. 35–49.
3. **Габдулхаев Б.Г.** Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. — Казань: Изд-во Казанского университета, 1980. — 232 с.
4. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
5. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.

REFERENCES

1. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications [Integraly i proizvodnye drobnogo porjadka i nekotorye ikh prilozhenija]. — Minsk: Science and Technology, 1987. — 688 p. (in Russian).
2. **Gabdulkhayev B.G.** Quadrature formulas for singular integrals and the method of mechanical quadratures for singular integral equations [Kvadraturnye formuly dlja singuljarnykh integralov i metod mekhanicheskikh kvadratur dlja singuljarnykh integral'nykh uravnenii] // Proceedings of the Intern. conf. by constructive theory of functions. — Varna, 1970. — P. 35–49 (in Russian).
3. **Gabdulkhayev B.G.** Optimal approximations of linear problems solutions [Optimal'nye approksimatcii reshenii lineinykh zadach]. — Kazan: Kazan University Press, 1980. — 232 p. (in Russian).
4. **Trenogin V.A.** Functional analysis [Funkcional'nyi analiz]. — Moscow: Nauka, 1980. — 496 p. (in Russian).
5. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Functional analysis [Funkcional'nyi analiz]. — Moscow: Nauka, 1984. — 752 p. (in Russian).