УДК 517.958

ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1)]

П.Н. ВАБИЩЕВИЧ[1], В.И. ВАСИЛЬЕВ[2]

[1] *Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, г. Москва*
[2] *Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, г. Якутск*
E-mail: vabishchevich@gmail.com; vasvasil@mail.ru

ITERATIVE SOLUTION OF THE DIRICLET PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC EQUATION

P.N. VABISHCHEVICH[1], V.I. VASIL'EV[2]

[1] *Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow*
[2] *North-Eastern Federal University, Yakutsk*

Аннотация

Рассматривается задача Дирихле для уравнения гиперболического типа второго порядка. Для ее численного решения используется итерационное уточнение начального условия для производной по времени, предложенный ранее авторами для решения ретроспективной задачи теплопроводности. Приведены примеры расчетов для модельной задачи со случайными погрешностями во входных данных.

Ключевые слова: Обратные задачи, задача Дирихле, конечно-разностный метод, метод сопряженных градиентов.

Summary

We consider the Dirichlet problem for a second-order hyperbolic type. For its numerical solution using iterative refinement of the initial condition for the time derivative, proposed earlier by the authors to solve the retrospective problem of heat conduction. Examples of calculations for the model problem with random errors in the input data are provided.

Key words: Invers problems, a Diriclet problem, finite difference method, conjugate gradient method.

Введение

Задача Дирихле для гиперболических уравнений относится к классу условно корректных задач математической физики [1, 2]. Общий подход к решению таких задач базируется на использовании градиентных итерационных методов. Основу этих методов составляет нахождения приближенного численного решения некорректных задач посредством итерационной минимизации соответствующего функционала. В цикле работ С.И.Кабанихина и его учеников, смотри, например, [3], исследовано решение задачи Дирихле для волнового уравнения, построены численные методы их решения (метод итераций Ландвебера, метод наискорейшего спуска), проведено исследование их устойчивости и сходимости приближенного решения.

Для задачи восстановления начального условия уравнения теплопроводности в работе [4] предложен быстро сходящийся итерационный метод, продемонстрирована его высокая эффективность при решении модельных задач. В данной работе для численного решения задачи Дирихле для гиперболического уравнения второго порядка предлагается использовать аналогичный подход с итерационным уточнением искомого начального условия. Для поставленной неклассической задачи по заданному решению на конечный момент времени методом сопряженных градиентов находится начальное условие для производной по времени искомого решения. Приведены примеры расчетов, которые демонстрируют возможности предлагаемого вычислительного алгоритма.

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00714)

1. Задача Дирихле для гиперболического уравнения

Для простоты изложения рассмотрим прямоугольник

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}.$$

В Ω ищется решение гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big) = 0, \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям первого рода:

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 \leqslant t < T. \tag{2}$$

В рассматриваемой задаче Дирихле по времени задаются значения решения на начальный и конечный моменты времени $t = 0, T$:

$$u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{3}$$

Задаче Дирихле (1) − (3) поставим в соответствие дифференциально-разностную задачу, проведя дискретизацию по пространственным переменным. Для этого в области Ω введем согласованную равномерную по каждому направлению x_α сетку с постоянными шагами h_α, $\alpha = 1, 2$, и обозначим через ω множество внутренних узлов. На множестве сеточных функций $y \in H$ таких, что $y(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \notin \omega$, определим сеточный оператор A соотношением

$$Ay = -\sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha(x) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad \mathbf{x} \in \omega \tag{4}$$

положив, например, $a_1(\mathbf{x}) = k_1(x_1 - 0.5h_1, x_2)$, $a_2(\mathbf{x}) = k_2(x_1, x_2 - 0.5h_2)$.

В сеточном гильбертовом пространстве H скалярное произведение и норму введем соотношениями

$$(y, \nu) = \sum_{x\in\omega} y\nu h_1 h_2, \qquad ||y|| = (y, y)^{1/2}.$$

В H оператор A является самосопряженным и положительно определенным ($A = A^* > 0$) при $k_\alpha(x_1, x_2) \geqslant \varkappa$, $\varkappa > 0$.

От задачи Дирихле (1)–(3) перейдем к дифференциально-операторному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + Ay = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad 0 < t < T \tag{5}$$

при заданных

$$y(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad y(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{6}$$

Для приближенного решения задачи (5),(6) используется итерационный метод сопряженных градиентов, связанный с уточнением производной по времени в начальный момент времени. Соответствующие корректные задачи решаются на основе использования стандартных трехслойных разностных схем [5].

Вместо неклассической задачи (5), (6) рассматрим прямую задачу для уравнения (5), когда вместо второго из условий (6) используется начальное условие

$$\frac{dy}{dt}(\mathbf{x}, 0) = \nu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{7}$$

Обозначим через y^n разностное решение на момент времени $t^n = n\tau$, где $\tau > 0$ − шаг по времени, причем $N\tau = T$. При использовании обычной трехслойной схемы с весовым множителем σ дискретный аналог прямой задачи для гиерболического уравнения второго порядка имеет вид:

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \tag{8}$$

$$y^0 = \phi, \quad y^1 = \phi + \tau\nu, \tag{9}$$

где $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Разностная схема с весами (8), (9), аппроксимирующая прямую задачу Коши для гиперболического уравнения, устойчива при выполнении условия [5]

$$\sigma \geqslant \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau^2||A||}$$

и для ее решения справедлива априорная оценка:

$$||Y^{n+1}||_* \leqslant ||Y^n||_* \leqslant \ldots \leqslant ||Y^1||_*, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{10}$$

где норма $||Y^{n+1}||_*$ определяется следующим образом:

$$||Y^{n+1}||_*{}^2 = \frac{1}{4}||y^{n+1} + y^n||_A^2 + \tau^2||y_t^n||_{R-\frac{1}{4}A}^2.$$

Тем самым норма решения задачи Коши со временем убывает.

2. Итерационный метод

Дискретной задачи Дирихле (1)–(3) имеет вид

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + A(\sigma y^{n+1} + (1-2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{11}$$

$$y^0 = \phi, \quad y^N = \varphi. \tag{12}$$

Для численной реализации задачи (11), (12) используем итерационный метод вариационного типа — метод сопряженных градиентов [6], основанный на последовательном уточнении искомого начального условия $\nu(x_1, x_2)$ с дальнейшим решением на каждой итерации прямой задачи — задачи Коши. Придадим этой задаче соответствующую операторную формулировку.

Из (11), (12) для заданных ϕ и ν на конечный момент времени получим

$$y^N = \mathcal{A}\nu + \mathcal{B}\phi, \tag{13}$$

где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — соответственно операторные полиномы от положительно определенного и самосопряженного оператора A. С учетом (5), (6) и (13) приближенному решению обратной задачи естественно сопоставить решение следующего операторного уравнения

$$\mathcal{A}\nu = \varphi(x) - \mathcal{B}\phi = \bar{\varphi}(x), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{14}$$

В силу самосопряженности оператора A, самосопряженным является и оператор $\mathcal{A}$ в операторном уравнении (14). Однако, мы ничего не можем сказать об однозначной разрешимости сеточного уравнения (14).

Для решения уравнения (14) используем трехслойный итерационный метод сопряженных градиентов, записанный в каноническом виде виде [6]

$$\nu_{k+1} = \alpha_{k+1}\nu_k + (1-\alpha_{k+1})\nu_{k-1} - \alpha_{k+1}\beta_{k+1}r_k, \quad k = 0, 1, ..,$$

где $r_k = \mathcal{A}\nu_k - \bar{\varphi}$ — невязка. Для вычисления итерационных параметров используются формулы

$$\beta_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(\mathcal{A}r_k, r_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\alpha_{k+1} = \Big(1 - \frac{\beta_{k+1}}{\beta_k}\frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})}\frac{1}{\alpha_k}\Big)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \alpha_1 = 1.$$

В этом итерационном методе вычисление y_k^N осуществляется решением прямой задачи для очередного приближения искомой сеточной функции ν_k:

$$\frac{y_k^{n+1} - 2y_k^n + y_k^{n-1}}{\tau^2} + A(\sigma y_k^{n+1} + (1-2\sigma)y_k^n + \sigma y_k^{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

с начальными условиями

$$y_k^0 = \phi, \quad y_k^1 = \phi + \tau\nu_k, \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Таким образом, невязка вычисляется по формуле $r_k = y_k^N - \varphi, \quad \mathbf{x} \in \omega$. Аналогично организуется вычисление вектора $z_k = \mathcal{A} r_k$:

$$\frac{z_k^{n+1} - 2z_k^n + z_k^{n-1}}{\tau^2} + A(\sigma z_k^{n+1} + (1-2\sigma)z_k^n + \sigma z_k^{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

с начальными условиями

$$z_k^0 = \phi, \quad z_k^1 = \tau r_k, \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

3. Пример расчета

В рамках квазиреального вычислительного эксперимента ограничимся примером численного решения обратной задачи, соответствующей модельной одномерной прямой задаче для уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \tag{15}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{16}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 8(e^{-400(x-0.2)^2} + e^{-100(x-0.5)^2} + e^{-200(x-0.8)^2}), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{18}$$

Из решения прямой задачи (15)–(18) находится функция $\varphi(x)$, которая и присутствует в постановке задачи Дирихле:

$$u(x,T) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{19}$$

В качестве начального приближения искомого начального условия возьмем функцию

$$\nu_0(x) = 5\sin(\pi x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Приведем характерные результаты по решению обратной задачи (15)–(17), (19) в условиях, когда функция $\varphi(x)$ задана с погрешностью. В экспериментах сеточная функция $\varphi(x)$, $x \in \omega$, возмущалась следующим образом: $\varphi_\delta(x) = \varphi + \delta\sigma(x)$, $x \in \omega$, где $\sigma(x)$ – случайные величины, равномерно распределенные на отрезке [-1,1]. Итерационный процесс минимальных невязок обрывался по достижению невязки значения $\varepsilon \leqslant \delta$, т.е. при

$$||r_{n(\delta)}|| \leqslant \varepsilon = 0.007.$$

На рис. 1 приведено полученное приближенное решение для уровня погрешности во входных данных, определяемых величиной $\delta = 0.001$ (25%). Для выделения более гладкого решения зададим сглаживающий оператор, например [4], в виде

$$\mathcal{D}\varphi_\delta = -(\varphi_\delta)_{\bar{x}x} + 0.2\varphi_\delta, \qquad x \in \omega$$

сеточных функций, обращающихся в нуль в граничных узлах.

Графики функций $\nu(x)$ и $\varphi(x)$ показаны слева на рис. 1. Здесь приведены результаты счета на пространственной сетке $M = 200$, $h = 0.005$ при помощи явной разностной схемы для волнового уравнения $\sigma = 0$ с временным шагом, удовлетворяющим условию устойчивости $\tau = 0.00495 < h$, $T = 0.99$, $N = 200$. В данном случае итерационный процесс сопряженных градиентов сходится достаточно быстро, всего за 5–10 итераций. Очевидно, рассчитывать на точное восстановление начального $\nu(x)$ нельзя в силу пониженной гладкости входных данных. С хорошей точностью приближенное решение на конечный момент времени мы имеем от более гладкого начального условия, которое находится при итерационном решении обратной задачи при сглаживании входных данных.

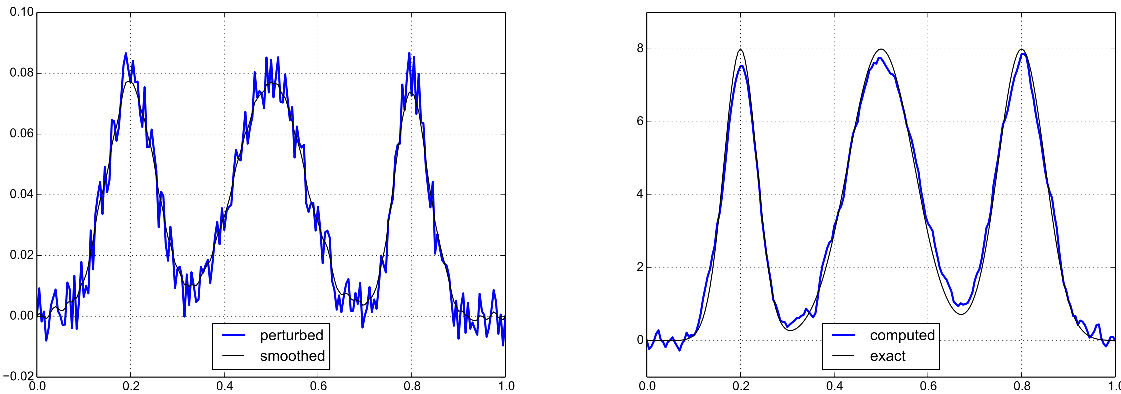

Рис. 1: Восстановленное начальное условие

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Численные методы решения обратных задач математической физики. – М: Наука, 2009. – 480 с.
2. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. – М: Издательский центр Академия, 2008.
3. **Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitov D.B., Krivorotko O.I., Alimova A.N.** An optimization method in the Dirichlet problems for the wave equation // Journal of inverse and ill – posed problems. – 2012. – № 2 (20). – C. 193–211.
4. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Васильев В.И.** Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности // Математическое моделирование. – 1997. – Т. 9, № 5. – С. 119–127.
5. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
6. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 589 с.

REFERENCES

1. **Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.** Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. – Walter de Gruyter, Germany, 2007. – 438 p.
2. **Kabanikhin S.I.** Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. – Walter de Gruyter, Germany, 2011. – 459 p.
3. **Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitov D.B., Krivorotko O.I., Alimova A.N.** An optimization method in the Dirichlet problems for the wave equation // Journal of inverse and ill – posed problems. – 2012. – № 2 (20). – C. 193–211.
4. **Samarskii A.A., Vabishchevich P.N., Vasiliev V.I.** Iterative solution of a retrospective inverse problem of heat conduction [Iteratcionnoe reshenie retrospektivnoi obratnoi zadachi teploprovodnosti] // Matematicheskoe modelirovanie. – 1997. – V. 9, № 5. – P. 119–127. (in Russian)
5. **Samarskii A.A.** The theory of difference themes. – New York-Basel: Marcel Dekker, Inc, 2001. – 761 p.
6. **Samarskii A.A., Nikolaev E.S.** Numerical Methods for Grid Equations. V.1 Direct Methods, V. 2 Iterative Methods. – Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 1989. – 242 p., 502 p.