УДК 517.958

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМАЦИИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ[1)]

Г.Р. АБДЮШЕВА, И.Б. БАДРИЕВ, В.В. БАНДЕРОВ, О.А. ЗАДВОРНОВ

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: guzel.abdusheva@kpfu.ru, ildar.badriev@kpfu.ru

NUMERICAL INVESTIGATION THE PROBLEM OF DEFORMATION THE BIOLOGICAL SHELL

G.R. ABDUSHEVA, I.B. BADRIEV, V.V. BANDEROV, O.A. ZADVORNOV

Kazan Federal University

Аннотация

Работа посвящена численному исследованию задачи о равновесии мягкой биологической оболочки — тонкой кишки. Эта биологическая оболочка моделируется мягкой сетчатой осесимметрической оболочкой, образованной двумя семействами взаимно пересекающихся армирующих нитей в продольном и радиальном направлениях. Математически задача формулируется в виде вариационного неравенства с псевдомонотонным оператором. Исследована его разрешимость. Для численного решения задачи предложен итерационный метод и исследована его сходимость. Приведены результаты расчета для модельной задачи.

Ключевые слова: Математическая модель, мягкая биологическая оболочка, положение равновесия, вариационное неравенство, итерационный метод

Summary

The paper is devoted to the numerical investigation the equilibrium of soft biological shell — the small intestine. This biological shell simulated by soft network axisymmetric shell formed by two families of mutually intersecting reinforcing strands in the longitudinal and radial directions. Mathematically, the problem is formulated as a variational inequality with pseudomonotone operators. Its solvability Is studied. For numerical solution of the problem an iterative method is proposed and its convergence is investigated. The numerical results for the model problem are presented.

Key words: Mathematical model, soft biological shell, equilibrium position, variational inequality, iterative method.

Введение

Рассматривается задача об определении положения равновесия мягкой биологической оболочки. В качестве такой оболочки выбирается тонкая кишка. Тонкая кишка человека и животных представляет собой длинную цилиндрическую трубку (см., например, [1]). В брюшной полости она достаточно хорошо иммобилизована близлежащими органами. Проксимальный конец ее неподвижно прикреплен к желудку, дистальный — к слепой кишке. Внутриполостное давление в состоянии покоя равно 10—20 мм вод. ст. и соответствует базальному.

Стенка кишки является полиморфным гетерогенным биокомпозитом, заключенным в податливую матрицу гликопротеидов [2]. Опорную строму нервно-мышечного комплекса и железистых компонент

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97026, 13-01-00908)

ткани формируют гофрированные в плоскости коллагеновые, эластические и аргирофильные волокна. Дискретно расположенные соединительно-тканные фибриллы определенным образом скреплены в местах пересечения "анастомотическими связями что создает архитектонику аналогично крупно- и мелкопетлистой сети ортогонального плетения. Многообразие форм двигательной активности обусловлено работой наружного продольного (m. longitudinalis) и внутреннего циркулярного мышечных (m. circularis) слоев. При этом расположение сократительных волокон в m. longitudinalis — истинно осевое, а в m. circularis — строго круговое.

Многокомпонентность, конструктивная анизотропия и отсутствие слоистой двумерной структуры являются одной из причин сложности механического моделирования объекта, записи для него определяющей системы уравнений состояния и равновесия. Однако, такие специфические особенности, как тонкостенность, большая деформативность, слабая сопротивляемость изгибу и практическая неспособность воспринимать сжимающие тангенциальные усилия, делают возможным использование модели мягкой безмоментной оболочки [3]. Более того, основываясь на данных о строении, целесообразно моделировать тонкую кишку в рамках особого класса сетчатых оболочек, образованной двумя семействами взаимно пересекающихся армирующих нитей [4], в данном случае — составленных из мышечных волокон, заключенных в футляр соединительно-тканных фибрилл.

Считается, что оболочка является осесимметричной. Предполагается, что функция, определяющая в продольных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения (то есть функция, задающая физическое соотношение), имеет степенной рост. Ограничений на рост функции, определяющей в циркулярных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, не накладывается. В [5] приведена обобщенная постановка задачи в виде вариационного неравенства с псевдомонотонным [6] оператором. Необходимость привлечения аппарата вариационных неравенств вызвана тем, что при математическом описании задачи надо использовать ограничение на перемещения, естественно возникающее при рассмотрении осесимметричной оболочки, означающее отсутствие ее самопересечения. Исследована разрешимость вариационного неравенства. С этой целью установлены свойства операторов, входящего в вариационное неравенство — псевдомонотонность и коэрцитивность. Это дало возможность для исследования его разрешимости использовать известные результаты теории монотонных операторов.

Для решения вариационного неравенства предложен двухслойный итерационный метод. При дополнительных предположениях относительно функций, характеризующей физические соотношения в нитях, установлено, что оператор в вариационном неравенстве является потенциальным и ограниченно липшиц-непрерывным [7], а в случае гильбертова пространства (когда функция, определяющая в продольных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, имеет линейный рост) — обратно сильно монотонным [8]. Это дало возможность для его решения использовать предложенный ранее итерационный метод [5]. Установлены пределы изменения итерационного параметра, обеспечивающие сходимость метода. Проведены численные эксперименты для модельной задачи. Результаты численных экспериментов подтвердили эффективность предложенного итерационного метода.

1. Постановка задачи.

Анатомическую поверхность кишки отождествим с гладкой срединной поверхностью, определяющей ее положение в пространстве. Рассмотрим мягкую сетчатую биологическую оболочку, представляющую из себя в недеформированном состоянии цилиндр заданного радиуса r_0 длины l (см. рис. 1). Предполагается, что вектора плотностей поверхностных и массовых сил лежат в радиальной (проходящей через ось симметрии) плоскости, и перемещение точек оболочки происходит также в радиальном направлении. Поверхностная нагрузка предполагается следящей, т.е. направлена по нормали к поверхности оболочки. Торцы оболочки полагаем жестко закрепленными по контуру. Введем лагранжеву координату s, $0 \leqslant s \leqslant l$, вдоль образующей оболочки. Указанная задача в цилиндрической системе координат описывается следующей системой дифференциальных уравнений [9]:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T_1}{\lambda_1}\left(1+\frac{dy}{ds}\right)\right)+q\,\frac{dw}{ds}+\tilde{f}_1=0. \qquad (1)$$

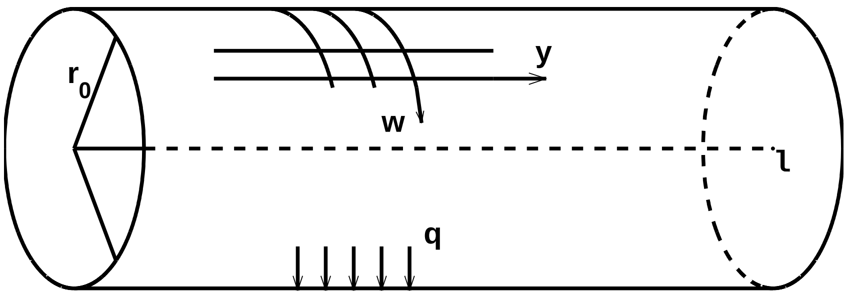

Рис. 1:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T_1}{\lambda_1}\frac{dw}{ds}\right)-\frac{1}{r_0}T_2-q\left(1+\frac{dy}{ds}\right)+\tilde{f}_2=0, \qquad (2)$$

где $\tilde{f}=(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)$ — плотность массовых сил, q — плотность следящей поверхностной нагрузки, y, w — перемещения точек в продольном и радиальном направлении соответственно, λ_1 и λ_2, T_1 и T_2 — степени удлинения и функции, задающие физические соотношения в нитях в продольном и радиальном направлениях соответственно.

Поскольку края оболочки закреплены, то

$$y(0)=0,\ y(l)=0,\quad w(0)=0,\ w(l)=0. \qquad (3)$$

Кроме того, решение должно удовлетворять условию $w+r_0\geqslant 0$, естественному для цилиндрической системы координат.

Введем обозначения $u_1=y$, $u_2=w$; при этом $\lambda_1(u)=\sqrt{(1+u'_1(s))^2+(1+u'_2(s))^2}$, $\lambda_2(u)=1+u_2(s)/r_0$.

Пусть $\widetilde{K}=\{\,u=(u_1,\,u_2):\ r_0+u_2\geqslant 0\,\}$, $a(u,v)=\int\limits_0^l\frac{T_1(\lambda_1(u(s)))}{\lambda_1(u(s))}\left[(1+u'_1(s))\,v'_1(s)+u'_2(s)\,v'_2(s)\right]ds$,

$b(u,v)=q\int\limits_0^l\left[(1+u'_1(s))\,v_2(s)+u_2(s)\,v'_1(s)\right]ds$, $h(u,v)=\dfrac{q}{r_0}\int\limits_0^l\left[\dfrac{1}{2}u_2^2\,v'_1+(1+u'_1(s))\,u_2\,v_2\right]ds$,

$d(u,v)=\dfrac{1}{r_0}\int\limits_0^l T_2(\lambda_2(u(s)))\,v_2(s)\,ds$, $\widehat{f}(v)=\int\limits_0^l(\tilde{f}(s),\,v(s))\,ds$.

Под решением задачи (1)–(3) будем понимать функцию $u\in\widetilde{K}$, удовлетворяющую следующему вариационному неравенству (сравни с [5, 10]):

$$a(u,v-u)+b(u,v-u)+h(u,v-u)+d(u,v-u)\geqslant\widehat{f}(v-u)\qquad\forall\,v\in\widetilde{K}. \qquad (4)$$

2. Обобщенная постановка задачи. Существование решения.

Приведем обобщенную постановку задачи (4). Относительно функций T_1 и T_2 считаем, что

$$T_i(\xi)=0,\ \xi\leqslant 1,\ i=1,2\ \ \text{(оболочка не воспринимает сжимающих усилий)}, \qquad (5)$$

$$T_i,\ i=1,2,-\ \ \text{непрерывные, неубывающие}, \qquad (6)$$

T_1 имеет на бесконечности степенной рост порядка $p-1>0$, то есть существуют положительные k_0, k_1, такие, что

$$k_0\,(\xi-1)^{p-1}\leqslant T_1(\xi)\leqslant k_1\,\xi^{p-1}\quad\text{при}\quad\xi\geqslant 1. \qquad (7)$$

Введем в рассмотрение пространство $V = \left[\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(0,l)\right]^2$ с нормой $\|u\| = \left[\int\limits_0^l |u'|^p ds\right]^{1/p}$, а также множество $K = \{u \in V : r_0 + u_2 \geqslant 0\}$. Очевидно, что множество K выпукло и замкнуто. Сопряженным к V является пространство $V^* = \left[\overset{\circ}{W}{}_{p^*}^{(-1)}(0,l)\right]^2$, $p^* = p/(p-1)$.

При выполнении условий (5)–(7) формы a, b, h, d, $\widehat{f}$ порождают операторы $A, B, D, H : V \to V^*$ и элемент $f \in V^*$,

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v), \quad \langle Bu, v\rangle = b(u,v), \quad \langle Hu, v\rangle = h(u,v), \quad \langle Du, v\rangle = d(u,v), \quad \langle f, v\rangle = \widehat{f}(v),$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — отношение двойственности между V и V^*.

Таким образом, под обобщенным решением осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения, закрепленной по краям, находящейся под воздействием массовых сил, постоянной следящей поверхностной нагрузки, будем понимать функцию $u \in K$, удовлетворяющую следующему вариационному неравенству:

$$\langle (A+D)u,\, v-u\rangle \geqslant \langle f - (B+H)u,\, v-u\rangle \qquad \forall\, v \in K. \tag{8}$$

Имеет место следующий результат (см. [5])

Теорема 1. *Пусть $f \in V^*$, выполнены условия (5)–(7). Тогда*

1) *если $p > 3$, то неравенство (8) имеет решение при любом q;*

2) *если $p = 3$, то неравенство (8) имеет решение при всех q, удовлетворяющих условию $|q| < q_1 = k_0/c_2$, где $c_2 = c_1\sqrt{2}\, l^{1/p^*}/r_0$, $c_1 = 2\, l^{2/p^*}$;*

3) *если $1 < p < 3$, то для любого $\delta > 0$ найдется $q_\delta > 0$, такое, что задача (8) имеет решение при условиях $\|f\|_{V^*} \leqslant \delta, \quad |q| < q_\delta$.*

При выполнении условий (5)–(7) установлено, что оператор $T = A + B + H + D$ является псевдомонотонным и коэрцитивным. Это дало возможность для исследования его разрешимости использовать известные результаты теории монотонных операторов [6].

2. Итерационный метод. Численные эксперименты.

Для решения вариационного неравенства (4) будем использовать предложенный в [11], итерационный процесс.

По аналогии с [7, стр. 79] оператор A назовем ограниченно липшиц-непрерывным с функциями Φ_A и μ_A, если

$$\|Au - Av\|_{V^*} \leqslant \mu_A(R)\, \Phi_A\left(\|u - v\|_V\right) \quad \forall\, u,\, v \in V, \tag{9}$$

где $R = \max\{\|u\|_V, \|v\|_V\}$, μ_A — неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, Φ_A — строго возрастающая на $[0, +\infty)$ функция, такая, что: $\Phi_A(0) = 0$, $\Phi_A(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$.

Оператор A называется обратно сильно монотонным[2)] (см. [8, стр. 243]) с постоянной d, если

$$\|Au - Av\|_{V^*}^2 \leqslant d\, \langle Au - Av, u - v\rangle \quad \forall\, u,\, v \in V.$$

Пусть $p \geqslant 2$, выполнены условия (5)–(7), и, кроме того,

$$\frac{T_1(\beta) - T_1(\gamma)}{\beta - \gamma} \leqslant k_2\, (1 + \beta + \gamma)^{p-2}, \quad k_2 > 0 \quad \forall\, \beta, \gamma \in R^1, \quad \beta, \gamma > 0. \tag{10}$$

Тогда оператор A является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями $\mu_A(\xi) = c_5\left(3\, l^{1/p} + 2\xi\right)^{p-2}$, где $c_5 = \max\{k_1, k_2\}$, $\Phi_A(\xi) = \xi$.

[2)] В англоязычной литературе такой оператор называется также ко-коэрцитивным (см., например, [12, 13]) Пусть $1 < p < 2$, функция T_1 удовлетворяет условиям (5)–(7), и, кроме того,

$$\frac{T_1(\beta) - T_1(\gamma)}{\beta - \gamma} \leqslant k_3\,(\beta + \gamma)^{p-2} \quad \forall\,\beta, \gamma \in (0, +\infty), \quad k_3 > 0. \tag{11}$$

Тогда оператор A является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями $\Phi_A(\xi) = \xi^{p-1}$, $\mu_A(\xi) = c_6 = \max\{2\,k_1, k_3\}$.

Оператор B – липшиц-непрерывный с постоянной c_1.

Пусть $p > 2$, выполнено условие (5), а также

$$\frac{T_2(\beta) - T_2(\gamma)}{\beta - \gamma} \leqslant k_4\,(1 + \beta + \gamma)^{\sigma-1}\;\forall\,\beta, \gamma \in (0, +\infty),\; k_4 > 0,\; \sigma > 1. \tag{12}$$

Тогда оператор D является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями $\Phi_D(\xi) = \xi$, $\mu_D(\xi) = c_7\left(3 + 2\,l^{1/p^*}\xi/r_0\right)^{\sigma-1}$, где $c_7 = k_3\,l^{2/p^*+1}/r_0$.

Пусть $1 < p < 2$, выполнено условие (12). Тогда оператор D является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями $\Phi_{1,D}(\xi) = \xi^{p-1}$ и $\mu_{1,D}(\xi) = c_8\left(3 + 2\,l^{1/p^*}\xi/r_0\right)^{\sigma-1}\xi^{2-p}$, где $c_8 = c_7\,2^{2-p}$.

Пусть $p = 2$, выполнено условие (5), а также

$$\frac{T_2(\beta) - T_2(\gamma)}{\beta - \gamma} \leqslant k_5 \quad \forall\,\beta, \gamma \in (0, +\infty), \quad k_5 > 0. \tag{13}$$

Тогда D – обратно сильно монотонный оператор с постоянной $c_9 = k_5\,l/2r_0^2$.

Оператор H является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями $\Phi(\xi) = \xi$, $\mu_H(\xi) = c_{10}\,\xi$, где $c_{10} = 2\sqrt{2}\,l^{3/p^*}/r_0$.

В работе [11] для решения вариационного неравенства

$$\langle Pu, v - u\rangle \geqslant \langle f, v - u\rangle \qquad \forall\,v \in K \tag{14}$$

был рассмотрен следующий итерационный процесс, позволяющий свести (14) к вариационному неравенству с оператором двойственности вместо исходного псевдомонотонного оператора, решение которого можно проводить известными методами (см., например, [14–18]).

Пусть $u^{(0)}$ – произвольный элемент из K. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$, зная $u^{(n)}$, определим $u^{(n+1)}$ как решение вариационного неравенства

$$\left\langle J(u^{(n+1)} - u^{(n)}), v - u^{(n+1)}\right\rangle \geqslant \tau\left\langle f - Pu^{(n)},\, v - u^{(n+1)}\right\rangle \quad \forall\,v \in K, \tag{15}$$

где $\tau > 0$ – итерационный параметр, $J : V \to V^*$ – оператор двойственности, порождаемый функцией Φ_P (см. [6, стр. 185]:

$$\langle Jv, v\rangle = \|Jv\|_{V^*}\,\|v\|, \quad \|Jv\|_{V^*} = \Phi_P(\|v\|) \qquad \forall\,v \in V.$$

При этом справедливы

Теорема 2. *Пусть K – непустое, замкнутое, выпуклое подмножество рефлексивного банахова пространства V, оператор $P : V \to V^*$ является псевдомонотонным, коэрцитивным, ограниченно липшиц-непрерывным с функциями μ_P и Φ_P и потенциальным, причем*

$$F(u + v) - F(u) = \int_0^1 \langle P(u + t\,v), v\rangle\; dt \quad \forall\,u, v \in V, \tag{16}$$

где $F(u) = \displaystyle\int_0^1 \langle P(t\,u), u\rangle\; dt$.

Пусть, далее, выполнено условие

$$0 < \tau < \min\{1, 1/\mu_0\}, \quad \mu_0 = \mu_P(R_0 + \Phi^{-1}(R_1)), \tag{17}$$

где

$$R_0 = \sup_{u \in S_0} \|u\|, \quad R_1 = \sup_{u \in S_0} \|Pu - f\|_{V^*}, \quad S_0 = \{\, u \in K : F(u) \leqslant F(u^{(0)})\,\}.$$

Тогда итерационная последовательность $\{u^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$, *построенная согласно* (15), *ограничена в* V, *и все ее слабо предельные точки являются решениями вариационного неравенства* (14).

Теорема 3. *Пусть* K — *непустое, замкнутое, выпуклое подмножество гильбертова пространства* V, *оператор* $P : V \to V^*$ *является обратно сильно монотонным с постоянной* d, *коэрцитивным и потенциальным, причем справедливо соотношение* (16). *Пусть, далее, выполнено условие*

$$0 < \tau < 2/d. \tag{18}$$

Тогда вся итерационная последовательность $\{u^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$, *построенная согласно* (15) *сходится слабо к некоторому решению задачи* (14).

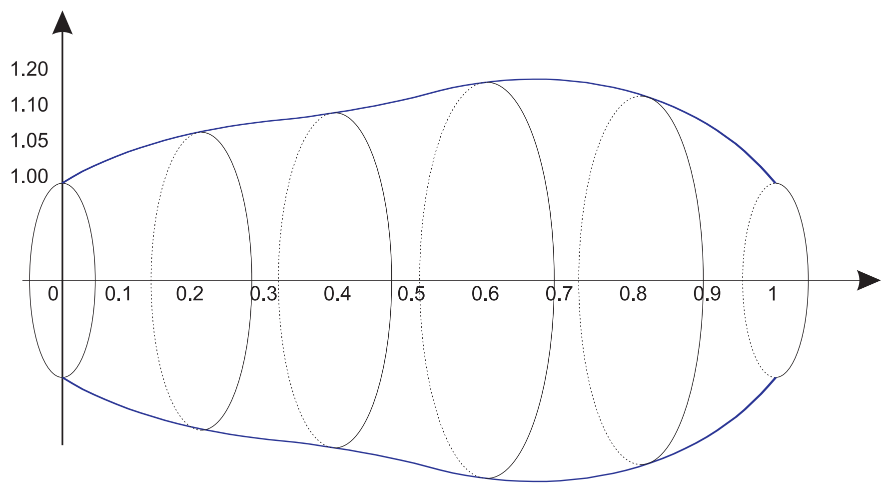

Рис. 2:

Предложенный итерационный процесс был реализован численно.

Зависимости, задающие физические соотношения в нитях, выбирались в виде (см. [1]):

$$T_i(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leqslant 1 \\ c_{1\,i}\, \exp\left(c_{2\,i}(\xi - 1) - 1\right), & \xi > 1, \end{cases} \tag{19}$$

где $c_{1\,1} = 0.1$, $c_{1\,2} = 0.5$, $c_{2\,1} = 4$, $c_{2\,2} = 4$ (мН/см); полагалось также $r_0 = 0.159$ см, $l = 1$ см.

Функции T_i аппроксимировадись степенными функциями. Построены конечноэлементные аппроксимации задачи и методов. На рис. 2 показано построенное в результате численного решения поперечное сечение оболочки. Качественно полученное решение согласуется с известными из литературы данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мифтахов Р.Н.** Численное моделирование моторики тонкой кишки // Современные проблемы биомеханики. – 1989. – Вып. 5. – С. 147–183.
2. Гистология/ Под ред. В.Г. Алексеева, Ю.Н. Афанасьева, Н.А. Юриной. – М.: Медицина, 1983. – 692 с.
3. **Мифтахов Р.Н.** Приложение теории мягких оболочек в задачах биомеханики полых органов // Труды III Всесоюзной конференции по проблемам биомеханики. – Рига: Зинатне, 1987. – С. 51–56.
4. **Ильгамов М.А., Мифтахов Р.Н.** Моделирование ритмической сегментации тонкой кишки // Медицинская биомеханика. Труды Международной конференции. – Рига, 1986. – С. 164–177.
5. **Абдюшева Г.Р., Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А., Тагиров Р.Р.** Математическое моделирование задачи о равновесии мягкой биологической оболочки. I. Обобщенная постановка// Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2012. – Т. 154, Кн. 4. – С. 57–73.
6. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
7. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
8. **Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.** Модифицированные функции Лагранжа. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
9. **Ридель В.В., Гулин Б.В.** Динамика мягких оболочек. – М.: Наука, 1990. – 206 с.
10. **Badriev I.B., Banderov V.V.** Iterative Methods for Solving Variational Inequalities of the Theory of Soft Shells // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 354–365.
11. **Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Саддек А.М.** Исследование сходимости итерационных методов решения некоторых вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами// Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, № 7. – С. 891–898.
12. **Tzeng P.** Futher Applications of a Splitting Algorithm to Decomposition in Variational Inequalities and Convex Programming // Mathematical Programming. – 1990. – V. 48. – P. 249-264.
13. **Zhu D.** New classes of generalized monotonicity // Journal of Optimazation Theory and Applications. – 1995. – V. 87, ь 2. – P. 457–471.
14. **Гловински Р.Г., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.** Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 576 с.
15. **Fortin M., Glowinski R.** Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems. – Amsterdam: North-Holland, 1983. – 340 p.
16. **Gabay D., Merscier B.** A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximations// Computers & Mathematics with Applications. – 1976. – V 2, Is. 1. – P. 17–40.
17. **Lions P.L., Merscier B.** Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators //SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1979. – V. 16, № 6. – P. 964–979.
18. Résolution numériques de problèmes aux limites par des méthodes de Lagrangien augmenté /Eds M.Fortin, R.Glowinski. – Paris: Dunod, 1983. – 320 p.

REFERENCES

1. **Miftakhov R.N.** Numerical simulation of motility of the small intestine [Chislennoe modelirovanie motoriki tonkoi kishki] // Sovremennye problemy biomekhaniki. – 1989. – Is. 5. – P. 147–183. (in Russian)
2. Histology [Gistologija] / Eds by V.G. Alekseev, Ju.N. Afanas'eva, N.A. Jurina. – Moscow: Medicina, 1983. – 692 p. (in Russian)

3. **Miftakhov R.N.** Application of the theory of soft shells in the problems of biomechanics the hollow organs [Ptilozhenie teorii myagkikh obolochek v zadachakh biomekhaniki polykh organov] // Trudy III Vsesojuznoi konferentcii po problemam biomekhaniki. – Riga: Zinatne, 1987. – P. 51–56. (in Russian)
4. **Il'gamov M.A., Miftakhov R.N.** Simulation of rhythmic segmentation of the small intestine [Modelirovanie ritmicheskoi segmentatcii tonkoi kishki] // Medicinskaya biomekhanika. Trudy Mezhdunarodnoi konferentcii. – Riga, 1986. – P. 164–177.
5. **Abdyusheva G.R., Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A., Tagirov R.R.** Mathematical modeling of the equilibrium problem for a soft biological shell. I. Generalized statement // Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series. – 2012. – V. 154, Is. 4. – P. 57–73. (in Russian)
6. **Lions J.-L.** Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. – Paris: Dunod, 1969. – 554 p.
7. **Gajewskii H., Groger K., Zacharias K.** Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. – Berlin: Akademie-Verlag, 1974. – 281 p.
8. **Gol'shtein E.G. and Tret'yakov N.V.** Modified Lagrangians [Moditsirovannye funktsii Lagranzha]. – Moscow: Nauka, 1989. – 400 p. (in Russian)
9. **Ridel V.V., Gulin B.V.** Dynamics of Soft Shells [Dinamika myagkikh obolochek]. – Moscow: Nauka, 1990 – 206 p. (in Russian)
10. **Badriev I.B., Banderov V.V.** Iterative Methods for Solving Variational Inequalities of the Theory of Soft Shells // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 354–365.
11. **Badriev I.B., Zadvornov O.A., Saddek A.M.** Convergence Analysis of Iterative Methods for Some Variational Inequalities with Pseudomonotone Operators // Differential Equations. – 2001. – V. 37, Is. 7. – P. 934–942.
12. **Tzeng P.** Futher Applications of a Splitting Algorithm to Decomposition in Variational Inequalities and Convex Programming // Mathematical Programming. – 1990. – V. 48. – P. 249-264.
13. **Zhu D.** New classes of generalized monotonicity // Journal of Optimazation Theory and Applications. – 1995. – V. 87, ь 2. – P. 457–471.
14. **Glowinski R., Lions J.-L. and Tremolieres R.** Analyse nume'rique des ine'quations variationnelles. – Paris: Dunod, 1976.
15. **Fortin M., Glowinski R.** Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems. – Amsterdam: North-Holland, 1983. – 340 p.
16. **Gabay D., Merscier B.** A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximations// Computers & Mathematics with Applications. – 1976. – V 2, Is. 1. – P. 17–40.
17. **Lions P.L., Merscier B.** Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators //SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1979. – V. 16, № 6. – P. 964–979.
18. Résolution numériques de problèmes aux limites par des méthodes de Lagrangien augmenté /Eds M.Fortin, R.Glowinski. – Paris: Dunod, 1983. – 320 p.