

УДК 517.982

На правах рукописи

СКВОРЦОВА ГАЛИЯ ШАКИРОВНА

**ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ
ИНТЕГРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАМКНУТЫЕ
В ТОПОЛОГИИ ЛОКАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ**

(01.01.01. - Математический анализ)



Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина.

- Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
профессор А.Н. Шерстнев.
- Научный консультант — кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник О.Е. Тихонов.
- Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук,
профессор А.В. Бухвалов,
доктор физико-математических наук,
профессор М.С. Матвейчук.
- Ведущая организация — Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова.

Защита состоится 27 марта 2003 года в 14 ч. 30 м. в ауд. 217 второго корпуса КГУ на заседании диссертационного совета К 212.081.07 при Казанском государственном университете им. В.И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан " 25 " февраля 2003 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент



Ю. Р. Агачев

Актуальность темы. Одной из важнейших частей теории операторных алгебр является, так называемая, теория некоммутативного интегрирования. Фундамент общей теории интегрирования в алгебрах операторов был заложен в работах Дж. Неймана и Ф. Мюррея, а также Ж. Диксмье. В работе И. Сигала была построена теория интегрирования относительно унитарно-инвариантной меры на проекторах на полуконечной алгебре фон Неймана, то есть, фактически, относительно точного нормального полуконечного следа на алгебре фон Неймана.

Продолжая исследования по теории некоммутативного интегрирования многие авторы, например В. Ф. Стайнспринг, Ф. Иедон и др., изучали аналоги некоторых частей классической теории интегрирования. Введение Сигалом понятий измеримого оператора и сходимости почти всюду на пространстве измеримых операторов стимулировало изучение новых пространств неограниченных операторов и топологий, связанных со следом на алгебре фон Неймана. В частности, этими вопросами занимались С. Санкарап, Ф. Иедон, А. П. Падманабхан, В. Ф. Стайнспринг, Т. Фак и Х. Косаки, О. Е. Тихонов, Л. Циан, М.А. Муратов.

В результате синтеза сигаловской некоммутативной теории интегрирования и теории несамосопряженных операторных алгебр (или субдиагональных алгебр) возникла теория некоммутативных пространств Харди. Субдиагональные алгебры изучались в работах В. Арвесона, С. Кавамура и Я. Томияма, Р. И. Лоебл и П. С. Мюли, К.-С. Саито, Н. Каimei.

Заметим, что в качестве специального случая, когда алгебра коммутативна, построенная Сигалом теория включает в себя классическую теорию интегрирования на абстрактном пространстве с мерой. Теория некоммутативных пространств Харди также является обобщением классических пространств Харди. В связи с этим представляет интерес перенесение и обобщение результатов связанных с классической теорией интегрирования на некоммутативный случай.

Данная диссертация посвящена некоммутативному обобщению изложен-

ных ниже результатов Бухвалова-Лозановского и их приложений, связанных с теорией пространств Харди.

А. В. Бухвалов и Г. Я. Лозановский показали,¹ что изучение ограниченных по норме выпуклых множеств, замкнутых в топологии локальной сходимости по мере в некоторых банаховых решетках измеримых функций, может быть в определенном смысле сведено к изучению выпуклых компактных множеств в подходящих топологических векторных пространствах измеримых функций. Отметим, что результаты Бухвалова - Лозановского применимы и в L^1 — классическом пространстве интегрируемых функций на пространстве с конечной мерой. В качестве одного из нетривиальных и неожиданных приложений этих результатов А. В. Бухвалов отмечает исследования Г. Годфруа² слабой секвенциальной полноты факторпространств L^1 и, в частности, его доказательство известной теоремы Муни-Хавина о том, что L^1/H_0^1 слабо секвенциально полно (где H_0^1 — пространство Харди аналитических функций на круге).

Цель работы. Основными целями данной работы являются: доказательство некоммутативного аналога теоремы Бухвалова-Лозановского о выпуклых, ограниченных по норме, замкнутых в топологии локальной сходимости по мере подмножествах банахова пространства $L_1(\tau)$; доказательство некоммутативного аналога теоремы Годфруа о слабой секвенциальной полноте факторпространств пространства $L_1(\tau)$; изучение структуры некоммутативного пространства Харди H_1 , построенного по условному ожиданию в полуконечной алгебре фон Неймана и связанной с ним группе внутренних *-автоморфизмов, а также исследование слабой секвенциальной полноты факторпространства $L_1(\tau)/H_1$; доказательство слабой секвенциальной полноты факторпространства $L_1(\tau)/L_1(\tau_N)$, где N — такая подалгебра фон Неймана алгебры M , что ограничение τ_N следа τ на N является полуконечным следом.

¹Бухвалов А. В., Лозановский Г. Я. *О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций* // ДАН СССР — 1973. Т. 212. — N. 6. — С. 1273-1275.

²Godefroy G. *Sous-espaces bien disposés de L^1 -applications* // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. — V. 286. — N. 1. — P. 227-249.

Методы исследования. Основные результаты диссертации получены с применением методов функционального анализа, теории некоммутативного интегрирования, теории локально-выпуклых векторных пространств. В работе использовалась техника, связанная со свойствами топологии локальной сходимости по мере в пространстве вполне измеримых операторов, техника разложения непрерывного функционала на алгебре фон Неймана на нормальную и сингулярную части, а также, техника, связанная с понятием условного ожидания на алгебре фон Неймана.

Научная новизна и практическая значимость. В данной диссертации проводится "некоммутативное" обобщение результатов А. В. Бухвалова и Г. Я. Лозановского, а также результатов Г. Гodefруа.

Основные результаты диссертации являются новыми. Все они опубликованы в открытой печати. Работа носит теоретический характер. Достоверность результатов обосновывается полными математическими доказательствами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научном семинаре "Алгебры операторов и их приложения" при кафедре математического анализа Казанского государственного университета, на итоговых научных конференциях КГУ (1996, 2001 гг.), на XVIII Московской конференции молодых ученых мехмата МГУ (1996 г.), на II Республиканской научной конференции молодых ученых и специалистов (Казань, 1996 г.), на школе-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. (Казань, 1999 г.), на V Казанской международной школе-конференции (2001 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на одиннадцать параграфов и списка литературы. Объем диссертации — 81 страница машинописного текста, список литературы содержит 65 наименований.

Во введении приводятся краткие исторические сведения и обзор современного состояния по вопросам, связанным с тематикой диссертации — теории некоммутативного интегрирования, теории некоммутативных пространств Харди и, частично, теории банаховых решеток. Также кратко изложены основные результаты работы.

В первой главе (§§ 1-3) вводится топология локальной сходимости по мере в пространстве вполне измеримых операторов и изучаются свойства этой топологии. Также приводятся необходимые определения и факты.

В § 1 приводятся основные определения и некоторые результаты теории топологических векторных пространств и локально-выпуклых пространств, общей теории алгебр фон Неймана, теории некоммутативного интегрирования (в частности теории измеримых операторов). Приведем некоторые из них.

Пусть M — алгебра фон Неймана, на которой выделен точный нормальный полуконечный след τ . Замкнутый плотно определенный, присоединенный к M оператор x назовем *вполне измеримым*, если $\tau(1 - e_\lambda^{|x|}) < +\infty$ для некоторого $\lambda > 0$, где $e_\lambda^{|x|}$ — спектральный проектор модуля оператора $|x|$, соответствующий отрезку $[0, \lambda]$. Через \mathcal{K} обозначим множество вполне измеримых операторов. Символом $\|\cdot\|_\infty$ обозначается норма ограниченного оператора.

С помощью метрики $d_\tau(x, y) = \inf_{\lambda > 0} \max\{\lambda, \tau(1 - e_\lambda^{|x-y|})\}$ ($x, y \in \mathcal{K}$) на множестве \mathcal{K} вводится *топология сходимости по мере*.³ Через $L_1(\tau)$ обозначим пространство *интегрируемых* относительно следа τ операторов. Как известно, отображение $x \mapsto \tau(x \cdot)$ осуществляет изометрический изоморфизм между $L_1(\tau)$ и M_* . Также существует аналогичный изометрический изоморфизм между M и $L_1(\tau)^*$. Будем отождествлять соответствующие изометрически изоморфные пространства.

³Стайнспринг В. Ф. *Теоремы об интегрировании относительно меры на проекторах и двойственность для унимодулярных групп.* // Математика (сб. переводов) — 1974. — Т. 6:2. — С. 107-149.

В § 2 с помощью базиса окрестностей нуля

$$K(\epsilon, \delta, p) = \{x \in \mathcal{K} \mid \exists q \in M^{pr} (q \leq p, \|qxq\|_\infty \leq \epsilon \text{ и } \tau(p - q) \leq \delta)\}$$

где $\epsilon, \delta > 0$, $p \in M$, $\tau(p) < +\infty$, вводится топология локальной сходимости по мере, относительно которой пространство вполне измеримых операторов становится топологическим векторным пространством. Доказано, что данная топология совпадает с топологией, рассматриваемой Л. Циахом⁴, а именно сеть $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ тогда и только тогда, когда $px_\alpha p \rightarrow pxp$ по мере в \mathcal{K} для всех $p \in M$, $\tau(p) < +\infty$.

В § 3 исследуются свойства топологии локальной сходимости по мере. Доказывается непрерывность операции умножения на вполне измеримый оператор и аналог теоремы Фату, связанный с данной топологией.

Предложение 3.5. Пусть x_α — сеть в $L_1(\tau)$, $x \in \mathcal{K}$, $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ и $\sup_\alpha \|x_\alpha\|_1 < +\infty$. Тогда $x \in L_1(\tau)$ и $\|x\|_1 \leq \liminf_\alpha \|x_\alpha\|_1$.

Показывается также, что пространство вполне измеримых операторов отделимо относительно топологии локальной сходимости по мере. Также доказано, что если исходная алгебра фон Неймана совпадает с алгеброй всех ограниченных операторов на которой рассматривается канонический след, то топология локальной сходимости по мере совпадает с топологией слабой операторной сходимости. Если исходная алгебра фон Неймана совпадает с коммутативной алгеброй операторов умножения на измеримую функцию с интегралом Лебега в качестве следа, то топология локальной сходимости по мере есть классическая топология сходимости по мере на всех множествах конечной меры в пространстве вполне измеримых функций.

Во второй главе диссертации после исследования свойств вспомогательных топологий доказывается некоммутативный аналог теоремы Бухвалова-Лозановского о выпуклых, ограниченных подмножествах пространства $L_1(\tau)$, замкнутых в топологии локальной сходимости по мере.

⁴Ciach L. J. *Some remarks on convergence in measure and on dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra* // Col. Math. — 1988. — V. LV. — f. 1. — P. 109-121.

В § 4 и § 5 вводится и изучается вспомогательная $|\sigma|(L_1(\tau), Y)$ -топология, порождаемая семейством полунорм. Сначала в произвольном упорядоченном вещественном линейном пространстве X , порождающимся конусом своих положительных элементов, зададим семейство полунорм по формуле:

$$r_f(x) = \inf\{f(x_1) + f(x_2) \mid x_1, x_2 \in X^+, x = x_1 - x_2\} \quad (x \in X),$$

где f пробегает множество положительных функционалов на X .

Если в качестве X рассматривать вещественное линейное пространство M_*^h эрмитовых ультраслабо непрерывных функционалов на алгебре фон Неймана M , а в качестве положительных функционалов на X — положительные операторы из алгебры M , то для $\varphi \in M_*^h$ и $a \in M^+$ имеем: $r_a(\varphi) = \|\varphi(a^{1/2} \cdot a^{1/2})\|$. Продолжение полунормы $r_a(\cdot)$ с пространства M_*^h на пространство M_* всех ультраслабо непрерывных функционалов на M , полученное с использованием указанного равенства, является полунормой на M_* .

Для непустого подмножества $Y \subset M$ через $|\sigma|(M_*, Y)$ (или, учитывая изометрический изоморфизм между $L_1(\tau)$ и M_* , через $|\sigma|(L_1(\tau), Y)$) обозначается топология на M_* , порожденная семейством полунорм $\{r_a \mid a \in Y^+\}$.

§ 5 посвящен изучению свойств $|\sigma|(M_*, Y)$ -топологии при некоторых условиях на множество Y . Введем необходимые определения.

Напомним, что подмножество $L \subset M^+$ называется *наследственным конусом* в M^+ , если а) условия $a \in M^+$, $b \in L$ и $a \leq b$ влекут $a \in L$; б) для $a, b \in L$ сумма $a + b \in L$.

Фундаментом будем называть подпространство Y в M , натянутое на наследственный конус своих положительных элементов и такое, что для всех $b \in M^+ \setminus \{0\}$ найдется $a \in Y^+$ такой, что $0 \neq a \leq b$. Заметим что, последнее условие имеет другие эквивалентные формулировки. Фундамент всегда ультраслабо плотен в M и поэтому тотален на M_* . Поэтому следующее утверждение верно и для фундаментов.

Предложение 5.2. Пусть Y^+ — такой наследственный конус в M^+ , что соответствующее подпространство Y тотально на M_* . Тогда $|\sigma|(M_*, Y)$ -топология согласуется с двойственностью $\langle M_*, Y \rangle$.

В § 6 параграфе доказываются ряд вспомогательных лемм, необходимых для доказательства основной теоремы данной диссертации. Эти леммы устанавливают связь между сходимостью в $|\sigma|(L_1(\tau), Y)$ -, $\sigma(L_1(\tau), Y)$ -топологиях и сходимостью локально по мере, при условии, что множество Y — фундамент в M .

Лемма 6.1. Пусть Y — фундамент в M . Если $\{x_\alpha\}$ такая сеть в $L_1(\tau)$, что $x_\alpha \rightarrow 0$ в $|\sigma|(L_1(\tau), Y)$ -топологии, то $x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$.

Лемма 6.2. Пусть Y — фундамент в M и $\{x_\alpha\}$ — сеть в $L_1(\tau)$ такая, что $x_\alpha \rightarrow 0$ в $\sigma(L_1(\tau), Y)$ -топологии, тогда существует сеть $y_\beta \xrightarrow{\tau} 0$, где каждый элемент y_β есть выпуклая комбинация элементов $\{x_\alpha\}$.

Лемма 6.3. Пусть след τ конечен, Y — фундамент в M , $\{x_\alpha\}$ — сеть в $L_1(\tau)$ и $x, x_0 \in L_1(\tau)$. Если существует $y \in \mathcal{K}$ такой, что верно $-\operatorname{Re}(y) \leq \operatorname{Re}(x_\alpha) \leq \operatorname{Re}(y)$ и $-\operatorname{Im}(y) \leq \operatorname{Im}(x_\alpha) \leq \operatorname{Im}(y)$ при любом α , $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ и $x_\alpha \rightarrow x_0$ в $\sigma(L_1(\tau), Y)$ -топологии, то $x = x_0$.

Лемма 6.5. Если сеть $\{x_\alpha\}$ в $L_1(\tau)$ такова, что $\kappa(x_\alpha) \rightarrow \varphi \in M^*$ в $\sigma(M^*, M)$ -топологии и $\operatorname{Pr}(\varphi) = \kappa(x)$ для некоторого $x \in L_1(\tau)$, то существует фундамент Y в M такой, что $x_\alpha \rightarrow x$ в $\sigma(L_1(\tau), Y)$ -топологии.

В § 7 параграфе доказываются основная теорема данной диссертации. Доказательство теоремы проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы 1.1 из работы Бухвалова-Лозановского. Для случая конечного следа данная теорема доказана О. Е. Тихоновым.⁵ При доказательстве теоремы существенно используются леммы § 6.

Далее через κ будем обозначать каноническое вложение пространства $L_1(\tau)$ в пространство M^* непрерывных по норме функционалов на M . Как известно, $M^* = M_* \oplus M_g^*$, где M_g^* — такое подпространство M^* , что любой функционал $\phi \in M^*$ единственным образом представляется в виде

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \quad \phi_1 \in M_*, \quad \phi_2 \in M_g^*,$$

⁵Тихонов О. Е. Замкнутые по мере выпуклые множества в некоммутативных L^1 -пространствах // XXVI Воронежская зимняя математическая школа: Сб. науч. тр. — Воронеж: Изд-во ВГУ. — 1994. — С. 90.

причем $\|\phi\| = \|\phi_1\| + \|\phi_2\|$. Функционалы из M_* называются *сингулярными*. Через Pr будем обозначать проектор Такесаки, фигурирующий в его теореме о разложении непрерывного по норме функционала на алгебре фон Неймана в виде суммы нормального и сингулярного функционалов.

Теорема 7.1. Пусть V — непустое выпуклое подмножество $L_1(\tau)$, W — $\sigma(M^*, M)$ -замыкание множества $\kappa(V)$. Тогда

а) если V замкнуто в топологии локальной сходимости по мере в $L_1(\tau)$, то

$$\text{Pr } W = \kappa(V); \quad (*)$$

б) если V ограничено и удовлетворяет (*), то V замкнуто в топологии локальной сходимости по мере в $L_1(\tau)$.

Третья глава диссертации посвящена приложениям основной теоремы, связанным со слабой секвенциальной полнотой факторпространств пространства $L_1(\tau)$.

В § 8 доказывается некоммутативный аналог теоремы Годфруа.

Теорема 8.1. Пусть X — некоторое банахово подпространство пространства $L_1(\tau)$. Если единичный шар X замкнут в топологии локальной сходимости по мере, то факторпространство $L_1(\tau)/X$ слабо секвенциально полно.

Доказательство этой теоремы разбивается на три утверждения, одно из которых доказывается с использованием основной теоремы данной диссертации, а остальные аналогичны соответствующим утверждениям из работы Годфруа.

В § 9 рассматривается класс подпространств пространства $L_1(\tau)$, удовлетворяющих теореме, приведенной выше. Это пространства вида $\Gamma(P) = \{x \in L_1(\tau) \mid p^\perp x p = 0 \text{ для всех } p \in P\}$, построенные по некоторому подмножеству $P \subset M^{pr}$. Заметим, что для любого проектора $p \in P$ подпространство, на которое он действует, инвариантно относительно действия произвольного оператора из $\Gamma(P)$. На основе теоремы 8.1 доказывается:

Следствие 9.1. Факторпространство $L_1(\tau)/\Gamma(P)$ слабо секвенциально полно.

§ 10 посвящен изучению некоторых свойств некоммутативного пространства Харди H_1 . Основным результатом § 10 является описание структуры некоммутативных пространств Харди, ассоциированных с группой внутренних $*$ -автоморфизмов. А именно, доказывается, что в случае существования точного нормального условного ожидания, действующего из исходной алгебры в алгебру неподвижных (относительно заданной группы внутренних $*$ -автоморфизмов) операторов, некоммутативное пространство Харди есть пространство, построенное по некоторому семейству проекторов.

Пусть $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ультраслабо непрерывная группа $*$ -автоморфизмов M , причем след τ является α_t -инвариантным. Для $f \in L_1(\mathbb{R})$ определено отображение⁶ из M в M по формуле

$$\alpha_f(x) = \int f(t)\alpha_t(x)dt, \quad x \in M,$$

где интеграл понимается в $*$ -слабом смысле, то есть

$$\phi(\alpha_f(x)) = \int f(t)\phi(\alpha_t(x))dt, \quad \forall \phi \in M_*.$$

Отображение α_f можно распространить на пространство $L_1(\tau)$. Определим слабо непрерывную группу автоморфизмов $\{\alpha'_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ пространства M_* по формуле

$$\alpha'_t(\phi) = \phi \circ \alpha_{-t}, \quad (\phi \in M_*).$$

Также как и выше, для $f \in L_1(\mathbb{R})$ определено отображение из M_* в M_* по формуле

$$\alpha'_f(\phi) = \int f(t)\alpha'_t(\phi)dt, \quad \phi \in M_*,$$

где интеграл понимается в слабом смысле, то есть

$$\alpha'_f(\phi)(x) = \int f(t)\alpha_t(\phi)(x)dt = \int f(t)\phi(\alpha_{-t}(x))dt, \quad \forall x \in M.$$

Отождествляя оператор $x \in M \cap L_1(\tau)$ с функционалом из M_* , доказывается, что $\alpha'_t(x) = \alpha_t(x)$ и $\alpha'_f(x) = \alpha_f(x)$ для всех $x \in M \cap L_1(\tau)$.

⁶Loebl R. I., Muhli P. S. *Analyticity and flows in von Neumann algebras* // J. Func. Anal. - 1978. - V. 29. - N. 2. - P. 214-252.

Для $x \in M \cup L_1(\tau)$ определяется спектр Аресона $\sigma(x) = \bigcap \ker \hat{f}$ (где \hat{f} — преобразование Фурье функции f), пересечение берется по тем функциям f , что $\alpha_f(x) = 0$. Рассмотрим следующие пространства

$$H_\infty = \{x \in M \mid \sigma(x) \subset [0, \infty)\},$$

$$H_\infty^0 = \{x \in M \mid \sigma(x) \subset (0, \infty)\},$$

$$H_1 = \{x \in L_1(\tau) \mid \sigma(x) \subset [0, \infty)\}.$$

Если $M = L_\infty(\mathbf{R})$ и $(\alpha_t(x))(s) = x(t+s)$ — группа сдвигов (не являющаяся группой внутренних автоморфизмов), то данные пространства совпадают с соответствующими пространствами Харди на прямой.

Алгебра M называется \mathbf{R} -финитной (относительно α_t), если существует точное нормальное α_t -инвариантное ($t \in \mathbf{R}$) условное ожидание Φ из M в $H_\infty \cap H_\infty^*$, где множество $H_\infty^* = \{x^* \mid x \in H_\infty\}$. Заметим, что множество $H_\infty \cap H_\infty^*$ является алгеброй фон Неймана неподвижных при действии $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ операторов.

Пусть $\{U_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ сильно непрерывная унитарная группа в H , с генератором A , присоединенным к M и $\alpha_t(x) = U_t x U_t^*$, то есть $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ — группа внутренних $*$ -автоморфизмов M . С группой $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ будем связывать множество $P = \{p_{[\lambda, \infty)}\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ — линейно упорядоченное множество спектральных проекторов оператора A . Согласно работе Р. И. Лоебла и П. С. Мюли можно утверждать, что

- i) $H_1 = \{x \in L_1(\tau) \mid \tau(xy) = 0 \text{ для всех } y \in H_\infty^0\}$,
- ii) Если, алгебра M является \mathbf{R} -финитной, то $H_\infty^0 = \{x \in H_\infty \mid \Phi(x) = 0\}$,
- iii) Пусть $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ ультраслабо непрерывная группа внутренних $*$ -автоморфизмов M и P — соответствующее линейно упорядоченное множество спектральных проекторов. Тогда $H_\infty = \{x \in M \mid p^\perp x p = 0 \text{ для всех } p \text{ из } P\}$.

Используя указанные факты и следствие 9.1 просто доказывается

Следствие 10.4. Пусть $M = B(H)$, tr — канонический след и $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ произвольная ультраслабо непрерывная группа $*$ -автоморфизмов $B(H)$. Тогда $L_1(\text{tr})/H_1$ слабо секвенциально полно.

Следующая лемма показывает, что для произвольной \mathbf{R} -финитной алгебры M с полуконечным следом пространство H_1 , построенное по группе внутренних автоморфизмов, является пространством вида $\Gamma(P)$.

Лемма 10.5. Пусть $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ — ультраслабо непрерывная группа внутренних $*$ -автоморфизмов \mathbb{R} -финитной алгебры M и P — соответствующее линейно упорядоченное множество спектральных проекторов. Тогда $H_1 = \Gamma(P)$.

С помощью этой леммы и следствия 9.1 получаются следующие утверждения.

Следствие 10.6. Факторпространство $L_1(\tau)/H_1$ слабо секвенциально полно.

Следствие 10.7. Пусть $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ — ультраслабо непрерывная группа внутренних $*$ -автоморфизмов M и след τ — конечен. Тогда факторпространство $L_1(\tau)/H_1$ слабо секвенциально полно.

В § 11 показывается слабая секвенциальная полнота факторпространства $L_1(\tau)/L_1(\tau_N)$, где пространство $L_1(\tau_N)$ ассоциировано с подалгеброй фон Неймана N исходной алгебры фон Неймана и следом τ_N , являющимся полуконечным ограничением следа τ на алгебру N .

Пусть N — подалгебра фон Неймана алгебры M и τ_N — ограничение следа τ на N . Пусть τ_N также полуконечен. Обозначим $\mathcal{K}(N)$ — множество вполне измеримых операторов относительно τ_N . Очевидно, что $L_1(\tau_N)$ является замкнутым подпространством пространства $L_1(\tau)$. Кроме топологии локальной сходимости по мере относительно τ_N , в пространстве $L_1(\tau_N)$ определена топология, индуцированная из пространства \mathcal{K} с топологией локальной сходимости по мере относительно следа τ .

Теорема 11.2. Единичный шар пространства $L_1(\tau_N)$ замкнут в \mathcal{K} в топологии локальной сходимости по мере относительно τ .

Эта теорема доказывается с использованием свойств условного ожидания из $L_1(\tau)$ в $L_1(\tau_N)$.

Как следствие теоремы 8.1 и теоремы 11.2 получается следующее утверждение.

Следствие 11.3. Факторпространство $L_1(\tau)/L_1(\tau_N)$ слабо секвенциально полно.

1. Доказано, что изучение выпуклых ограниченных по норме подмножеств пространства $L_1(\tau)$, замкнутых в топологии локальной сходимости по мере, может быть сведено к изучению выпуклых компактных множеств в сопряженном к алгебре фон Неймана пространстве.

2. Доказано, что если X — некоторое банахово подпространство пространства $L_1(\tau)$ и единичный шар X замкнут в топологии локальной сходимости по мере, то факторпространство $L_1(\tau)/X$ слабо секвенциально полно.

3. Изучена структура некоммутативного пространства Харди H_1 , построенного по условному ожиданию в полуконечной алгебре фон Неймана и связанной с ним группе внутренних $*$ -автоморфизмов.

4. Доказано, что факторпространство $L_1(\tau)/L_1(\tau_N)$ слабо секвенциально полно, где N — такая подалгебра фон Неймана алгебры M , что ограничение τ_N следа τ на N является полуконечным следом.

Автор благодарна своему научному руководителю Анатолию Николаевичу Шерстневу за постоянное внимание и помощь в работе над диссертацией. Автор также выражает глубокую признательность своему научному консультанту Олегу Евгеньевичу Тихонову за всестороннюю поддержку.

1. Скворцова Г. Ш. *Выпуклые множества в некоммутативных L^1 -пространствах, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере* // Тезисы докл. II респ. науч. конф. молодых уч. и спец. (Казань. 28 июня - 1 июля 1996 г.) Казань: Издательство ДАС – 1996. – С. 9.

2. Скворцова Г. Ш. *Некоммутативный аналог теоремы Бухвалова-Лозановского о выпуклых подмножествах L_1* // Казанский университет. Казань, 2000. – 12 С. – Деп. в ВИНИТИ. – 24.05.00. – N. 1489-B00.

3. Скворцова Г. Ш. *Слабая секвенциальная полнота одного факторпространства в пространстве интегрируемых операторов* // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. – Т. 8. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы V Казанской международной шк.-конф. (Казань. 27 июня - 4 июля 2001 г.) – Казань: Издательство ДАС – 2001. – С. 210-211.

4. Скворцова Г. Ш. *О слабой секвенциальной полноте факторпространств пространства интегрируемых операторов.* // Известия ВУЗов. Математика. – 2002. – N. 9. – С. 71-74.

5. Скворцова Г. Ш., Тихонов О. Е. *Выпуклые множества в некоммутативных L^1 -пространствах, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере* // Известия ВУЗов. Математика. – 1998. – N. 8. – С. 48-55.

6. Скворцова Г. Ш., Тихонов О. Е. *Слабая секвенциальная полнота факторпространств некоммутативных L_1 -пространств* // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы шк.-конф. пось. 130-летию со дня рожд. Д. Ф. Егорова. – Казань: Издательство "Казанское мат. общество" Издательство ДАС – 1999. – С. 203-204.