

0-727183

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ УНИВЕРСИТЕТ им.Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО

На правах рукописи

УДК 519. 714

*Библиотеке КГУ
от автора
Нуреев*

НУРМЕЕВ Наиль Нуревич

ОЦЕНКИ ДИАПАЗОНА ТИПИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ФУНКЦИОНАЛОВ СЛОЖНОСТИ

01. 01. 09 - математическая кибернетика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

САРАТОВ - 1987

Работа выполнена на кафедре теоретической кибернетики Казанского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственного университета имени В.И.Ульянова-Ленина

Научный руководитель:

- кандидат физико-математических наук,
доцент Р.Г. Нигматуллин

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук
Н.П.Редьшн
- кандидат физико-математических наук,
доцент В.А.Твердохлебов

Ведущая организация:

- Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском государственном университете

Защита состоится 10 сентября 1987 г. в _____ часов на заседании специализированного совета К 063.74.04 при Саратовском государственном университете имени Н.Г.Чернышевского по адресу: 410601, г.Саратов, ул.Астраханская, д.83.

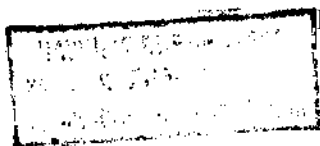
С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Саратовского университета.

Автореферат разослан "_____" _____ 1987 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат физико-математических
наук, доцент



01104



П.Ф.Недорезов

Актуальность темы. Алгоритмические трудности, связанные с неустранимостью перебора при построении минимальных схем, способствовали возникновению и развитию асимптотического подхода к задаче синтеза управляющих систем. При этом подходе требуется найти алгоритм, который при $n \rightarrow \infty$ для почти всех функций из класса $K(n)$ строит не обязательно минимальные, но достаточно экономные схемы, причем трудоемкость этого алгоритма должна быть не очень высока. Применение асимптотического подхода позволило установить явление очень большой степени общности - эффект Шеннона. Этот эффект заключается в следующем: почти все функции из класса $K(n)$ имеют асимптотически одинаковую сложность; эта сложность равна сложности самой сложной функции из $K(n)$. Однако в некоторых случаях эффект Шеннона установить не удается или он заведомо не имеет места. Тогда возникает вопрос, а выполняется ли первое утверждение эффекта Шеннона, то есть имеют ли почти все функции из $K(n)$ асимптотически одинаковую сложность. В случае положительного ответа на этот вопрос говорят о полуэффекте Шеннона.

Полуэффект Шеннона является важной статистической характеристикой множества функций $K(n)$ при реализации их в данном классе управляющих систем в том случае, когда полный эффект Шеннона места не имеет или его наличие не удается доказать. Для установления полуэффекта Шеннона достаточно получить асимптотически совпадающие верхнюю и нижнюю оценки для сложности почти всех функций из класса $K(n)$. В тех случаях, когда это удается, требуется принципиально иная методика. Примером такой методики является вариационный принцип Р.Г.Нигматуллина. При установлении полуэффекта Шеннона с помощью вариационного принципа доказывалось существование асимптотически совпадающих верхней и нижней оценок для значений сложности почти всех функций из $K(n)$, хотя сами эти оценки не находятся.

В тесной связи с вопросами нахождения верхней и нижней оценок для сложности почти всех функций из класса $K(n)$ находится задача, состоящая в том, чтобы, оценить сверху, насколько близкими друг к другу могут быть эти оценки, или, другими сло-

вами, задача нахождения диапазона типичных значений сложности функций из множества $K(n)$ при реализации их в данном классе управляющих систем. Достаточно точные оценки диапазона типичных значений сложности функций из класса $K(n)$ позволяют устанавливать полуэффект Шеннона, а также позволяют делать выводы о возможности улучшения известных верхних и нижних оценок сложности почти всех функций из $K(n)$ при реализации их в данном классе управляющих систем.

Цель работы заключается в разработке методов получения оценок диапазона типичных значений функционалов сложности, получении оценок диапазона типичных значений для ряда широко известных в теории управляющих систем функционалов сложности и установлении для них полуэффекта Шеннона.

Методика исследования. В работе используются методы дискретного анализа и математической кибернетики.

Научная новизна. Введено понятие оценки диапазона типичных значений функционала сложности и установлена его связь с известными понятиями и задачами математической кибернетики и дискретной математики. Предложен метод получения оценок диапазона типичных значений функционалов сложности, основанный на вариационном принципе Р. Г. Ницетудлина. Для ряда важных с точки зрения теории и приложений функционалов сложности получены оценки диапазона их типичных значений, существенно более точные, чем оценки, получающиеся из сопоставления ранее известных верхних и нижних оценок для типичных значений. Для этих функционалов с использованием полученных оценок установлен полуэффект Шеннона; для большинства из них факт наличия полуэффекта Шеннона ранее известен не был.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, характеризуют сложностные свойства важных для практических применений классов управляющих систем, а также свойства графов, существенные при реализации функций в виде интегральных схем. Результаты и методы, развитые в работе, могут найти применение в математической теории синтеза управляющих систем и при исследовании оптимизационных задач дискретного анализа. Некоторые результаты и методы работы используются в спецкурсах, читаемых на кафедре теоретической кибернетики Казанского госуниверситета. ^Бсть результатов рабо-

ты включена в монографию Р.Г.Нигматуллина "Сложность булевых функций"¹¹, Казань, изд-во КГУ, 1983.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на У Всесоюзном семинаре по комбинаторному анализу (Москва, 1981), на У1 Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики (Саратов, 1983), на Всесоюзном семинаре по дискретной математике и её приложениям (Москва, 1984), на семинаре по графам, гиперграфам и алгебраическим системам (Одесса, 1979-1981), на семинаре "Дискретный анализ" в Институте математики СО АН СССР (1981, 1986), на семинарах "Синтез управляющих систем" (1982) и "Дискретный анализ" (1982) в Московском госуниверситете, на научных конференциях и семинарах в Казанском госуниверситете (1978-1986).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти печатных работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из оглавления, введения, трех глав и списка литературы, содержащего 55 наименований. Первая и вторая главы содержат по два параграфа, третья глава содержит четыре параграфа. Общий объем работы 102 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении содержится обоснование актуальности решаемых задач, описывается структура работы, а также кратко излагается содержание последующих глав работы.

В первой главе рассматриваются оценки диапазона типичных значений абстрактных функционалов сложности.

В § 1.1 вводится понятие оценки величины диапазона типичных значений функционала сложности и устанавливается связь этого понятия с известными понятиями и задачами.

Пусть $K(n)$ - некоторое конечное множества зависящее от целочисленного неотрицательного параметра n , $|K(n)| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, P - неотрицательный функционал, заданный на множестве $K(n)$. Величина $P(f)$ интерпретируется как сложность реализации $f \in K(n)$.

Будем говорить, что величина диапазона типичных значений функционала P на множестве $K(n)$ не превосходит $z(n)$ (сокращенно: $\Delta(P, K(n)) \leq z(n)$), если для некоторой функции $t(n)$ почти все $f \in K(n)$ удовлетворяют неравенствам $t(n) \leq P(f) \leq t(n) + z(n)$. Выражение $\Delta(P, K(n)) = o(z(n))$ означает, что для некоторой функции $d(n)$ такой, что $d(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, выполняется соотношение $\Delta(P, K(n)) \leq d(n)z(n)$. Говорят, что для пары $(P, K(n))$ имеет место полуэффект Шеннона, если существует функция $P'(n)$ такая, что для почти всех $f \in K(n)$ выполняется соотношение $P(f) \sim P'(n)$.

• Теорема I.I.1. Для пары $(P, K(n))$ имеет место полуэффект Шеннона тогда и только тогда, когда существует функция $\xi(n) \geq 0$ такая, что

- 1) $P(f) \geq \xi(n)$ для почти всех $f \in K(n)$;
- 2) $\Delta(P, K(n)) = o(\xi(n))$;

Обозначим через $\overline{P(K(n))}$ среднее значение функционала/»

на множестве $K(n)$, то есть $\overline{P(K(n))} = \frac{1}{|K(n)|} \sum_{f \in K(n)} P(f)$.

Теорема I.I.2. Соотношение $P(f) \sim \overline{P(K(n))}$ выполняется для почти всех $f \in K(n)$ тогда и только тогда, когда существует функция $\xi(n) \geq 0$, удовлетворяющая условиям

- 1) $P(f) \geq \xi(n)$ для почти всех $f \in K(n)$;
- 2) $\Delta(P, K(n)) = o(\xi(n))$;
- 3) для некоторой константы $c > 0$

$$\frac{1}{|K(n)|} \sum_{P(f) > c\xi(n)} P(f) = o(\xi(n)).$$

Теорема I.I.2 не только характеризует условия, при которых асимптотика типичных значений функционала P на множестве $K(n)$ совпадает с его средним значением на этом множестве, но и дает новый способ нахождения асимптотики типичных значений. Применение этого способа позволяет в некоторых случаях получать асимптотику $P(f)$ для почти всех $f \in K(n)$ проще, чем другими методами.

В § 1.2 предложен метод получения оценок диапазона типичных значений функционалов сложности, основанный на вариационном принципе Р.Г.Нигматуллина.

Прежде чем сформулировать основные результаты этого параграфа, приведем несколько определений.

E_k^m - мерной k -ичной решеткой называется множество, состоящее из всех векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ таких, что $x_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Решетку E_k^m называют также m - мерным единичным кубом, а вектора из E_k^m - булевыми векторами. Расстоянием Хэмминга $\rho_m(x, y)$ между двумя векторами $x, y \in E_k^m$ называется количество координат, в которых они различаются. Расстоянием между двумя непустыми подмножествами A и B множества E_k^m называется число $R_m(A, B) = \min_{\alpha \in A, \beta \in B} \rho_m(\alpha, \beta)$. С натуральными числами s и t такими, что $1 \leq s \leq k^m$, $1 \leq t \leq k^m$, свяжем функцию $R_m(s, t) = \min_{|A|=s, |B|=t} R_m(A, B)$.

Обозначим через $S(m, k, i)$ множество вершин $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ решетки E_k^m таких, что $\sum_{j=1}^m x_j = i$, а через $s(m, k, i)$ - количество вершин в множестве $S(m, k, i)$ ($i = 0, 1, \dots, (k-1)m$).

Теорема 1.2.1. Если $0 \leq z \leq s \leq (k-1)m$, то

$$R_m \left(\sum_{i=0}^z s(m, k, i), \sum_{i=s}^{(k-1)m} s(m, k, i) \right) \leq s - z.$$

Теорема 1.2.2. Если $A(m) \subseteq E_k^m$, $B(m) \subseteq E_k^m$,

$|A(m)| \geq c' k^m$, $|B(m)| \geq c'' k^m$, где c', c'' - произвольные положительные константы, то существует константа $c = c(c', c'')$ такая, что для всех m выполняется неравенство

$$R_m(A(m), B(m)) \leq c \sqrt{m}.$$

Теоремы 1.2.1 и 1.2.2 является обобщением результатов Р.Г.Нишатуллина, доказавшего соответствующие утверждения для случая $k=2$.

Пусть $\psi: K(n) \rightarrow E_k^m$ - некоторая взаимно однозначная

функция. Функцию φ будем называть кодирующей, а $\varphi(f)$ - кодом элемента $f \in K(n)$. Вариацией параметра ρ на паре элементов $f, g \in K(n)$ называется величина $V_\rho(f, g) = |\rho(f) - \rho(g)|$. Вариацией параметра ρ на расстоянии z при кодировании ρ будем называть величину $V_{\rho, K(n)}^\varphi(z) = \max_{f, g \in K(n)} V_\rho(f, g)$, где максимум берется по всем парам $f, g \in K(n)$ таким, что $\rho_m(\varphi(f), \varphi(g)) \leq z$.

Теорема 1.2.3. Пусть $|K(n)| \asymp |E_*^{m(n)}|$, $\varphi_n : K(n) \rightarrow E_*^{m(n)}$ - кодирующая функция. Тогда

$$\Delta(\rho, K(n)) \leq V_{\rho, K(n)}^{\varphi_n}(d(n)\sqrt{m(n)}),$$

где $d(n)$ - произвольная функция такая, что $d(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1.2.5. Пусть $|K(n)| = |E_*^{m(n)}|$,

$\varphi_n : K(n) \rightarrow E_*^{m(n)}$ - кодирующая функция. Тогда для любой функции $\omega(n)$ такой, что $1 \leq \omega(n) \leq \sqrt{m(n)}$, справедлива оценка

$$\Delta(\rho, K(n)) \leq d(n) \frac{\sqrt{m(n)}}{\omega(n)} V_{\rho, K(n)}^{\varphi_n}(\omega(n)),$$

где $d(n)$ - произвольная функция такая, что $d(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

В последующих двух главах рассматриваются конкретные функционалы сложности. Выбор этих функционалов производился в соответствии со следующими тремя условиями:

а) функционалы должны быть хорошо известными в математической кибернетике и дискретной математике и представлять интерес с точки зрения теории и её приложений;

б) для этих функционалов предложенные в работе методы должны давать существенно более сильные оценки диапазона их типичных значений, чем ранее известные методы;

в) при получении оценок диапазона типичных значений для этих функционалов должны раскрываться различные особенности

применения общего метода, предложенного в первой главе, то есть исследование этих функционалов должно давать определенный вклад в развитие методологии получения оценок диапазона типичных значений.

Для всех рассмотренных функционалов, получены оценки диапазона их типичных значений более точные, чем ранее известные, и на основе этих оценок для них установлен полуэффект Шеннона.

Во второй главе рассматриваются функционалы, заданные на подклассах множества булевых функций. При получении оценок диапазона типичных значений для этих функционалов существенную роль играет учет специфики рассматриваемого функционала при выборе кодирующей функции.

В § 2.1 рассматриваются схемная сложность и глубина монотонных булевых функций. Пусть K_1 - класс контактных схем, K_2 - класс контактных параллельно-последовательных схем (Π -схем), K_3 - класс Π -схем с замыкающими контактами, K_4 - класс схем из функциональных элементов в монотонном базисе $\{x \& y, x \vee y\}$. Под сложностью схемы понимается число контактов (для классов K_1, K_2, K_3) или число функциональных элементов (для класса K_4) в схеме. Сложностью реализации монотонной булевой функции f - в классе K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) называется число $L_i(f)$, равное минимальной сложности схемы из класса K_i , реализующей эту функцию. Обозначим через $M(n)$ множество монотонных булевых функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Т е о р е м а 2.1.1. Справедливы следующие оценки

$$\Delta(L_i, M(n)) \leq 2n^{\frac{3}{4}} 2^{\frac{3}{4}n} \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

С л е д с т в и е 2.1.1. Для каждой из пар $(L_i, M(n))$ ($i = 1, 2, 3, 4$) имеет место полуэффект Шеннона.

Пусть $D_B(f)$ означает глубину булевой функции f при реализации её формулами в базисе B .

Т е о р е м а 2.1.2. Для базиса $B_1 = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$ справедлива оценка

$$\Delta(D_{B_1}, M(n)) \leq 2.$$

Следствие 2.1.2. Для базиса $B_2 = \{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \dots\}$ справедлива оценка

$$\Delta(D_{B_2}, M(n)) \leq 2.$$

В § 2.2 рассматривается реализация симметрических булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ).

Пусть $S(n)$ - множество всех симметрических булевых функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Для булевой функции f через $l(f)$ обозначим длину её кратчайшей ДНФ, а через $L(f)$ - сложность (количество букв) её минимальной ДНФ.

Показано, что справедливы следующие оценки:

$$\Delta(l, S(n)) \leq d(n) \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{4}} 2^n,$$

$$\Delta(L, S(n)) \leq d(n) (\ln n)^{\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}} 2^n,$$

где $d(n)$ - произвольная функция такая, что $d(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Использование этих оценок позволило получить более простое по сравнению с ранее известными доказательство того факта, что для почти всех функций $f \in S(n)$ справедливы соотношения $l(f) \sim 2^{n-2}$, $L(f) \sim n 2^{n-2}$.

В третьей главе рассматриваются функционалы, заданные на классах функций; для получения оценок диапазона их типичных значений применяется стандартное кодирование.

В § 3.1 рассматривается сложность реализации функций k -значной логики схемами из функциональных элементов.

Пусть $P_k(n)$, где $k \geq 2$, - множество всех функций k -значной логики от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , $L_B(f)$ - сложность реализации функции $f \in P_k(n)$ схемами из функциональных элементов в оазисе B (предполагается, что B - функционально полная система в P_k).

Теорема 3.1.1. Для любого $k \geq 2$, любого функционально полного в P_k базиса B с неотрицательными весами элементов справедливо соотношение

$$\Delta(L_B, P_k(n)) \leq d(n) \sqrt{k^n},$$

где $\alpha(n)$ - любая функция такая, что, $\alpha(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Т е о р е м а 3.1.2. При любом $k \geq 2$ и любом конечном функционально полном в P_k базисе B с положительными весами элементов для $\Pi : (L_B, P_k(n))$ имеет место полуэффект Шеннона.

Оценка, полученная в теореме 3.1.1, уточняет ранее известные оценки. Утверждение теоремы 3.1.2 ранее было известно для случая $k=2$ и лишь для некоторых типов базисов при $k \geq 3$.

В § 3.2 улучшаются оценки диапазона типичных значений сложности булевых функций при реализации их формулами, Π -схемами, контактными схемами, а также оценки диапазона типичных значений глубины булевых функций, следующие из сопоставления ранее известных верхних и нижних оценок типичных значений указанных функционалов.

Пусть для булевой функции f $L_\Phi^B(n), L_{KC}(f)$ означают сложность реализации функции f соответственно в классе формул в базисе B и в классе контактных схем, а $D_B(f)$ - глубину функции f при реализации формулами в базисе B .

Т е о р е м а 3.2.1. Для любой функционально полной в P_2 системы B с неотрицательными весами элементов справедливо соотношение

$$\Delta(L_\Phi^B, P_2(n)) \leq \alpha(n) n \sqrt{2^n},$$

где $\alpha(n)$ - произвольная функция такая, что $\alpha(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Т е о р е м а 3.2.2* Справедливо соотношение

$$\Delta(L_{KC}, P_2(n)) \leq \alpha(n) n \sqrt{2^n},$$

где $\alpha(n)$ - произвольная функция такая, что $\alpha(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Т е о р е м а 3.2.3. Для базиса $B_2 = \{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \bar{x}\}$ справедливо соотношение

$$\Delta(D_{B_2}, P_2(n)) \leq 2.$$

В § 3.3 рассматривается реализация булевых (P, \mathcal{F}) -мат-

риц вентильными (P, Q) - схемами.

Вентильной схемой называется ориентированный граф с ве-
делеинными вершинами (полюсами). Ребра этого графа называются
вентильями. Вентильная схема называется вентильной (P, Q) - схе-
мой, если она имеет P входных полюсов (входов) a_1, \dots, a_P и
 Q выходных полюсов (выходов) b_1, \dots, b_Q / причем множества
входов и выходов не пересекаются, и не содержит ориентирован-
ных путей, соединяющих между собой входы, соединяющих между
собой выходы, ведущих от выходов во входы. Каждой вентильной
 (P, Q) - схеме S поставим в соответствие булеву (P, Q) - мат-
рицу $A = \| \alpha_{ij} \|$ ($1 \leq i \leq P, 1 \leq j \leq Q$), где $\alpha_{ij} = 1$,
если в S существует ориентированный путь, ведущий из входа
 a_i в выход b_j , и $\alpha_{ij} = 0$, если в S такого пути нет. Будем
говорить в этом случае, что схема S реализует матрицу A .
Сложностью $B(S)$ вентильной схемы S называется количество
вентилей в схеме S . Глубиной вентильной (P, Q) - схемы назы-
вается максимальное число вентилей в ориентированном пути, ве-
дущем от входа в выход. Обозначим через $A(P, Q)$ множество
всех булевых (P, Q) - матриц. Введем следующие обозначения:

$B_z(A)$ - минимальная сложность вентильной (P, Q) - схе-
мы глубины не более z , реализующей матрицу $A \in A(P, Q)$;

$$B_z(P, Q) = \max_{A \in A(P, Q)} B_z(A);$$

$B(A)$ - минимальная сложность вентильной (P, Q) - схе-
мы (без ограничений на глубину), реализующей матрицу $A \in A(P, Q)$;

$$B(P, Q) = \max_{A \in A(P, Q)} B(A).$$

Теорема 3.3.1. Пусть $P_n \leq Q_n, Q_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.
Тогда справедливы оценки

$$\Delta(B_z, A(P_n, Q_n)) \leq d(n) B_z(P_n, [\sqrt{P_n Q_n}]), \quad z=2, 3, \dots,$$

$$\Delta(B, A(P_n, Q_n)) \leq d(n) B(P_n, [\sqrt{P_n Q_n}]),$$

где $d(q)$ - произвольная функция такая, что $d(q) \rightarrow \infty$ при
 $q \rightarrow \infty$.

Утверждение теоремы 3.3.1 уточняет ранее известные оценки.

Т е о р е м а 3.3.2. Пусть $P_n \leq \varphi_n$, $\varphi_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для каждой из пар $(B, A(P_n, \varphi_n))$, $(B_2, A(P_n, \varphi_n))$ ($\tau = 2, 3, \dots$) выполняется полуэффект Шеннона.

Утверждение теоремы 3.3.2 ранее было известно при наличии дополнительных ограничений на последовательность пар (P_n, φ_n) .

В § 3.4 рассматриваются числовые характеристики n -вершинных графов, связанные с разложением графа на ациклические, пленарные и внешнепланарные подграфы*

Пусть $\mathcal{G}(n)$ - множество всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с n занумерованными вершинами x_1, x_2, \dots, x_n .

Граф называется пленарным, если его можно уложить на плоскости так, что никакие два его ребра не будут пересекаться. Пленарный граф называется внешнепланарным, если его можно уложить на плоскости так, что никакие два его ребра не будут пересекаться и все его вершины будут принадлежать одной грани.

Толщиной $t(G)$ (внешнепланарной толщиной $opt(G)$) графа G называется минимальное число его пленарных (соответственно внешнепланарных) подграфов, объединение которых дает G . Древесностью $\alpha(G)$ графа G называется минимальное число его ациклических подграфов, объединение которых дает G . Вершинной толщиной $t_1(G)$ (соответственно вершинной внешнепланарной толщиной $opt_1(G)$), вершинной древесностью $\alpha_1(G)$ графа G будем называть наименьшее число подмножеств в разбиении множества вершин графа G , в котором каждое подмножество порождает пленарный (соответственно внешнепланарный, ациклический) подграф.

функционалы $t, opt, \alpha, t_1, opt_1, \alpha_1$ характеризуют топологические свойства графов. Изучение свойств этих функционалов имеет большое теоретическое и практическое значение. Так, например, задачи нахождения перечисленных числовых характеристик графов возникают в технике печатного монтажа электрических схем.

Т е о р е м а 3.4.1. Справедливы соотношения

$$\Delta(t, G(n)) \leq d(n)\sqrt{n},$$

$$\Delta(\text{opt}, G(n)) \leq d(n)\sqrt{n},$$

$$\Delta(\alpha, G(n)) \leq d(n)\sqrt{n},$$

где $d(n)$ - произвольная функция такая, что $d(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3.4.2. Для каждой из пар $(t, G(n))$, $(\text{opt}, G(n))$, $(\alpha, G(n))$ имеет место полуаффект Шеннона.

Теорема 3.4.3. Для почти всех графов $G \in G(n)$ справедливо соотношение $\alpha(G) \sim \frac{n}{4}$.

Теорема 3.4.5. Для почти всех графов $G \in G(n)$

$$t_1(G) \sim \text{opt}_1(G) \sim \alpha_1(G) \sim \frac{n}{2 \log_2 n}.$$

Автор глубоко благодарен научному руководителю Роталу Габдулхаевичу Нигматуллину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Армеев Н.Н. О сложности схемной реализации почти всех монотонных булевых функций // Известия вузов. Математика. - 1981. - * 5. - С. 64-70.

2. Армеев Н.Н. О покрытиях - вершинных графов планарными, внешнепланарными и ациклическими подграфами // Вероятностные методы и кибернетика. - Казань: Изд-во КИУ, IS&3, - Вш. 19. - С. 78-68.

3. Нурмеев Н.Н. Об одном способе нахождения асимптотики типичных значений функционалов сложности / Казан.ун-т - Казань, 1983. - 16 с. - Деп. в ВНИПИ 21.03.1964, й 1529-84 Деп.

4. Нурмеев Н.Н. О диапазоне типичных значений сложности функции k -значной логики / Казан.ун-т - Казань, 1983. - 20 с. - Деп. в ВНИПИ 21.03.1964, П 1530-64 Деп.

5. Нурмеев Н.Н. Сценки диапазона типичных значений функционалов сложности // Проблемы теоретической кибернетики. - Саратов: Изд. СГУ, 1966. - 4.1. - С. 108-110.

Нур