На правах рукописи

Нигмедзянова Айгуль Махмутовна

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Казань — 2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Мухлисов Фоат Габдуллович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Сабитов Камиль Басырович,
доктор физико-математических наук,
профессор Чугунов Владимир Аркадьевич

Ведущая организация: Самарский государственный университет

Защита состоится 21 февраля 2007 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, д.17, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 15 января 2007 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент *Липачев Е. К.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Вырождающиеся эллиптические уравнения представляют собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Они встречаются при решении многих важных вопросов прикладного характера (теории малых изгибаний поверхностей вращения, безмоментной теории оболочек, теории упругости, механике сплошной среды и т.д.) Значительную роль такие уравнения играют в газовой динамике.

Кроме того, вырождающиеся эллиптические уравнения встречаются в теории фильтрации при исследовании процессов переноса массы через неоднородные пористые пласты, а также в современной космологии при рассмотрении экзотических состояний материи.

Число опубликованных работ по вырождающимся эллиптическим уравнениям весьма значительно. В этих исследованиях рассматривались вырождающиеся эллиптические уравнения первого рода (см., например, М. М. Смирнов, А. В. Бицадзе, И. Н. Векуа, Л. С. Парасюк и т.д.). Что касается вырождающихся эллиптических уравнений второго рода, то к числу первых в этом направлении относится работа М. В. Келдыша (1951), где впервые указаны случаи, когда характеристическая часть границы области может освобождаться от граничных условий и заменяться условием ограниченности решения. Позже А. В. Бицадзе указал, что условие ограниченности может быть заменено граничным условием с некоторой весовой функцией.

Первые работы по вырождающимся эллиптическим уравнениям относятся к уравнению вида

$$y^m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (m > 0), \tag{1}$$

различные краевые задачи для которого исследованы Ф. Трикоми, Е. Хольмгреном, С. Геллерстедтом, Ф. И. Франклем, П. Жерменом, Р. Бадером и др.

Ф. Трикоми рассмотрел задачу Дирихле. С. Геллерстедт показал, что задача Дирихле и задача N могут быть решены при помощи функции Грина, регулярная часть которой в случае произвольной области D ищется в виде потенциала двойного слоя с плотностью $\mu(t)$. Для плотности $\mu(t)$ получается уравнение Фредгольма, причем предполагается, что концы кривой Г совпадают с дугами нормальной кривой $(x-x_0)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=k^2$ $(y>0)$. Ф. И. Франклю удалось избавиться от этого ограничения. Он сводит обе рассматриваемые краевые задачи к уравнениям Фредгольма, причем предполагается, что кривая Г подходит к оси абсцисс в точках A и B под прямым углом.

А. В. Бицадзе доказал существование и единственность решения задачи Дирихле для уравнения

$$y^m\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}+c(x,y)U=0 \qquad (m>0).$$

К. Е. Бабенко исследовал задачу N как для уравнения (1), так и для более общего уравнения

$$y^m\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+c(x,y)U=0 \tag{2}$$

при предположении, что в окрестности точек A и B на кривой Г выполняется условие

$$\left|\frac{dx}{dy}\right|\le Cy^2(s),$$

где C – постоянная, а $x=x(s)$, $y=y(s)$ – параметрические уравнения кривой Г.

М. В. Келдыш исследовал первую краевую задачу для уравнения

$$y^m\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}+c(x,y)U=0 \qquad (m>0) \tag{3}$$

в области D. Он показал, что постановка первой краевой задачи для этого уравнения зависит от показателя m и поведения коэффициента $b(x,y)$ при $y \to 0$. М. В. Келдыш доказал существование и единственность решения первой краевой задачи. В случаях, когда для уравнения (3) в области D задача Дирихле не всегда разрешима, естественно заменить условие ограниченности $\lim\limits_{y\to 0} U(x,y)$ условием

$$\lim_{y\to 0} \psi(x,y)U(x,y) = \varphi(x),$$

где $\psi(x,y)$ – известная функция, причем $\lim\limits_{y\to 0} \psi(x,y) = 0$, а $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция. В такой постановке краевая задача для уравнения (3) была впервые сформулирована А. В. Бицадзе. Эта краевая задача была рассмотрена в работах С. А. Терсенева (при $m = 1$), Хоу Чунь-и, Ян Гуан-цзинь, Чень Лян-цзинь (при $m > 1$) и др.

Для уравнения (3) О. А. Олейник рассмотрела задачу с косой производной

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma} + AU = \varphi \quad \text{на } \Gamma \quad (A \leq 0) \tag{4}$$

в тех случаях, когда часть границы, совпадающей с линией вырождения, освобождается от граничных условий. Н. Д. Введенская для уравнения (3) при условии, что для этого уравнения всегда разрешима задача Дирихле, и для уравнения (2) доказала существование и единственность решения краевой задачи, в которой на Γ поставлено условие (4), а на AB заданы значения искомой функции.

С. Г. Михлин применил вариационные методы для доказательства разрешимости первой краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения

$$LU = -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,k}(x)\frac{\partial U}{\partial x_k}\right) = f(x)$$

в ограниченной области $D \subset (x_n > 0)$.

М. И. Вишик рассмотрел основные краевые задачи для уравнения

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,k}(x) \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} + c(x)U = f(x),$$

эллиптического в точках x с $x_n > 0$. Это уравнение изучается в области D, расположенной в $x_n > 0$ и имеющей часть границы Γ_0 в плоскости $x_n = 0$. М. И. Вишик показал, что на постановку первой и второй краевой задачи в основном влияет только показатель, аналогичный m (в уравнении (3)). Им доказаны теоремы о разрешимости и единственности решения этих краевых задач. М. И. Вишик применял методы функционального анализа.

Г. Фикера исследовал уравнение

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} + c(x)U = f(x). \tag{5}$$

Показал, что постановка краевой задачи для уравнения (5) зависит от коэффициентов уравнения и направления касательной плоскости к границе области. Г. Фикера доказал единственность решения такой задачи в классе гладких функций и существование обобщенного решения.

И. Н. Векуа получил явные формулы для решения задачи Дирихле в полуплоскости $y \geq 0$ для уравнения

$$y^{2k} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (k > -1).$$

Л. С. Парасюк получил явные формулы для решения задач Дирихле и Неймана в полупространстве $x_n > 0$ ($n \geq 3$) для уравнения

$$x_n^{\alpha} \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (0 < \alpha < 2).$$

Одним из представителей вырождающихся эллиптических уравнений второго рода является уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \qquad (\alpha < 1),$$

которое впервые было рассмотрено И. Л. Каролем. Им были построены фундаментальные решения этого уравнения. Позже, Р. С. Хайруллин с помощью этих фундаментальных решений исследовал основные краевые задачи для этого же уравнения.

Далее, Р. М. Асхатов исследовал методом потенциалов основные краевые задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + ky\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \qquad (0 < k < 1).$$

Таким образом, основные краевые задачи для многомерных вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка методом потенциалов до сих пор еще исследованы не были.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию основных краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений

$$T_\alpha[U(x)] = \sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + x_p^\alpha\frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha\frac{\partial U}{\partial x_p}\right) = 0,$$

где $\alpha > 1,\ p \geq 3,$

$$L[U(x)] = x_p^m\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} = 0,$$

где $m > 0,\ p \geq 3,$

$$E[U(x)] = \sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha\frac{\partial U}{\partial x_p}\right) = 0,$$

где $0 < \alpha < 1,\ p \geq 3,$

$$E_m[U(x)] = \sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + x_p^m\frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} = 0,$$

где $m > 4$, $p \geq 3$, методом потенциалов.

Целью настоящей работы является доказательство существования единственного решения основных краевых задач для вышеуказанных вырождающихся многомерных эллиптических уравнений первого и второго родов.

Методы исследования. Применяются методы классической теории потенциала, теории функции действительной переменной, дифференциальных и интегральных уравнений.

Научная новизна. Исследование основных краевых задач для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений второго порядка, указанных выше, методом потенциалов.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Построение фундаментальных решений для вышеуказанных вырождающихся многомерных эллиптических уравнений.

2. Изучение основных свойств решений указанных вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка, в частности, доказательство принципа максимума.

3. Доказательство единственности решения основных краевых задач для указанных вырождающихся многомерных эллиптических уравнений второго порядка.

4. Построение потенциалов для вырождающихся эллиптических многомерных уравнений второго порядка и исследование их основных свойств, в частности, доказательство теорем о предельных значениях потенциалов на границе области.

5. Исследование разрешимости основных краевых задач для указанных вырождающихся многомерных эллиптических уравнений второго порядка методом потенциалов.

Теоретическая и практическая значимость. Данная работа содержит теоретический материал. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки теории краевых задач для некоторых вырождающихся многомерных эллиптических уравнений и найти приложение в теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений, применяемых при решении многих важных вопросов прикладного характера.

Апробация работы. Данные результаты обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета (руководитель – профессор Мухлисов Ф.Г.). Основные результаты работы докладывались на двенадцатой научной межвузовской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара, 2002); Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Самара: архитектурно-строительная академия, 2002); тринадцатой научной межвузовской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара, 2003); шестой Казанской международной летней научной школе-конференции (Казань: "УНИПРЕСС", 2003); третьей всероссийской научной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2003" (Казань:"УНИПРЕСС", 2003); Всероссийской научной конференции "Математическое моделирование и краевые задачи"(Самара, 2004); Международной молодежной научной конференции (Казань: "УНИПРЕСС", 2004); второй Всероссийской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара, 2005); четвертой молодежной научной конференции (Казань: "УНИПРЕСС", 2005); третьей Всероссийской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи"(Самара, 2006); втором Международном форуме молодых ученых "Актуальные проблемы современной науки" (Самара, 2006);

пятой молодежной научной конференции (Казань: "УНИПРЕСС", 2006); научно-практических итоговых конференциях при кафедре математического анализа Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета и при кафедре дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1 – 19].

Структура и объем работы. Диссертация содержит 152 страницы и состоит из введения, четырех глав, разбитых на 28 параграфов, и списка литературы из 84 наименований.

Краткое содержание работы.

Во введении дается обзор литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, а также кратко охарактеризованы результаты автора, изложенные в последующих главах.

В *первой главе* рассматривается вырождающееся эллиптическое уравнение

$$T_\alpha[U(x)] = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + x_p^\alpha \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha \frac{\partial U}{\partial x_p}\right) = 0, \tag{6}$$

где $\alpha > 1$, $p \geq 3$. Строится фундаментальное решение уравнения, которое имеет такие же особенности, что и для уравнения Лапласа. С помощью этого ф.р. строятся потенциалы простого и двойного слоев. Вычисляются предельные значения этих потенциалов. Изучаются краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения (6). Доказывается единственность их решения. С помощью введенных потенциалов внутренние и внешние краевые задачи Дирихле и Неймана сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Доказывается однозначная разрешимость интегральных уравнений.

В §1 выводятся первая и вторая формулы Грина для оператора T_α. В §2 строится фундаментальное решение уравнения (6).В §3 дается интегральное представление решения данного уравнения. В §4 изучаются некоторые свойства решения уравнения (6), в частности, доказывается очень важная для последующих исследований теорема о принципе максимума.

В §5 даются постановки основных краевых задач для уравнения (6) и доказывается единственность их решения. Ставятся следующие краевые задачи:

Внутренняя задача Дирихле (Задача D_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}),$$

$$T_\alpha[U(x)] = 0, \quad x \in D,$$

$$U(x) = O\left(x_p^{(\alpha-1)(p-2)}\right) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$U\Big|_\Gamma = f(x),\ f(x) \in C_\alpha(\Gamma),$$

где $C_\alpha(\Gamma)$ — множество функций $f(x)$, заданных на Γ и удовлетворяющих условиям $f(x) \in C(\Gamma)$ и $f(x) = O\left(x_p^{(\alpha-1)(p-2)}\right)$ при $x_p \to 0$.

Внешняя задача Дирихле (Задача D_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C(\bar{D}_e),$$

$$T_\alpha[U(x)] = 0, \quad x \in D_e,$$

$$U(x) = O\left(x_p^{(\alpha-1)(p-2)}\right) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$U = O\left(\rho_{x0}^{-(p-2)}\right) \text{ при } r \to \infty,$$

$$U\Big|_\Gamma = f(x),\ f(x) \in C_\alpha(\Gamma).$$

Внутренняя задача Неймана (Задача N_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}),$$

$$T_\alpha[U(x)] = 0, \quad x \in D,$$
$$U(x) = O\left(x_p^{(\alpha-1)(p-2)}\right) \text{ при } x_p \to 0,$$
$$A_\alpha[U(x)]\Big|_\Gamma = \varphi(x),\ f(x) \in C_\alpha(\Gamma).$$

Внешняя задача Неймана (Задача N_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C^1(\bar{D}_e),$$

$$T_\alpha[U(x)] = 0, \quad x \in D_e,$$
$$U(x) = O\left(x_p^{(\alpha-1)(p-2)}\right) \text{ при } x_p \to 0,$$
$$U = O\left(\rho_{x0}^{-(p-2)}\right) \text{ при } r \to \infty,$$
$$A_\alpha[U(x)]\Big|_\Gamma = \varphi(x),\ \varphi(x) \in C_\alpha(\Gamma).$$

Доказывается единственность решения задач D_i, D_e, N_i и N_e.

В §6 с помощью фундаментального решения $\mathcal{E}(\xi, x)$ уравнения (6) строятся поверхностные потенциалы простого и двойного слоев:

$$V(x) = \int\limits_\Gamma \mu(\xi)\mathcal{E}(\xi, x) d\Gamma, \quad W(x) = \int\limits_\Gamma \nu(\xi) A_\alpha\left[\mathcal{E}(\xi, x)\right] d\Gamma,$$

где $A_\alpha[\,] = \xi_p^{-\alpha} \sum\limits_{j=1}^{p-1} \cos(n, \xi_j) \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \xi_p^\alpha \cos(n, \xi_p) \frac{\partial}{\partial \xi_p}$, а $\mu(\xi), \nu(\xi) \in C_\alpha(\Gamma)$.

Изучаются свойства этих потенциалов и, в частности, доказываются теоремы о предельном значении их на границе области.

Теорема 1.6. *Пусть* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперповерхностью* $x_p = 0$ *прямой угол. Тогда при* $\nu \in C_\alpha(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$W_i(x_0) = -\frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)}, \quad W_e(x_0) = \frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)},$$

где $W_i(x_0)$ *и* $W_e(x_0)$ *означают предельные значения потенциала двойного слоя* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ, $\nu_0 = \nu(x_0)$, *а* $\widetilde{W(x_0)}$ *— прямое значение потенциала двойного слоя* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$.

Теорема 1.8. *Пусть* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол. Тогда при* $\mu \in C_\alpha(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$A_{\alpha x_0}[V^+(x_0)] = \frac{\mu_0}{2} + A_{\alpha x_0}\widetilde{[V(x_0)]}, \quad A_{\alpha x_0}[V^-(x_0)] = -\frac{\mu_0}{2} + A_{\alpha x_0}\widetilde{[V(x_0)]},$$

где $A_{\alpha x_0}[V^+(x_0)]$ *и* $A_{\alpha x_0}[V^-(x_0)]$ *— предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ, $\mu_0 = \mu(x_0)$, *а* $A_{\alpha x_0}\widetilde{[V(x_0)]}$ *— прямое значение конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$.

В §7 задачи D_i, D_e, N_i и N_e сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость. Если интегральные уравнения задач D_i, D_e, N_i и N_e разрешимы, то разрешимы и сами задачи. Это приводит к следующим теоремам:

Теорема 1.9. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* D_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных из* $C_\alpha(\Gamma)$ *и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 1.10. *Если Γ — поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то задача N_e для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных из $C_\alpha(\Gamma)$ и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Теорема 1.11. *Если Γ — поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол и выполняется условие*

$$\int\limits_\Gamma \varphi(\xi) d\xi = 0,$$

то задача N_i для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных из $C_\alpha(\Gamma)$ и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.

Теорема 1.12. *Если Γ — поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то задача D_e однозначно разрешима при любых непрерывных граничных данных из $C_\alpha(\Gamma)$ и решение можно представить в виде*

$$U(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}(p-2)} \int\limits_\Gamma \nu(\xi) A_\alpha \left[\frac{1}{\rho_{x\xi}^{p-2}}\right] d\Gamma + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}(p-2)\ \rho_{x0}^{p-2}} \int\limits_\Gamma \nu(\xi)\, d\Gamma.$$

Во *второй главе* рассматривается вырождающееся эллиптическое уравнение первого рода

$$L[U(x)] = x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} = 0, \tag{7}$$

где $m > 0,\ p \geq 3$.

Строится фундаментальное решение уравнения, которое имеет такую же особенность, что и для уравнения Лапласа. С помощью ф.р. строятся потенциалы простого и двойного слоев. Вычисляются предельные значения этих потенциалов. Изучаются краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения (7). Доказывается единственность их решения. С помощью введенных потенциалов внутренние и внешние краевые задачи Дирихле и Неймана сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма. Доказывается однозначная разрешимость интегральных уравнений.

В §1 строится фундаментальное решение уравнения (7).В §2 выводятся первая и вторая формулы Грина для оператора L. В §3 дается интегральное представление решения данного уравнения. В §4 изучаются некоторые свойства решения уравнения (7), в частности, доказывается теорема о принципе максимума.

В §5 даются постановки основных краевых задач для уравнения (7) и доказывается единственность их решения. Ставятся следующие краевые задачи:

Внутренняя задача Дирихле (Задача D_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}),$$

$$L[U(x)] = 0, \quad x \in D,$$

$$U(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$U\Big|_{\Gamma} = f(x), \ f(x) \in C(\Gamma).$$

Внешняя задача Дирихле (Задача D_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C(\bar{D}_e),$$

$$L[U(x)] = 0, \quad x \in D_e,$$

$$U(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$U(x) = O\left((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}\right) \text{ при } r \to \infty,$$

$$U\Big|_{\Gamma} = f(x),\ f(x) \in C(\Gamma).$$

Внутренняя задача Неймана (Задача N_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}),$$

$$L[U(x)] = 0, \quad x \in D,$$

$$U(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$A[U(x)]\Big|_{\Gamma} = \varphi(x),\ f(x) \in C(\Gamma).$$

Внешняя задача Неймана (Задача N_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C^1(\bar{D}_e),$$

$$L[U(x)] = 0, \quad x \in D_e,$$

$$U(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$U(x) = O\left((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}\right) \text{ при } r \to \infty,$$

$$A[U(x)]\Big|_{\Gamma} = \varphi(x),\ \varphi(x) \in C(\Gamma).$$

Доказывается единственность решения задач D_i, D_e, N_i и N_e.

В §6 с помощью фундаментального решения $\mathcal{E}(\xi, x)$ уравнения (7) строятся поверхностные потенциалы простого и двойного слоев:

$$V(x) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\mathcal{E}(\xi, x)d\Gamma, \quad W(x) = \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi)A\left[\mathcal{E}(\xi,\ x)\right]d\Gamma,$$

где $A[\ ] = \xi_p^m \sum\limits_{j=1}^{p-1} \cos(n, \xi_j)\frac{\partial}{\partial \xi_j} + \cos(n, \xi_p)\frac{\partial}{\partial \xi_p}$, а $\mu(\xi), \nu(\xi) \in C(\Gamma)$.

Доказываются следующие теоремы о предельном значении этих потенциалов на границе области:

Теорема 2.6. *Пусть* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол. Тогда при* $\nu \in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$W_i(x_0) = -\frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)}, \quad W_e(x_0) = \frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)},$$

где $W_i(x_0)$ *и* $W_e(x_0)$ *означают предельные значения потенциала двойного слоя* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ, $\nu_0 = \nu(x_0)$, *а* $\widetilde{W(x_0)}$ *— прямое значение потенциала двойного* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$.

Теорема 2.8. *Пусть* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол. Тогда при* $\mu \in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$A_{x_0}[V(x_0)]_i = \frac{\mu_0}{2} + A_{x_0}\widetilde{[V(x_0)]}, \quad A_{x_0}[V(x_0)]_e = -\frac{\mu_0}{2} + A_{x_0}\widetilde{[V(x_0)]},$$

где $A_{x_0}[V(x_0)]_i$ *и* $A_{x_0}[V(x_0)]_e$ *— предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ, $\mu_0 = \mu(x_0)$, *а* $A_{x_0}\widetilde{[V(x_0)]}$ *— прямое значение конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$.

В §7 задачи D_i, D_e, N_i и N_e сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость. Это приводит к следующим теоремам:

Теорема 2.9. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* D_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 2.10. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* N_e *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Теорема 2.11. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* D_e *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 2.12. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* N_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

В *третьей главе* рассматривается самосопряженное вырождающееся эллиптическое уравнение

$$E[U(x)] = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha \frac{\partial U}{\partial x_p}\right) = 0, \tag{8}$$

где $0 < \alpha < 1,\ p \geq 3$.

Строится фундаментальное решение уравнения, которое имеет такую же особенность, что и для уравнения Лапласа. С помощью этого ф.р. строятся потенциалы простого и двойного слоев. Вычисляются предельные значения этих потенциалов. Изучаются краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения (8). Доказывается единственность их решения. С помощью введенных потенциалов внутренние и внешние краевые задачи Дирихле и Неймана сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Доказывается однозначная разрешимость интегральных уравнений.

В §1 выводятся первая и вторая формулы Грина для оператора E. В §2 строится фундаментальное решение уравнения (8). В §3 дается интегральное представление решения данного уравнения. В §4 изучаются некоторые свойства решений уравнения (8), в частности, доказывается теорема о принципе максимума.

В §5 даются постановки основных краевых задач для уравнения

(8) и доказывается единственность их решения. Ставятся следующие краевые задачи:

Внутренняя задача Дирихле (Задача D_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}),$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D,$$

$$U(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$U\Big|_{\Gamma} = f(x), \;\; f(x) \in C(\Gamma).$$

Внешняя задача Дирихле (Задача D_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C(\bar{D}_e),$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D_e,$$

$$U(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$U(x) = O\left((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2} + \frac{4-3\alpha}{2(2-\alpha)}\right)}\right) \text{ при } r \to \infty,$$

$$U\Big|_{\Gamma} = f(x), \;\; f(x) \in C(\Gamma).$$

Внутренняя задача Неймана (Задача N_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}),$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D,$$

$$U(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$A[U(x)]\Big|_{\Gamma} = \varphi(x), \;\; f(x) \in C(\Gamma).$$

Внешняя задача Неймана (Задача N_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C^1(\bar{D}_e),$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D_e,$$

$$U(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$U(x) = O\left((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2} + \frac{4-3\alpha}{2(2-\alpha)}\right)}\right) \text{ при } r \to \infty,$$

$$A[U(x)]\Big|_{\Gamma} = \varphi(x),\ \varphi(x) \in C(\Gamma).$$

Доказывается единственность решения задач D_i, D_e, N_i и N_e.

В §6 с помощью фундаментального решения $\mathcal{E}(\xi, x)$ уравнения (8) строятся поверхностные потенциалы простого и двойного слоев:

$$V(x) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\mathcal{E}(\xi,\ x) d\Gamma, \quad W(x) = \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi) A\left[\mathcal{E}(\xi,\ x)\right] d\Gamma,$$

где $A[\ ] = \sum\limits_{j=1}^{p-1} \cos(n, \xi_j) \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \xi_p^\alpha \cos(n, \xi_p) \frac{\partial}{\partial \xi_p}$, а $\mu(\xi), \nu(\xi) \in C(\Gamma)$.

Изучаются свойства этих потенциалов и, в частности, доказываются теоремы о предельном значении их на границе области.

Теорема 3.6. *Пусть Γ — поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол. Тогда при $\nu \in C(\Gamma)$ имеют место следующие предельные соотношения:*

$$W_i(x_0) = -\frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)}, \quad W_e(x_0) = \frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)},$$

где $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ означают предельные значения потенциала двойного слоя $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$ соответственно изнутри и извне границы Γ, $\nu_0 = \nu(x_0)$, а $\widetilde{W(x_0)}$ — прямое значение потенциала двойного слоя $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$.

Теорема 3.8. *Пусть* Γ — *поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол. Тогда при* $\mu \in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$A_{x_0}[V(x_0)]_i = \frac{\mu_0}{2} + A_{x_0}\widetilde{[V(x_0)]}, \quad A_{x_0}[V(x_0)]_e = -\frac{\mu_0}{2} + A_{x_0}\widetilde{[V(x_0)]},$$

где $A_{x_0}[V(x_0)]_i$ *и* $A_{x_0}[V(x_0)]_e$ — *предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ, $\mu_0 = \mu(x_0)$, *а* $A_{x_0}\widetilde{[V(x_0)]}$ — *прямое значение конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$.

В §7 задачи D_i, D_e, N_i и N_e сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость. Это приводит к следующим теоремам:

Теорема 3.9. *Если* Γ — *поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* D_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 3.10. *Если* Γ — *поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* N_e *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Теорема 3.11. *Если* Γ — *поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол и выполняется условие*

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(\xi) d\xi = 0,$$

то задача N_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Теорема 3.12. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* D_e *однозначно разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде*

$$U(x) = \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi) A\left[\mathcal{E}(\xi, x)\right]\, d\Gamma + \frac{1}{\rho_0^{p-2+\frac{\alpha}{2-\alpha}}} \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi)\, d\Gamma.$$

В *четвертой главе* рассматривается вырождающееся эллиптическое уравнение второго рода

$$E_m[U(x)] = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + x_p^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} = 0, \qquad (9)$$

где $m > 4,\ p \geq 3$.

Строится фундаментальное решение уравнения, которое имеет такую же особенность, что и для уравнения Лапласа. С помощью ф.р. строятся потенциалы простого и двойного слоев. Вычисляются предельные значения этих потенциалов. Изучаются краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения (9). Доказывается единственность их решения. С помощью введенных потенциалов внутренние и внешние краевые задачи Дирихле и Неймана сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Доказывается однозначная разрешимость интегральных уравнений.

В §1 строится фундаментальное решение уравнения (9). В §2 выводятся первая и вторая формулы Грина для оператора E_m. В §3 дается интегральное представление решения данного уравнения. В §4 изучаются некоторые свойства решения уравнения (9), в частности, доказывается теорема о принципе максимума.

В §5 даются постановки основных краевых задач для уравнения (9) и доказывается единственность их решения. Ставятся следующие краевые задачи:

Внутренняя задача Дирихле (Задача D_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}),$$

$$E_m[U(x)] = 0, \quad x \in D,$$

$$U(x) = O\left(x_p^{(m-2)\frac{p-2}{2}+\frac{m}{2}}\right) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$U\Big|_\Gamma = f(x), \ f(x) \in C_m(\Gamma),$$

где $C_m(\Gamma)$ — множество функций $f(x)$ класса $C(\Gamma)$ удовлетворяющих условию $f(x) = O\left(x_p^{(m-2)\frac{p-2}{2}+\frac{m}{2}}\right)$ при $x_p \to 0$.

Внешняя задача Дирихле (Задача D_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C(\bar{D}_e),$$

$$E_m[U(x)] = 0, \quad x \in D_e,$$

$$U(x) = O\left(x_p^{(m-2)\frac{p-2}{2}+\frac{m}{2}}\right) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$U(x) = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{m}{2(m-2)}\right)}\right) \text{ при } r \to \infty,$$

$$U\Big|_\Gamma = f(x), \ f(x) \in C_m(\Gamma).$$

Внутренняя задача Неймана (Задача N_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}),$$

$$E_m[U(x)] = 0, \quad x \in D,$$

$$U(x) = O\left(x_p^{(m-2)\frac{p-2}{2}+\frac{m}{2}}\right) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$A_m[U(x)]\Big|_\Gamma = \varphi(x), \ f(x) \in C_m(\Gamma).$$

Внешняя задача Неймана (Задача N_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C^1(\bar{D}_e),$$

$$E_m[U(x)] = 0, \quad x \in D_e,$$

$$U(x) = O\left(x_p^{(m-2)\frac{p-2}{2}+\frac{m}{2}}\right) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$U(x) = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{m}{2(m-2)}\right)}\right) \text{ при } r \to \infty,$$

$$A_m[U(x)]\Big|_{\Gamma} = \varphi(x), \ \varphi(x) \in C_m(\Gamma).$$

Доказывается единственность решения задач D_i, D_e, N_i и N_e.

В §6 с помощью фундаментального решения $\mathcal{E}(\xi, x)$ уравнения (9) строятся поверхностные потенциалы простого и двойного слоев:

$$V(x) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\mathcal{E}(\xi, x) d\Gamma, \quad W(x) = \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi) A_m\left[\mathcal{E}(\xi, x)\right] d\Gamma,$$

где $A_m[\ ] = \xi_p^{-m} \sum\limits_{j=1}^{p-1} \cos(n, \xi_j) \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \cos(n, \xi_p) \frac{\partial}{\partial \xi_p}$, а $\mu(\xi), \nu(\xi) \in C_\alpha(\Gamma)$.

Исследуется вопрос о предельных значениях этих потенциалов.

Теорема 4.6. *Пусть Γ — поверхность Ляпунова и образует с гиперповерхностью $x_p = 0$ прямой угол. Тогда при $\nu \in C_m(\Gamma)$ имеют место следующие предельные соотношения:*

$$W_i(x_0) = -\frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)}, \quad W_e(x_0) = \frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)},$$

где $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ означают предельные значения потенциала двойного слоя $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$ соответственно изнутри и извне границы Γ, $\nu_0 = \nu(x_0)$, а $\widetilde{W(x_0)}$ — прямое значение потенциала двойного слоя $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$.

Теорема 4.8. *Пусть* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол. Тогда при* $\mu \in C_m(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$A_{m_{x_0}}[V(x_0)]_i = \frac{\mu_0}{2} + \widetilde{A_{m_{x_0}}[V(x_0)]}, \quad A_{m_{x_0}}[V(x_0)]_e = -\frac{\mu_0}{2} + \widetilde{A_{m_{x_0}}[V(x_0)]},$$

где $A_{m_{x_0}}[V(x_0)]_i$ *и* $A_{m_{x_0}}[V(x_0)]_e$ *— предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ*,* $\mu_0 = \mu(x_0)$*, а* $\widetilde{A_{m_{x_0}}[V(x_0)]}$ *— прямое значение конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$ *.*

В §7 задачи Дирихле и Неймана для уравнения (9) сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость. Это приводит к следующим теоремам:

Теорема 4.9. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* D_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных из* $C_m(\Gamma)$ *и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 4.10. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* N_e *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных из* $C_m(\Gamma)$ *и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Теорема 4.11. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол и выполняется условие*

$$\int_\Gamma \varphi(\xi) d\xi = 0,$$

то задача N_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных из* $C_m(\Gamma)$ *и решение можно представить* *в виде потенциала простого слоя.*

Теорема 4.12. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* D_e *однозначно разрешима при любых непрерывных граничных данных из* $C_m(\Gamma)$ *и решение можно представить в виде*

$$U(x) = \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi) A_m \left[\mathcal{E}(\xi, x)\right] \, d\Gamma + \frac{1}{\rho_0^{p-2-\frac{m}{2-m}}} \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi) \, d\Gamma.$$

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Ф. Г. Мухлисову за помощь и советы, которые он оказывал мне в период написания этой работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Нигмедзянова А. М. Об основных свойствах решения одного вырождающегося эллиптического уравнения. / А. М. Нигмедзянова, Ф. Г. Мухлисов. // Труды 12-й науч. межвуз. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи.— Ч.3. – СамГТУ, ИАР. – Самара, 2002. – С.103–106.

2. Нигмедзянова А. М. Аналог формулы Пуассона и вытекающие из него свойства решения одного вырождающегося эллиптического уравнения. / А. М. Нигмедзянова, Ф. Г. Мухлисов. // Сборник трудов Междун. науч. конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения". — Самара: архитектурно-строительная академия, 2002. – С.251–252.

3. Нигмедзянова А. М. О T–супергармонических функциях. / А. М. Нигмедзянова. // Труды 13-й науч. межвуз. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи.— Ч.3. – СамГТУ, ИАР. – Самара, 2003. – С.134–136.

4. Нигмедзянова А. М. Обобщенное по Пуанкаре решение задачи

типа Дирихле для одного эллиптического уравнения. / А. М. Нигмедзянова. // Труды математич. центра им. Н. А. Лобачевского (материалы 6-й Казанской междунар. летней школы-конф.). – Т.19. – Казань: "УНИПРЕСС", 2003. – С.160–161.

5. Нигмедзянова А. М. Обобщенное по Винеру решение задачи типа Дирихле для одного эллиптического уравнения. / А. М. Нигмедзянова. // Труды математич. центра им. Н. А. Лобачевского (материалы третьей всероссийской научной школы-конф.). – Т.21. – Казань: "УНИПРЕСС", 2003. – С.175–177.

6. Нигмедзянова А. М. Потенциалы, порожденные оператором логарифмического сдвига. / А. М. Нигмедзянова. // Вестник Казанского Государственного Педагогического Университета. Математика. – 2004, №2. – С.15–24.

7. Нигмедзянова А. М. О фундаментальном решении одного эллиптического уравнения. / А. М. Нигмедзянова. // Вопросы современной математики и информационных технологий в математическом образовании. Сборник научных трудов молодых математиков КГПУ. – Казань, 2004. – С.96–104.

8. Нигмедзянова А. М. Критерий регулярности граничной точки для одного эллиптического уравнения. / А. М. Нигмедзянова. // Труды Всероссийской научной конференции "Математическое моделирование и краевые задачи.— Ч.3. – СамГТУ, ИАР. – Самара, 2004. – С.168–170.

9. Нигмедзянова А. М. Фундаментальное решение для одного эллиптического уравнения. / А. М. Нигмедзянова. // Труды математич. центра им. Н. А. Лобачевского (материалы междунар.науч. конференции). – Т.25. – Казань: "УНИПРЕСС", 2004. – С.201–202.

10. Нигмедзянова А. М. T–емкость и последовательность T–потенциалов мер. / А. М. Нигмедзянова. // Вопросы современной ма-

тематики и информационных технологий в математическом образовании. Сборник научных трудов молодых математиков КГПУ. – Казань, 2004. – С.54–63.

11. Нигмедзянова А. М. Исследование основных краевых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения методом потенциалов. / А. М. Нигмедзянова. // Вестник Казанского Государственного Педагогического Университета. Математика. – 2005, №4. – С.146–160.

12. Нигмедзянова А. М. О фундаментальном решении одного вырождающегося эллиптического уравнения. / А. М. Нигмедзянова. // Труды Второй Всероссийской науч. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи.— Ч.3. – СамГТУ. – Самара, 2005. – С.180–182.

13. Нигмедзянова А. М. Фундаментальное решение одного вырождающегося эллиптического уравнения. / А. М. Нигмедзянова. // Труды математич. центра им. Н. А. Лобачевского (материалы четвертой молодежной научной школы-конф.). – Т.31. – Казань: "УНИПРЕСС", 2005. – С.113–115.

14. Нигмедзянова А. М. Основные свойства решений одного вырождающегося эллиптического уравнения. / А. М. Нигмедзянова. // Труды Третьей Всероссийской науч. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи.— Ч.3. – СамГТУ. – Самара, 2006. – С.174–176.

15. Нигмедзянова А. М. Исследование основных краевых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения методом потенциалов. / А. М. Нигмедзянова. // Известия вузов. Математика. – 2007. – №1 (536). – С.34–44.

16. Нигмедзянова А. М. Исследование основных краевых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения методом ин-

тегральных уравнений. / А. М. Нигмедзянова, Ф. Г. Мухлисов. // Известия вузов. Математика. (в печати)

17. Нигмедзянова А. М. Решение основных краевых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения методом потенциалов. / А. М. Нигмедзянова. // Вестник Татарского Государственного Гуманитарно-Педагогического Университета. Математика. – 2006, №7. – С.81–87.

18. Нигмедзянова А. М. О потенциалах для одного многомерного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода. / А. М. Нигмедзянова. // Труды 2-го Международного форума молодых ученых "Актуальные проблемы современной науки". — Самара, 2006. – С.79–83.

19. Нигмедзянова А. М. О потенциалах для одного вырождающегося эллиптического уравнения второго рода. / А. М. Нигмедзянова. // Труды математич. центра им. Н. А. Лобачевского (материалы пятой молодежной научной школы-конф.). – Т.34. – Казань: "УНИПРЕСС", 2006. – С.171–173.