На правах рукописи

Ефимова Светлана Витальевна

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И СМЕШАННОГО ТИПА

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2005

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Репин Олег Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Зарубин Александр Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор Хайруллин Равиль Сагитович

Ведущая организация: научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН (г. Нальчик)

Защита состоится 29 ноября 2005г. в ______ часов на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, 17, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «_____» октября 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. н., доцент Е.К.Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая диссертационная работа посвящена новым корректно поставленным задачам для уравнения влагопереноса $y^2u_{xx}-u_{yy}+au_x=0$, уравнения $xu_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y=0$, параболо-гиперболического уравнения, в верхней полуплоскости представленного уравнением теплопроводности, в нижней – влагопереноса.

Уравнение влагопереноса играет заметную роль во многих областях науки.

В физике оно было впервые получено А.В.Лыковым в 1965г. для плотности потока влаги в коллоидном каппилярно-пористом теле поликапиллярной структуры методами термодинамики необратимых процессов. Позднее оказалось, что в биологии оно характеризует поток биомассы микробной популяции в биологическом реакторе. Но первыми, кто заинтересовался этим уравнением, были математики. Так в 1959г. А.В.Бицадзе рассматривает уравнение $y^2u_{xx}-u_{yy}+au_x=0$ как пример уравнения $y^m\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+$ $+b(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=0$, для которого при $|a|\le 1$ задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения корректна, несмотря на то, что нарушено условие Геллерстедта $\lim\limits_{y\to+0}y^{1-\frac{m}{2}}a(x,y)=0$. Поэтому уравнение влагопереноса также называют уравнением Бицадзе-Лыкова. Ещё ранее К.И.Карапетян установил корректность задачи Коши для уравнения влагопереноса в случае $|a|\le 1/11$, $a=1/2$; Чи Минь-ю исследовал эту задачу при более повышенном требовании на гладкость начальных данных. Уравнение влагопереноса с точки зрения математики интересно ещё и тем, что в случае $a=1$ вторая задача Дарбу, заданная на одной из характеристик, оказывается некорректно поставленной.

На необходимость рассмотрения задач сопряжения, когда в одной части области задано параболическое уравнение, в другой – гиперболическое, было указано в 1959г. И.М.Гельфандом. Он приводит пример, связанный с движением газа в канале, окружённом пористой средой: в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии. Я.С.Уфлянд в статье, опубликованной в 1964г., описывает задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке $0<x<l$ полубесконечной линии потерями пренебрегается, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки. В результате он приходит к системе, состоящей из волнового уравнения и уравнения диффузии.

На сегодняшний день известно много работ, посвящённых как локальным (для уравнения влагопереноса или уравнений, частным случаем которых оно является, здесь можно привести статьи А.М.Нахушева, Т.Ш.Кальменова, В.Н.Врагова, С.К.Кумыковой, Р.Н.Хубиева, для уравнения $xu_{xx} + yu_{yy} +$ $+\alpha u_x + \beta u_y = 0$ – труды Хе Кан Чера, М.М.Смирнова, для параболо- гиперболических уравнений – статьи Г.М.Стручиной, С.И.Гайдука, А.В.Иванова, Л.А.Золиной, Х.Г.Бжихатлова, А.М.Нахушева, В.Н.Абрашина, В.А.Елеева, Н.Ю.Капустина, К.Б.Сабитова, А.Сопуева, Т.Д.Джураева, Б.Исломова, М.Е.Лернера), так и нелокальным (см. для уравнения влагопереноса или уравнений, частным случаем которых оно является, статьи С.К.Кумыковой, А.А.Килбаса, О.А.Репина, М.Сайго, для уравнения $xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x +$ $+\beta u_y = 0$ – статьи С.С.Исамухамедова, Ж.Орамова, для параболо-гиперболических уравнений – статьи Х.Г.Бжихатлова, В.А.Елеева, А.А.Килбаса, О.А.Репина, А.А.Керефова, А.О.Желдашевой) задачам для вышеописанных уравнений.

Отличительной особенностью задач, рассмотренных в диссертации, является наличие в краевых условиях операторов дробного интегродифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса, введённых М.Сайго. Эти операторы представляют собой обобщение широко известных дробных интегралов и производных Римана-Лиувиля, которые имеют многочисленные практические приложения. Заметим, что на сегодняшний день нелокальным краевым задачам, содержащим операторы в смысле Сайго, посвящено достаточно мало исследований.

Таким образом, уравнение влагопереноса, уравнение $xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x +$ $+\beta u_y = 0$ и уравнения параболо-гиперболического типа, а также краевые задачи для них, вызывают большой практический и теоретический интерес.

Основной целью работы является постановка и исследование новых нелокальных краевых задач для уравнения влагопереноса, уравнения $xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y = 0$, параболо-гиперболического уравнения, в верхней полуплоскости представленного уравнением теплопроводности, в нижней – влагопереноса.

Методы исследования. В работе широко используется аппарат специальных функций, методы теории операторов обобщённого дробного интегродифференцирования, теории интегральных уравнений, теории дифференциальных уравнений с частными производными. В частности, метод доказательства единственности решения задач для уравнения влагопереноса с помощью принципа экстремума для гиперболических уравнений и принципа экстремума для оператора дробного дифференцирования порядка $\alpha < 1$, для параболо-гиперболических уравнений на основании специальных неравенств, связывающих произведения следов искомого решения и нормальной производной; метод доказательства существования решения с помощью сведения поставленных задач к вопросу разрешимости сингулярных интегральных уравнений; метод доказательства существования и единственности решения с помощью сведения поставленных задач к вопросу однозначной разрешимости характеристического сингулярного уравнения на конечном отрезке, интегрального уравнения Вольтерра. Отметим также использование преобразования Меллина в вопросе разрешимости задачи для уравнения $xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y = 0$.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Она является продолжением развития теории нелокальных краевых задач, которая, как известно, используется при решении многих важных вопросов прикладного характера. Автор надеется, что в будущем результаты работы получат хорошую физическую интерпретацию.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, май 2002г.); 3-й Международной конференции молодых учёных и студентов «Актуальные проблемы современной науки» (Самара, сентябрь-октябрь 2002г.); общевузовских конференциях профессорско-преподавательского состава Самарской государственной экономической академии по итогам научно-исследовательской работы (Самара, апрель 2003г., апрель 2004г., апрель 2005г.); Международной научной конференции «Современные проблемы математической физики и информационной технологии» (Ташкент, ноябрь 2003г.); семинарах кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета (руководитель – д.ф.-м.н., профессор В.П.Радченко, март, май 2005г.); Шестом всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (весенняя сессия) (Санкт-Петербург, май 2005г.); III-й школе молодых учёных «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (Нальчик-Эльбрус, май 2005г.); Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, июнь-июль 2005г.); семинаре кафедры «Дифференциальные уравнения» КГУ (руководитель – д.ф.-м.н., профессор В.И.Жегалов, сентябрь 2005г).

Публикации. Тринадцать работ [1]-[13](список приведен в конце автореферата), опубликованных автором по теме диссертации, отражают её основные результаты. Результаты, полученные вместе с научным руководителем в работах [4], [7], принадлежат авторам в равной мере.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, из которых две последние разбиты на одиннадцать параграфов, списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 119 страниц. Список литературы содержит 105 наименований.

Краткое содержание работы.

Во введении обоснованы актуальность темы, цели, задачи, новизна диссертационной работы, приведён обзор результатов исследований по её тематике, даны общая методика исследования, структура и объём диссертационной работы, отражены публикации и апробация её результатов.

Первая глава диссертации посвящена операторам обобщённого дробного интегродифференцирования в смысле М.Сайго $\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f\right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} f\right)(x)$. Даны определения этих операторов. Показано, что дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля $\left(I_{0+}^{\alpha} f\right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha} f\right)(x)$, $\left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x)$, $\left(D_{1-}^{\alpha} f\right)(x)$ являются их частным случаем. Из многочисленных свойств операторов обобщённого дробного интегродифференцирования в смысле М.Сайго и дробных интегралов и производных Римана-Лиувилля выписаны необходимые в дальнейшем, причём следующие из них с доказательством:

$$\left(I_{0+}^{-\alpha} f\right)(x) = \left(I_{0+}^{1-\alpha} f'\right)(x), \text{ если } f(0)=0,\ 0<\alpha<1; \tag{1}$$

$$\left(I_{1-}^{-\alpha} f\right)(x) = -\left(I_{1-}^{1-\alpha} f'\right)(x), \text{ если } f(1)=0,\ 0<\alpha<1; \tag{2}$$

$$\left(I_{0+}^{-p,\ p+1,\ r}\left(I_{1-}^{p,\ s,\ -p} f\right)(v)\right)(x) = x^{-1}(1-x)^{-p-s}\cos\pi p\ f(x) + \int_0^1 K(x,u)\ f(u)\,du,$$

где
$$K(x,u) = \begin{cases} \dfrac{x^{-p-1}u^{p}(1-u)^{-p-s}}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}\dfrac{1}{u-x} + \dfrac{\Gamma(r-p)\Gamma(1-r+p)}{\Gamma(r)\Gamma(-r)}x^{-r-1}u^{r-1}\times \\ \times(1-u)^{-p-s} - \dfrac{r\,x^{-p-2}u^{p}(1-u)^{-p-s}}{(1-r+p)\Gamma(p)\Gamma(1-p)}\times \\ \times F\left(1, 1-r+p; 2-r+p; \dfrac{u}{x}\right), \quad 0<u<x, \\ \\ \dfrac{x^{-p-1}u^{p}(1-u)^{-p-s}}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}\dfrac{1}{u-x} + \dfrac{r\,x^{-p-1}u^{p-1}(1-u)^{-p-s}}{(p-r)\Gamma(p)\Gamma(1-p)}\times \\ \times F\left(1, r-p; 1+r-p; \dfrac{x}{u}\right), \quad x<u<1; \end{cases}$$

$$\left(I_{0+}^{-p,\ q,\ 0}\left(I_{1-}^{p,\ 0,\ t} f\right)(v)\right)(x) = x^{p-q}(1-x)^{-p}\cos\pi p\ f(x) + \int_0^1 K(x,u)\ f(u)\,du, \tag{3}$$

где

$$K(x,u) = \begin{cases} \dfrac{-x^{-q-1}u^{p}(1-u)^{t}}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}F_1\left(1,\ p+1,\ p+t;\ p+1; \dfrac{u}{x}, u\right), \quad 0<u<x, \\ \dfrac{x^{-q}u^{p-1}(1-u)^{t}}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}F_1\left(1, 1-p,\ p+t; 1-p; \dfrac{x}{u}, x\right), \quad x<u<1, \end{cases}$$

$F_1(a,b,b';c;x,y) = \sum\limits_{m,\,n=0}^{\infty}\dfrac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}}\dfrac{x^m}{m!}\dfrac{y^n}{n!}$ – функция Аппеля.

Отметим, что полные доказательства для двух частных случаев композиции $\left(I_{0+}^{-p,q,r}\left(I_{1-}^{p,s,t} f\right)(v)\right)(x),\ 0<p<1$, а именно при $q=p+1$, $t=-p$ и $r=0$, $s=0$, данных выше, приведены впервые.

Кроме этого, с помощью соответствующих лемм продемонстрированы действия рассматриваемых операторов в обычных и весовых пространствах Гёльдера: $H^{\lambda}[0,1]$; $H_0^{\lambda}[0,1]=\{f(x)\in H^{\lambda}[0,1]:\ f(0)=f(1)=0\}$; $H^{\lambda}(\rho;[0,1])=\{f(x):\rho(x)f(x)\in H^{\lambda}[0,1]\}$; $H_0^{\lambda}(\rho;[0,1])=\{f(x):\rho(x)\ f(x)\in$ $\in H_0^{\lambda}[0,1]\}$, где $0<\lambda\le 1,\ \rho(x)\ge 0$.

Вторая глава диссертации посвящена нелокальным краевым задачам для уравнения влагопереноса в случае $|a|<1$, $a=1$, $a=-1$ и уравнения $xu_{xx}+$ $+yu_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y=0$ с параметрами $\alpha>1/2$, $1/2<\beta<1$.

В §2.1 рассматривается уравнение влагопереноса

$$Lu=y^2u_{xx}-u_{yy}+au_x=0,\quad |a|<1, \tag{4}$$

в области $D=I\cup D_1\cup D_2$, где I - интервал $(0,1)$ оси OX , D_1 – область, ограниченная интервалом I и характеристиками уравнения (4)

$AC_1=\left\{(x,y):x-\dfrac{y^2}{2}=0,\ y\le 0\right\}$, $BC_1=\left\{(x,y):x+\dfrac{y^2}{2}=1,\ y\le 0\right\}$, D_2 – область, ограниченная интервалом I и характеристиками уравнения (4)

$AC_2=\left\{(x,y):x-\dfrac{y^2}{2}=0,\ y\ge 0\right\}$, $BC_2=\left\{(x,y):x+\dfrac{y^2}{2}=1,\ y\ge 0\right\}$, где

$A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C_1=(1/2,-1)$, $C_2=(1/2,1)$. За $\theta_0^{(1)}(x)$, $\theta_1^{(1)}(x)$, $\theta_0^{(2)}(x)$, $\theta_1^{(2)}(x)$ принимаются аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (4), выходящих из точки $(x,0)\in I$, с характеристиками AC_1, BC_1, AC_2, BC_2 соответственно. Формулируется задача 2.1.

Задача 2.1. Найти функцию $u(x,\,y)$ со свойствами:

1) $Lu\equiv 0$ в области $D_1\cup D_2$;

2) $u(x,\,y)\in C\left(\overline{D}\right)\cap C^2\left(D\setminus I\right)$;

3) $u(x,-0)=u(x,+0)\quad (x\in\overline{I})$, $\lim\limits_{y\to 0-}u_y(x,\,y)=\lim\limits_{y\to 0+}u_y(x,\,y)\quad (x\in I)$;

4) $A_i\,x^r\left(I_{0+}^{\frac{a-3}{4},\,0,\,\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}u\left[\theta_0^{(i)}(t)\right]\right)(x)+B_i(1-x)^s\left(I_{1-}^{-\frac{a+3}{4},\,0,\,\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}u\left[\theta_1^{(i)}(t)\right]\right)(x)=$ $=g_i(x)$, $x\in I$, $i=1,2$;

где A_1, A_2, B_1, B_2, r, s – такие заданные константы, что $A_i > 0, B_i > 0,\ i = 1, 2$, $r \ge 1, s \ge 1,\ g_1(x), g_2(x)$ – такие заданные функции, что $g_i(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^3(I)$, $i = 1, 2$.

Новизна постановки заключается в том, что в краевом условии 4) операторы дробного интегродифференцирования берутся не от значений искомой функции на аффиксах, а от произведения этих значений на множители $t^{-\frac{1}{2}}$ и $(1-t)^{-\frac{1}{2}}$ в первом и втором слагаемых соответственно.

Доказательство единственности решения задачи 2.1 проводится на основании принципа экстремума для гиперболических уравнений и принципа экстремума для оператора дробного дифференцирования порядка $\alpha < 1$, полученного А.М.Нахушевым в 1973г. Вопрос о существовании решения этой задачи сводится к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения относительно $\tau(x) = u(x, -0) = u(x, +0)$ и получает положительный ответ. В этом же параграфе приводится замечание о том, что аналогично доказывается существование и единственность решения задачи, если $A_i < 0$, $B_i < 0$, $i = 1, 2$.

Обратим внимание, что обозначения I, D_1, $\theta_0^{(1)}(x)$, $\theta_1^{(1)}(x)$, $\theta_0^{(2)}(x)$, $\theta_1^{(2)}(x)$, данные выше, будут использоваться на протяжении всей диссертации.

В §2.2 для уравнения (4) в той же области D ставится следующая задача.

Задача 2.2. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $Lu \equiv 0$ в области $D_1 \cup D_2$;

2) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D \setminus I)$;

3) $u(x, -0) = u(x, +0)\ \ (x \in \overline{I})$, $\lim\limits_{y \to 0-} u_y(x, y) = \lim\limits_{y \to 0+} u_y(x, y)\ \ (x \in I)$;

4) $$A_1\left(I_{0+}^{\alpha, \frac{a-1}{4} - \alpha, \frac{a-3}{4} - \alpha} u[\theta_0^{(1)}(t)]\right)(x) + A_2\left(I_{0+}^{\alpha + \frac{1-a}{4}} u[t, -0]\right)(x) = g_1(x), \quad \forall x \in I,$$

$$B_1\left(I_{1-}^{\alpha, -\left(\alpha + \frac{a+1}{4}\right), -\left(\alpha + \frac{a+3}{4}\right)} u[\theta_1^{(2)}(t)]\right)(x) + B_2\left(I_{1-}^{\alpha + \frac{a+1}{4}} u[t, +0]\right)(x) = g_2(x), \quad \forall x \in I,$$

где $A_1, A_2, B_1, B_2, \alpha$ – заданные константы, причём

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)} + \frac{A_2}{A_1} > 0, \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)} + \frac{B_2}{B_1} > 0, \quad \frac{|a|-1}{4} < \alpha < \frac{1-|a|}{4},$$

$g_1(x), g_2(x)$ – заданные функции, причём

$g_i(x) \in C^{(1,\lambda_i)}(\bar{I}) \cap C^2(I) \quad (1/2 < \lambda_i \le 1),\ i = 1, 2,\ \ g_1(0) = g_2(1) = 0.$

Решение этой задачи ищется в классе функций $u(x, y)$ таких, что $\lim\limits_{y\to 0-} u_y(x, y) \in H^{\lambda}\left(x^{1/2}; [0,1]\right),\ 0 < \lambda \le 1$.

Исследование проводится теми же методами, что и в случае задачи 2.1. Вопрос о существовании решения задачи 2.2 сводится к вопросу разрешимости характеристического сингулярного уравнения на конечном отрезке относительно функции $\mu(x) = x^{1/2}\nu(x)$, где $\nu(x) = \lim\limits_{y\to 0-} u_y(x, y) = \lim\limits_{y\to 0+} u_y(x, y)$, и получает положительный ответ. Отметим, что при доказательстве принадлежности правой части этого уравнения классу Гёльдера используются свойства (1), (2). Решение задачи 2.2 даётся в явном виде. Полученный результат формулируется в виде двух теорем.

В §2.3 для уравнения влагопереноса в случае $a = 1$, т.е. для уравнения

$$Lu = y^2 u_{xx} - u_{yy} + u_x = 0\,, \tag{5}$$

в той же области D рассматривается задача 2.3.

Задача 2.3. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $Lu \equiv 0$ в области $D_1 \cup D_2$;

2) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus I) \cap C^2(D \setminus I)$;

3) $u(x, -0) = u(x, +0) \quad (x \in \overline{I})$, $\lim\limits_{y\to 0-} u_y(x, y) = \lim\limits_{y\to 0+} u_y(x, y) \quad (x \in I)$;

4) $A_1\left(I_{0+}^{\alpha_1} u[\theta_0^{(1)}(t)]\right)(x) + B_1\left(I_{0+}^{\alpha_1} u[t, -0]\right)(x) + C_1\left(I_{0+}^{\alpha_1+1/2} \lim\limits_{y\to 0-} u_y[t, y]\right)(x) =$

$= g_1(x),\ \forall x \in I,$

$A_2\left(I_{0+}^{\alpha_2} u[\theta_0^{(2)}(t)]\right)(x) + B_2\left(I_{0+}^{\alpha_2} u[t, +0]\right)(x) + C_2\left(I_{0+}^{\alpha_2+1/2} \lim\limits_{y\to 0+} u_y[t, y]\right)(x) =$

$= g_2(x),\ \forall x \in I,$

где $g_1(x), g_2(x)$ – заданные функции такие, что

$$g_i(x) \in H_0^{\lambda_i}[0,1],\ i = 1, 2, \tag{6}$$

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ – заданные константы такие, что

$$\frac{(A_1 + B_1)(A_2 + B_2)}{\left(2C_1 - \sqrt{\pi}A_1\right)\left(2C_2 + \sqrt{\pi}A_2\right)} < 0, \tag{7}$$

$$2C_1(A_2 + B_2) - 2C_2(A_1 + B_1) - \sqrt{\pi}\left(A_1B_2 + 2A_1A_2 + A_2B_1\right) \ne 0, \tag{8}$$

$$\alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \tag{9}$$

$$\alpha_i + 1/2 < \lambda_i < 1,\ i = 1, 2. \tag{10}$$

Новизна постановки заключается в том, что в левых частях краевых условий 4) содержатся вторые слагаемые, представляющие собой дробные интегралы от пределов искомой функции при $y \to -0$, $y \to +0$ соответственно, умноженные на константы, и третьи слагаемые, представляющие собой дробные интегралы от пределов частной производной по y от искомой функции при $y \to -0$, $y \to +0$ соответственно, умноженные на константы, а также в более общем характере параметров этих условий.

Исследование проводится теми же методами, что и в случае задачи 2.1. Вопрос о существовании решения задачи 2.3 сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения относительно функции $\nu(x)$, где $\nu(x) = \lim\limits_{y\to 0-} u_y(x, y) = \lim\limits_{y\to 0+} u_y(x, y)$, и получает положительный ответ. Решение задачи 2.3 даётся в явном виде. Полученный результат формулируется в виде теоремы 2.3.

Теорема 2.3. Пусть функции $g_1(x), g_2(x)$ удовлетворяют условиям (6), действительные константы $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ – условиям (7)-(10). Тогда задача 1) - 4) для уравнения (5) имеет единственное решение с

$$\nu(x) = \frac{1}{\gamma(A_1 + B_1)}\left(D_{0+}^{\alpha_1+1/2} g_1\right)(x) - \frac{1}{\gamma(A_2 + B_2)}\left(D_{0+}^{\alpha_2+1/2} g_2\right)(x).$$

§2.4 посвящён задаче 2.4 для уравнения влагопереноса в случае $a = -1$, т.е. для уравнения

$$Lu = y^2 u_{xx} - u_{yy} - u_x = 0, \tag{11}$$

в прежней области D.

Задача 2.4. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $Lu \equiv 0$ в области $D_1 \cup D_2$;

2) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus I) \cap C^2(D \setminus I)$;

3) $u(x, -0) = u(x, +0)$ $(x \in \overline{I})$, $\lim\limits_{y\to 0-} u_y(x, y) = \lim\limits_{y\to 0+} u_y(x, y)$ $(x \in I)$;

4) $u(0, -0) = u(0, +0) = 0$;

5) $A_1\left(I_{0+}^{\alpha_1,\, -\alpha_1-1/2,\, -\alpha_1-1} u[\theta_0^{(1)}(t)]\right)(x) + B_1\left(I_{0+}^{\gamma_1} u[t, -0]\right)(x) +$

$+ C_1\left(I_{0+}^{\alpha_1+1} \lim\limits_{y\to 0-} u_y[t, y]\right)(x) = g_1(x)$, $\forall x \in I$,

$A_2\left(I_{0+}^{\alpha_2,\, -\alpha_2-1/2,\, -\alpha_2-1} u[\theta_0^{(2)}(t)]\right)(x) + B_2\left(I_{0+}^{\alpha_2-\alpha_1+\gamma_1} u[t, +0]\right)(x) +$

$+ C_2\left(I_{0+}^{\alpha_2+1} \lim\limits_{y\to 0+} u_y[t, y]\right)(x) = g_2(x)$, $\forall x \in I$,

где $g_1(x), g_2(x)$ – заданные функции, причём

$$g_i'(x) \in H_0^{\lambda_i}[0, 1],\ i = 1, 2, \tag{12}$$

$$g_1(0) = g_2(0) = 0, \tag{13}$$

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \lambda_1, \lambda_2$ – заданные константы, причём

$$B_1B_2(2C_1 - A_1)(2C_2 + A_2) < 0, \qquad (14)$$
$$2B_2C_1 - A_1B_2 - 2B_1C_2 - A_2B_1 \neq 0, \qquad (15)$$
$$0 < \alpha_1 < \lambda_1 < \gamma_1 < 1, \qquad (16)$$
$$0 < \alpha_2 < \lambda_2 < \alpha_2 - \alpha_1 + \gamma_1 < 1. \qquad (17)$$

Постановка и решение задачи 2.4 аналогично постановке и решению задачи 2.3. Технической особенностью является применение свойства (1) для доказательства непрерывности $\nu(x)$. Решение рассматриваемой задачи даётся в явном виде. Полученный результат формулируется в виде теоремы 2.4.

Теорема 2.4. Пусть функции $g_1(x), g_2(x)$ удовлетворяют условиям (12), (13), действительные константы $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \lambda_1, \lambda_2$ – условиям (14)-(17). Тогда задача 1) - 5) для уравнения (11) имеет единственное решение с

$$\nu(x) = \frac{1}{\gamma B_1}\left(D_{0+}^{\alpha_1+1-\gamma_1}\left(I_{0+}^{1-\gamma_1}g_1'\right)(t)\right)(x) - \frac{1}{\gamma B_2}\left(D_{0+}^{\alpha_1+1-\gamma_1}\left(I_{0+}^{1-\alpha_2+\alpha_1-\gamma_1}g_2'\right)(t)\right)(x).$$

§2.5 является началом нового класса задач для уравнения влагопереноса, которому помимо него посвящены §2.6, §2.7. Главное отличие этого класса в том, что уравнение влагопереноса рассматривается в области D_1.

Итак, в §2.5 для уравнения (4) в области D_1 ставится и исследуется задача такого содержания.

Задача 2.5. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (4) из класса $C(\overline{D_1}) \cap C^2(D_1)$, удовлетворяющее краевым условиям:

1) $u(x, 0) = \tau_1(x) \quad (x \in \overline{I})$;

2) $$A\left(I_{0+}^{\alpha, \beta, \frac{a-3}{4}-\alpha} u\left[\theta_0^{(1)}(t)\right]\right)(x) + B\left(I_{1-}^{\alpha-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}, \frac{a-3}{4}-\alpha} u\left[\theta_1^{(1)}(t)\right]\right)(x) +$$
$$+ C\left(I_{0+}^{\alpha+\frac{1-a}{4}, \beta, \frac{a-3}{4}-\alpha} u[t, 0]\right)(x) + D\left(I_{1-}^{\alpha+\frac{1-a}{4}, \frac{1}{2}, \frac{a-3}{4}-\alpha} u[t, 0]\right)(x) +$$
$$+ E\left(I_{0+}^{\alpha+\frac{3-a}{4}, \beta-\frac{1}{2}, \frac{a-3}{4}-\alpha} u_y[t, 0]\right)(x) + F\left(I_{1-}^{\alpha+\frac{3-a}{4}, 0, \frac{a-3}{4}-\alpha} u_y[t, 0]\right)(x) = g(x), \; x \in I,$$

где $A, B, C, D, E, F, \alpha, \beta$ – такие заданные константы, что

$$D = -\frac{B\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)}, \; B\sqrt{\pi} - 2\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)F \neq 0, \; \alpha + \frac{1-a}{4} > 0, \; -\frac{1}{2} < \beta < \frac{a-1}{4} - \alpha,$$

$\tau_1(x), g(x)$ – такие заданные функции, что

$$\tau_1(x)\in H_0^{\lambda_1}[0,1],\ \frac{1}{2}<\lambda_1<1,\ g(x)\in H^{\lambda_2}[0,1],\ \alpha+\frac{3-a}{4}<\lambda_2\le 1.$$

Будем искать решение этой задачи в классе функций $u(x, y)$ таких, что

$$\lim_{y\to 0-} u_y(x, y)\in H^{\lambda}\left(x^{\alpha+\frac{3-a}{4}};[0,1]\right),\ 0<\lambda\le 1.$$

Новизна постановки заключается в том, что в левой части краевого условия 2) содержатся слагаемые, представляющие собой операторы обобщённого дробного интегродифференцирования от значений искомой функции при $y=0$ и от значений частной производной по y от искомой функции при $y=0$, умноженные на константы, а также в принципиально других параметрах этих условий.

Доказывается, что разрешимость задачи 2.5 сводится к вопросу однозначной разрешимости характеристического сингулярного уравнения на конечном отрезке. Главной технической особенностью при этом является использование свойства композиции операторов обобщённого дробного интегродифференцирования в смысле М.Сайго с различными началами (3). Решение задачи даётся в явном виде. Полученный результат формулируется с помощью двух теорем.

В §2.6, §2.7 исследуются задачи 2.6, 2.7, аналогичные по постановке и решению задаче 2.5. Главное отличие заключается в том, что задача 2.6 посвящена уравнению влагопереноса в случае $a=1$, а задача 2.7 - уравнению влагопереноса в случае $a=-1$. Обратим внимание также на то, что в конце каждого из этих параграфов сделаны замечания, значительно расширяющих круг подобных задач для этих уравнений.

В §2.8 рассматривается уравнение

$$xu_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y=0,\ \ \alpha>1/2,\ 1/2<\beta<1, \qquad (18)$$

в области D, ограниченной интервалом AB: $A(0,0)$, $B(1,0)$ и характеристиками AC: $\sqrt{x}-\sqrt{-y}=0$, BC: $\sqrt{x}+\sqrt{-y}=1$ этого уравнения. За $\theta_0(x)$ принимается аффикс точки пересечения характеристики уравнения (18), выходящей из точки $(x,0)\in I\equiv AB$, с характеристикой AC. Формулируется задача 2.8.

Задача 2.8. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (18) из класса $u(x, y)\in C\left(\overline{D}\right)\cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x),\ x\in\bar{I}; \qquad (19)$$

$$A(x)\left(I_{0+}^{a,\,b,\,\frac{\alpha+\beta-2}{2}-a}u[\theta_0(t)]\right)(x)=B(x)\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta}u_y(x, y)+C(x),\ x\in I, \qquad (20)$$

где $\tau(x)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – такие заданные функции, что $\tau(x)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$, причём $A(0)=0$, $B(x) \neq 0$, $\forall x \in \bar{I}$;

a, b – такие действительные числа, что $\beta - 1/2 < a < 1/2 - b$.

Проблема однозначной разрешимости исследуемой задачи сводится к вопросу разрешимости эквивалентного интегрального уравнения Вольтерра второго рода. В итоге получается следующий результат.

Теорема 2.11. Пусть $\alpha > 1/2$, $1/2 < \beta < 1$; a и b – такие действительные числа, что $\beta - 1/2 < a < 1/2 - b$; $\tau(x)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$ – такие заданные функции, что $A(0)=0$, $B(x) \neq 0$, $\forall x \in \bar{I}$. Тогда существует единственное решение задачи (19), (20) для уравнения (18).

Третья глава диссертации посвящена нелокальным краевым задачам для уравнения параболо-гиперболического типа, в верхней полуплоскости представленного уравнением теплопроводности, в нижней – влагопереноса.

В §3.1 рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y, \; y > 0, \\ y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x, \; y < 0, \; |a| < 1, \end{cases} \tag{21}$$

в области $D = D_1 \cup I \cup D_2$, где роль D_2 играет квадрат $ABMN$ с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $M(1,1)$, $N(0,1)$. Ставится следующая задача.

Задача 3.1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению (21) в $D_1 \cup D_2$ и краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u(1,y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le 1, \tag{22}$$

$$a(x)\left(I_{0+}^{\frac{a-1}{4}, -\frac{1}{2}, 0} t^{-\frac{1}{2}} u\left[\theta_0^{(1)}(t)\right] \right)(x) + b(x)\left(I_{1-}^{-\frac{a+1}{4}, -\frac{1}{2}, 0} (1-t)^{-\frac{1}{2}} u\left[\theta_1^{(1)}(t)\right] \right)(x) = \tag{23}$$

$$= g(x), 0 < x < 1,$$

$$u(x,-0) = \alpha(x) u(x,+0), \tag{24}$$

$$\lim_{y \to -0} u_y(x,y) = \beta(x) \lim_{y \to +0} u_y(x,y), \tag{25}$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), a(x), b(x), g(x), \alpha(x), \beta(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^3(I)$ – заданные функции, причём

$$a(x) \neq 0, \tag{26}$$

$$a'(x)\, b(x) - a(x)\, b'(x) \le 0, \tag{27}$$

$$a(x)\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right) + b(x)\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right) \neq 0, \tag{28}$$

$$a(1)\left[a(1)\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)+b(1)\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)\right]>0,$$
$$b(0)\left[a(0)\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)+b(0)\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)\right]\geq 0, \tag{29}$$

$$\alpha(x)\beta(x)>0, \frac{d^2}{dx^2}\left[\alpha(x)\beta(x)\right]\leq 0,\ x\in\bar{I}. \tag{30}$$

Новизна постановки заключается в том, что в краевом условии (23) операторы дробного интегродифференцирования берутся не от значений искомой функции на аффиксах, а от произведения этих значений на множители $t^{-\frac{1}{2}}$ и $(1-t)^{-\frac{1}{2}}$ в первом и втором слагаемых соответственно, и умножаются не на константы, а на заданные функции.

Доказательство единственности решения задачи 3.1 проводится на основании специальных неравенств, связывающих произведения следов искомого решения и нормальной производной. Вопрос о существовании этого решения эквивалентным образом сводится к вопросу разрешимости полного особого интегрального уравнения с ядром Коши в исключительном случае. Полученный результат даётся в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные функции такие, что $\varphi_{1,2}(y)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $a(x), b(x), g(x), \alpha(x), \beta(x)$ – заданные функции из класса $C^1\left(\bar{I}\right)\cap C^3\left(I\right)$, для которых выполняются условия (26)-(30) и условия $0\leq\arg(a(0)-ihb(0))<\pi$, $\pi\leq\arg(a(1)-ihb(1))<2\pi$,

где $h=\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)\div\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)$. Тогда решение задачи (22)-(25) для уравнения (21) существует и единственно.

В §3.2 для уравнения (21) в той же области D рассматривается задача 3.2 с краевым условием (22), краевым условием

$$A\left(I_{0+}^{\frac{a-1}{4}-\gamma,\,-\beta,\,\gamma-\frac{1}{2}}u\left[\theta_0^{(1)}(t)\right]\right)(x)+B\left(I_{0+}^{-\gamma,\,-\beta,\,\gamma-\frac{1}{2}}a(t)u[t,-0]\right)(x)+$$
$$+C\left(I_{0+}^{\frac{1}{2}-\gamma,\,-\beta-\frac{1}{2},\,\gamma-\frac{1}{2}}b(t)\lim_{y\to 0-}u_y[t,y]\right)(x)=g(x),\ 0<x<1,\ 0<x<1, \tag{31}$$

и краевыми условиями (24), (25) с $\alpha(x)\equiv\beta(x)\equiv 1$. На функции $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $a(x)$, $b(x)$, $g(x)\in C\left(\bar{I}\right)\cap C^2\left(I\right)$ и действительные константы A, B, C, γ, β накладываются определённые условия.

Новизна постановки заключается в том, что в левой части краевого условия (31) второе слагаемое содержит оператор обобщённого дробного интегродифференцирования от предела искомой функции при $y \to -0$, умноженного на заданную функцию, третье слагаемое – от предела частной производной по y от искомой функции при $y \to -0$, умноженного на другую заданную функцию.

Решение проводится аналогично решению задачи 3.1. Существование решения задачи 3.1 сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Полученный результат даётся в виде теоремы.

§3.3 посвящён задаче 3.3 для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_x - u_{yy},\ y > 0, \\ y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x,\ y < 0, |a| < 1, \end{cases} \tag{32}$$

в той же области D, где рассматривалось уравнение (21).

Отметим, что линия изменения типа $y = 0$ не является характеристикой уравнения теплопроводности для уравнения (32), в отличие от уравнения (21).

Формулировка задачи 3.3 выглядит так.

Задача 3.3. Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, которая удовлетворяет уравнению (32) в области D и краевым условиям

$u(0, y) = \varphi_1(y), (y \in [0,1]);\quad u(x,1) = \varphi_2(x), (x \in \overline{I});$

$$A_1\left(I_{0+}^{\alpha, \beta, \frac{a-3}{4}-\alpha} u\left[\theta_0^{(1)}(t)\right]\right)(x) + A_2\left(I_{0+}^{\alpha+\frac{3-a}{4}, \beta-\frac{1}{2}, \frac{a-3}{4}-\alpha} \lim_{y\to 0-} u_y[t, y]\right)(x) = \gamma(x), \tag{33}$$

а также условиям сопряжения

$$u(x, +0) = u(x, -0), (x \in \overline{I}),\ \lim_{y\to +0} u_y(x, y) = \lim_{y\to -0} u_y(x, y), (x \in I).$$

Здесь $\varphi_1(y), \varphi_2(x)$ и $\gamma(x)$ - заданные функции такие, что

$\varphi_1(y) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \varphi_2(x) \in C(\overline{I}) \cap C^2(I),$
$\gamma(x) \in H^\lambda(\overline{I}) \cap C^2(I),$
$\gamma(0) = \varphi_1(0) = 0, \varphi_1(1) = \varphi_2(0);$

α, β, λ – действительные постоянные такие, что

$$\frac{a-1}{4} < \alpha < \frac{a+3}{4}, \beta > 0, \alpha + \frac{1-a}{4} < \lambda \le 1;$$

A_1, A_2 – ненулевые действительные константы такие, что

$$A_2 \neq A_1\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)}+\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)}\right).$$

Новизна постановки данной задачи заключается в краевом условии (33), а именно в его слагаемом, представляющем собой оператор обобщённого дробного интегродифференцирования от предела частной производной по y от искомой функции при $y \to -0$, умноженного на константу.

Доказательство существования и единственности решения рассматриваемой задачи вытекает из однозначной разрешимости интегрального уравнения Вольтера второго рода.

В заключение сформулируем основные результаты, выносимые на защиту.

1. Постановка новых нелокальных задач для уравнения влагопереноса, уравнения $xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y = 0$ и уравнения параболо-гиперболического типа, в верхней полуплоскости представленного уравнением теплопроводности, в нижней – влагопереноса; доказательство теорем существования и единственности решения этих задач.
2. Выявление класса задач, допускающих возможность получения явных решений.
3. Определение влияния коэффициента при младшей производной на корректную постановку нелокальных краевых задач для уравнения влагопереноса.
4. Нахождение условий, обеспечивающих выполнение принципа экстремума для гиперболических уравнений и принципа экстремума для оператора дробного дифференцирования порядка $\alpha < 1$.
5. Выяснение влияния на корректность постановки задач степеней t и $(1-t)$ в качестве множителей к значениям искомой функции на аффиксах, от которых берутся операторы дробного интегродифференцирования в нелокальных условиях этих задач.
6. Определение влияния на корректность постановки задач слагаемых, содержащих либо дробные интегралы от пределов искомой функции при $y \to -0$, $y \to +0$ или от пределов частной производной по y от искомой функции при $y \to -0$, $y \to +0$, либо операторы обобщённого дробного интегродифференцирования от значений искомой функции или от значений частной производной по y от искомой функции при $y = 0$, либо операторы обобщённого дробного интегродифференцирования от пределов искомой функции при

$y \to -0$, $y \to +0$ или от пределов частной производной по y от искомой функции при $y \to -0$, $y \to +0$, умноженных на заданные функции.

7. Установление влияния параметров композиции $\left(I_{0+}^{-p,q,r}\left(I_{1-}^{p,s,t} f\right)(v)\right)(x)$ в случае $0 < p < 1$ на параметры нелокального условия корректно постановленной задачи для уравнения влагопереноса.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Репину Олегу Александровичу за поддержку и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Ефимова С.В.* О нелокальной краевой задаче для гиперболического уравнения с двумя линиями вырождения // Вестник молодых учёных Самарской государственной экономической академии. 2002. № 2(4). С.267-275.
2. *Ефимова С.В.* Нелокальная краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа // Сборник трудов Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». Самара. 2002. С.117-125.
3. *Ефимова С.В.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с обобщёнными дробными интегралами в краевом условии // Труды 3-й Международной конференции молодых учёных и студентов «Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки». Самара. 2002. Ч.1. С.14-15.
4. *Репин О.А., Ефимова С.В.* Нелокальная краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2002. Вып.16. С.10-14.
5. *Ефимова С.В.* Задача со смещением для одного уравнения смешанного типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2003. Т.6. № 2. С.45-50.
6. *Ефимова С.В.* Об однозначной разрешимости одной нелокальной задачи для уравнения влагопереноса // Труды Международной научной конференции «Современные проблемы математической физики и информационной технологии». Ташкент. 2003. Т.1. С.33-39.
7. *Ефимова С.В., Репин О.А.* Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 2004. Т.40. № 10. С.1419-1422.
8. *Ефимова С.В.* Об одном композиционном свойстве для операторов обобщённого дробного интегродифференцирования // Вестник молодых учёных Самарской государственной экономической академии. 2004. № 1(9). С.345-351.

9. *Ефимова С.В.* Нелокальная задача для гиперболического уравнения с дробными интегралами в краевом условии // Вестник Самарской государственной экономической академии. 2004. № 2(14). С.285-288.
10. *Ефимова С.В.* Нелокальная задача для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2005. Вып.34. С.194-196.
11. *Ефимова С.В.* О задаче с операторами обобщённого дробного интегро-дифференцирования // Обозрение прикладной и промышленной математики: Тезисы докладов Шестого всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике (весенняя сессия). Санкт-Петербург. 2005. Ч.II. С.364-365.
12. *Ефимова С.В.* О свойстве композиции операторов дробного интегро-дифференцирования с различными началами // Тезисы докладов III-й школы молодых учёных «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик-Эльбрус. 2005. С.35-36.
13. *Ефимова С.В.* Задача со смещением для уравнения влагопереноса // Тезисы докладов Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». Самара. 2005. С.33-34.

Заказ № 398. Тираж 100 экз. Отпечатано на ризографе.
Самарский государственный технический университет.
Отдел типографии и оперативной полиграфии.
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.