РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

УДК 517.4+517.5 На правах рукописи

ГЕЙТ Владимир Эммануилович

L-ПРОБЛЕМА ЗОЛОТАРЕВА И АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ДВУХ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

В. Г.

ЕКАТЕРИНБУРГ - 2003

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Челябинского государственного университета

Официальные оппоненты : доктор физико-математических наук, профессор Н.И.Черных
доктор физико-математических наук, профессор И.А. Шевчук
доктор физико-математических наук, профессор В.И.Иванов

Ведущая организация: Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Защита состоится " 10 " апреля 2003 г. в 13 часов на заседании специализированного совета Д 004.006.02 по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук в Институте математики и механики Уральского отделения Российской Академии наук по адресу: **620219,** г. Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской , **д.** 16.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института математики и механики Уральского отделения Российской Академии наук.

Автореферат разослан "10" марта 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 004.006.02,
доктор физико-математических наук,
профессор В.М.Бадков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В теории приближений - одном из классических, интенсивно развивающихся разделов математического анализа, существует направление по описанию свойств тригонометрически сопряженной функции*

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{\operatorname{tg} t/2}dt,$$

в зависимости от **аппроксимационных** характеристик данной функции /. Т.е. от последовательности ее наилучших приближений $E_n(f)_R = \inf\|f - T_n\|$ тригонометрическими полиномами T_n порядка $\leq$ п и модулей гладкости $\omega_k(f\delta)_R = \sup\|\Delta_h^k f(x)\|$,где $0 < \delta \leq \pi, |h| \leq \delta, \Delta_h^k f(x)$- k-я обыкновенная разность с шагом *h* для / в пространстве $R(= L_{2\pi}, C_{2\pi})$.

Данное направление восходит к И.И.Привалову [2], который доказал, что при $f \in Lip\,\alpha(0 < \alpha < 1)$ имеем $\tilde{f} \in Lip\,\alpha$. Это вместе с другими результатами такого типа привело к рассмотрению для данного пространства $R(= L_{2\pi}, C_{2\pi})$ и мажоранты $\omega(\delta) > 0(0 < \delta \leq \pi)$ классов функций $\tilde{R} = \{f \in R \; . \tilde{f} \in R\}$,

$$E_R^\omega=\{f\in R : E_n(f)_R=O(\omega(\frac{1}{n+1}))\},\ \tilde{E}_R^\omega=\{f\in R : \tilde{f}\in E_R^\omega\}, \quad (1)$$

$$H_{k,R}^\omega=\{f\in R :\omega_k(f,\delta)_R=O(\omega(\delta))\},\ \tilde{H}_{k,R}^\omega=\{f\in R :\tilde{f}\in H_{k,R}^\omega\}, \quad (2)$$

где $\lim \omega(n^{-1}) = 0(n \to \infty)$ и $\lim \omega(\delta) = 0(\delta \to +0)$ в (1),(2).

Значит, согласно [2] имеем $H_{1,C}^\varphi \subset \tilde{H}_{1,C}^\varphi$ при $\varphi(\delta) = \delta^\alpha(0 < \alpha < 1)$. А.Зигмунд [3,4] обнаружил, что $H_{2,C}^\varphi \subset \tilde{H}_{2,C}^\varphi$, для $\varphi(\delta) = \delta$ и нашел неравенство, связывающее модули непрерывности f и $\tilde{f}$. Квад [5] первый занимался приближениями в $L_{2\pi}$. Систематически связь аппроксимационных свойств двух сопряженных функций изучали Н.К.Бари в работах [6,8-9] и С.Б.Стечкин в статьях [7-8,10,12,15]. Например по [6], для

*** Пара сопряженных функций f, $\tilde{f}$ возникает при рассмотрении действительной и мнимой части степенных рядов на единичной окружности [1].**

$R = C_{2\pi}$, когда $\varphi(\delta) \downarrow 0$, $E_R^\varphi \subset \tilde{R} \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^\infty \nu^{-1}\varphi(\nu^{-1}) < +\infty$; $E_C^\varphi \subset \tilde{E}_C^\varphi \Leftrightarrow \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{-1}\varphi(\nu^{-1}) = O(\varphi(\frac{1}{n}))$. Там же [6] было отмечено, что вопрос о справедливости этих утверждений в пространстве $R = L_{2\pi}$ вызвал затруднение и остался нерешенным. Одновременно С.Б.Стечкин [7] нашел порядок* величины $\sup E_n(\tilde{f})_C \sim nF_n + \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{-1}F_\nu$ по классу функций F_C, который задается произвольной последовательностью $F_n \downarrow 0$:

$$F_R = \{f \in R: \ E_n(f)_R \le F_n, \ n = 0,1,2,...\}. \tag{3}$$

В [7] подчеркивалось также, что порядок этой величины в $L_{2\pi}$ найти не удалось. Эти задачи из [6,7] решил автор, см., напр., [11, теоремы 3,4], где было еще установлено [11, теорема 5], что $E_R^\omega \subset \tilde{H}_{k,R}^\varphi \Leftrightarrow \frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1}\omega(\frac{1}{\nu}) + \sum_{\nu=n+1}^\infty \frac{1}{\nu}\omega(\frac{1}{\nu}) = O(\varphi(\frac{1}{n}))$.

Там же [11] выяснилось, что $H_{k,R}^\omega \subset \tilde{R} \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^\infty \nu^{-1}\omega_l^{**}(\nu^{-1}) < +\infty$, с использованием исправленной мажоранты [12]:

$$\omega_l^{**}(\delta) = \delta^l \inf_{0<t\le\delta}\{t^{-l}\inf_{t\le\xi\le\pi}\omega(\xi)\}, \ (0 \le \delta \le \pi), \tag{**}$$

о чем при $l = 1$ см.[3] ($R = C_{2\pi}$) и [13] ($R = L_{2\pi}$). Еще [11, теорема 9], мы имели $H_{l,R}^\omega \subset \tilde{E}_R^\varphi \Leftrightarrow \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{-1}\omega^{**}(\nu^{-1}) = O(\varphi(\frac{1}{n+1}))$. Там же был найден точный порядок величины $\sup E_n(\tilde{f})_R$ по классу

$$H_l(\omega)_R = \{f \in R : \omega_l(f,\delta)_R \le \omega(\delta), \ 0 < \delta \le \pi\}. \tag{4}$$

Обсудим теперь условия вложений

$$1) H_{l,R}^\omega \subset H_{k,R}^\varphi, \quad 2) H_{l,R}^\omega \subset \tilde{H}_{k,R}^\varphi. \tag{5}$$

В [4] доказано 1) с $l = 2, k = 1, R = C_{2\pi}$ для $\omega(\delta) = \delta^\alpha = \varphi(\delta)$ $(0 < \alpha < 1)$, а также для $\omega(\delta) = \delta, \varphi(\delta) = \delta \ln\frac{1}{\delta}$, см. еще [15]. Выяснением нетривиальной связи между модулями гладкости различных порядков впервые занимался А.Маршу, см., напр., [14, стр.114-123]. Автор [11, теорема 6] нашел окончательные условия справедливости 1), во всех случаях, исключая l, k - одной четности $l > k$.

*Запись $\alpha_n \sim \beta_n$ означает, что <

Н.К.Бари [6] указала достаточное условие на мажоранту для выполнения 2) при $k = l, R = C_{2\pi}$ и поставила вопрос об их необходимости, который при $k = l = 1$ был решен в [8, §5], а для четных $k = l$ - автором [39], тоже в $C_{2\pi}$. Дальнейшее продвижение по вложению 2) в (5), особенно в пространстве $L_{2\pi}$,было связано с [11, теоремы 10,11], хотя опять, как и для 1) в (5), там осталось ряд нерешенных вопросов. Поэтому мы вернемся к (5) здесь.

Давно, вместе с наилучшими, изучаются и так называемые (C, a) - приближения (см., напр., [1]), особенно при a = 1. Например, С.Н.Бернштейн [16] доказал для фейеровских сумм $\sigma_{n-1}(f)$ функции $f \in Lip\, \gamma (0 < \gamma \leq 1)$, что $\|f - \sigma_{n-1}(f)\|_C = O(n^{-\gamma}), (0 < \gamma < 1); \|f - \sigma_{n-1}(f)\|_C = O(n^{-1} \ln n), \gamma = 1$.

Пусть вообще, $\|f - \sigma_{n-1}^{\alpha}(f)\|_R = \rho_n^{\alpha}(f)_R$ - величина уклонения функции f от ее (C, α) - средних при $\alpha > 0$ порядка $(n-1)$ в пространстве R. Тогда согласно [10,17] $\rho_n^{\alpha}(f)_R = O(n^{-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} E_{\nu}(f)_R)$, а также: $\sup \rho_n^{\alpha}(f)_R \sim n^{-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} F_{\nu}$ по классу $f \in F_R, R = C_{2\pi}$. В $L_{2\pi}$ это было получено автором, вместе с точным порядком величины $\sup \rho_n^{\alpha}(\psi)_R$ по классу $H_l(\omega)_R$, $\psi = f$, $\tilde{f}$, $R = L_{2\pi}, C_{2\pi}$, кроме l - четного с $\psi = f$ и l - нечетного > 1 для $\psi = \tilde{f}$ [11, стр. 9-10]. А случай $l = 1, \alpha = 1, \psi = f, \tilde{f}, R = C_{2\pi}$ относительно данной величины рассматривался впервые в [10], где указывалось также на необходимость дальнейшего изучения вопроса - как при $l > 1$, так и для $R = L_{2\pi}$.

Далее, в связи с указанным выше результатом [16], естественно возникают задачи о вложениях с участием классов функций $Q_{\alpha,R}^{\varphi} = \{f \in R : \rho_n^{\alpha}(f)_R = O(\varphi(\frac{1}{n+1}))\}$, $\tilde{Q}_{\alpha,R}^{\varphi} = \{f \in R : \tilde{f} \in Q_{\alpha,R}^{\varphi}\}$. Так, согласно [16]: $H_{1,C}^{\omega} \subset Q_{1,C}^{\varphi}$ при $\omega(\delta) = \delta^{\alpha} = \varphi(\delta) (0 < \alpha < 1)$, а также для $\omega(\delta) = \delta, \varphi(\delta) = \delta \ln \frac{1}{\delta}$. Отметим попутно, что будут рассматриваться еще вложения для классов Боаса ($a_k(f), b_k(f)$–коэффициенты Фурье для f):

$$K^{\varphi} = \{f \in P : \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(f) + b_k(f) = O(\varphi(n^{-1}))\},$$

где $P \subset C_{2\pi}$ класс функций f с $a_k(f),\ b_k(f) > 0$. Классы K^φ появились для степенных мажорант в [18]. Гораздо более важную роль в теории приближений играют порядковые классы $\mathcal{E}_R^\varphi,\ \tilde{\mathcal{E}}_R^\varphi,\ \mathcal{H}_{k,R}^\varphi, \tilde{\mathcal{H}}_{k,R}^\varphi$ получаемые из (1),(2) заменой там O–соотношений на порядковые $\sim$–соотношения. Например, в [19] установлено, что $\mathcal{E}_R^\varphi = \mathcal{H}_{k,R}^\varphi \Leftrightarrow (B_k):\ \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi(\nu^{-1}) = O(n^k\varphi(n^{-1}))$. Что касается пространства $L_{2\pi}$, то для порядковых классов оставалось ряд нерешённых задач, которые будут рассмотрены здесь. Актуальной в теории приближений является и задача поиска порядка величин $\sup E_n(\psi^{(r)})_R$,

$$\sup w_k(\psi^{(r)}, n^{-1})_R, (n \in \mathbb{N}; r = 0,1,2,...), (\psi = f, \tilde{f}) \qquad (6)$$

на классах (3), (4). Здесь будет предполагаться $r \neq 0$.

Часть диссертации, точнее главы I, VI, относится к непериодическому случаю в теории приближений. В них рассматривается проблема Золотарёва: *для заданных вещественных* $A_0, A_1, ..., A_{l-1}$ $(l \geq 1, A_0 = 1)$ *требуется найти полином* $R_{n+l}(x) = R_{n+l}(x, A_1, ..., A_{l-1}) =$

$$x^{n+l} + A_1x^{n+l-1} + ... + A_{l-1}x^{n+1} + a_lx^n + ... + a_{l+n}, \qquad (7)$$

с наименьшей $L[-1,1]$*–нормой за счёт выбора вещественных* $a_l, ..., a_{l+n}$.

Решение при $l = 1,2,3$ опубликовано в [20,29,30] соответственно. Полиномы (7), имеющие ровно $(n+i)$ перемен знака на $(-1,1)$, обозначим через $R_{n+l}^{(n+i)}(x)$ для $1 \leq i < l$, а если $i = l$, то через $R_{n+l}^{max}(x)$, называя их максимальными. Таковы по [20] чебышевские полиномы II рода $U_{n+1}(x) = (\sin(n+2)t)/(2^{n+1}\sin t) = R_{n+l}^{max}(x),\ t = \arccos x$, для $l = 1$. Ф. Пеерсторфер [30,31], доказал, что существует вещественный полином

$$\prod_{\nu=1}^{l-1}(x - d_\nu)^2 = \sum_{\mu=0}^{2(l-1)} a_\mu x^\mu,\ |d_\nu| < 1\ (\nu = 1,2,...,l-1), l > 1,$$

-такой, что

$$R_{n+l}^{max}(x) = \sum_{\mu=0}^{2(l-1)} a_\mu 2^{\mu-2(l-1)} U_{n-l+\mu+2}(x), \ (l \le n+3). \quad (8)$$

В другой форме и более простыми средствами, нежели в [30,31], полиномы R_{n+l}^{max} получаются в данной работе за счёт представления из [20], где было $l = 1$:

$$R_{n+l}^{max}(x) = [(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)...][(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)...] = V \cdot U,$$

$$-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{l+n} < 1, k = [\frac{n+l}{2}]. \quad (9)$$

Пусть $\sigma_j(H)$, $\sigma_j(r)$- искомые коэффициенты для V, U, тогда это основные элементарные симметрические многочлены переменных $\alpha_1, \alpha_3, ...$ и $\alpha_2, \alpha_4, ...$ соответственно, см. далее теорему 2. Считаем всюду нулём сумму, у которой верхний предел меньше нижнего.

Цели работы, непериодический случай. 1) Найти и обосновать представление полиномов $R_{n+l}^{max}(x, A_1, ..., A_{l-1})$ в явной, более прямой по сравнению с (8), зависимостью от $A_1, ..., A_{l-1}$:

$$R_{n+l}^{max}(x) = \sum_{m=0}^{l-1} \delta_m U_{n+l-m}(x) + \sum_{m=l}^{2(l-1)} \Delta_m U_{n+l-m}(x), k > l-1, \quad (10)$$

$$где\ \delta_m = \sum\nolimits_{p=0}^{[m/2]} 4^{-p} C_{n+l-m+2p}^{p} A_{m-2p},\ C_t^s = \tfrac{t-2s+1}{t-s+1} \cdot \tbinom{t}{s},$$

$$\Delta_m = 2 \sum_{j=m-l+1}^{[m/2]}{}' \theta_j \theta_{m-j},\ \theta_i = \frac{1}{2}\delta_i - \sum_{j=1}^{[\frac{i}{2}]}{}' \theta_j \theta_{i-j},\ (i = 1, 2, ..., l-1),$$

а штрих над суммами означает: последние слагаемые в них ***домножаются,*** *на* $\frac{1}{2}$ *при чётных* т, г . Это теорема 5.1 гл. I, см. [57, теорема 6; 56,59]. 2) Одновременно ставилась цель решить задачу Золотарёва (7) при l — 4. Для чего потребовалось разработать во всех деталях едва намеченный в [29,31] способ построения немаксимальных полиномов $R_{n+l}^{(n+i)}(x)$ через $R_{n+i}^{max}(x)$.

Наконец, цель исследования по периодическому случаю, состояла в том, чтобы решить до конца проблему поиска полной системы теорем вложения для основных классов E_R^ω, $H_{k,R}^\omega$ теории приближений (и их сопряжённых) при $R = L_{2\pi}, C_{2\pi}$. Для этого пришлось разработать надлежащую методику построения функций, с наперёд заданными аппроксимационными свойствами (см. гл.II), опираясь на свою работу [40, гл.I].

Методы исследования. При решении поставленных задач применяются методы теории функций действительного переменного, теории тригонометрических рядов и алгебры.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. Укажем на некоторые их особенности и способы получения в периодическом случае. Так, условия теорем по вложениям (5) и порядки величин $\sup \rho_n^\alpha(\psi)_R$ не зависят от пространства $L_{2\pi}$, $C_{2\pi}$. Одинаковыми в них являются и доказательства теорем вложения в части достаточности и вывод оценок сверху при отыскании порядков рассматриваемых величин. Дело в том, что здесь применяются известные неравенства, доставляющие оценки сверху для

$$E_n(\psi^{(r)})_R,\ w_k(\psi^{(r)}, n^{-1})_R,\ \rho_n^\alpha(\psi)_R(\psi = f, \tilde{f})$$

через комбинации элементов последовательностей $\{E_n(f)_R\}_{n=0}^\infty$ и $\{w_l(f, n^{-1})_R\}_{n=1}^\infty$, $(l = 1, 2, \dots)$. А эти неравенства выглядят одинаково при $R = L_{2\pi}$, $C_{2\pi}$ [8,14]. Для доказательства необходимости получаемых таким образом достаточных условий по вложениям (5) и для установления оценок снизу порядков величин (6) возникает потребность в теоремах, утверждающих существование функций с теми или иными наперёд заданными аппроксимационными свойствами. Они устанавливаются указанием надлежащих примеров функций, которые комбинируются из крайних функций, f_1, f_2 и их сопряжённых (гл. II). Эвристические основы построения самих f_1, f_2 являются новыми и опираются на оценки $E_n(f)_R$ и $w_k(f, n^{-1})_R$ главы I [40] для f из классов функций, характеризуемых ограничениями на их коэффициенты Фурье. Крайние функции f_1, f_2 для $C_{2\pi}$ были известны давно [6, 10], автор установил у них ряд новых аппроксимационных свойств. Новые свойства обнаружены также у наших крайних функций f_1, f_2 для пространства $L_{2\pi}$ [32].

Наконец, результатом проведённого исследования по L–проблеме Золотарёва является решение задачи (7) для нового случая $l = 4$ методом максимальных полиномов (см. [20,29,31], а также §1 гл. I), с привлечением нового вышеуказанного представления (10) из [57], и теоремы 1.1 [55].

Теоретическая и практическая ценность. Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Кроме того, часть результатов легла в основу методического пособия по спецкурсу "Теория приближений", рекомендованного к присуждению грифа НМС по математике и механике УМО. Результаты, касающиеся периодического случая, публикуются давно и поэтому оказали определённое влияние на исследования некоторых авторов в этой области, см., напр., [23-28], где в той или иной форме цитируются наши результаты. Далее, результаты диссертации законченного характера (точные порядки, окончательные условия теорем вложения) позволили сделать вывод о точности (неулучшаемости) основных неравенств теории приближений [32], о которых говорилось в предь дущем пункте. Попутно некоторые из них были улучшены, а при помощи [8] были доказаны все теоремы [19].

Наконец, продвижение по проблеме Золотарёва состоит теперь в том, что алгебраическими средствами можно выразить все экстремальные в (7) полиномы для пары (n, l) по одним лишь максимальным полиномам предшествующих пар (п, г), $i \leq l$. Так, получив полное решение задачи (7) при l — 4, мы даём формально-алгебраическое перечисление всех полиномов (7) при $l = 5$ в гл. VI, теорема 7, см. [58].

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на летней международной школе в МГУ (рук. С. Б. Стечкин, 1995); на 8–ой Саратовской зимней школе (1996); на Всероссийской конференции "Алгоритмический анализ некорректных задач"(г. Екатеринбург, 1998); на международном семинаре по оптимизации (г. Челябинск, 1998); на летней школе по теории приближения функций (г. Миасс, 1999); а также неоднократно на семинаре под руководством члена-корреспондента РАН Ю. Н. Субботина и профессора Н. И. Черныха (г. Екатеринбург. ИММ УрО РАН, 1996-2002); на семинаре под руководством члена-корреспондента РАН П. Л. Ульянова в МГУ (1970, 2001); на семинаре под руководством члена-корреспондента РАН В. В. Васина (1998); на семинаре под руководством профессора В. П. Тананы (ЧелГУ,1998). Отметим ещё участие автора в работе конференций памяти Д. Е. Егорова (Казань, 1999), С. Б. Стечкина (Екатеринбург,2000) и других, см. [58]-[60], [62].

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [32-63].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения и шести глав. Список литературы содержит 155 наименований. Объём диссертации - 224 стр.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В главе I, §1-§5 описывается метод максимальных полиномов в проблеме Золотарёва. Ради его иллюстрации и полноты изложения в §4 гл.I доказывается, независимо от [30,31], теорема 4.1 с $l = 3$. Основа метода - это теорема 1.1, §1 гл.I следующего вида.

Теорема 1. *Для всякого полинома $R_{n+l}^{(n+i)}$ со старшей частью $f(x) = x^{n+l} + A_1x^{n+l-1} + \ldots + A_{l-1}x^{n+1}$, при некоторых $p_1, \ldots, p_{i-1} \in R$ имеем $R_{n+l}^{(n+i)}(x) = R_{n+i}^{max}(x, p_1, \ldots, p_{i-1})q_{l-i}(x)$, где a) $q_{l-i}(x)$-частное от деления $f(x)$ на $R_{n+i}^{max}(x, p_1, \ldots, p_{i-1})$ и оно сохраняет знак на (-1,1) для этих $p_1, \ldots, p_{i-1}$; b) остаток при таком делении $r_{n+i-1}(x) = r_0x^{n+i-1} + \ldots + r_{i-2}x^{n+1} + \ldots$ имеет степень $\leq n$, так что $p_1, \ldots, p_{i-1}$ выражаются через $A_1, \ldots, A_{l-1}$ из системы*

$$r_j = r_j(A_1, A_2, \ldots, A_{l-1}; p_1, \ldots, p_{i-1}) = 0, \ (0 \leq j \leq i-2).$$

Отсюда следует принципиальный результат: *искомые a_j в (7) -это коэффициенты остатка, с обратными знаками* *и при условиях* $a), b)$.

В дальнейших $\S\S 2, 3, 5$ гл. I исследуютсяполиномы $R_{n+l}^{max}(x)$. Основными здесь являются - теоремы 5.1 $(k > l-1)$, см. её с пояснениями на стр.7, а также теоремы 2.3, 3.3 $(k \leq l-1)$. Теорема 5.1 выводится в §5 при помощи лемм 5.1, 5.2, обобщающих некоторые факты [20]. Остальные теоремы гл. I получаются из основных лемм 2.1, 3.1 $(\S\S 2, 3)$, выражающих следующий принципиальный факт, нигде ранее не отмеченный: *каждое* $\sigma_m(H)$ *есть линейня комбинация* $\sigma_j(r)$ $(1 \leq j \leq m)$ *со скалярами, не зависящими от* $A_1, ..., A_{l-1}$. Из двух теорем 2.3, 3.3 дадим первую, см. ниже теорему 2. Пусть $c_0 = 1,\ c_{2i+1} = -c_{2i},\ c_{2i} = \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}$, тогда имеет место

Теорема 2. *В (9) с* $k \leq l-1,\ n+l = 2k$ *при* $1 \leq m \leq n+1$:

$$\sigma_m(\xi) = \frac{((-1)^m A_m \pm c_m)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}(\sigma_{m-i}(H) \mp c_{m-i})\sigma_i(r),$$

где верхний знак для $\xi = H$, *а нижний для* $\xi - r$, *что уже задаёт (9), когда* $k = l - 1$. *А в случае* $k \leq l-2$ *искомые* $\sigma_m(H)$, $\sigma_m(r)$ $(n+1 < m \leq k)$, *отыскиваются при найденных значениях* $\sigma_m(\xi)$ *из системы 2(k — n — 1) равенств:*

$$\sigma_k(H)\sigma_i(r) + \sigma_{k-1}(H)\sigma_{i+1}(r) + ... + \sigma_i(H)\sigma_k(r) = (-1)^{k+i}A_{k+i},$$

$(1 \leq i \leq l-1-k)$, *а также при* $(n+1 < m \leq k)$

$$\sigma_m(H) + \sigma_m(r) + \sigma_{m-1}(H)\sigma_1(r) + ... + \sigma_1(H)\sigma_{m-1}(r) = (-1)^m A_n$$

В главе II,§1-§3 разработаны средства, позволяющие доказывать теоремы существования (т. с.) крайних функций, с наперёд заданными структурными и конструктивными свойствами. Такие теоремы существования мы называли ещё [40, глава III] "**теоремами** существования типа **бернштейновских**" в теории приближений. Пусть *A* класс функций из $C_{2\pi}$ с абсолютно сходящимся рядом **Фурье.** В связи со своим результатом

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}E_n(f)_C < +\infty \Rightarrow f \in A$, С.Н.Бернштейн доказал одновременно и теорему существования: *для всякой последовательности* $E'_n \downarrow 0$, *с условием* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}E'_n = +\infty$, *существует функция* f, *для которой* (a) $E_n(f)_C \leq E'_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots;$ (b) $f \notin$ A, см., напр., [1, стр. 618].

С.Б.Стечкин [10] для всевозможных последовательностей $\varphi_n \downarrow 0$ рассмотрел в $C_{2\pi}$ крайние функции

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n - \varphi_{n+1}) \cos nx, \tag{11}$$

ряд новых аппроксимационных свойств которых, нашел и использовал автор [40]. Перед этим в [8], были введены некоторые крайние функции для установления окончательных условий эквивалентности соотношений $\omega_k(f,\delta)_R = O(\varphi(\delta))$, $\omega_k(\tilde{f},\delta)_R = O(\varphi(\delta))$I при $k = 1$, Л $= C_{2\pi}$. Этот результат [8] автор]39[перенёс на все четные fc,выявив ряд новых свойств крайних функций Н.К.Бари [6]

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\varphi(n^{-1}) \sin nx, \ \varphi(\delta) \downarrow 0, \ R = C_{2\pi}, \tag{12}$$

которые она применила для установления условия эквивалентности соотношений

$$E_n(f)_R = O(\varphi(n^{-1})), \ E_n(\tilde{f}_R) = O(\varphi(n^{-1})). \tag{13}$$

Автор в начале 70-х годов, при попытке найти решение весьма многочисленных и интересных вопросов работ [6-10], особенно в отношении пространства $L_{2\pi}$, обнаружил способ построения крайних функций, изложение которого не вошло в текст работы автора [40]. Например, при переносе указаного выше результата [6] относительно (13) на пространство $L_{2\pi}$, долгое время не удавалось получить следующую теорему существования [32]: *для всякой последовательности* $\varphi_n \downarrow$ О *существует функция* $f_1 \in L_{2\pi}$ *- такая, что* (a) $E_n(f_1)_L$— $O(\varphi_n)$, (b) $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi_\nu = O(E_n(\tilde{f}_1)_L)$.

Эвристические соображения, лежавшие в основе поиска такой f_1, носят довольно общий характер, т.к. применимы и в других случаях (см. ниже). Суть их состоит в следующем.

1) Имея произвольную последовательность $\varphi_n \downarrow 0$. требуемую функцию f_1 ищем в виде косинус-ряда

$$f_1(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{14}$$

стремясь ее коэффициенты a_k выразить через элементы данной последовательности φ_nтак, чтобы иметь сначала $f_1 \in L_{2\pi}$. Для этого достаточно, чтобы а„ $\downarrow 0$, $\Delta a_\nu \downarrow$ при $\nu \uparrow \infty$ (см.[1], стр. 100).

2) В этом случае по нашей оценке [40, гл. I §1], будут выполнены все неравенства $E_{n-1}(f_1)_L \le a_n + n\Delta a_n$. Поэтому, желая получить соотношеие *(а),* достаточно потребовать, чтобы

$$a_n + n\Delta a_n = \varphi_n \ (n = 1, 2, ...). \tag*{$(15)_n$}$$

3) Если эта линейная система имеет решение $\{a_n\}$ в классе выпуклых последовательностей для монотонной правой части, то f_1 (14) существует, причем по самому построению $f_1 \in E_L^{\varphi}$, для каждой $\varphi(\delta)$, у которой $\varphi(n^{-1}) = \varphi_n$. Но вычитая из $(15)_n$ уравнение $(15)_{n+1}$, нетрудно получить, что $\Delta^2 a_\nu = (\Delta\varphi_\nu)/(\nu+1) \ge 0 (\nu = 1, 2, ...)$. Откуда суммированием будем иметь сначала все Δa_ν, а затем и

$$a_n = \sum_{j=n}^{\infty} \Delta\varphi_j \left(1 - \frac{n}{j+1}\right), \ (n = 1, 2, ...). \tag{16}$$

Полагая ао $= \varphi_1$,двойным преобразованием Абеля в (14) приходим к виду функции f_1, данному в [32] без эвристических соображений, ведущих к ней. Наконец, нашими оценками [35] (см. §1 гл. I, лемма 2 [40]) обосновывается *(Ь)* в указанной выше перед (14) т.с..

Ряд теорем существования типа бернштейновских был получен надлежащим сопоставлением отдельных пунктов нижеприводимых теорем 3, 4 из [40]. Обширный, их список, не включенный в данную диссертацию, содержится в таблицах 2-4 к главе III нашей работы [40]. А дальнейшее продвижение после нее стало возможным в первую очередь благодаря лемме 1, см. далее.

Теорема 3. ***При $R = C_{2\pi}$ для функции f_1 (12), а в случае $R = L_{2\pi}$ для функций (14) с (16), имеем (а) $f_1 \in R$;***

(b) $\bar f_1 \in R \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi_\nu < +\infty$; *(c)* $E_n(f_1)_R = O(\varphi_{n+1})$; *(d)* $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi_\nu = O(E_n(\bar f_1)_R)$; *(e)* $\varphi_{2n+1} = O(E_n(\psi_1)_R)$, $\psi_1 = f_1,\ \bar f_1$; *(e')* $\varphi_n = O(\omega_k(\psi_1, n^{-1})_R)$; *(f)* $\omega_l(f_1, n^{-1})_R = O(\varphi_n)$, *l-четное*, $n^l\varphi_n\uparrow$ $(n\uparrow\infty)$; *(g)* $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi_\nu = O(\omega_k(\bar f_1, n^{-1})_R)$; *(h)* $n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi_\nu = O(\omega_k(\psi_1, n^{-1})_R)$, $\psi_1 = \bar f_1$ *(k-четное)*, $\psi_1 = f_1$ *(k-нечетное)*; *(i)* $n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi_\nu = O(\rho_n^{\alpha}(\bar f_1)_R)$, *при* $\alpha > 0$, $\bar f_1 \in R$. Относительно *(a)*-*(d)* для $R = C_{2\pi}$, см. [6].

Особенность нашего подхода к построению крайних функций состоит в следующем. Коэффициенты Фурье искомых функций - это решения алгебраических систем, получаемых приравниванием к заданной мажоранте $\{\varphi_n\}$ оценивающих, коэффициентных выражений для наилучших приближений (или $\omega_k(f, n^{-1})_R$, см., напр., $(15)_n$. Данный прием в тексте самой диссертации иллюстрируется также в пространстве $C_{2\pi}$. Используемые при этом оценки сверху величины $E_n(f)_C$ привели к известным функциям (11),(12). А новая крайняя функция $f_3 \in H_{k,C}^{\varphi}$ была обнаружена после применения одной из наших оценок для $\omega_k(f, n^{-1})_C$ из §2 гл. I [40].

Построение f_3 при каждом $k \in N$ для любой мажоранты $\varphi(\delta)$ с условием $n^k\varphi(n^{-1}) \uparrow (n\uparrow\infty)$, дадим здесь по той же схеме 1)-3), которая выше привела нас к функции f_1 в $L_{2\pi}$.

1) Ищем на этот раз крайнюю функцию в виде $f_3(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(k)} \sin \nu x$, причем в классе функций P.

2) По лемме 1 §2 гл. I [40], где $S_n(f_3)$ сумма Фурье для f_3:

$$\omega_k(f_3, n^{-1})_C \le n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^k a_\nu^{(k)} + 2^k\|f_3 - S_n(f_3)\|_C,\ n \in N. \quad (17)$$

Хорошо известно, что для включения $f_3 \in H_{k,C}^{\varphi}$ достаточно иметь соотношение $\omega_k(f_3, n^{-1})_C = O(\varphi(n^{-1}))$. В связи с этим потребуем, чтобы первое слагаемое в (17) обращалось в φ_n — $\varphi(n^{-1})$, то есть неизвестные $a_\nu^{(k)}$ отыскиваются из системы уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^k a_\nu^{(k)} = n^k\varphi_n,\ (n = 1, 2, \dots) \quad (18)_n$$

3) Очевидно $a_1^{(k)}$, а при $n > 1$, вычитая $(18)_{n-1}$ из $(18)_n$,

получим $a^{(k)}_{\nu} = \varphi_n - (1 - n^{-1})^k\varphi_{n-1}$, откуда нетрудно видеть, что все $a_\nu^{(k)} > 0$. А после возведения в степень k, имеем $a^{(k)}_{\nu} = -\Delta\varphi_{n-1} + k\varphi_{n-1}/n + O(\varphi_n/n^2)$. Отсюда несложно вывести, что и второе слагаемое в (17) есть $O(\varphi_n)$, т.е. $f_3 \in H^{\varphi}_{k,C}$. Функция f_3 имеет еще ряд свойств [33], необходимых при вычислении [42] точного поряда величины sup $E_n(\tilde{f}^{(r)})_C$ по классу $H_l(\omega)_C$, при поиске окончательных условий вложения для классов Боаса [43] и вложения $PH^{\omega}_{l,C} \subset A$, а также в задачах об условиях совпадения порядковых классов (§4 гл. IV).

Столь же обширны применения в пространстве $L_{2\pi}$ [32,34] наших крайних функций f_2 (и их сопряженных), вида

$$f_2(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta\varphi_\nu\tau_\nu(x), \varphi_\nu \downarrow 0, \tau_\nu(x) = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j^{(\nu)} \sin jx, \quad (19)$$

где $\alpha_j^{(\nu)} = \frac{j}{\nu+1}, (1 \le j \le \frac{\nu+1}{2}); \alpha_j^{(\nu)} = 1 - \frac{j}{\nu+1}, (\frac{\nu+1}{2} \le j \le \nu+1)$.

Теорема 4. *При $R = C_{2\pi}$ для функций f_2 из (11) и функций (19), когда $R = L_{2\pi}$, имеем: (a) $f_2, \tilde{f}_2 \in R$; (b) $E_n(\psi_2)_R = O(\varphi_{n+1})$, $\psi_2 = f_2, \tilde{f}_2$; (c) $\varphi_{2n+1} = O(E_n(f_2)_R)$; (c') $\varphi_n = O(\omega_k(f_2, n^{-1})_R)$, $k \in N$; (d) $\omega_l(\psi_2, n^{-1})_R = O(\varphi_n)$, если $n^l\varphi_n \uparrow (n \uparrow \infty)$, $\psi_2 = \tilde{f}_2$ (l-четное), $\psi_2 = f_2$(l-нечетное); (e) $n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^k\Delta\varphi_\nu = O(\omega_k(\psi_2, n^{-1})_R)$, $\psi_2 = \tilde{f}_2$(k-нечетное) $\psi_2 = f_2$(k-четное) (f) $n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi_\nu = O(\omega_k(f_2, n^{-1})_R)$, k-четное; (g) $n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu = O(\rho_n^\alpha(f_2)_R)$, $\alpha > 0$.*

При $R = C_{2\pi}$ в [10], были доказаны *(a), (Ъ)* и *(д)* для $a = 1$.

До этого момента обсуждались т.с. типа бернштейновских на уровне O-соотношений. Но имеется и другой уровень. Например, хорошо известна теорема Вейерштрасса-Бернштейна, характеризующая последовательность наилучших приближений. Сразу отметим, что автор [44] (см. §4 гл. V) охарактеризовал в L_2 последовательность $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ приближений средними Зигмунда порядка а > 0 условием
$((n+1)^{2\alpha}Z_n^2 - n^{2\alpha}Z_{n-1}^2)/((n+1)^{2\alpha} - n^{2\alpha}) \downarrow 0$, при n t ∞.

В том же ряду задач, где нужно строить функции с предписанными (структурными) свойствами, находится известный

[14] результат С.М.Никольского, характеризующий первые модули непрерывности. Автор [45] получил широкие признаки второго модуля непрерывности (см. ниже теоремы 5,6). Оказалось, например, что каждый первый модуль непрерывности является и вторым.

Теорема 5 [45]. *Функция $\varphi(\delta)(0 \le \varphi \le \pi)$ является вторым модулем непрерывности, если (a) $\varphi(0) = 0$, (b) φ - не убывает и непрерывна на $[0, \pi]$, (c) четное продолжение $\hat{\varphi}$ с периодом 2π функции φ на всю ось удовлетворяют условию*

$$|\Delta_h^2 \hat{\varphi}(x)| \le 2\varphi(|h|), (|x| < +\infty, |h| \le \pi).$$

Там же [45] (см. §4 гл. II), доказано, что утверждение теоремы 5 сохраняется, если в ней условие (c) заменить условием (c') *в разложении φ по косинусам $\varphi(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ все коэффициенты $a_n \le 0$*. На основании этого выводится [45, теорема 2] следующая

Теорема 6. *Если $F(x) = A - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2n-1} \cos(2n-1)x, (0 \le x \le \pi)$, где A выбирается из условия $F(0) = 0$, причем $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} a_n < +\infty$, то F-второй модуль непрерывности.*

Следующая глава III посвящается решению задач об окончательных условиях различных вложений в терминах мажорант. После работы автора [40] по вложениям (5) не до конца решился вопрос при $l > k$. Согласно [46] имеют место следующие две теоремы.

Теорема 7. *При $R = L_{2\pi}, C_{2\pi}$ и натуральных $l > k$ вложение $H_{l,R}^{\omega} \subset H_{k,R}^{\varphi}$ равносильно условию*

$$n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \omega_l^{**}(\nu^{-1}) = O(\varphi_k^{**}(n^{-1})).$$

Теорема 8. *При $R = L_{2\pi}, C_{2\pi}$ и натуральных $l \ge k$ вложение $H_{l,R}^{\omega} \subset \tilde{H}_{k,R}^{\varphi}$ равносильно условию*

$$n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \omega_l^{**}(\nu^{-1}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1} \omega_l^{**}(\nu^{-1}) = O(\varphi_k^{**}(n^{-1})).$$

Перенос теоремы 7 напространство $L_p(1 \le p \le \infty)$ см. в [23]. В сравнении с [40] продвижение по вложениям (5) состоялось [46] благодаря усовершенствованию нашего подхода из гл. II к построению крайних функций. Частично его содержит следующая

Лемма 1. *При данном $l \in N$, для всякой последовательности $\{\mu_n\}$, с условиями $0 < \mu_n \downarrow 0, n^l \mu_n \uparrow$, существует $\{\varphi_n\}$ - такая, что*
1) $0 < \varphi_n \le \mu_n, n \in N, \varphi_n \downarrow 0$; 2) $\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{l-1}\varphi_\nu \sim n^l \mu_n$; 3) $\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi_\nu \sim \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\mu_\nu, k \in [0,l)$; 4) $n^{r-l}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{l-1}\varphi_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}\varphi_\nu \sim \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}\mu_\nu, r < l$; 5) $n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi_\nu \sim n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\mu_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\mu_\nu, k \in [0,l)$.
Пункты 1), 2) получены при помощи [12].

§1 гл. III содержит еще ряд вспомогательных утверждений, используемых за пределами гл. III. В ее §2 выявляются окончательные условия каждого из вложений:

$$E_R^\omega \subset Q_{\alpha,R}^\varphi; E_R^\omega \subset \tilde{Q}_{\alpha,R}^\varphi; H_{l,R}^\omega \subset Q_{\alpha,R}^\varphi; H_{l,R}^\omega \subset \tilde{Q}_{\alpha,R}^\varphi.$$

Согласно [47], эти вложения при $R = L_{2\pi}, C_{2\pi}, \alpha > 0$ равносильны соответственно условиям:
1) $n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} \bar{\omega}_\nu = O(\varphi(n^{-1}))$, где $\bar{\omega}_{n+1} = \min \omega(\frac{1}{\nu+1}), 0 \le \nu \le n$;
2) $n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} \bar{\omega}_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\bar{\omega}_\nu = O(\varphi(n^{-1}))$;
3) $n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} \omega_l^{**}(\nu^{-1}) = O(\varphi(n^{-1}))$; 4) $\varepsilon_l n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} \omega_l^{**}(\nu^{-1}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\omega_l^{**}(\nu^{-1}) = O(\varphi(n^{-1})), \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_l = 1 (l > 1)$.

Наконец, в §3 гл. III получены окончательные условия справедливости следующих вложений для классов Боаса (см. [43]):

$$K^\omega \subset PE_C^\varphi, PE_C^\omega \subset K^\varphi, K^\omega \subset PH_{k,C}^\varphi, PH_{k,C}^\omega \subset K^\varphi.$$

Например, последнее из них имеет место, если и только если

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\omega_l^{**}(\nu^{-1}) = O(\varphi((n+1)^{-1})).$$

Здесь же даны условия совпадения классов $K^\omega = PE_C^\omega$, $K^\omega = PH_{k,C}^\omega$. Случай $k = 1$ при $\varphi(\delta) = \delta^\alpha$ был рассмотрен в [18].

Б главе IV исследуются различные порядковые соотношения теории приближений в пространствах $L_{2\pi}$, $C_{2\pi}$. §1 является вспомогательным для §4. Но следующая теорема [33,34] из него, как оказалось, имеет и самостоятельное значние, см. [28, с. 25]. Перенос её на пространства L_p , $p > 0$ см. в работе [26].

Теорема 9. *Пусть $R = L_{2\pi}, C_{2\pi}, k \in N, \omega(\delta) > 0$ – почти возрастает на $(0, \pi]$, тогда класс $\mathcal{H}^{\omega}_{k,R}$ – непуст, если и только если 1) $\omega(\delta) \to 0 (\delta \to 0)$ 2) $\delta^{-k}\omega(\delta)$ почти убывает.*

В §2 гл. IV доказана следущая

Теорема 10. *При $R = L_{2\pi}, C_{2\pi}, l \in N, \alpha > 0$, по произвольно заданному классу (4) имеем* $\sup \rho^{\alpha}_n(f)_R \sim n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \omega^{**}_l(\nu^{-1})$, *а* $\sup \rho^{\alpha}_n(\tilde{f})_R \sim \varepsilon_l n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \omega^{**}_l(\nu^{-1}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\omega^{**}_l(\nu^{-1})$, $(n = 1, 2, ...)$, *где* $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_l = 1 (l > 1)$, *см.* [48] и здесь стр. 5.

После [40] оставался нерешенным вопрос при l - четном $(\psi = f)$ и l - нечетном > 1, $\psi = \tilde{f}$, см. [11]. До появления [40], порядок ни одной из величин $\sup \rho^{\alpha}_n(\psi)_R, \psi = f, \tilde{f}$ не был вычислен при $R = L_{2\pi}$.

Далее, в гл. IV §3 излагается ряд результатов [42] о порядках верхних граней **аппроксимационных** характеристик высших производных двух сопряженных функций на классах (3),(4) при $R = C_{2\pi}$.

Теорема 11. *При $r \in N, \psi = f, \tilde{f}$, по произвольному классу F_C, в предположении сходимости указываемых рядов, имеем*

1) $\sup E_n(\psi^{(r)})_C \sim n^r F_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu$;

2) $\sup \omega_k(\psi^{(r)}, n^{-1})_C \sim n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} F_{\nu-1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu$;

а по произвольному классу (4) имеем

3) $\sup E_n(\psi^{(r)})_C \sim \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}\omega^{**}_l(\nu^{-1}), (l > r)$;

4) $\sup \omega_k(\psi^{(r)}, n^{-1})_C \sim \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}\omega^{**}_l(\nu^{-1}), (k + r > l > r)$;

5) $\sup \omega_k(\psi^{(r)}, n^{-1})_C \sim n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1}\omega^{**}_l(\nu^{-1}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}\omega^{**}_l(\nu^{-1}), (k + r < l)$.

В последнем §4 гл. IV устанавливаются [33,34] признаки совпадения основных порядковых классов теории приближений.

Теорема 12. *При $\varphi \downarrow 0 (\delta \downarrow +0)$ и $R = L_{2\pi}, C_{2\pi}$ имеем*

1) $\mathcal{H}^{\varphi}_{k+1,R} = \mathcal{H}^{\varphi}_{k,R} \Leftrightarrow (B_k) : n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi(\nu^{-1}) = O(\varphi(n^{-1}))$;

$$2)\mathcal{E}_L^\varphi = \tilde{\mathcal{E}}_L^\varphi \Leftrightarrow (B)\colon \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi(\nu^{-1}) = O(\varphi(n^{-1}));$$

$$3)\mathcal{E}_R^\varphi = \tilde{\mathcal{H}}_{k,R}^\varphi \Leftrightarrow (B)\&(B_k);\quad 4)\mathcal{H}_{k,R}^\varphi = \tilde{\mathcal{H}}_{k,R}^\varphi \Leftrightarrow (B)\&(B_k).$$

Н. К. Бари [6] доказала[1] **равенство п. 2) при условии** *(B)* для $R = L_{2\pi},\ C_{2\pi}$.

Заключительные результаты по периодическому случаю собраны в главе V. В связи с её §1 приводится (см. [41])

Теорема 13. *Пусть $l \in N$, P– класс функций с неотрицательными коэффициентами Фурье, а $F \in A$–означает абсолютную непрерывность функции $F \in C_{2\pi}$, тогда вложения 1) $PE_C^\omega \subset A$, 2) $\{F \in A : F' \in E_L^\omega\} \subset A$ равносильны условию $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1}\bar{\omega}(\nu^{-1}) < +\infty$; а вложения[2] 3) $PH_{l,C}^\omega \subset A$, 4) $\{F \in A : F' \in H_{l,L}^\omega\} \subset A$–равносильны условию $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1}\omega_l^{**}(\nu^{-1}) < +\infty$.*

Пункт 1) уточняет на классе P результат С. Н. Бернштейна со стр.12, а п.3)- теорему С. Б. Стечкина: $H_{l,C}^\omega \subset A \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-\frac{1}{2}}\omega_l^{**}(\nu^{-1}) < +\infty$ [12]. [3] Отметим, что теоремы 11-16,18 отсюда–это соединения некоторых теорем самой диссертации.

В §2 гл. V изложены признаки справедливости равенства Парсеваля с ограниченной и суммируемой функциями [49]. Хорошо известно, что при $f \in L^p(0, 2\pi)$, $g \in L^q(0, 2\pi)$, $(p^{-1} + q^{-1} = 1,\ p > 1)$ имеем равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n), \tag{20}$$

---

[1] Утверждения ($\Leftarrow$) в остальных пунктах теоремы 12 выводятся из теоремы С. М. Лозинского [19], см. её на стр. 6. Доказательство обратных утверждений $\Rightarrow$ является наиболее трудным в п. 4). При $k = 1$ в $C_{2\pi}$ оно впервые дано в [8], а для чётных k в [39], тоже в $C_{2\pi}$.

[2] Шмуклер А. И. (Матем. сборн., 72 №3, 1967) доказал 3) при (= 1, но случай $l > 1$ к его результату не сводится, см. [41].

[3] Подчеркнём, что особую трудность при доказательстве теорем 9-13, 15 и 16, составляют лишь оценки снизу рассматриваемых верхних граней и обоснование необходимости вводимых условий на мажоранты (подробнее об этом см. выше на стр. 8). Трудность эта преодолевается, как уже было сказано, посредством вышеприведённых теорем 3,4 и леммы 1.

которое может нарушаться при $p=\infty$, $q=1$. Здесь (a_n,b_n) коэффициенты Фурье функции f, а (α_n,β_n)-функции g.

Предложение. *Для справедливости (20), когда f-ограниченная, а g-суммируемая функции, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)=o(N),\ \ (N\to\infty). \qquad (20')$$

Следствие 1. *Пусть f–ограниченная, а g–суммируема на $(0,2\pi)$, тогда при $\sum_{\nu=1}^{n}\nu E_{\nu-1}(f)_L E_{\nu-1}(g)_L=o(n)(n\to\infty)$ имеем (20); в частности, (20) верно, если при некоторых $k,l\in N$ $\sum_{\nu=1}^{n}\nu\omega_k(f,\nu^{-1})_L\omega_l(g,\nu^{-1})_L=o(n)(n\to\infty)$.*

Теорема 14. *Для ограниченной (измеримой) функции f равносильны следующие три условия: 1) (20) имеет место при всех суммируемых g; 2) суммы Фурье $S_n(f,x)=O(1)$ равномерно по n,x; 3) соотношение (20′) выполняется при любой $g\in L_{2\pi}$*

Следствие 2. *Если f ограниченная функция с $a_n,b_n=O(n^{-1})$, то (20) верно для всякой суммируемой g. В частности, при $f\in V[0,2\pi]$, $g\in L_{2\pi}$ имеем* (20), см. [1, с. 219 и сноску с. 221].

Следствие 3. *Ряд Фурье суммируемой функции g допускает почленное интегрирование по отрезку, после домножения на ограниченную f со свойством 2) теоремы 14.*

Следствие 4. *Для ограниченной f суммы Фурье $S_n(f,x)=O(1)$ равномерно по n,x, как только $E_n(f)_L=O(n^{-1})$; или если $\omega_k(f,\delta)_L=O(\delta)$ при некотором $k\in N$.*

Условия справедливости (20) для $f\in C_{2\pi}$ исследовал А.И. Рубинштейн (Изв. вузов. Матем. N6, 1978).

Наконец, в предпоследнем §3 гл. V получены так называемые [8] "теоремы об эквивалентности" с r-тыми производными. Они переносят соответствующие результаты [19] на сопряженный случай, а также отдельные результаты [8] на $L_{2\pi}$.

Теорема 15. *Пусть заданы $R(=L_{2\pi},C_{2\pi})$; $k,r\in N$ и $\varphi(\delta)\downarrow 0$, тогда условий B,B_k необходимо и достаточно для эквива-*

лентности соотношений: ***1)*** $E_n(f)_R = O(\frac{1}{n^r}\varphi(\frac{1}{n}))$, $\omega_k(\tilde{f}^{(r)},\delta)_R = O(\varphi(\delta))$; ***2)*** $E_n(f)_R \sim n^{-r}\varphi(n^{-1})$, $\omega_k(\tilde{f}^{(r)},\delta)_R \sim \varphi(\delta)$; ***а также соотношений 3)*** $a_n(f)$, $b_n(f) = O(\frac{1}{n^{r+1}}\varphi(n^{-1}))$ ***и*** $\omega_k(f^{(r)},\delta)_C = O(\varphi(\delta))$ ***на классе функций*** $f \in C_{2\pi}$ ***с монотонными коэффициентами Фурье*** $(r = 0,1,2,...)$.

Случаи 1), 2) - без сопряжения и в равносильной форме, впервые появились в [19], см. также [8] при $R = C_{2\pi}$. Пункт 3)– это обращение из [50] теоремы Лоренца, первоначальный вид которой, когда $\varphi(\delta) = \delta^\alpha$, $k = 1$, $r = 0$, есть в [1, с.678]. Её обобщение на $r \neq 0$ дал впервые М. К. Потапов (ДАН СССР, 1967).

Теорема 16. ***Пусть*** $\varphi(\delta) \downarrow 0$ ***при*** $\delta \downarrow 0$; $\psi = f, \tilde{f}$; $r = \overline{1,2,...}$, ***тогда условие (B) на*** $\varphi(\delta)$ ***необходимо и достаточно для эквивалентности соотношений*** $E_n(f)_L = O(n^{-r}\varphi(n^{-1}))$, $E_n(\psi^{(r)})_L = O(\varphi(n^{-1}))$, ***а также для эквивалентности порядковых соотношений*** $E_n(f)_L \sim \frac{1}{n^r}\varphi(n^{-1})$, $E_n(\psi^{(r)})_L \sim \varphi(n^{-1})$.

При $r = 0, \psi = \tilde{f}$ см. [32, теорема 2], случай $C_{2\pi}$ получен в [8].

В главе VI данной работы[4] завершается исследование задачи Золотарёва(7) в случае $l = 4$ см.[57] и [56], а также [63],[61].

Если для произвольно заданной точки $T = (A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^3$ полином $R_{n+4}(x) = x^{n+4} + A_1x^{n+3} + \cdots + A_3x^{n+1} + a_4x^n + \cdots + a_{n+4}$ имеет наименьшую норму в пространстве $L[-1,1]$ за счет выбора вектора $(a_4, \ldots, a_{n+4}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $(n = 0,1,2,\ldots)$, то в зависимости от точки T полином $R_{n+4}(x)$ может иметь $(n+1), (n+2), (n+3)$ или $(n+4)$ перемены знака на $(-1,1)$. Обозначим через $D_i(n,4) = Di$ множество всех тех точек Т, в которых соответствующий полином $R_{n+4}(x)$ имеет ровно $(n+$ г) перемен знака на интервале $(-1,1)$, $i = \overline{1,4}$. Множество $D_4 = D_4(n,4)$ будет, как и в [56], называться областью максимальности. Полиномы $R_{n+4}(x)$, относящиеся к одному и тому же $D_i(n,4)$, задаются в единой форме, см. их ниже в п. г) вспомогательной теоремы 20.

[4]Исследование по главе VI поддержано Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 01-01-00346. Автор благодарит Совет фонда за финансовую помощь.

Здесь разработаны эффективные средства (теоремы 17-19), **позволяющие** распознать то множество $D_i(n,4)$, в котором будет находиться любая, наперед заданная точка (A_1, A_2, A_3) из $\mathbb{R}^3$. Тем самым получена окончательная классификация всех полиномов, наименее уклоняющихся от нуля в метрике $L[-1,1]$, с четырьмя предписанными старшими коэффициентами.

1. Полиномы $R_{n+4}(x)$, имеющие $(n+1)$ перемену знака на $(-1,1)$

Точки T, в которых экстремальный полином (7) обладает этим свойством характеризуются теоремой 17. Положим A_1 — p, $(A_2 + n/4) = q$, $(A_3 + A_1 n/4)$ — г. Пусть ещё H^+ - область точек $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, **удовлетворяющих** условиям $(-2u - 3) < v < ((u+1)^2 - 4)/4$ при $-1 < u \leq 3$, а также $(-2u - 3) < v < 2u - 3$, для $u > 3$.

Теорема 17. ***Точка*** $(A_1, A_2, A_3) \in D_1(n,4)$, ***если и только если одна из двух соответствующих ей точек*** $(\pm p, q, \pm r) = (u, v, w)$, ***удовлетворяет условию*** $w \geq (2/27)(\sqrt{u^2 - 3v} - u) \cdot (u^2 - 3v) + uv/9$, ***когда*** $(u,v) \in H^+$, ***или условию*** $w \geq |v+1| - u$, ***если*** $(u,v) \notin H^+$.

2. Полиномы $R_{n+4}(x)$ с $(n+2)$ переменами знака на $(-1,1)$

Точки $(A_1, A_2, A3)$ множества $D_2(n,4)$ вместе с параметром σ, со стр. 24, описывает дальнейшая теорема 18. Положим

$$P = -\frac{A_1}{2}, \quad 3Q = 2A_2 + \frac{n+2}{2}, \quad R = -\left(2A_3 + \frac{n+1}{2}A_1\right).$$

Далее, пусть $\Delta = \Delta(P,Q,R) = R^2 + 2P(2P^2 - 3Q)R + Q^2(4Q - 3P^2)$, и $R = R_\pm(P,Q) = -P(2P^2 - 3Q) \pm 2(P^2 - Q)^{3/2}$, $P^2 - Q \geq$ O, - вещественные корни уравнения $\Delta(P, Q, Я) = 0$.

Будут еще использоваться три области точек (P, Q, R) в $\mathbb{R}^3$, задаваемые нижеследующими условиями (А), (B), (V). Так, **у с л о в и е** (А) означает, что

$$-\frac{1}{3} < Q < \begin{cases} 2P - 1, & P \leq 1, \\ P^2, & P > 1, \end{cases} \quad -1 - 3P - 3Q < R \leq 1 - 3P + 3Q;$$

причем, равенство для Я берется лишь при $Q < 2P-1, P > 1/3$.

А условие (В) задается требованиями

$$-\frac{1}{3}<Q<\begin{cases} -2P - 1 & P > -1 \\ P^2, & P < -1, \end{cases} \quad -1-3P-3Q \leq R < 1-3P+3Q;$$

где равенство для R берется только для $Q < -2P - 1, P < -1/3$.

Наконец, условие (V) — это ограничение вида $1 - 3P + 3Q < R < -1 - 3P - 3Q$, где добавляется знак равенства — справа только при $(-2P - 1) < Q < -1/3$, а слева — лишь для $(2P - 1) < Q < -1/3$. При этих соглашениях, с учетом п. 2 теоремы 20 и формул со стр. 22 для P, Q, R, справедлива

Теорема 18. *Пусть* $T=(A_1, A_2, A_3)\in\mathbb{R}^3$, $s=-\frac{1}{2}(R-3PQ+2P^3)$, *тогда*

1) *при* $\Delta(P, Q, R) > 0$, *если* $T \in D_2$, *то с необходимостью*

$$\sigma + P = \left(s+\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3} + \left(s-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3},$$

а *также* $|R + 3P| < 1 + 3Q$; *и если эти условия выполнены, то при* $\left(s+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{2/3}+\left(s-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{2/3} \geq (P^2-Q) + \backslash$ *точка* $T\in D_2$, *а при нарушении этого неравенства,* $T \in D_2$ *в том и только том случае, когда*

$$|\sigma + 2P| \geq 2 \quad \text{и} \quad 3\sigma^2 + 8P\sigma + 6Q + 3 \geq 4|\sigma + 2P|; \tag{21}$$

2) *при* $\Delta = 0$, *для включения* $T \in D_2$ в *случае* $R = R_+(P, Q)$ *необходимы условия*

$$\frac{1}{4}(3P-1)(P+1)<Q<\begin{cases} P^2, & -1 \leq P < 1, \\ \frac{1}{4}(3P+1)(P-1), & P < -1; \end{cases} \tag{22}$$

а для $R = R_-(P, Q)$– *условия:*

$$\frac{1}{4}(3P+1)(P-1)<Q<\begin{cases} P^2, & -1 < P \leq 1, \\ \frac{1}{4}(3P-1)(P+1), & 1 < P; \end{cases} \tag{23}$$

далее, при наличии (22) *или* (23) *точка* $T \in D_2$*, как только* $Q \leq P^2 - \frac{1}{2}$, а *при нарушении этого неравенства точка* $T \in D_2$*, если и только если выполнено условие* (21), *причем* $\sigma = -P \mp 2\sqrt{P^2 - Q}$ *при* $R = R\pm$*, соответственно.*

3) *при* $\Delta < 0$*, если* $T \in D_2$*, то* $T \in (A) \cup (B) \cup (V)$*, и* $\sigma + P = 2\sqrt{P^2 - Q}\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)$, V? $= \arccos(s/(P^2 - Q)^{3/2})$, *где* $k = 0, 1$ *или* 2 *для* $T \in (A)$, $T \in (B)$ *или* $T \in (V)$*–соответственно; далее,*

(a) если $T \in (V)$, то $T \in D_2$ в тол* и *только том случае, когда*

$$Q < \min\left\{-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}P^2 - \tfrac{1}{2}\right\},$$

$$\frac{2-P-\sqrt{(4P+1)^2-18Q-6}}{6\sqrt{P^2-Q}} \leq \cos 2\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right) \leq \frac{-2-P+\sqrt{(4P-1)^2-18Q-6}}{6\sqrt{P^2-Q}};$$

(b) *при* $T \in (A)$ *точка* $T \in D_2$*, как только* $\cos\frac{2\varphi}{3}\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4(P^2-Q)}$, а *иначе* $T \in D_2$, если и *только если выполняется требование* (21);

(c) если $T \in (B)$, то $T \in D_2$ при $\cos 2\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4(P^2-Q)}$, а в *противном случае,* $T \in D_2$*, тогда и только тогда, когда имеем* **(21)**.

3. Область максимальности $D_4(n, 4)$. Точки её **описывает**[5]

Теорема 19. ***Точка*** $(A_1, A_2, A_3) \in D_4(n, 4)$, если и только если; $1-\theta_1+\theta_2-\theta_3 > 0$, $1+\theta_1+\theta_2+\theta_3 > 0$, $3-\theta_1-\theta_2+3\theta_3 > 0$, $1 - \theta_2 + (\theta_1 - \theta_3)\theta_3 > 0$, *где* $\theta_1 = A_1$, $\theta_2 = \frac{n+3-A_1^2+4A_2}{2}$, $\theta_3 = ((n+1)A_1 + 8A_3 + A_1(A_1^2 - 4A_2))/2$.

Теорема 20 [57]. ***Пусть*** $l = 4$, $n \in Z+$, $(A_1, A_2, A_3) \in R^3$, *тогда*

1) $R_{n+4}^{(n+1)}(x, A_1, A_2, A_3) = U_{n+1}(x)(x^3 + A_1x^2 + (A_2 + \frac{n}{4})x + A_3 + A_1\frac{n}{4})$, в *точках* $(A_1, A_2, A_3) \in D_1$*, где второй сомножитель сохраняет знак на (-1,1);*

2) $R_{n+4}^{(n+2)}(x, A_1, A_2, A_3) = (U_{n+2}(x)+\sigma U_{n+1}(x)+\frac{\sigma^2}{4}U_n(x))(x^2+(A_1-\sigma)x+\frac{3}{4}\sigma^2-A_1\sigma+\frac{n+1}{4}+A_2)$, ***для точек*** $(A_1, A_2, A_3) \in D_2$,

---

[5]Это описание $D_4(n, 4)$ можно получить, как и описание всех областей максимальности $D_l(n, l)$при $\left[\frac{n+l}{2}\right] > l - 1$, сопоставлением теоремы 6 [30] с теоремой 6 [57], см.(10).

характеризуемых условием: уравнение $\frac{1}{2}\sigma^3 - \frac{3}{4}A_1\sigma^2 + (A_2 + \frac{n+2}{4})\sigma - (A_3 + \frac{n+1}{4}A_1) = 0$ *имеет в (-1,1) корень* $a = \sigma(A_1, A_2, A_3)$, *при котором второй сомножитель из 2) сохраняет знак на (-1,1);*

3) $R_{n+4}^{(n+3)}(x, A_1, A_2, A_3) = R_{n+3}^{max}(x, p, q)(x + A_1 - p)$, *с* $(p,q) \in H_3(n,3)$ [57], *причем* $\begin{cases} A_2 - q = p(A_1 - p) \\ A_3 + \frac{p}{8}(n + p^2 - 4q) = q(A_1 - p), \end{cases}$ *а также* $|A_1 - p| > 1$;

4) при $A_1 = p$, $A_2 = q$, $A_3 = r$, $n \geq 1$ *имеем* $R_{n+4}^{max}(x, p, q, r) = U_{n+4}(x) + pU_{n+3}(x) + (\frac{n+3}{4} + q)U_{n+2}(x) + (\frac{n+2}{4}p + r)U_{n+1}(x) + (\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_3)U_n(x) + 2\theta_2\theta_3U_{n-1}(x) + \theta_3^2U_{n-2}(x)$, *где* $\theta_1 = \frac{p}{2}, \theta_2 = \frac{n+3-p^2+4q}{8}, \theta_3 = \frac{p(n+1)+8r+p(p^2-4q)}{16}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дадим кратко основные теоремы и полученные результаты.

1) Теоремы **7,8**, совместно с [40] и исследованиями других авторов [6-8,19], завершают решение проблемы о полной системе теорем вложения для основных классов E_R^ω, $H_{k,R}^\omega$ теории приближений (и их сопряженных) при $R = L_{2\pi}, C_{2\pi}$. Одновременно в этих пространствах решена задача об условиях совпадения основных порядковых классов, теорема 12. В связи с данной проблемой разработана (см. стр. 12-15) специальная методика построения и описания свойств крайних функций, которые позволяют устанавливать окончательные условия справедливости тех или иных вложений и находить точные порядки различных аппроксимационных характеристик (теорема 10) на классах F_R, $H_k(\omega)_R$.

2) Решена проблема Золотарева о поиске многочленов с наименьшей нормой в $L[-1;1]$, когда произвольно заданы четыре их старших коэффициента (теорема 18). А для любого числа таких коэффициентов $(1, A_1, ..., A_{l-1}) \in R^l$ разработан метод редукции проблемы Золотарева к чисто алгебраическим задачам о разбиении всей области R^l исходных данных на l подобластей, в каждой из которых экстремальный полином в принципе можно выписать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз. 1961. 936 С.

2. PrivaloffJ. Sur les fonctions conjuguèes // Bull. Soc. Math. de France. 1916. 44. P. 100-103.

3. Zygmund A. O molule ciaglosči sumy szeregu sprzezonego z szeregiem Fouriera // Prace Mat.-fiz.. 1924. V. 33. P. 125-132.

4. Zygmund A. Smooth functions // Duke Math. Journal. 1945. V. 12, P. 47-76.

5. Quad E.S. Trigonometric approximation in the mean// Duke Math. Journal. 1937. V. 3. P. 529-543.

6. Бари Н.К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Изв. АН СССР, сер. матем.. 1955. Т. 19.№5. С. 285-302.

7. Стечкин С.Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР, сер. матем.. 1956. Т. 20.№2. С. 197-206.

8. Бари Н.К. и Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Моск. мат. об-ва. 1956. Т. 5. С. 483-522.

9. Бари Н.К. О локально-наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами // Уч. зап. МГУ. 1956, выпуск 181, Математика. Т. 8. С. 107-138.

10. Стечкин С.Б. О приближении периодических функций суммами Фейера // Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. 1961. Т. 62. С. 48-60.

11. Гейт В.Э. Структурные и конструктивные свойства функции и ее сопряженной. Автореф. канд. дисс. Калинин. 1971. 14 с.

12. Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение) // Изв. АН СССР, сер. матем.. 1955. Т. 19. №4. С. 221-246.

13. Петровская М.Б. О рядах по системе Хаара и функциях класса $H^1_{\omega(\delta)}$ // Сибирский матем. журнал. 1968 Т. IV. №4. С. 863-879.

14. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. // М.: Физматгиз. 1960. 626 С.

15. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР сер. матем.. 1951. Т. 15. №3. С. 219-242.

16. Бернштейн С.Н. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degrè donè, Mèm. de l'Acad. Royale de belgique, 2-me serie. 1912. V. 4. P. 1-104.

17. Буадзе А.И. Об одной задаче П.Л. Ульянова // Сообщ. АН Груз. ССР. 1965. Т. 40. №3. С. 543-550.

18. Boas R.P. Fourier Series with Positive Coefficients // Journa of Mathematical Analysis and Applications. 1967. V. 17. №3. P. 463-483.

19. Лозинский С.М. Обращение теорем Джексона // Докл. АН СССР. 1952. Т. 83. №5. С. 645-647.

20. Коркин А.Н., Золотарев Е.И. Sur une certain minimum// Nouv. Ann. de math., ser. 2. 1873. №12.P. 337-355

21. Галеев Э.М. Задача Золотарева в метрике $L[-1,1]$ // Матем. заметки. 1975. Т. 17. №1. С. 13-20.

22. Тихомиров В.Н. Некоторые вопросы теории приближений, Издат-во Моск. ун-та. 1976. 304 С.

23. Ильясов Н.А. Теоремы вложения для некоторых классов периодических функций в $L_p(1 < p <$ сю) // ДАН СССР. 1984. Т. 276. №6. С. 1301-1304.

24. Ильясов Н.А. Приближение периодических функций сре ними Зигмунда. // Матем. заметки. 1986. Т. 39. №3. С. 367-382.

25. Ильясов Н. А. О приближении периодических функций средними Фейера-Зигмунда в разных метриках.// Матем. заметки. 1990. Т. 48. №4. С. 48-57.

26. Radoslavova T. V. Descrease orders of the L_p–moduli of continuity $0 < p < \infty$). Analys Math.. 1979. T. 5. №3. C. 219-234.

27. Шевчук И. А. Некоторые замечания о функциях типа модуля непрерывности порядка > 2. В сборнике "Вопросы теории приближения функций и её приложения". Киев. 1976. С. 194–199.

28. Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наукова думка. 1992. 225 С.

29. Geronimus J. Sur quelques proprietes de polynomes don't les coefficients premiers sont donnes, Сообщения Харьковского математического общества. Серия 4. 1935. Т. 12. С. 49-59.

30. Peherstorfer F. Erweiterung des Satzes von Markoff, in Linear Spaces and Approximation. 1978. ISNM40. Birkhäuser. Basel. S. 423-427.

31. Peherstorfer F. Lineare und nichtlineare L^1–Approximation. Dissertation. Wien. 1978.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

32. Гейт В. Э. О точности некоторых неравенств в теории приближений // Матем. заметки. 1971. Т. 10. №5. С. 571-582.

33. Гейт В. Э. Теоремы вложения для некоторых классов периодических непрерывных функций // Изв. вузов. Математика. 1972. №4. С. 67-77.

34. Гейт В. Э. О структурных и конструктивных свойствах функции и её сопряженной в L // Изв. вузов. Математика. 1972. №7. С. 19-30.

35. Гейт В.Э. О структурных и конструктивных свойствах синус- и косинус-рядов с монотонной последовательностью коэффициентов.// Изв. вузов. Математика. 1969. №7. С. 39-47.

36. Гейт В.Э. О наилучшем приближении в среднем cos-ряда с выпуклыми коэффициентами.// Изв. вузов. Математика. 1978. №8. С. 50-55.

37. Гейт В.Э. О функциях с наперед заданными аппроксимационными св-вами //Тез. докл. 8 Сарат. зимней шк.. Саратов. 1996. С. 35.

38. Гейт В.Э. О коэффициентах Фурье и структурных свойствах дифференцируемых функций. // Матем. записки УрГУ. 1967. Т. 5. №4. С. 19-22.

39. Гейт В.Э. О структурных свойствах двух сопряженных функций. // Матем. записки УрГУ. 1968. Т. 6. №2. С. 24-31.

40. Гейт В.Э. Структурные и конструктивные свойства функции и ее сопряженной. Кандид. диссерт. Свердловск: 1970. 148 С.

41. Гейт В.Э. Об абсолютной сходимости рядов Фурье. // Изв. вузов. Математика. 1978. №7. С. 31-36.

42. Гейт В.Э. Об аппроксимационных свойствах высших производных периодических функций . //Изв. вузов. Математика. 1997. №10. С. 24-30.

43. Гейт В.Э. Теоремы вложения для классов Боаса. // Изв. вузов. Математика. 1996. №5. С. 29-33.

44. Гейт В.Э. Характеризация последовательности приближений средними Зигмунда. // Изв. вузов. Математика. 1996. №6. С. 78-79.

45. Гейт В.Э. О функциях являющихся вторым модулем непрерывности. // Изв. вузов. Математика. 1998. №9. С. 38-41.

46. Гейт В.Э. Об условиях вложения классов $H^{\omega}_{k,R}$ и $\bar{H}^{\omega}_{k,R}$. // Матем. заметки. 1973. Т. 13. №2. С. 169-178.

47. Гейт В. Э. Теоремы вложения относительно (С, а) - приближений.// Изв. вузов. Математика. 1995. №9. С. 83-84.

48. Гейт В. Э. О порядке (C, α)-приближений на некоторых классах периодич. функций. // Матем. заметки. 1974. Т. 15. №1. С. 15-20.

49. Гейт В. Э. Критерий выполнимости равенства Парсеваля для ограниченной и суммируемой функции. // Изв. вузов. Математика. 1992. №7. С. 9-11.

50. Гейт В. Э. Обобщённая теорема Лоренца о рядах Фурье с монотонными коэффициентами и её обращение. //Изв. вузов. Математика. 1998. №4. С. 15-17.

51. Гейт В. Э. О форме золотарёвских полиномов в пространстве $L[-1, 1]$. М.: ВИНИТИ, 1998. 25 С.

52. Гейт В. Э. Решение L-проблемы Золотарёва в одном частном случае. М.: ВИНИТИ, 1998, 24 С.

53. Гейт В. Э. О проблеме Золотарёва в пространстве $L[-1, 1]$. // Всерос. науч. конф."Алгоритмический анализ некорректных задач". Тез. докл. Екатеринбург: Изд-во УрГУ. 1998. С. 70.

54. Geit V. E. Minimization of integral Norm of Zolotarev's Polinomials //Nonsmooth and discontinuos problems of control and optimization. Proceedings of the International Workshop. Chelyabinsk. June. 17-20. 1998. 256 P.

55. Гейт В. Э. О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике $L[-1,$ 1] // СибЖВМ / 1999. Т. 2. №3. С. 223-238.

56. Гейт В. Э. О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике $L[-1, 1]$ (второе сообщение)// СибЖВМ / РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск. 2001. Т. 4. № 2. С. 123-136.

57. Гейт В. Э. О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике $L[-1, 1]$ // Докл. РАН. 2000 Т. 370. № 5. С. 583-586.

58. Гейт В. Э. Полиномы наименьшего интегрального уклонения от нуля с пятью предписанными старшими коэффициентами. // Труды матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 5.-Казань: Изд-во УНИПРЕСС. 2000. С. 66-67.

59. Гейт В. Э. О максимальных полиномах наименьшего уклонения от нуля в интегральной метрике. // Тезисы докладов Международой конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения С. Б. Стечкина.-Екатеринбург: 2000. С. 56-57.

60. Гейт В. Э. Классификация полиномов с наименьшей интегральной нормой по четырём их старшим коэффициентам. // Труды матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 8-Казань: Изд-во ДАС. 2001. С. 69-71.

61. Гейт В. Э. Решение одной задачи типа Золотарёва в метрике L[-1,1] // Докл. РАН. **2002.**. Т. 387. **№4.** С. 443-446.

62. Гейт В. Э. О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике $L[-1,1]$. // Теория функций, её приложения и смежные вопросы. Материалы школы-конференции, посвящённой 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. Казань: Издательство ДАС - 1999. - 265 С.

63. Гейт В. Э. О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике $L[-1,1]$ (третье сообщение)// СибЖВМ / РАН. Сиб. отд-ние.- Новосибирск. 2003. Т. 6. № 1. С. 37-57.