На правах рукописи

Потапов Дмитрий Константинович

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

01.01.02. — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата **физико-математических** наук

ДПотап

ЕКАТЕРИНБУРГ - 2003

Работа выполнена в Челябинском государственном университете на кафедре вычислительной математики

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор В.Н.Павленко
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук. доцент А.Р.Данилин
	доктор физико-математических наук, профессор М.М.Кипнис
Ведущая организация	Южно-Уральский государственный университет

Защита состоится "19" февраля 2003 года в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Уральском государственном университете имени А.М.Горького по адресу:

620083, Екатеринбург, просп. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета.

Автореферат разослан "15" января 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
доцент В.Г.Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования. В диссертации рассматривается проблема существования ненулевых решений задачи

$$Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x) = \lambda g(x, u(x)),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$Bu|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

в зависимости от параметра λ, где L - равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с границей Г класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $c \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$; функция $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ суперпозиционно измеримая и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на R разрывы только первого рода, $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$ $\forall\ u \in R$, $g_-(x, u) = \varliminf_{\eta \to u} g(x, \eta)$, $g_+(x, u) = \varlimsup_{\eta \to u} g(x, \eta)$ и $|g(x, u)| < a(x)$ $\forall u \in$ R, где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$ фиксирована; граничное условие (2) имеет вид: либо условие Дирихле $u(x)|_\Gamma = 0$, либо условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x)|_\Gamma = 0$ с конормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i} \cos(\mathbf{n}, X_j)$, $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к границе Г, $\cos(\mathbf{n}, X_j)$ - направляющие косинусы нормали n, либо третье краевое условие $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) + \sigma(x)u(x)|_\Gamma = 0$, функция $\sigma \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\Gamma)$, неотрицательна и не равна тождественно нулю на Г. Кроме того, исследуется устойчивость решений задачи (1)-(2) по отношению к возмущениям спектрального параметра λ и непрерывным аппроксимациям нелинейности $g(x, u)$.

Сильным решением задачи (1)-(2) называется функция $u \in \mathbf{W}^2_r(\Omega)$, $r > 1$, удовлетворяющая уравнению (1) для почти всех $x \in \Omega$, для которой след $Bu(x)$ на Г равен нулю. *Полуправильным решением* задачи (1)-(2) называется такое сильное ее решение u, значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

Число λ называется *собственным значением* задачи (1)-(2), если существует сильное ненулевое решение u_λ этой проблемы. При этом u_λ будем называть *собственной функцией* задачи (1)-(2), соответствующей λ.

Актуальность темы. В последние годы возрос интерес к изучению уравнений с разрывными нелинейностями. Такие уравнения возникают как в теоретических исследованиях, так и в многочисленных приложениях. Большое число задач гидродинамики, теплофизики, электрофизики, связанных с изучением процессов, меняющихся скачкообразно при некоторых значениях фазовых переменных, приводит к интегральным и дифференциальным уравнениям с разрывными нелинейностями. Как правило, это так называемые задачи со свободными границами, исследование которых непросто и в каждом конкретном случае требует применения специальных аналитических средств. Поэтому разработка математического аппарата, обслуживающего достаточно широкий класс распределенных систем с разрывными нелинейностями, является актуальной задачей. На необходимость исследования распределенных систем с разрывной нелинейностью было указано в совместной монографии О.А.Ладыженской, В.А.Солонникова и Н.Н.Уральцевой "Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа"в 1967 г. Основы математической теории для таких систем были заложены в докторской диссертации В.Н.Павленко в 1995 г. Вопросу непустоты множества M упорядоченных пар (λ, u_λ) - собственное значение и соответствующая собственная функция - для задачи (1)-(2) и изучению его структуры посвящено значительное число работ, в частности, проблеме существования неограниченной связной компоненты множества M. Интересные результаты о существовании сильных решений задач на собственные значения для уравнений в частных производных эллиптического типа с разрывными по фазовой переменной нелинейностями были получены H.J.Kuiper, I.Massabo, C.A.Stuart, K.C.Chang. D.Lupo. Наиболее общие результаты в этом направлении были получены S.A.Marano топологическими методами. Проблема исследования вопроса близости решений аппроксимирующего уравнения и предельной задачи (1)-(2) (А = 1) при возмущениях нелинейности $g(x,u)$ была поставлена в совместной работе М.А.Красносельского и А.В.Покровского, опубликованной в Докладах Академии Наук в 1979 г.

Цель работы. Цель работы - разработка общих подходов и методов исследования задачи (1)-(2). В том числе, когда з а д $\begin{cases} Lu = 0, \\ Bu|_\Gamma = 0 \end{cases}$ е е т ненулевое решение (резонансный случай) и исследование проблемы близости решений задачи (1)-(2) к решениям аппроксимирующей задачи (возмущаются λ и $g(x,u)$).

Методика исследования. В диссертации к задаче (1)-(2) с разрывной по фазовой переменной нелинейностью применяется вариационный метод; используются методы и результаты теории уравнений с частными производными.

Научная новизна. В работе получены новые общие теоремы о существовании луча положительных собственных значений для уравнений с разрывными операторами и наличии для каждого такого значения собственного вектора, который является точкой радиальной непрерывности разрывного оператора. На основе общих результатов устанавливаются новые теоремы о существовании луча собственных значений задачи (1)-(2) и наличии для каждого такого значения собственной функции, которая является полуправильным решением задачи (1)-(2). При этом ядро дифференциального оператора с соответствующими граничными условиями может быть ненулевым (так называемые резонансные краевые задачи). Устанавливаются новые результаты о сходимости решений аппроксимирующей задачи для исходной проблемы (1)-(2) (возмущаются спектральный параметр λ и нелинейность $\partial(x, u)$). По сравнению с результатами других авторов по проблеме существования сильных решений задачи (1)-(2) в диссертации ослаблены ограничения на множество точек разрыва нелинейности $g(x, u)$ по и; допускается, что исследуемые краевые задачи могут быть резонансными, а оператор, порождаемый нелинейностью, не компактен; в работах других авторов о нелинейных задачах на собственные значения полуправильные решения не рассматривались.

Теоретическая и практическая значимость. Основные результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение. Полученные результаты могут быть применены для исследования известных и новых классов задач на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Международной конференции по анализу и геометрии, посвященной 70-летию академика Ю.Г.Решетняка в Новосибирске (1999 г.), на Симпозиуме, посвященном памяти М.А.Красносельского в Воронеже (2000 г.), на зимних Воронежских математических школах (2000 г., 2001 г.), на Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения С.Б.Стечкина в Екатеринбурге (2000 г.), на весенних Воронежских математических школах (2000 г., 2001 г.), на Четвертом сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике, посвященном памяти М.А.Лаврентьева в Новосибирске (2000 г.), на Всероссийской научной конференции в Екатеринбурге (2001 г.), на VII конференции, посвященной памяти академика А.Н.Тихонова в связи с 95-летием со дня рождения в Москве (2001 г.), на Международной конференции, посвященной 35-летию научной деятельности В.А.Садовничего в Челябинске (2002 г.), на Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова в Москве (2002 г.), на Международной математической конференции "Еругинские чтения - VIII"в Бресте, Беларусь

(2002 г.), на Международном семинаре по струйным, отрывным и нестационарным течениям, посвященном 70-летию Балтийского государственного технического университета "Военмех" в Санкт-Петербурге (2002 г.), на Всероссийской научной конференции в Туле (2002 г.), на Всероссийской научной конференции в Новокузнецке (2002 г.), на научном семинаре кафедры математической физики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (руководитель - профессор Н.Н.Уральцева), на научных семинарах кафедры высшей математики и кафедры теории управления факультета прикладной математики - процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета, на научных семинарах кафедры вычислительной математики математического факультета Челябинского государственного университета, на городском семинаре по дифференциальным уравнениям в Челябинском государственном университете.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 20 работах, список которых приведен в конце автореферата, из них 11 публикаций без соавторства. В совместных работах научному руководителю В.Н.Павленко принадлежит постановка задач, диссертанту - получение конкретных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка цитированной литературы. Общий объем работы составляет 101 страницу. Библиография содержит 86 наименований работ.

СОДЕРЖАНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается описание предмета исследования, показано его место в теории нелинейных уравнений, делается обзор основных результатов, полученных другими авторами в данной области. Излагаются основные результаты диссертации и проводится сравнительный анализ их новизны.

В первой главе диссертации приводятся необходимые сведения о вариационном методе для уравнений с разрывными операторами, приводятся определения функциональных пространств, которые встречаются в работе, в том числе пространства С.Л.Соболева и теоремы вложения для них.

Вторая глава содержит три параграфа.

В первом параграфе дается операторная постановка задачи (1)-(2), вводятся основные определения.

Пусть E - вещественное рефлексивное банахово пространство, E^* - сопряженное с E пространство. Через (z, x) будем обозначать значение функционала $z \in E^*$ на элементе $x \in E$.

Рассматривается уравнение

$$Au = \lambda Tu \qquad (У)$$

с параметром $\lambda > 0$, где A - линейный самосопряженный оператор из E в E^*, $T : E \to E^*$ разрывное, компактное или антимонотонное отображение, ограниченное на E.

Определение 1. Число А называется *собственным значением* уравнения (3), если это уравнение имеет ненулевое решение.

Определение 2. Отображение $T : E \to E^*$ называется *квазипотенциальным*, если существует функционал $f : E \to$ R, для которого верно равенство

$$f(x+h) - f(x) \cdot \int_0^1 (T(x+th), h)\,dt \quad \forall\, x, \in \quad E.$$

При этом / называют *квазипотенциалом* оператора T.

Определение 3. Отображение $T : E \to E^*$ называется *радиально непрерывным в точке* x 6 E, если для любого $h \in E$

$$\lim_{t \to 0}(T(x + th), h) = (Tx, h).$$

Определение 4. Элемент $x \in E$ называют *регулярной точкой* для оператора $T : E \to E^*$, если для некоторого $h \in E$

$$\overline{\lim_{t \to +0}}(T(x + th), h) < 0.$$

Определение 5. *Секвенциальным замыканием* локально ограниченного отображения $F : E_1 \to E_2$ (E_1, E_2 - банаховы пространства) называется отображение SF из E_1 в E_2 (вообще говоря, многозначное), значение SFx $(x \in E_1)$ которого совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества всех слабо предельных точек в E_2 последовательностей вида (Fx_n), где $x_n \to x$ в E_1.

Во втором параграфе формулируется и доказывается теорема о существовании полуоси положительных собственных значений для уравнений с разрывными компактными операторами.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) A - линейный самосопряженный оператор из E в E^* (E - вещественное рефлексивное банахово пространство), пространство E представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств $E\backslash$ и E_2, E_1 — $KerA$, причем существует постоянная a > О такая, *что $(Au,u) > \alpha||u||^2$ для любого u € E_2;*

2) отображение T компактное, квазипотенциальное и ограниченное на E (т.е. существует M > О такое, что $\backslash\backslash Tx\backslash\backslash < M \ \forall\, x \in E$), а его квазипотенциал f равен нулю в нуле и для некоторого u_0 € E значение $f(u_0) > 0$; если $E_1 \neq \{0\}$, то дополнительно предполагается, что $\lim\limits_{u\in E_1,||u||\to+\infty} f(u) = -\infty$;

3) $\lim\limits_{t\to+0}(T(u+th) - Tu,h) > .0$ для всех $u, h \in E$.

Тогда найдется λ_0 > О такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ существует $u_\lambda \in E, u_\lambda \neq 0, f^\lambda(u_\lambda) = \inf\limits_{v\in E} f^\lambda(v), f^\lambda(u) = \frac{1}{2}(Au,u) - \lambda f(u)$ и любое такое $u\backslash$ является решением уравнения (3) и точкой радиальной непрерывности оператора T.

В третьем параграфе формулируется и доказывается теорема о существовании луча положительных собственных значений для уравнений с разрывными монотонными операторами, приводится следствие из нее.

Теорема 2. *Предположим, что*

1) A - линейный самосопряженный оператор из E в E^* (E - вещественное рефлексивное банахово пространство), пространство E представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств E_1 и *E_2, $E_1 = KerA$, причем существует постоянная $a > 0$ такая, что $(Au,u) \geq \alpha||u||^2 \ \forall\, u \in E_2$;*

2) отображение T квазипотенциальное, ограниченное и антимонотонное на E (т.е. $(-Tx + Ty, x - y) \geq 0 \ \forall\, x, y \in E$), а его квазипотенциал f равен нулю в нуле и для некоторого u_0 € E значение $f(u_0) > 0$; если $E_1 \neq \{0\}$, то дополнительно предполагается, что $\lim\limits_{u\in E_1,||u||\to+\infty} f(u)$ — $-\infty$.

Тогда найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого А > АО *существует $u_\lambda \in E, u_\lambda \neq 0, f^\lambda(u_\lambda) = \inf\limits_{v\in E} f^\lambda(v), f^\lambda(u) = \frac{1}{2}(Au,u) - \lambda f(u)$ « любое такое u_λ удовлетворяет включению Au_λ € λSTu_λ, где ST - секвенциальное замыкание оператора T.*

В отличие от теоремы 1 в теореме 2 компактность оператора T не предполагается.

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 2 и любая точка разрыва оператора T при $\lambda > \lambda_0 > 0$ регулярная для $F_\lambda u = Au - \lambda Tu$, то для $\lambda > \lambda_0$ элемент u_λ, удовлетворяющий равенству $f^\lambda(u_\lambda) = \inf\limits_{v \in E} f^\lambda(v)$, является точкой радиальной непрерывности оператора T и решением уравнения (3).*

<u>**Третья глава**</u> диссертации содержит четыре параграфа.

<u>В первом параграфе</u> формулируется краевая задача на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями, вводятся основные определения и обозначения.

Пусть $X = \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$, если (2) - граничное условие Дирихле, и $X — \mathbf{H}^1(\Omega)$, если (2) - граничное условие Неймана или третье краевое условие. Краевой задаче (1)-(2) сопоставим функционал $J^\lambda(u)$, заданный на X, следующим образом:

$$J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)ds,$$

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega c(x) u^2(x) dx$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана;

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega c(x) u^2(x) dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \sigma(s) u^2(s) ds$$

в случае третьего краевого условия.

Определение 6. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Назовем *и* G R *прыгающим разрывом* функции /, если $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim\limits_{s \to u\pm} f(s)$.

<u>Во втором параграфе</u> третьей главы, используя полученные во второй главе результаты, доказываются теоремы о существовании луча положительных собственных значений задачи (1)-(2).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

1) существует $a > 0$, для которого $J_1(u) > \alpha\|u\|^2 \ \forall u \in X$;

2) для почти всех $x \in \Omega$ $g(x,0) = 0$ и $|g(x,u)| \leq a(x) \forall u \in \mathbb{R}$, где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega), q > \frac{2n}{n+2}$ фиксирована;

3) найдется $u_0 \in X$, *для которого*

$$\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u_0(x)} g(x,s)ds > 0.$$

Тогда существует $\lambda_0 > 0$ *такое, что для любого* $\lambda > \lambda_0$ $d_\lambda = \inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v) < 0$, *и найдется* $u \in X$ *такое, что*

$$J^\lambda(u) = d_\lambda. \tag{4}$$

Если дополнительно для почти всех $x \in \Omega$ *функция* $g(x,\cdot)$ *имеет только прыгающие разрывы, то любое* u, *удовлетворяющее (4), является ненулевым полуправильным решением задачи (1)-(2).*

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия 2), 3) теоремы 3 и дополнительно условия*

1') $J_1(u) > 0\ \forall u \in X$;

2') пространство $N(L)$ *решений задачи* $\begin{cases} Lu = 0, \\ Bu|_\Gamma = 0 \end{cases}$ *ненулевое;*

3') $\lim\limits_{u \in N(L), \|u\| \to +\infty} \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u(x)} g(x,s)ds = -\infty.$

Тогда утверждения теоремы 3 остаются верными.

В теореме 3 ядро дифференциального оператора с соответствующими граничными условиями нулевое, в теореме 4 получены достаточные условия существования полуоси собственных значений для резонансной краевой задачи.

В третьем параграфе, используя теорему 2, получена теорема о существовании полуоси положительных собственных значений эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями в критическом случае $q - \frac{2n}{n+2}$, когда нет компактности вложения $\mathbf{H}^1(\Omega)$ в $L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия*

1) $J_1(u) > 0\ \forall u \in X$;

2) для почти всех $x \in \Omega$ $g(x,\cdot)$ *невозрастающая на* R *и для некоторой* $a \in \mathbf{L}_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ $|g(x,u)| \leq a(x)\ \forall u \in \mathbf{R}$;

8) для почти всех $x \in \Omega$ *точки разрыва* $g(x,\cdot)$ *лежат на плоскостях* $u = u_i$, $i \in I$ *(I - не более чем счетно) и если* $g(x,u_i-) > g(x,u_i+)$, *то* $g(x,u_i-)g(x,u_i+) > 0$ *для любого* $i \in I$;

4) найдется $u_0 \in X$, *для которого*

$$\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u_0(x)} g(x,s)ds > 0;$$

5) если пространство N(L) решений задачи

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ Bu|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

ненулевое (резонансный случай), то

$$\lim_{u \in N(L), \|u\| \to +\infty} \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u(x)} g(x,s)ds = -\infty.$$

Тогда существует $\lambda_0 > 0$ такое, *что для любого* $\lambda > \lambda_0$ $d_\lambda = \inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v) < 0$, *и найдется* $u_\lambda \in X$, *для которого*

$$J^\lambda(u_\lambda) = d_\lambda, \qquad (5)$$

и любое u_λ, *удовлетворяющее (5), является ненулевым полуправильным решением задачи (1)-(2).*

В четвертом параграфе рассматривается модель отрывных течений несжимаемой жидкости М.А.Гольдштика, которая охватывается теоремой 3. Для одномерного аналога математической модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости найдены аналитические выражения для нормы собственных функций соответствующей краевой задачи и значение функционала, порождаемого этой задачей, на них в зависимости от собственного значения.

Четвертая глава диссертации посвящена устойчивости эллиптических краевых задач со спектральным параметром и разрывной нелинейностью по отношению к возмущениям спектрального параметра и нелинейности.

В первом параграфе дается постановка задачи.
Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с границей Γ класса $C_{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$. гиперповерхности $S_i = \{(x,u) \in \mathbf{R}^{n+1} : u = \varphi_i(x), x \in \overline{\Omega}\}$, $\varphi_i \in W_q^2(\Omega)$, $q > n$, $i = \overline{1,m}$ попарно не пересекаются. Для определенности считаем, что $\varphi_i(x) < \varphi_{i+1}(x)$ для любого $x \in \Omega$ и $i = \overline{1,m-1}$. Существует $d > 0$ такое, что для любого $x \in \overline{\Omega}$ отрезки $[\varphi_i(x) - d, \varphi_i(x) + d]$, $i = \overline{1,m}$ попарно не пересекаются.

Поверхности S_i, $i - 1, m$ разбивают область $D = \Omega \times \mathrm{R}$ на непересекающиеся подобласти:

$$D_0 = \{(x,u) \in D : u < \varphi_1(x)\},$$

$$D_i = \{(x,u) \in D : \varphi_i(x) < u < \varphi_{i+1}(x)\}, i = \overline{1, m-1},$$

$$D_m = \{(x,u) \in D : u > \varphi_m(x)\}.$$

На $\overline{Di}$ заданы каратеодориевы функции $g_i(x,u)$такие. что для почти всех $x \in \Omega$

$$|g_i(x,u)| \leq a(x) \forall u \ c \quad (x,u) \in \overline{D_i}, \tag{6}$$

где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$; $q > n$, $i = \overline{0, m}$.

Функция g.: $D \to \mathrm{R}$ суперпозиционно измерима и на D_i совпадает с $g_i(x,u)$, причем для почти всех $x \in \Omega$, если $(x,u) \in S_i$, то $g(x,u)$ принадлежит отрезку с концами $g_{i-1}(x,u)$ и $g_i(x,u)$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ верно равенство

$$g(x,0) = 0 \tag{7}$$

и

$$g_i(x,u) \geq g_{i-1}(x,u), \text{ если } (x,u) \in S_i. \tag{8}$$

Фиксируем последовательность положительных чисел (δ_k), сходящуюся к нулю и ограниченную сверху определенным выше числом d.

Нелинейность $g(x,u)$ аппроксимируется последовательностью каратеодориевых функций $(g^k(x,u))$ таких, что для почти всех $x \in \Omega$:

(i) $g^k(x,u) = g(x,u)$, если $|\varphi_i(x) - u| > \delta_k$ для любого $i = \overline{1, m}$;

(ii)

$$|g^k(x,u)| \leq a(x) \ \forall u \in \mathbf{R}, \tag{9}$$

где функция a из оценки (6).

Исходная краевая задача с параметром λ имеет вид

$$Lu(x) = \lambda g(x, u(x)), \ x \in \Omega, \tag{10}$$

$$Bu|_\Gamma = 0, \tag{11}$$

где $Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_x + c(x)u(x)$ - равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор в области Ω с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega}), c \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$, (11) - одно из основных граничных условий: Дирихле, Неймана с конормальной производной или третье краевое условие.

Как и выше, в зависимости от вида граничного условия (11) определяется пространство *X,* а краевой задаче (10)-(11) сопоставляется функционал $J^\lambda(u)$, заданный на *X.*

Будем предполагать, что выполнено условие

(iii) найдется $\hat{u}$ € *X,* для которого

$$\int_\Omega dx \int_0^{\hat{u}(x)} g(x,s)ds > 0.$$

В дальнейшем **рассматриваются** два случая: коэрцитивный и резонансный.

В коэрцитивном случае ($J_1(u) > \alpha||u||_X^2$ $\forall u$ € *X, a* - положительная константа, не зависящая от *u)* из теоремы 3 следует существование $\lambda_0 > 0$ такого, что для любого $\lambda > \lambda_0$ $\inf_{v\in X} J^\lambda(v) < 0$, найдется $\hat{u}_0$ € *X* такое, что $J^\lambda(\hat{u}_0) = \inf_{v\in X} J^\lambda(v)$ и любое такое $\hat{u}_0$ является ненулевым полуправильным решением соответствующей краевой задачи.

Резонансный случай.

Предполагается, что

(iv) линейное пространство $N(L)$ решений задачи

$$Lu = 0, x \in \Omega,$$

$$Bu|_\Gamma = 0$$

одномерно и $\psi(x)$ - базисная функция этого подпространства.

Кроме того, пусть для базисной функции ψ пространства *N(L)* верны неравенства (условия Ландесмана-Лазера)

$$\int_{\psi<0} g_+(x)\psi(x)dx + \int_{\psi>0} g_-(x)\psi(x)dx > 0 >$$

$$\int_{\psi>0} g_+(x)\psi(x)dx \int_{\psi<0} g_-(x)\psi(x)dx, \tag{12}$$

где $g_+(x)$ $\lim_{u\to+\infty} g(x,u)$, $g_-(x) = \lim_{u\to-\infty} g(x,u)$ (**предполагается**, что для почти всех *x* € Ω данные пределы существуют). Условия Ландесмана-Лазера влекут равенство

$$\lim_{u\in N(L),||u||\to+\infty} \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x,s)ds = -\infty. \tag{13}$$

Если дополнительно потребовать неотрицательность $J_1(u)$ на X, то из теоремы 4 при сделанных предположениях относительно задачи (10)–(11) следует существование $\lambda_0 > 0$ такого, что при $\lambda > \lambda_0$ $\inf_{v \in X} J^\lambda(v) = d_\lambda < 0$ и найдется $u \in X$, для которого $J^\lambda(u) = d_\lambda$, причем любое такое u принадлежит $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ и является ненулевым полуправильным решением задачи (10)–(11).

Зафиксируем $\lambda > \lambda_0$ и пусть числовая последовательность (λ_k) сходится к λ, $\lambda_k > 0$. Рассмотрим аппроксимирующую задачу

$$Lu(x) = \lambda_k g^k(x, u(x)),\ x \in \Omega, \tag{14}$$

$$Bu|_\Gamma = 0, \tag{15}$$

где аппроксимирующая последовательность каратеодориевых функций $(g^k(x,u))$ определена выше. Положим

$$J_k(u) = J_1(u) - \lambda_k \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g^k(x,s)ds,\quad \mathbb{N} \ni k > 2.$$

В коэрцитивном случае согласно теореме 3 для любого $k \geq 2$ существует $u_k \in X$ такое, что $J_k(u_k) = \inf_{v \in X} Jk(v)$. Причем, любое такое $u_k \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$ и является сильным решением соответствующей аппроксимирующей краевой задачи.

В резонансном случае равенство (13) влечет равенство

$$\lim_{u \in N(L), ||u|| \to +\infty} \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g^k(x,s)ds = -\infty$$

для любого $k > 2$. Из теоремы 4 следует, что для любого натурального $k > 2$ существует $u_k \in X$ такое, что $J_k(u_k) = \inf_{v \in X} J_k(v)$ и Uk является сильным решением задачи (14)-(15).

Рассматривается проблема о близости решений аппроксимирующей задачи Uk к решениям исходной задачи (10)–(11).

Во втором параграфе формулируется и доказывается теорема об устойчивости основных краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью в коэрцитивном случае.

Теорема 6. *Предположим, что*

1) коэффициент $c(x)$ оператора L неотрицателен, а в случае задачи Неймана, кроме того, не равен тождественно нулю на Ω;

2) выполнены оценка (6), равенство (7), неравенство (8), оценка (9) и условие (iii).

Тогда ***последовательность*** (u_k) *решений аппроксимирующих задач (14)-(15), построенная выше, является минимизирующей последовательностью для функционала* J^λ на *X; (uk) содержит подпоследовательность* (u_{k_l})*, сходящуюся в* $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ *к полуправильному решению* u_0 *предельной задачи (10)-(11), для которого* $J^\lambda(u_0) = \inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v)$*; если* ***инфимум*** J^λ «а *X достигается в единственной точке* u_0*, то Uk* $\to u_0$ *в* $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$.

В третьем параграфе формулируется и доказывается теорема об устойчивости резонансных эллиптических краевых задач со спектральным параметром и разрывной нелинейностью.

Теорема 7. *Предположим, что*

1) $J_1(u) > 0$ $\forall u \in X$*;*

2) выполнены оценка (6), равенство (7), неравенство (8), оценка (9), условия (in), (iv) и условие ***Ландесмана-Лазера*** *(12).*

Тогда ***последовательность*** (u_k) *решений аппроксимирующих задач, построенная выше,* ***содержит подпоследовательность*** (u_{k_l})*, сходящуюся в* $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ к *полуправильному решению* u_0 *задачи (10)-(11), для которого* $J^\lambda(u_0) = \inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v)$*. Если последний инфимум достигается в единственной точке* u_0*, то* $u_k \to u_0$ *в* $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Павленко В.Н, Потапов Д.К.* О существовании луча положительных собственных значений для одного класса уравнений с разрывными операторами // Современный анализ и его приложения: Тез. докл. Воронежской зимней матем. школы, посвящ. 80-летию со дня рождения М. А. Красносельского. - Воронеж, 2000. - С. 127-128.

2. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* Об устойчивости краевой задачи эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Теория приближения функций и операторов: Тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения С.Б.Стечкина. - Екатеринбург: УрГУ, 2000. - С. 119-121.

3. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* О существовании луча положительных собственных значений для одного класса резонансных краевых задач с разрывными нелинейностями // Современные методы в теории краевых задач, Понтрягинские чтения - XI: Тез. докл. Воронежской весенней матем. школы, посвящ. 60-летнему юбилею Ю.В.Покорного. – Воронеж: ВГУ. 2000. - С. 116.

4. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* О существовании луча положительных собственных значений для полулинейных уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Современные методы в теории краевых задач, Понтрягинские чтения - XI: Сборник трудов Воронежской весенней матем. школы, посвящ. 60-летнему юбилею Ю.В.Покорного. Часть II. - Воронеж: ВГУ, 2000. - С. 96-102.

5. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными монотонными операторами // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронежской зимней матем. школы. - Воронеж: ВГУ, 2001. - С. 207.

6. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* О структуре спектра эллиптических краевых задач с разрывными монотонными нелинейностями // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. науч. конф. - Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001. - С. 95-96.

7. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. мат. журн. - 2001. - Т. 42. - N 4. - С. 911-919.

8. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* Аппроксимация резонансных краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Дифференциальные и интегральные уравнения. Мате-

матические модели: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 35-летию научной деятельности В.А.Садовничего. - Челябинск: Челяб. гос. ун-т. 2002. - С. 78.

9. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* О существовании полуоси положительных собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Вестн. Челяб. гос. ун-та. - Сер. 3. Математика. Механика. Информатика. - 2002. - N 1(6). - С. 114-119.

10. *Потапов Д.К.* Одномерный аналог модели Гольдштика , / Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках: Тез. докл. Воронежского зимнего симпозиума, посвящ. памяти М. А. Красносельского..- Воронеж: ВГУ, 2000. - С. 180.

11. *Потапов Д.К.* Одномерный аналог модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости // Четвертый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике, посвящ. памяти М.А.Лаврентьева: Тез. докл., ч. I. - Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. - С. 74-75.

12. *Потапов Д.К.* Спектральные задачи для уравнений с разрывными нелинейностями // Современные методы в теории краевых задач, Понтрягинские чтения - XII: Тез. докл. Воронежской весенней матем. школы. - Воронеж: ВГУ, 2001. - С. 123.

13. *Потапов Д.К.* Спектральные задачи для уравнений с разрывными монотонными операторами // Современные методы в теории краевых задач, Понтрягинские чтения - XII: Сборник трудов Воронежской весенней матем. школы. - Воронеж: ВГУ, 2001. - С. 53-56.

14. *Потапов Д.К.* Задачи на собственные значения для уравнений с разрывными монотонными операторами. - В кн.: Труды XXIV Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова. - Москва: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2002. - С. 126-128.

15. *Потапов Д.К.* Задача Гольдштика об отрывных течениях несжимаемой жидкости // IV Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2002) / XIX Международный семинар по струйным, отрывным и нестационарным течениям: Тез. докл. - М.: Изд-во МАИ, 2002. - С. 365-367.

16. *Потапов Д.К.* Спектральные задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными монотонными нелинейностями // Известия Челябинского научного центра. - Математика. - 2002. - Вып. 2(15). - С. 1-3. (http://www.sci.urc.ac.ru/news/2002_2/).

17. *Потапов Д.К.* Задачи на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тез. докл. Всерос. науч. конф. – Тула: ТулГУ, 2002. - С. 51-52.
18. *Потапов Д. К.* Аппроксимация резонансной задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Краевые задачи и математическое моделирование: Сборник трудов 5-й Всерос. науч. конф. - Т. 1. - НФИ КемГУ. - Новокузнецк, 2002. - С. 69-73.
19. *Potapov D.K.* An eigenvalue set structure for equations with discontinuous nonlinearities // Inverse and Incorrectly Formulated Problems: Abstracts of the Seventh Conference: Moscow, M.V.Lomonosov MSU. - Moscow: MAX Press, 2001. - P. 69.
20. *Potapov D.K.* Approximation of elliptic boundary problems at resonance with a spectral parameter and a discontinuous nonlinearity // Abstracts of International Mathematical Conference: Erouguine's readings - VIII. - Brest: Publisher S.B.Lavrov, 2002. - P. 144.