0718823-1

Бабенко Олеся Николаевна

AG – ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ВНЕШНИХ СВЯЗЯХ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ТИПА

На правах рукописи

УДК 513.736

Бабенко Олеся Николаевна

AG – ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ВНЕШНИХ СВЯЗЯХ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ТИПА

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань - 2000

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии Таганрогского государственного педагогического института.

Научный руководитель: заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор Фоменко В. Т.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Бикчантаев И. А.; доктор физико-математических наук, профессор Шикин Е. В.

Ведущая организация: Ростовский государственный университет

Защита состоится «___» ____________ 2000 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета К 053.29.05 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская 18, КГУ, корп. 2, ауд.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского государственного университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская 18.

Автореферат разослан «_ » 2000 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент

Общая характеристика работы.

Актуальность исследования. Одним из важнейших разделов дифференциальной геометрии «в целом» является теория деформации поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве.

К настоящему времени достаточно полно изучены изометрические деформации поверхностей, называемые изгибаниями, сохраняющие длины дуг всех кривых, лежащих на поверхности. Вопросы изгибаний поверхностей нашли отражение в работах А.Д. Александрова, А.В. Погорелова, Н.В. Ефимова, В.Т. Фоменко, С.Б. Климентова и других авторов. Одним из основных результатов теории изгибания поверхностей является теорема А.В. Погорелова об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей, а также теорема о существовании изгибаний поверхностей положительной полной кривизны с краем.

Наряду с теорией изгибаний поверхностей в настоящее время значительный интерес представляют исследования более общих форм деформаций поверхностей: деформаций, сохраняющих поточечно гауссов образ поверхности, ареальных деформаций, конформных, геодезических и других. Более подробно остановимся на результатах из теории ареальных деформаций и деформаций, сохраняющих поточечно гауссов образ поверхности.

Ареальные деформации поверхности, то есть деформации, при которых сохраняется элемент площади поверхности (коротко A - деформации), рассматривались М.С. Синюковым, Л.Л. Бескоровайной, Н.В. Дерманец и другими. Основные уравнения бесконечно малых A - деформаций первого порядка в тензорной форме впервые были получены М.С. Синюковым. Им же было указано на возможность применения для бесконечно малых A - деформаций теории обобщенных аналитических функций и на возможность приложения этих деформаций в теории оболочек. Впоследствии, Н.В. Дерманец были изучены вопросы продолжения бесконечно малых A - деформаций поверхности положительной гауссовой кривизны с краем в аналитические.

Вопросы деформаций поверхностей с сохранением поточечно гауссова, или, как иногда говорят, сферического образа (коротко G - преобразования) изучались в работах В.Ф. Кагана, Ю.А. Аминова, В.Т. Фоменко и других. Наиболее распространенными преобразованиями, сохраняющими гауссов образ поверхности, являются преобразования гомотетии. К числу G - преобразований относится также переход от данной поверхности к параллельной ей поверхности.

Проблема изучения преобразований двумерных поверхностей в E^3, которые одновременно являются и A - преобразованиями и G - преобразованиями (коротко AG - преобразования) возникает при рассмотрении проблемы Минковского, где решается вопрос о существовании и единственности в E^3 замкнутой выпуклой поверхности с заданной гауссовой кривизной как функцией внешней нормали, заданной на единичной сфере. В такой постановке единственность решения проблемы Минковского означает отсутствие AG - преобразований овалоида, отличных от параллельного переноса.

Известно, что односвязный кусок поверхности положительной гауссовой кривизны допускает AG - деформации (как бесконечно малые, так и непрерывные).

Бесконечно малые AG - деформации поверхности положительной гауссовой кривизны исследовались в работах В.Т. Фоменко. Им была установлена связь между бесконечно малыми изгибаниями односвязной поверхности положительной гауссовой кривизны в E^3 и бесконечно малыми AG - деформациями этой же поверхности. Доказано, также, что замкнутая двумерная поверхность положительной гауссовой кривизны в силу ее жесткости относительно бесконечно малых изгибаний допускает только бесконечно малые AG - деформации, совпадающие с параллельным переносом.

Так как замкнутая двумерная поверхность положительной гауссовой кривизны не допускает AG - преобразований, отличных от параллельного переноса, поэтому представляет большой интерес рассмотрение таких преобразований для поверхностей с краем.

Если на поверхность наложить внешнюю связь и отыскивать AG - деформации поверхности , совместимые с этой связью, то вопрос о существовании таких AG - деформаций остается открытым. В настоящее время изучены AG - деформации односвязных поверхностей положительной гауссовой кривизны при задании поведения некоторых геометрических характеристик края поверхности при ее AG - деформации (стационарность линейного элемента вдоль края, стационарность второй квадратичной формы поверхности вдоль края, стационарность кривизны вдоль края и другие). В то же время недостаточно изученными в теории AG - деформаций поверхностей являются внешние связи вида $R(\bar{z}_t) = \sigma_t$, где R - линейный аддитивный оператор, заданный на некотором множестве T точек поверхности F, σ_t - заданная на T функция, $\sigma_0 \equiv 0$. Такие внешние связи были введены И.Н. Векуа в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и названы им внешними связями кинематического типа. Особый интерес представляет рассмотрение корректных и квазикорректных с p степенями свободы внешних связей кинематического типа, характеризующихся тем свойством, что поверхность, подчиненная этим связям, допускает деформации, порождаемые одним или конечным числом $p \geq 1$ параметров. В связи с этим возникает проблема отыскания внешних связей кинематического типа, которые могут быть описаны в терминах корректности и квазикорректности.

В предлагаемой диссертации изучаются AG - деформации односвязных поверхностей положительной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве при внешних связях кинематического типа: условии обобщенного закрепления края поверхности относительно заданной плоскости, условии защемления края, условии обобщенного скольжения.

Целью настоящей работы является выделение класса корректных и квазикорректных связей кинематического типа в отношении AG - деформаций поверхностей (бесконечно малых, непрерывных, аналитических по параметру) и описание поведения поверхностей в отношении AG - деформаций при этих связях.

Методы исследования. Исследование рассматриваемых в диссертации вопросов проводится методами дифференциальной геометрии при систематическом использовании функционального анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Научная новизна работы определяется следующими результатами, полученными автором:

-Установлено, что внешняя связь обобщенного закрепления односвязной поверхности положительной гауссовой кривизны вдоль края относительно заданной плоскости совместно с условием точечного типа, а также условие защемления края поверхности являются корректными внешними связями в отношении AG – деформаций поверхности (бесконечно малых и непрерывных).

-Найдены условия жесткости и однозначной определенности в δ – окрестности односвязной поверхности положительной гауссовой кривизны с краем в отношении бесконечно малых и непрерывных AG – деформаций поверхности при указанных выше внешних связях.

-Установлено, что внешняя связь обобщенного скольжения описывается в терминах квазикорректности для бесконечно малых и непрерывных AG – деформаций рассматриваемой поверхности.

-Указаны условия, при которых бесконечно малая AG – деформация односвязной поверхности положительной гауссовой кривизны, подчиненная условию обобщенного закрепления вдоль края, может быть продолжена в аналитическую AG - деформацию при внешней связи обобщенного закрепления края относительно заданной плоскости.

Теоретическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по геометрии в «целом», а также при построении раздела спецкурса по теории деформаций поверхностей.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на итоговых научных конференциях ТГПИ (1997-2000), международной конференции «Ломоносов-2000» (Москва, апрель, 2000г.), на семинаре кафедры геометрии Ростовского государственного университета (руководитель проф. С.Б. Климентов) (май, 2000г.), на шестой международной конференции «Математические модели физических процессов и их свойства» (Таганрог, июнь, 2000г.), на международном школе-семинаре по геометрии и анализу памяти И.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, сентябрь, 2000г.).

Работа вошла в научно-техническую программу Министерства образования России «Университеты России - фундаментальные исследования» (проект 1686, 1998-1999), а также получила поддержку РФФИ (проект №99-01-00814).

Публикации. Основные результаты диссертации были опубликованы в работах [1]-[7].

Структура и объем работы. Диссертация содержит 135 страниц и состоит из введения, трех глав и списка литературы из 37 названий.

Основное содержание работы.

Во введении обосновывается выбор и актуальность избранной темы, определяются цели и задачи исследования, его научная новизна, теоретическая значимость, методы исследования, а также дается информация об апробации основных положений и результатах работы.

В первой главе диссертации изучаются бесконечно малые AG - деформации поверхности F, совместимые с внешними связями кинематического типа вида $R(\bar{u}) = \sigma$, где R - линейный аддитивный оператор, заданный на множестве T точек поверхности F, $\bar{u}$ - поле скоростей точек поверхности при бесконечно малой AG - деформации, σ - заданная на множестве T функция.

§1 содержит некоторые сведения из функционального анализа и теории дифференциальных уравнений.

В §2 вводится определение бесконечно малых AG - деформаций поверхности F.

Пусть $Oxyz$ - прямоугольная декартовая система координат в E^3 с базисом { $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ }. Будем рассматривать в E^3 односвязную поверхность F положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, k_0 – const, с гладким краем ∂F.

Будем говорить, что поверхность F удовлетворяет условиям регулярности, если она может быть задана в декартовых координатах x, y, z уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, D - плоская область с границей ∂D, $f \in C^{3,\alpha}(\overline{D})$, $\overline{D} = D + \partial D$, $0 < \alpha < 1$, $\partial D \in C^{2,\alpha}$.

Пусть поверхность F с радиус-вектором $\bar{r}$ преобразована в поверхность F_t с радиус-вектором $\bar{r}_t = \bar{r} + \bar{z}_t$, где t - достаточно малое число, $\bar{z}_t$ -

поле смещений точек поверхности F при данном преобразовании. Считая t переменным, будем предполагать, что существует предел $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\bar{z}_t}{t}=\bar{u}$, называемый полем скоростей деформаций поверхности F. Две деформации будем называть эквивалентными, если они имеют одинаковые поля скоростей. Класс эквивалентных деформаций вида $\bar{r}_t=\bar{r}+t\,\bar{u}+o(t)$ будем называть бесконечно малой деформацией поверхности F.

Будем рассматривать бесконечно малые деформации поверхности F в E^3, подчиненные условиям: 1) вариация $\delta(d\sigma)$ элемента площади $d\sigma$ в любой точке поверхности F равна нулю; 2) вариация $\delta\bar{n}$ единичного вектора нормали $\bar{n}$ в каждой точке поверхности равна нулю. Первое условие обеспечивает ареальные бесконечно малые деформации поверхности F, второе условие означает поточечное сохранение сферического образа поверхности F при ее бесконечно малой деформации.

Бесконечно малые деформации, удовлетворяющие условиям 1), 2), будем называть бесконечно малыми AG - деформациями поверхности F, а векторное поле $\bar{u}$ - полем скоростей точек поверхности F при бесконечно малой AG - деформации. Следуя И.Н. Векуа, поверхность F назовем кинематически жесткой относительно бесконечно малых AG - деформаций, если F не допускает отличных от нулевого полей скоростей $\bar{u}$. В противном случае поверхность назовем кинематически нежесткой.

Далее, в §2 описываются внешние связи кинематического типа.

В §3 выводится уравнение бесконечно малых AG - деформаций поверхности.

Доказывается (§4-§6), что нахождение бесконечно малых AG - деформаций поверхности F сводится к исследованию разрешимости системы трех дифференциальных линейных уравнений относительно трех искомых функций в односвязной области D. Поля скоростей $\bar{u}$ бесконечно малых

AG - деформаций поверхности F восстанавливаются в классе $C^{2,\alpha}(\overline{D})$, либо представимы в виде суммы $\overline{u} = \overline{u}_\tau + \overline{u}_n$, где $\overline{u}_\tau$ - касательная составляющая поля $\overline{u}$ класса $C^{1,\alpha}$, $\overline{u}_n$ - нормальная составляющая класса $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

В §7 установлено, что внешняя связь обобщенного закрепления поверхности вдоль края относительно заданной плоскости совместно с условием точечного типа является корректной внешней связью в отношении бесконечно малых AG – деформаций поверхности, а именно, имеют место

Теорема 1.1.

Пусть поверхность F односвязна, имеет положительную гауссову кривизну $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, и удовлетворяет условиям регулярности. Пусть, далее, поверхность F подчинена вдоль края ∂F условию обобщенного закрепления $(\overline{u},\overline{n}) = \sigma$ относительно вертикальной плоскости (π), где $\overline{u}$ – поле скоростей точек поверхности при бесконечно малой AG – деформации, $\overline{n} = \{A, B, 0\}$, $A^2 + B^2 \neq 0$, σ - заданная функция, и условию скольжения поверхности в некоторой точке M_0, $M_0 \subset F$, по прямой (l) с направляющим вектором $\overline{n} = \{A, B, 0\}$. Тогда для любой функции σ класса $C^{2,\alpha}(\partial F)$, $0 < \alpha < 1$, поверхность F допускает единственную бесконечно малую AG - деформацию с полем скоростей $\overline{u}$ класса $C^{2,\alpha}$. При $\sigma \equiv 0$ поверхность F, подчиненная указанной внешней связи, не допускает бесконечно малых AG - деформаций.

Теорема 1.2.

Пусть F - односвязная поверхность положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, удовлетворяющая условиям регулярности, и касательная плоскость к поверхности не параллельна плоскости $0xy$ ни в одной точке поверхности F. Пусть, далее, поверхность F подчинена вдоль края

∂F условию обобщенного закрепления $(\bar{u},\bar{k}) = \sigma$ относительно плоскости $(\pi_1): z = 0$, где $\bar{k}$ - единичный орт оси $0z$, σ - заданная функция, и условию скольжения поверхности в точке $M_0 \in F$ по прямой (l) с направляющим вектором $\bar{k} = \{0,0,1\}$. Тогда для любой функции σ класса $C^{2,\alpha}(\partial F)$, $0 < \alpha < 1$, поверхность F допускает единственную бесконечно малую AG - деформацию с полем скоростей $\bar{u}$ класса $C^{2,\alpha}$. При $\sigma \equiv 0$ поверхность F, подчиненная указанной внешней связи, не допускает бесконечно малых AG - деформаций.

Так как задача о бесконечно малых AG - деформациях поверхности F является линейной, то корректность внешней связи вида $R(\bar{u}) = \sigma$ означает, что однородная связь (при $\sigma \equiv 0$) обеспечивает наличие только нулевого поля скоростей $\bar{u} \equiv 0$ бесконечно малой AG - деформации поверхности F, и жесткость поверхности в этом случае, по терминологии И.Н. Векуа, является оптимальной, а неоднородная связь (при $\sigma \neq 0$) совместима с единственной бесконечно малой AG - деформацией поверхности F для любой заданной функции σ, и потому поверхность, подчиненная этому условию, является нежесткой. Из сказанного следует, что внешние связи, указанные в теоремах 1.1 и 1.2, являются корректными в отношении бесконечно малых AG - деформаций рассматриваемых поверхностей.

В §8 исследуются бесконечно малые AG – деформации при условии защемления поверхности F вдоль края ∂F. Доказывается

Теорема 1.3.

Пусть F - односвязная поверхность положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 =$ const, удовлетворяющая условиям регулярности. Тогда для любой функции σ класса $C^{2,\alpha}$ условие защемления поверхности F вдоль края ∂F является корректной связью кинематического типа в отношении бесконечно малых AG – деформаций, причем для поля скоростей $\bar{u} = \bar{u}_\tau + \bar{u}_n$ касательная составляющая $\bar{u}_\tau$ принадлежит классу $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, а нормальная составляющая $\bar{u}_n$ принадлежит классу $C^{2,\alpha}$.

Если условие защемления поверхности вдоль края таково, что $\sigma \equiv 0$, то оно обеспечивает жесткость поверхности, при этом жесткость является оптимальной.

В §9 устанавливается, что внешняя связь обобщенного скольжения может быть описана в терминах квазикорректности для бесконечно малых AG – деформаций поверхности. Справедлива

Теорема 1.4.

Пусть F - односвязная поверхность положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, удовлетворяющая условиям регулярности. Пусть, далее, вдоль края ∂F задано переменное векторное поле $\bar{l} = \{\nu, \mu, 0\}$, $\nu^2 + \mu^2 \neq 0$, $\bar{l} \in C^{2,\alpha}, 0 < \alpha < 1$. Тогда 1) если индекс n векторного поля $\bar{l}$ в плоскости Oxy вдоль границы ∂D области D удовлетворяет неравенству $n \leq 0$, то условие обобщенного скольжения $(\bar{u}, \bar{l}) = \gamma$, $\gamma \in C^{2,\alpha}$, вдоль ∂F является квазикорректным в классе $C^{2,\alpha}$ с $(2|n| + 2)$ степенями свободы, 2) если индекс $n > 0$, то внешняя связь не является квазикорректной, а именно, однородная связь $(\gamma \equiv 0)$ совместима с одной линейно-независимой бесконечно малой AG - деформацией класса $C^{2,\alpha}$ поверхности F, а неоднородная связь $(\gamma \neq 0)$, $\gamma \in C^{2,\alpha}$, совместима в классе $C^{2,\alpha}$ с однопараметрическим семейством бесконечно малых AG - деформаций тогда и только тогда, когда $\gamma, \gamma \in C^{2,\alpha}$, удовлетворяет $(2n - 1)$ условиям разрешимости.

Во второй главе диссертации изучаются непрерывные AG - деформации поверхности F, совместимые с внешними связями вида $R(\bar{z}_t) = \sigma_t$, где R - линейный аддитивный оператор, заданный на множестве T точек поверхности F, $\bar{z}_t$ - поле смещений точек поверхности при непрерывной AG - деформации, σ_t- заданная на множестве T функция, такая, что σ_t, а также ее производные по длине дуги края первого, второго и третьего порядков непрерывно зависят от параметра t, $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 \quad 0$; $\sigma_0 \equiv 0$.

В §1 вводится определение непрерывных AG - деформаций поверхности F.

Будем говорить, что поверхность F допускает AG – деформации по параметру t, $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$, если существует семейство поверхностей $\{F_t\}$, зависящих от параметра t, такое что $F \equiv F_0$ и поверхность F допускает AG – преобразования в поверхность F_t для любого t.

Пусть поверхность F, заданная радиус-вектором $\bar{r}$, при AG – деформации переходит в поверхность F^* с радиус-вектором $\bar{r}^* = \bar{r} + \bar{z}_t$. Векторное поле $\bar{z}_t$, $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$, назовем полем смещения точек поверхности F при ее AG – деформации.

Будем говорить, что поверхность F допускает непрерывные AG – деформации класса $C^{k,\alpha}(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$, $k \geq 1$, порождаемые параметром t, если:

1) существует семейство полей смещений $\{\bar{z}_t\}$, $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$, непрерывно зависящих от параметра t;
2) при $t \quad 0$ поля смещений $\bar{z}_t$ равны нулю;
3) для всех значений параметра t из промежутка $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$, векторные поля $\bar{z}_t$ принадлежат классу $C^{k,\alpha}(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$, $k \geq 1$.

Если любое семейство полей смещений $\{\bar{z}_t\}$ непрерывных AG – деформаций поверхности F равно нулю, то поверхность F назовем кинематически жесткой в отношении непрерывных AG – деформаций, в противном случае – нежесткой.

В §2 выводится уравнение AG –преобразований поверхности F.

Доказывается (§3-§5), что нахождение AG – преобразований поверхности сводится к решению системы трех дифференциальных квазилинейных уравнений относительно трех искомых функций в области D. Поля смещений $\bar{z}$ AG – преобразований поверхности F принадлежат классу $C^{2,\alpha}(\overline{D})$, либо представимы в виде суммы $\bar{z} = \bar{z}_{\tau} + \bar{z}_{n}$, где $\bar{z}_{\tau}$ - касательная составляющая поля $\bar{z}$ класса $C^{1,\alpha}$, $\bar{z}_{n}$ - нормальная составляющая класса $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Далее (§6) изучаются непрерывные AG – деформации поверхности F при условии обобщенного закрепления края поверхности относительно заданной плоскости и условии точечного типа. Используя результаты первой главы, методами функционального анализа, доказывается разрешимость поставленной краевой задачи, и устанавливаются соответствующие теоремы единственности решения этой задачи:

Теорема 2.1.

Пусть односвязная поверхность F положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0$ $0, k_0 = \text{const}$, удовлетворяющая условиям регулярности, подчинена вдоль края ∂F условию обобщенного закрепления $(\bar{z}_t, \bar{n}) = \sigma_t$ относительно вертикальной плоскости (π) с вектором нормали $\bar{n}$, где $\bar{n} = \{A, B, 0\}$, $A^2 \cdot B^2 \neq 0$, σ_t - заданная функция, такая, что σ_t, а также ее производные по длине дуги края до третьего порядка непрерывно зависят от параметра t, $t \in (-t_0, t_0)$, t_0 0, и условию скольжения поверхности F в некоторой точке $M_0 \in F$ по прямой (l) с направляющим вектором $\bar{n}$. Тогда существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, зависящее от поверхности F, что при

$\|\sigma_t\|_{2,\alpha} < \varepsilon_0$, $0 < \alpha < 1$, параметр t порождает единственную непрерывную AG - деформацию класса $C^{2,\alpha}$, совместимую с заданной внешней связью. Если функция $\sigma_t \equiv 0$, то можно указать такую δ_0- окрестность поверхности F, в которой поверхность кинематически однозначно определена относительно AG - преобразований при указанной внешней связи.

Теорема 2.2.

Пусть F - односвязная поверхность, $K \geq \kappa_0 > 0$, $\kappa_0 = \text{const}$, удовлетворяющая условиям регулярности, и касательная плоскость к поверхности не параллельна плоскости $0xy$ ни в одной точке поверхности. Пусть, далее, поверхность F подчинена вдоль края ∂F внешней связи обобщенного закрепления $(\bar{z}_t, \bar{k}) = \sigma_t$ относительно плоскости $z = 0$, где $\bar{k} = \{0,0,1\}$ - единичный орт оси $0z$, σ_t - заданная функция класса $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, которая вместе со своими производными по длине дуги края до третьего порядка непрерывно зависит от параметра t, $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$; и условию скольжения поверхности F в некоторой точке $M_0 \in F$ по прямой (l) с направляющим вектором $\bar{k}$. Тогда существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, зависящее от поверхности F, что при $\|\sigma_t\|_{2,\alpha} < \varepsilon_0$, параметр t порождает единственную непрерывную AG – деформацию класса $C^{2,\alpha}$ совместимую с заданной внешней связью. Если функция $\sigma_t \equiv 0$, то можно указать такую δ_1 - окрестность поверхности F, в которой поверхность кинематически однозначно определена относительно AG – преобразований при указанной внешней связи.

В §7 исследуются непрерывные AG - деформации поверхности F при условии защемления края ∂F. Имеет место

Теорема 2.3.

Пусть односвязная поверхность F положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, удовлетворяющая условиям регулярности, подчинена вдоль края условию защемления $(\bar{z}_t, \bar{n}) = \sigma_t$, где $\bar{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности F вдоль ∂F, σ_t - заданная функция класса $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, которая вместе со своими производными по длине дуги края первого, второго и третьего порядков непрерывно зависит от параметра t, $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$. Тогда существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, зависящее от поверхности F, что при выполнении неравенства $\|\sigma_t\|_{2,\alpha} < \varepsilon_0$, параметр t порождает единственную непрерывную AG - деформацию поверхности F, совместимую с заданной внешней связью. Причем для поля смещений $\bar{z}_t = \underset{(\tau)}{\bar{z}_t} + \underset{(n)}{\bar{z}_t}$ касательная составляющая $\underset{(\tau)}{\bar{z}_t}$ принадлежит классу $C^{1,\alpha}$, а нормальная составляющая $\underset{(n)}{\bar{z}_t}$ принадлежит классу $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

По аналогии с терминологией первой главы настоящей работы, указанные в теоремах 2.1, 2.2, 2.3 внешние связи можно назвать корректными в отношении непрерывных AG - деформаций поверхности F.

В §8 установлено, что условие обобщенного скольжения является квазикорректной внешней связью для непрерывных AG – деформаций рассматриваемой поверхности. Доказывается

Теорема 2.4.

Пусть F односвязная поверхность положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, удовлетворяющая условиям регулярности. Пусть поверхность F вдоль края ∂F подчинена условию обобщенного скольжения $(\bar{z}_t, \bar{l}) = \gamma_t$, где $\bar{l}$ - переменное векторное поле, $\bar{l} = \{\nu, \mu, o\}$, $\nu^2 + \mu^2 \neq 0$, $\bar{l} \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, γ_t - заданная функция класса $C^{2,\alpha}$, такая, что γ_t, а также ее производные по длине дуги края первого, второго и третьего порядков непрерывно зависят от параметра t, $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$. Пусть, далее, индекс n векторного поля $\bar{l}$ удовлетворяет неравенству $n \le 0$. Тогда существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, зависящее от поверхности, что при $\|\gamma_t\|_{2,\alpha} < \varepsilon_0$ параметр t порождает AG – деформацию поверхности F, совместимую с заданной внешней связью. Эта деформация дополнительно зависит от $2(|n| + 1)$ действительных параметров $c_1, c_2, \ldots, c_{2(|n|+1)}$. Если $\gamma_t \equiv 0$, то при фиксированных $t = \tilde{t}$, $c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_{2|n|+2}$, $\tilde{t} \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$, параметр c_i, $i \in [1, 2(|n|+1)]$, порождает непрерывную AG – деформацию поверхности $F_{\tilde{t}}$, совместимую с указанной внешней связью. В случае $n > 0$ существует δ – окрестность поверхности F, в которой поверхность однозначно определена при однородной внешней связи.

В третьей главе изучаются аналитические по параметру AG - деформации поверхности F при условии обобщенного закрепления края ∂F относительно вертикальной плоскости (π): $(\bar{z}_t, \bar{n}) = \sigma_t$, где $\bar{z}_t$ - поле смещений точек поверхности F при аналитической AG - деформации, $t \in (-t_0, t_0)$, $0 < t_0 < 1$, $\bar{n}$ - единичный вектор нормали плоскости (π).

В §1 вводится определение аналитической по параметру AG - деформации поверхности F.

Пусть поверхность F с радиус-вектором $\bar{r}$ допускает AG – деформацию по параметру t, $t \in (-t_0, t_0)$, $0 < t_0 < 1$, в поверхность F_t с радиус-вектором $\bar{r}_t = \bar{r} + t\overset{(1)}{\bar{z}} + t^2\overset{(2)}{\bar{z}} + \ldots + t^n\overset{(n)}{\bar{z}} + \ldots = \bar{r} + \bar{z}_t$, где $\bar{z}_t$ - поле смещений точек поверхности при AG – деформации, представимое в виде ряда $\bar{z}_t = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \overset{(n)}{\bar{z}}$, который сходится для любого значения t, $t \in (-t_0, t_0)$, $0 < t_0 < 1$.

Такую деформацию будем называть аналитической AG – деформацией поверхности F по параметру t, а векторные поля $\overset{(n)}{\bar{z}}$ - полями смещений порядка $\bar{n}$ при аналитической AG – деформации.

Будем говорить, что поверхность F допускает аналитические AG – деформации класса $C^{2,\alpha}$, $0<\alpha<1$, если $\overset{(n)}{\bar{z}} \in C^{2,\alpha}$ для любого n, $n=1,2,\ldots$.

Если при аналитической AG – деформации поле $\overset{(1)}{\bar{z}}$ в разложении $\bar{z}_t$ таково, что уравнение $\bar{r}_t=\bar{r}+t\overset{(1)}{\bar{z}}$ задает бесконечно малую AG – деформацию поверхности F, то будем говорить, что бесконечно малая AG – деформация поверхности F продолжима в аналитическую AG – деформацию.

Далее (§ 2,3) выводится уравнение аналитической AG - деформации поверхности и доказывается, что поля смещений $\overset{(n)}{\bar{z}}$ аналитической AG – деформации поверхности восстанавливаются в классе $C^{2,\alpha}$, для любого n, $n=1,2,\ldots$.

В §4 указаны условия, при которых бесконечно малая AG – деформация поверхности, подчиненная условию обобщенного закрепления края ∂F относительно заданной плоскости, может быть продолжена в аналитическую AG - деформацию при указанной внешней связи. Доказываются

Теорема 3.1.

Пусть односвязная поверхность F положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0=\text{const}$, удовлетворяющая условиям регулярности, подчинена вдоль края ∂F условию обобщенного закрепления относительно вертикальной плоскости (π) с единичным вектором нормали $\bar{n}=\{A,B,0\}$: $(\bar{z}_t,\bar{n})=\sigma_t$. Пусть, далее, функция σ_t допускает разложение в сходящийся ряд $\sigma_t=\sum_{n=1}^{\infty} t^n \overset{(n)}{\sigma}$, $\overset{(n)}{\sigma}$ - функции класса $C^{2,\alpha}$ вдоль края ∂F, t - числовой параметр, $t \in (-t_0,\, t_0)$, $0<t_0<1$. Тогда существует такое число $\tilde{c}$, зависящее от поверхности F, что если функция $\overset{(n)}{\sigma}$ удовлетворяет неравенству $\left\|\overset{(n)}{\sigma}\right\|_{2,\alpha} \le \frac{\widetilde{c}}{n^2}$, то поверхность F допускает аналитическую по параметру t AG - деформацию, совместимую с заданной внешней связью, причем при фиксированном t поле смещений $\bar{z}_t$ принадлежит классу $C^{2,\alpha}$, $0<\alpha<1$. Указанная аналитическая AG - деформация зависит еще от двух произвольных функций параметра t, порождающих параллельный перенос поверхности F вдоль осей Oy, Oz.

Теорема 3.2.

Всякое поле скоростей $\bar{u}$, $\bar{u}\neq 0$, класса $C^{2,\alpha}$, $0<\alpha<1$, бесконечно малой AG – деформации поверхности F, удовлетворяющей условиям регулярности, подчиненное внешней связи

$$(\bar{u},\bar{i})\big|_{\partial D} = \sigma \;, \quad (\bar{u},\bar{j})\big|_{M_0} = 0 \;, \quad (\bar{u},\bar{k})\big|_{M_0} = 0 \;, \tag{3.10}$$

где σ – функция класса $C^{2,\alpha}$, заданная вдоль края поверхности, $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – единичные орты осей Ox,Oy,Oz, M_0 – некоторая точка поверхности F, допускает продолжение в аналитическую AG – деформацию поверхности F с полем смещений $\bar{z}_t \in C^{2,\alpha}$, совместимую с внешней связью

$$(\bar{z}_t,\bar{i})\big|_{\partial D} = \sigma_t \;, \tag{3.11}$$

где $\bar{z}_t = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \overset{(n)}{z}$, $\overset{(1)}{\bar{z}} \equiv \bar{u}$, $\overset{(n)}{\bar{z}} \in C^{2,\alpha}$, σ_t – заданная функция, $\sigma_t = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \overset{(n)}{\sigma}$, $\overset{(1)}{\sigma} \equiv \sigma$, $\overset{(n)}{\sigma} \in C^{2,\alpha}$, $t \in (-t_0,t_0)$, $0<t_0<1$.

Публикации по теме диссертации.

[1] Бабенко О.Н. Ареальные преобразования гиперповерхностей в E^n, сохраняющие их грассманов образ // Сб. науч. работ по межвузовской научной программе «Университеты России – фундаментальные исследования» – Таганрог, изд. ТГПИ – проект 1686. – 1998. – ч.1. – с.14-22.

[2] Бабенко О.Н. Бесконечно малые AGi деформации односвязной поверхности положительной кривизны с условием обобщенного закрепления поверхности относительно плоскости вдоль края // Сб. науч. работ по межвузовской научной программе «Университеты России – фундаментальные исследования» – Таганрог, изд. ТГПИ – проект 1686. – 1999. – ч.2. с.44-49.

[3] Бабенко О.Н. Непрерывные AGi – деформации выпуклых поверхностей с краевыми условиями // Сб. науч. работ преподавателей и аспирантов матем. кафедр ТГПИ – Таганрог, изд. ТГПИ – 1999. – с.20-39.

[4] Бабенко О.Н. Непрерывные AGi деформации выпуклых поверхностей с условием обобщенного закрепления края поверхности относительно плоскости // Сб. науч. трудов преподавателей и аспирантов ТГПИ – Таганрог, изд. ТГПИ. – 2000. – с.216-226.

[5] Бабенко О.Н. Непрерывные AGi преобразования выпуклых поверхностей с краевым условием // материалы Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов». – М.; изд. Московского университета. 2000. - вып. 4. - с. 318-319.

[6] Бабенко О.Н. Бесконечно малые AGi – деформации выпуклых поверхностей с условием обобщенного закрепления края поверхности относительно плоскости // Сб. научных трудов шестой международной конференции «математические модели физ. процессов и их свойства» – Таганрог, изд. ТГПИ – 2000. – с. 45-49.

[7] Бабенко О.Н. Аналитические AG – деформации выпуклых поверхностей с условием обобщенного закрепления края поверхности относительно плоскости // Тезисы докл. международ. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова – Ростов-на-Дону, изд. Центр множительной техники ООО КСС.– 2000 г.- с.20-21.

2-00

Подписано в печать 10.10.2000. Бумага офсетная.
Формат 60x84 1/16. Объем 1,25 усл.п.л. Тираж 100. Заказ 31.

ТОО "ОБРАЗОВАНИЕ"
Адрес: 347936 г.Таганрог, ул.Инициативная, 50.