КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

МОХАМЕД САБРИ САЛЕМ АЛИ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01. – математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2000

Работа выполнена в Отделении математики НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, старший научный сотрудник Ф.Г. Авхадиев.

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук, профессор Ф.Н. Гарифьянов,
доктор физико–математических наук, профессор С.Р. Насыров.

Ведущая организация: Казанская государственная архитектурно-строительная академия.

Защита состоится "5" октября 2000 г.
в 14^{00} часов на заседании специализированного Совета по математике К 053.29.05 Казанского государственного университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18)

Автореферат разослан "19" сентября 2000 г.

Ученый секретарь
специализированного Совета
доцент В.В. Шурыгин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Настоящая работа посвящена распространению ряда результатов, известных для обычных выпуклых функций, на случай тригонометрически выпуклых функций, а также обобщению этих исследований на более общие классы периодических аналогов выпуклых функций. Тригонометрически выпуклые функции имеют интересные применения в теории целых функций (работы И. Фрагмена и И. Линделефа, Г. Пойа, Г. Валирона, Б.Я. Левина и других, см. [4],[10]) и в теории кавитационных диаграмм для гидропрофилей (работы Ф.Г. Авхадиева и Д.В. Маклакова, см. [1],[2]).

В диссертации изучаются новые классы функций, получаемые обобщением выпуклости в смысле Г. Валирона [10] и И.Ф. Беккенбаха [6] на случай периодических функций. А именно, получены обобщение теоремы А. Пфлюгера [4], решения некоторых экстремальных задач.

Для тригонометрически выпуклых и более общих видов функций получены аналоги теоремы М. Дж. Майлса из [9], теоремы Б. Дж. Андерсона из [5] и классического неравенства Адамара. Отметим, что для логарифмически выпуклых и некоторых других классов функций аналоги неравенства Адамара являются постоянным предметом исследований в последние годы (см. работы С.С. Драгомира, М. Монда [8], С. Фитзпатрика и других).

Цель работы. Изучение функций, которые являются периодическими и имеют свойства, аналогичные свойствам выпуклых функций, и изучение приложений этих функций.

Методика исследования. Исследование проводится методами теории обобщенно выпуклых функций, используются также подходы, разработанные в теории целых функций.

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертационной работе, кроме некоторых подготовительных результатов параграфа 1.2, являются новыми. Работа носит теоретический характер.

Апробация работы. Результаты работы были представлены на следующих конференциях и семинарах:

1. Всероссийская школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", посвященная 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова, 13-18 сентября, 1999, Казань.

2. Summer school and $6^{\underline{\text{th}}}$ international symposium on generalized convexity / Monotonicity. Samos, Greece, August 25-september 3, 1999. Department of Mathematics, University of the Aegean.

3. Итоговая научная конференция Казанского университета за 1999 год.

4. Международная конференция, посвященная 40-летию механико-математического факультета КГУ, Казань, 1-3 октября 2000 г.

5. Многократно на научном семинаре отдела математического анализа НИИММ под руководством д.ф.-м.н. Ф.Г. Авхадиева.

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 6 публикациях. Работы выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста, включающих в себя 11 параграфов, и списка литературы, содержащего 73 работы. Работа набрана в системе LaTeX и содержит 100 страниц, включая 11 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение диссертации содержит описание обобщений понятия выпуклой функции в нескольких направлениях, и указано то направление, к которому непосредственно относится наша диссертация. Приводится также краткое содержание всей работы.

Первая глава посвящена изучению некоторых свойств тригонометрически выпуклых функций и решению нескольких экстремальных задач для этих функций.

В параграфе 1.1 доказывается следующий аналог одной из базовых теорем теории выпуклых функций для тригонометрически выпуклых функций.

Теорема 1.1. *Необходимым и достаточным условием тригонометрической выпуклости вещественнозначной, π-периодической функции $f(x)$ является существование опорной функции для $f(x)$ в любой точке s из $\mathbb{R}$.*

Существование опорной функции доказано Бонсаллом [7].

В параграфе 1.2 изучаются некоторые свойства тригонометрически выпуклых функций, получено обобщение теоремы Б. Дж. Майлса [9] на случай тригонометрически выпуклых функций и доказывается, что среднее от тригонометрически выпуклой функции также является тригонометрически выпуклым. Основные результаты параграфа – следующие утверждения.

Теорема 1.2. *Предположим,что $f(x)$ является тригонометрически выпуклой функцией на (a,b), причем $0 < b - a < \pi$, $T_s(x)$ является опорной функцией для $f(x)$ в точке $s \in (a,b)$. Тогда функция*

$$\varphi(s) = \int_a^b [f(x) - T_s(x)]\, dx$$

имеет минимум в точке $s = (a+b)/2$.

Теорема 1.3. *Пусть $f(x)$ является неотрицательной, π-периодической, тригонометрически выпуклой функцией, имеющей непрерывные производные вплоть до второго порядка в $\mathbb{R}$. Пусть, далее, $F(x)$ является π-периодической функцией, которая на $[0,\pi]$*

определена следующей формулой

$$F(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt, \qquad x \in [0,\pi].$$

$$\text{\textit{Если}} \qquad f'(0) \geq 0, \qquad f(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\,dx,$$

то $F(x)$ является тригонометрически выпуклой функцией.

В параграфе 1.3 мы выводим некоторые интегральные неравенства типа Адамара (см., например, [8]) для тригонометрически выпуклых функций. Приведем доказанные теоремы.

Теорема 1.4. *Пусть $f(x)$ $(\alpha < x < \beta)$ – тригонометрически выпуклая функция. Для любых a, b, таких, что $\alpha < a < b < \beta$, $0 < b - a < \pi$, имеем*

$$2\sin\left(\frac{b-a}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \operatorname{tg}\left(\frac{b-a}{2}\right)[f(a)+f(b)].$$

Теорема 1.5. *Пусть $f(x)$ является неотрицательной, 2π- периодической, тригонометрически выпуклой функцией, определенной на $\mathbb{R}$. Для любых a, $b \in \mathbb{R}$, таких, что $0 < b - a < \pi$, имеем*

$$\int\limits_a^b f^n(x)\,dx \leq \sin^{-n}(b-a)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}[f(a)]^{n-r}[f(b)]^r \times$$

$$\times \int\limits_a^b \sin^r(x-a)\sin^{n-r}(b-x)\,dx$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.6. *Пусть $f(x)$ является дифференцируемой, 2π-периодической, тригонометрически выпуклой функцией, определенной на*

$\mathbb{R}$. *Для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $a,\ b \in \mathbb{R}$ $(0 < b - a < \pi)$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_a^b f^{2n-1}(x)\,dx \geq 4\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+r-1}}{2n-2r-1}\binom{2n-1}{r} \times$$
$$\times \sin(2n-2r-1)\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin(2n-2r-1)\alpha,$$

где

$$\lambda^2 = f^2\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'^2\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \operatorname{tg}\alpha = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Big/ f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

В последнем параграфе этой главы исследуется задача Б. Дж. Андерсона [5] в случае тригонометрически выпуклых функций. Получены следующие утверждения.

Теорема 1.8. *Пусть* $g_1(x),\ g_2(x), \ldots,\ g_n(x)$ *являются непрерывными выпуклыми функциями, определенными при* $0 \leq x \leq \pi/2$. *Предположим, что*

$$g_k(0) = 0, \qquad g_k(x) \geq 0, \qquad k = 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

Пусть $f(x)$ *является неотрицательной,* 2π*-периодической, дифференцируемой, тригонометрически выпуклой функцией, определенной на* $\mathbb{R}$.

Если $\quad f'(0) = 0 \quad$ *и* $\quad \int\limits_0^{\pi/2} g_k(x)\cos x\,dx = \alpha_k, \quad$ *то*

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\prod_{k=1}^{n} g_k(x)\,dx \geq \frac{2^n}{n+1} f(0)\prod_{k=1}^{n}\alpha_k.$$

Теорема 1.9. *Пусть* $g_1(x),\ g_2(x), \ldots,\ g_n(x)$ *являются выпуклыми функциями, определенными для* $0 \leq x \leq \pi/2$, *и пусть выполняются условия*

$$g_k(0) = 0, \qquad g_k(x) \geq 0, \qquad k = 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

Пусть, далее, $f(x)$ является неотрицательной, дифференцируемой, 2π-периодической, тригонометрически выпуклой функцией, определенной на $\mathbb{R}$. Если $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, и $\int\limits_0^{\pi/2} g_k(x)\,dx = \alpha_k$, то справедливо следующее точное неравенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(x) \prod_{k=1}^{n} g_k(x)\,dx \;\geq\; \frac{(\pi/2)^2}{n+2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{\pi}\alpha_k\right) \times$$

$$\times\, {}_1F_2(1+\frac{n}{2};\ \frac{3}{2}, 2+\frac{n}{2};\ -\frac{\pi^2}{16}).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x, \qquad g_k(x) = \frac{2\alpha_k x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Во второй главе, состоящей из четырех параграфов, исследуется задача о построении новых классов обобщенно выпуклых функций с дополнительным условием периодичности. В литературе был известен лишь один класс такого типа — класс тригонометрически выпуклых функций. Этот новый класс является обобщением выпуклости в смысле Г. Валирона [10] и И.Ф. Беккенбаха [6] на случай периодических функций.

Пусть $g_1(x), g_2(x) \in C^2[(a,b)]$ и являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{1}$$

где

$$\begin{cases} P(x) = -\dfrac{\Delta'}{\Delta}, \quad Q(x) = \dfrac{g_1'g_2'' - g_1''g_2'}{\Delta}, \\ \Delta(x) = g_1(x)g_2'(x) - g_1'(x)g_2(x). \end{cases} \tag{2}$$

Пусть, далее, функция $M(x) = c_1g_1(x) + c_2g_2(x)$ является общим решением уравнения (1) на $a, b)$. Положим

$$l(s,t) = g_1(s)g_2(t) - g_1(t)g_2(s) \tag{3}$$

для любых $s, t \in (a, b)$ таких, что $a < s < t < b$.

В параграфе 1.2 дается следующее

Определение 2.1. Вещественнозначная функция $f(x)$, определенная на $a < x < b$, называется *суб-M функцией* в (a, b), если для произвольных s, t, таких, что $a < s < t < b$, элемент $M(x)$, график которого проходит через точки $(s, f(s))$, $(t, f(t))$, обладает свойством

$$f(x) \leq M(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x), \qquad x \in [s, t],$$

где

$$M(s) = f(s), \qquad M(t) = f(t).$$

Т. е.

$$f(x) \leq \frac{f(s)l(x,t) + f(t)l(s,x)}{l(s,t)}, \qquad x \in [s,t]. \tag{4}$$

Когда вместо (a, b) рассматриваются $\mathbb{R}$ и периодические функции с периодом $T > 0$, в определение 2.1 нужно внести некоторые изменения. А именно, необходимо предположить, что существует число $\delta_0 \in (0, T)$ и неравенство (4) выполняется лишь в том случае, если $0 < t - s < \delta_0$. Величина δ_0 определяется условием, гарантирующим неравенство

$$l(s,t) > 0.$$

Например, (i) для обычных выпуклых функций

$$l(s,t) = t - s, \qquad \delta_0 = \infty;$$

(ii) для тригонометрически выпуклых функций

$$l(s,t) = \sin(t - s), \qquad \delta_0 = \pi.$$

Итак, рассмотрим теперь новый класс выпуклых функций, обобщающих тригонометрически выпуклые функции, как один из классов периодических суб-M функций.

Возьмем $g_1(x)$ и $g_2(x)$ в следующей форме

$$g_1(x) = \Phi(x)\cos x, \qquad g_2(x) = \Psi(x)\sin x,$$

где $\Phi(x), \Psi(x) \in C^2(\mathbb{R})$ и являются неотрицательными, 2π-периодическими функциями.

Вычисления показывают, что

$$\delta_0 = 2.02876\ldots$$

есть решение трансцендентного уравнения

$$|\operatorname{tg} x| = x, \qquad x \in [0, \pi].$$

При этих требованиях на $\Phi(x), \Psi(x)$ и на выбор $s, t \quad (0 < t - s < \delta_0)$ функция $f(x)$ в определении 2.1 называется (Φ, Ψ)-тригонометрически выпуклой.

В параграфе 2.2 доказываются некоторые подготовительные леммы, которые используются в следующем параграфе при доказательстве теоремы 2.1. Приведем формулировку одной из трех лемм параграфа 2.2.

Лемма 2.3. *Пусть $f(x)$ – суб-M функция на (a, b), тогда справедливо неравенство*

$$f'(b-0) - f'(a+0) + \int_a^b \Big(Pf' + Qf\Big)(x)\,dx \geq 0, \tag{5}$$

причем равенство в (5) имеет место, если только

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – функции, упомянутые ранее в (2), c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

В параграфе 2.3 получено обобщение теоремы Пфлюгера (см. [4]) на случай суб-M функций, а именно, доказана

Теорема 2.1. *Пусть $f(x)$ является дифференцируемой функцией на (α, β). Для того, чтобы $f(x)$ была суб-М функцией, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$S(x) = f'(x) + \int_{x_0}^{x} \Big(Pf' + Qf\Big)(t)\,dt \qquad \Big(x_0 \in (\alpha, \beta)\Big)$$

была неубывающей на (α, β), где $P(x)$ и $Q(x)$ — функции, упомянутые ранее в (2).

В параграфе 2.4 получены обобщения некоторых результатов первой главы на случай суб-М функций. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть $f(x)$, $\alpha < x < \beta$, является суб-М функцией. Для любых a, b, таких, что $\alpha < a < b < \beta$ и*

$$g_i(a) = g_i(b) = 2g_i\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{2}{b-a}\right)\int_a^b g_i(x)\,dx, \quad i = 1, 2,$$

имеют место следующие неравенства

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Теорема 2.3. *Пусть $f(x)$, $\alpha < x < \beta$, является суб-М функцией. Для любых a, b, таких, что $\alpha < a < b < \beta$, через $T_s(x)$ обозначим опорную функцию для $f(x)$ в точке $s \in (a, b)$. Если*

$$\int_a^b g_i(x)\,dx = (b-a)\,g_i\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad i = 1, 2,$$

то минимальное значение функции

$$\varphi(s) = \int_a^b \Big[f(x) - T_s(x)\Big]dx$$

достигается в точке $s = \dfrac{a+b}{2}$.

В третьей главе диссертационной работы исследуются некоторые приложения периодических обобщенно выпуклых функций и дается описание некоторых открытых проблем, над которыми автор намеревается работать в будущем.

В параграфе 3.1 доказано, что в некоторых случаях суб-М функции реализуются как индикатрисы роста целых решений уравнения Бельтрами [3]. Основным результатом является следующая

Теорема 3.1. *Индикатриса роста для целых решений уравнения Бельтрами, имеющего частное решение $q(re^{i\theta}) = re^{i\gamma(\theta)}$, является (Φ, Ψ) - тригонометрически выпуклой функцией, где*

$$\Phi(\theta) = \frac{\cos\gamma(\theta)}{\cos\theta}, \qquad \Psi(\theta) = \frac{\sin\gamma(\theta)}{\sin\theta}.$$

В параграфе 3.2 рассматриваются некоторые интегральные оценки для кавитационных диаграмм гидропрофилей (см. [1],[2]). А именно, как следствие результатов главы 1 получена следующая

Теорема 3.2. *Пусть $f(\alpha)$ - огибающая скоростей некоторого профиля. Тогда для любых $a, b \in \mathbb{R}$, таких, что $0 < b - a < \pi$, справедливы следующие оценки*

$$(6)\quad 2\sin\left(\frac{b-a}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha \le \operatorname{tg}\left(\frac{b-a}{2}\right)[f(a)+f(b)],$$

$$\int_a^b f^n(\alpha)\,d\alpha \le \sin^{-n}(b-a)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}[f(a)]^{n-r}[f(b)]^r \times$$

$$(7)\qquad \times \int_a^b \sin^r(\alpha-a)\sin^{n-r}(b-a)\,d\alpha$$

для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$\int\limits_a^b f^{2n-1}(\alpha)\,d\alpha \;\geq\; 4\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+r-1}}{2n-2r-1}\binom{2n-1}{r} \times$$

$$\text{(8)} \qquad \times \sin(2n-2r-1)\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin(2n-2r-1)x$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, где

$$\lambda^2 = f^2\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'^2\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad \operatorname{tg} x = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Big/ f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

В параграфе 3.3 описаны некоторые проблемы, возникшие в ходе выполнения диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1) доказательство утверждения о том, что существование опорной линии является достаточным условием тригонометрической выпуклости;

2) обобщения теоремы М.Дж. Майлса о точке экстремума одного интеграла на случай тригонометрически выпуклых функций и на случай суб-М функций;

3) получение нескольких интегральных неравенств типа Адамара для тригонометрически выпуклых функций и для суб-М функций;

4) распространение теоремы Б.Дж. Андерсона на случай тригонометрически выпуклых функций;

5) обобщение теоремы Пфлюгера на случай суб-М функций.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф. Ф.Г. Авхадиеву за вдохновляющие беседы, стимулирующие плодотворные дискуссии и постоянное внимание к работе. Автор благодарит также сотрудников Отделения математики НИИММ,

способствовавших улучшению работы многочисленными вопросами и плодотворными обсуждениями на семинарах.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Мохамед Сабри Салем. Опорные кривые для тригонометрически выпуклых функций // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы всероссийской школы-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова. - Казань, 1999. - С 155-156.

2. Мохамед Сабри Салем. Некоторые свойства тригонометрически выпуклых функций / Казан. ун-т. НИИММ им. Н.Г. Чеботарева. - Казань, 2000. - 10 с. - Деп. в ВИНИТИ 28.06.2000, N1810-В00.

3. Мохамед Сабри Салем. Точные оценки для интегральных средних тригонометрически выпуклых функций / Казан. ун-т. НИИММ им. Н.Г. Чеботарева. - Казань, 2000. - 20 с. -Деп. в ВИНИТИ 29.06.2000, N1842-В00.

4. Мохамед Сабри Салем. Распространнение выпуклости в смысле Валирона и Беккенбаха на случай периодических функций / Казан. ун-т. НИИММ им. Н.Г. Чеботарева. - Казань, 2000. - 21 с. -Деп. в ВИНИТИ 07.07.2000, N1891-В00.

5. Мохамед Сабри Салем. О периодических обобщенно выпуклых функциях // Актуальные проблемы математики и механики: Материалы международной конференции, посвященной 40-летию механико-математического факультета КГУ. - Казань, 2000. - С. 111-112.

6. Mohamed Sabri Salem. Support curves ensuring the trigonometrical convexity // Summer school and 6th international symposium on generalized convexity / Monotonicity. Samos, Greece. 1999. Department of Mathematics, University of the Aegean. - 1999. - P. 19.

Литература

[1] Авхадиев Ф.Г., Маклаков Д.В. Критерий разрешимости задачи построения профилей по кавитационной диаграмме // Изв. вузов. Математика. - 1994.- No 7. - С. 3-12.

[2] Авхадиев Ф.Г., Маклаков Д.В. Аналитический метод построения гидропрофилей по заданной кавитационной диаграмме // Докл. РАН. - 1995. - Т. 343, No 2. - С. 195-197.

[3] Крушкаль С.Л., Кюнау Р. Квазиконформные отображения – новые методы и приложения. - Новосибирск: Наука, 1984. - 216 с.

[4] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехиздат, 1956. - 632 с.

[5] Andersson B.J. An inequality for convex functions // Nord. Mat. Tidsskr. - 1968. - Vol. 6. - P. 25-26.

[6] Beckenbach E.F. Generalized convex functions // Bull. Amer. Math. Soc. - 1937. - Vol. 43. - P. 363-371.

[7] Bonsall F.F. The characterization of generalized convex functions // Quart J. Math. Oxford, ser. 1. - 1950. - P. 100-111.

[8] Dragomir S.S., Mond M. Integral inequalities of Hadamard type for Log-convex functions // Demonstratio Mathematica. - 1998. - Vol. 31. - P. 355-364.

[9] Miles M.J. An extremum property of convex functions // Amer. Math. Monthly. - 1969. - Vol. 76. - P. 921-922.

[10] Valiron G. Fonctions convexes et fonctions entières // Bull. Soc. Math. France. - 1932. - Vol. 60. - P. 278-287.

2-00

Подписано в печать 15.09.2000 г.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Отпечатано в издательском комплексе
Управления международных связей КГУ