На правах рукописи

ХОЛМОГОРОВ СЕРГЕЙ АНДРЕЕВИЧ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ И НЕКЛАССИЧЕСКИХ ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ И ОБОЛОЧЕЧНО-СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

Казань – 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им.А.Н.Туполева-КАИ».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Паймушин Виталий Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики Казанского государственного архитектурно-строительного университета
Каюмов Рашит Абдулхакович

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры анализа данных и исследования операций Казанского (Приволжского) федерального университета
Бандеров Виктор Викторович

Ведущая организация: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»**

Защита состоится 29 января 2015 г. в 16 час. на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 при Казанском (Приволжском) федеральном университете, расположенном по адресу : 420008, г.Казань, ул.Кремлёвская, 18, корпус 2, ауд. 218.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке им.Н.И.Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, г.Казань, ул.Кремлёвская, д.35.

Отзывы по данной работе в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 420008, г.Казань, ул.Кремлёвская, д.35, диссертационный совет Д 212.081.21.

Автореферат разослан «__» декабря 2014 года.

Учёный секретарь диссертационного совета, д.ф.-м.н., профессор О.А.Задворнов

Актуальность проблемы. Стержни и оболочечно-стержневые элементы являются неотъемлемой частью конструкций разнообразного назначения и различных сооружений. Анализ устойчивости их равновесия является составной частью в общем цикле прочностного анализа. В этой области к настоящему времени опубликовано огромное количество работ как отечественными, так и зарубежными исследователями. Уравнения, описывающие процесс деформирования стержней, пластин и оболочек так или иначе основаны на редукции исходных трёхмерных уравнений теории упругости к одномерным уравнениям для стержней и двумерным уравнениям для пластин и оболочек. Анализ таких уравнений геометрически нелинейной теории упругости относительно недавно был проведён В.Н.Паймушиным и В.И.Шалашилиным. Ими было показано, что при малых деформациях и произвольных перемещениях они являются «некорректными», т.к. их использование приводит к появлению ложных точек бифуркаций при решении конкретных задач устойчивости. В связи с этим В.Н.Паймушиным были построены непротиворечивые геометрические нелинейные уравнения тонких оболочек, криволинейных и прямолинейных стержней, составных оболочечно-стержневых конструкций, основанные на редукции уравнений непротиворечивого варианта геометрически нелинейной теории упругости к одномерным и двумерным уравнениям на базе использования известной кинематической модели С.П.Тимошенко. На основе таких уравнений был выявлен ряд новых форм потери устойчивости (ФПУ) прямых и криволинейных стержней и круговых цилиндрических оболочек, находящихся в однородном докритическом напряжённо-деформированном состоянии (НДС) при различных видах их нагружения. Тем самым было показано, что исследование устойчивости равновесия стержней, пластин, оболочек и составленных из них конструкций в общем случае требует применения таких уравнений теории устойчивости, которые имели бы соответствующие степени точности и содержательности.

В реальных конструкциях их элементы в виде стержней, пластин и оболочек, как правило, находятся в условиях неоднородного по их объёмам докритического НДС, что приводит к задачам их устойчивости, описываемым уравнениями с переменными коэффициентами. Ввиду значительной сложности, а иногда и невозможности решения аналитическими методами задач устойчивости элементов конструкций с переменными параметрами НДС, внешней нагрузки, а также геометрическими и жесткостными параметрами, применение численных методов является единственным способом построения их решений.

Целью настоящей работы является построение линеаризованных уравнений теории упругой устойчивости стержней и оболочечно-стержневых конструкций с учётом параметров их докритического деформирования исходя из уточнённых геометрически нелинейных уравнений теории стержней, оболочек и оболочечно-стержневых конструкций, предложенных В.Н.Паймушиным, создание на их основе эффективных численных методов, реализованных в виде прикладного программного обеспечения, для анализа устойчивости прямых и плоских криволинейных стержней, подкреплённых на контуре стержнями пластин, а также составных осесимметричных оболочечно-стержневых конструкций. Применение разработанных методов для выявления всех возможных классических и неклассических ФПУ элементов конструкций рассматриваемых классов при тех или иных видах их внешнего нагружения.

На защиту выносятся:

1) линеаризованные уравнения теории упругой устойчивости стержней и оболочечно-стержневых конструкций с учётом параметров их докритического деформирования (деформационных параметрических слагаемых), построенные исходя из уточнённых геометрически нелинейных уравнений теории стержней, оболочек и оболочечно-стержневых конструкций, предложенных В.Н.Паймушиным;
2) численный метод и алгоритмы решения задач устойчивости стержней, пластин, подкреплённых на контуре стержнями, и оболочечно-стержневых конструкций, сформулированных на основе выведенных уравнений, основанные на методе конечных сумм (механических квадратур) с использованием интегрирующих матриц (ИМ) высокой точности, предложенных Р.З.Даутовым;
3) результаты экспериментального исследования сходимости разработанных методов и алгоритмов решения сформулированных задач устойчивости оболочечно-стержневых конструкций, их достоверности путём сравнения в частных случаях с точными аналитическими решениями, а также точности интегрирующих матриц, положенных в основу метода механических квадратур;
4) комплекс проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента;
5) выявленные и детально исследованные неклассические (ранее не описанные в научной литературе) ФПУ стержней, пластин и оболочечно-стержневых конструкций указанных выше классов с учётом и без учёта деформационных параметрических слагаемых в используемых уравнениях теории упругой устойчивости.

Научная новизна работы заключается в следующем.

1) На примере численного решения задачи устойчивости прямолинейного стержня, находящегося в условиях сжатия с кручением, проведён анализ точности метода конечных сумм при использовании трёх видов ИМ, основанных: на скользящей интерполяции искомой функции полиномом

четвёртой степени (ИМ М.Б.Вахитова), сплайн-аппроксимации (ИМ В.А.Фирсова) и интерполяции Лагранжа на неравномерной сетке узлов полинома Лежандра (ИМ Р.З.Даутова). Показано, что к устойчивым численным решениям задач рассматриваемого класса приводит использование ИМ, предложенных Р.З.Даутовым.

2) Разработан численный метод исследования устойчивости равновесия плоских криволинейных стержней с учётом и без учёта докритических деформационных параметрических слагаемых в разрешающих уравнениях при действии произвольной системы внешних усилий с произвольной пространственной ориентацией. Выявлены как классические (изгибно-сдвиговые, реализующиеся в плоскости кольца), так и неклассические ФПУ (изгибно-крутильные ФПУ с пространственной осевой линией в возмущённом состоянии) кольца при различных видах внешнего нагружения. Показано, что учёт деформационных параметрических слагаемых в уравнениях нейтрального равновесия кольца мало влияет на величину критической нагрузки и реализующуюся ФПУ.
3) Дана уточнённая постановка задачи об устойчивости прямоугольной пластины, находящейся в условиях одностороннего сжатия и подкреплённой на одной из контурных линий стержнем, соединяемой с пластиной с эксцентриситетом. В предположении о шарнирном опирании двух неподкреплённых кромок пластины исходная двумерная задача редуцирована к одномерной, для решения которой разработан численный метод на основе метода конечных сумм. Показано, что при наличии эксцентриситета всегда реализуется неклассическая изгибно-крутильная ФПУ подкрепляющего стержня, а при варьировании его геометрическими и физико-механическими параметрами наблюдается трансформация реализующихся ФПУ конструкции.
4) Дана уточнённая постановка задачи об устойчивости оболочечно-стержневой конструкции, состоящей из двух оболочек вращения, соединяемых посредством кругового шпангоута и находящихся в условиях осесимметричного докритического НДС с переменными параметрами вдоль образующих. Путём использования тригонометрических функций по окружной координате исходная двумерная задача устойчивости конструкции сведена к одномерной для каждого номера гармоники, решения которых (включая и одномерную задачу о докритическом НДС конструкции) находятся численным методом конечных сумм. С помощью разработанного метода при различных видах нагружения проведено исследование всех возможных ФПУ конструкции в виде двух цилиндрических оболочек разных диаметров соединяемых посредством кругового шпангоута, а также конструкции «цилиндрическая оболочка - шпангоут - сферическая оболочка». Показано, что пространственная изгибно-

крутильная ФПУ шпангоута является одной из главных при всех характерных видах нагружения оболочечно-стержневых конструкций рассмотренных классов, а учёт деформационных параметрических слагаемых в уравнениях устойчивости приводит к многократному снижению определяемой величины критической нагрузки.

Достоверность основных научных результатов следует из применения апробированных гипотез при соблюдении математической строгости преобразований на теоретическом этапе; тщательного анализа физической достоверности результатов численных решений, полученных с помощью разработанных методик; хорошим совпадением найденных численных решений ряда модельных задач с их известными аналитическими решениями.

Практическая ценность диссертации состоит в возможности применения разработанных методов при прочностном анализе проектируемых конструкций того или иного назначения, а также более точной оценки их несущей способности при их эксплуатации.

Публикации и апробация работы. Основное содержание исследований по теме диссертации опубликовано в 19 работах. По её результатам сделаны доклады на Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек» (Казань, 2008 г.), на XIV, XV, XVI, XVII и XVIII международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы конструкций и сплошных сред» (Москва, 2008-2011гг.), на Второй международной конференции «Проблемы механики твёрдого деформируемого тела» (Казань, 2009 г.), на VII Школе-семинаре молодых учёных и специалистов академика РАН В.Е.Алемасова (Казань, 2010 г.), на XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2011 г.).

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, включающего 163 наименования. Содержит 208 страниц печатного текста, в том числе 29 таблиц, 39 рисунков.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность и важность рассматриваемых в диссертации вопросов, дан анализ современного состояния проблемы, излагается краткое содержание работы по главам.

Современные машиностроительные изделия и сооружения того или иного назначения как правило представляют собой пластины и оболочки, подкреплённые продольными и поперечными элементами в виде стержней. Жёсткость таких конструкций в тангенциальных направлениях намного больше их изгибной жёсткости. Поэтому тонкостенный элемент может накапливать в себе большую потенциальную энергию без значительных деформаций, которая может перейти в изгибную деформацию, что сопровождается значительным изменением формы тонкостенного элемента и выходом его из строя. В связи с этим задачам устойчивости тонкостенных конструкций в общем цикле задач их прочностного анализа отводится значительное место.

Задачи устойчивости тонкостенных элементов конструкций неразрывно связаны с нелинейной теорией их деформирования. Проблемам построения геометрически нелинейной теории оболочек и их применением к задачам устойчивости посвящён большой цикл исследований К.Маргерра, Л.Г. Доннела, С.П.Тимошенко, Н.А.Алфутова, В.В.Болотина, А.С.Вольмира, К.З.Галимова, Э.И.Григолюка, Х.М.Муштари, В.В.Новожилова и многих других авторов.

Во введении дан также краткий обзор работ В.Н.Паймушина и В.И.Шалашилина, посвящённых анализу уравнений геометрически нелинейной теории упругости при малых деформациях и произвольных перемещениях, изложенных в известных монографиях В.В.Новожилова. Проанализированы также работы В.Н.Паймушина, посвящённые выявлению и исследованию неклассических ФПУ прямых стержней, кругового кольца и цилиндрических оболочек при разных вариантах их нагружения.

В первой главе рассматривается линеаризованная задача об устойчивости стержня, имеющего длину a, площадь поперечного сечения F, жесткостные параметры g_{11}, G_{12}, G_{13}, моменты инерции J_y, J_z и находящегося под действием осевого сжатия силой P и крутящего момента $M_к^0$. Одна из его неклассических ФПУ, как показано В.Н.Паймушиным, в рамках уточнённой модели С.П.Тимошенко описывается системой четырёх дифференциальных уравнений, составленных относительно функций V, W (прогибов в направлениях осей $0y$ и $0z$), ψ, χ (углов поворотов нормальных сечений вокруг осей $0y$ и $0z$). Эта самосопряжённая система линейных однородных дифференциальных уравнений путём введения безразмерных параметров

$$k_y = \frac{g_{11}\pi^2 J_y}{G_{13}a^2 F},\ k_z = \frac{g_{11}\pi^2 J_y}{G_{12}a^2 F},\ k_M = \frac{\pi r_m l}{a},\ \varepsilon = \frac{J_y}{J_z},\ \zeta = \pi x/a\ \ (0 \le \zeta \le \pi),$$

а также параметра нагрузки m, связанного с величинами P и $M_к^0$ зависимостями $P = g_{11}\pi^2 J_y m / a^2$, $M_к^0 = r_m l P$ (r_m – заданное число, l – плечо пары сил P, создающей крутящий момент), приводится к виду

$$\frac{d}{d\zeta}\left[\pi(1-k_z m)\frac{d\tilde{V}}{d\zeta} - \chi\right] = 0, \qquad \frac{d}{d\zeta}\left[\pi(1-k_y m)\frac{d\tilde{W}}{d\zeta} + \psi\right] = 0,$$

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{d\chi}{d\zeta} + \frac{\varepsilon k_M}{1+\varepsilon}m\psi)\right) - \frac{\varepsilon}{k_z}\left(\chi - \pi\frac{d\tilde{V}}{d\zeta}\right) + \frac{\varepsilon^2 k_M}{1+\varepsilon}m\frac{d\psi}{d\zeta} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{d\psi}{d\zeta}+\frac{\varepsilon k_M}{1+\varepsilon}m\chi)\right)-\frac{1}{k_y}\left(\psi+\pi\frac{d\tilde{W}}{d\zeta}\right)-\frac{k_M}{1+\varepsilon}m\frac{d\chi}{d\zeta}=0,$$

Численное решение составленных уравнений (1) основано на методе механических квадратур в варианте ИМ. В соответствии с ним исходные уравнения (1) путём последовательного интегрирования и удовлетворения тем или иным граничным условиям, которые здесь не приводятся, преобразуются к системе интегральных уравнений, содержащих интегральные операторы типа Вольтерра. Путём их замены конечно-суммарными операторами с использованием тех или иных квадратурных формул относительно дискретных узловых значений искомых неизвестных исходная задача сводится к стандартной задаче на собственные значения системы алгебраических уравнений вида

$$(\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\Re(4n+4,4n+4) \tag{2}$$

Численная процедура формирования матриц, поиска собственных значений и соответствующих собственных векторов задачи реализована в среде пакета MATLAB.

Как показали проведенные численные эксперименты, в случае использования ИМ М.Б.Вахитова при всех значениях определяющего параметра ε численные решения задачи существуют только при чистом сжатии стержня, когда $k_м=0$. При этом система уравнений (1) распадается на две не связанные между собой системы, численные решения которых методом механических квадратур являются абсолютно устойчивыми и быстро сходящимися при увеличении размерности n. При $\varepsilon=1$, когда $k_м\neq 0$, численные решения задачи оказались расходящимися, а при $\varepsilon\neq 1$ и увеличении $k_м$ полученные решения оказались завышенными по сравнению с решениями, являющимися точными.

Одним из способов нахождения устойчивых и сходящихся решений задач рассматриваемого класса является получение симметричной матрицы разрешающей системы алгебраических уравнений. В работе показано, что в рамках метода интегрирующих матриц реализация соответствующего алгоритма возможна при применении интерполяции Лагранжа на подходящей сетке узлов. Методика построения таких интегрирующих матриц предложена в работе Даутова Р.З. и Паймушина В.Н.

Во второй главе проведена линеаризация геометрически нелинейных уравнений теории плоских криволинейных стержней, построенных В.Н.Паймушиным и основанных на аппроксимации вектора перемещений произвольной точки поперечного сечения стержня представлением

$$\boldsymbol{U}=\left(u+z\psi-y\chi\right)\boldsymbol{t}+\left(v-z\varphi+y\gamma_2\right)\boldsymbol{n}+\left(w+y\varphi+z\gamma_3\right)\boldsymbol{b} \tag{3}$$

где $t = r' = d\boldsymbol{r} / dx, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ - единичные векторы базиса осевой линии, $\boldsymbol{r}(x)$ - уравнение осевой линии; u, v, w - перемещения точек осевой линии; ψ, χ, φ - углы поворота поперечного сечения вокруг ортов $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{t}$; γ_2 и γ_3 - функции, введённые в рассмотрение для учёта поперечных деформаций стержня.

Представлению (3) соответствует система линеаризованных уравнений нейтрального равновесия следующего вида

$$
\begin{aligned}
&f_1^* = Q_x^{*'} - S_x^* = 0, \quad f_2^* = Q_y^{*'} - S_y^* = 0,\\
&f_3^* = Q_z^{*'} = 0, \quad f_4^* = M_y^{*'} - N_z^* = 0,\\
&f_5^* = M_z^{*'} - N_y^* = 0, \quad f_6^* = M_x^{*'} - N_x^* = 0,\\
&f_7^* = S_{xy}^{*'} - T_y^* = 0, \quad f_8^* = S_{xz}^{*'} - T_z^* = 0,
\end{aligned} \tag{4}
$$

в которых введены в рассмотрение обобщённые усилия и моменты

$$
\begin{aligned}
&Q_x^* = Q_x - Q_y^0\chi - Q_y\chi^0 + Q_z^0\psi + Q_z\psi^0;\\
&\ldots\\
&N_x^* = kM_y + T_z^0\varphi + T_z\varphi^0 + \ldots + 2kS_{xz}^0\psi + 2kS_{xz}\psi^0;
\end{aligned} \tag{5}
$$

выражающиеся через указанные выше функции путём использования физических соотношений вида

$$
\begin{aligned}
&Q_x = F[g_{11}\left(u' - k\upsilon + \upsilon'^0\,\upsilon' + k^2u^0u + w'^0\,w'\right) +\\
&+g_{12}\left(\gamma_2 + \chi^0\chi + \varphi^0\varphi\right) + g_{13}\left(\gamma_3 + \psi^0\psi + \varphi^0\varphi\right)];\\
&\ldots\\
&S_{xy} = G_{12}I_z(\gamma_2' - k\chi + \gamma_2^0\gamma_2' - k\gamma_2^0\chi + \gamma_2\gamma_2'^0 - k\gamma_2\chi^0 +\\
&+\chi^0\chi' + k\chi^0\gamma_2 + \chi\chi'^0 + k\chi\gamma_2^0 + \varphi^0\varphi' + \varphi\varphi'^0).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Здесь индексом «0» обозначаются функции (докритических усилий, моментов и перемещений), которые находятся на первом этапе при решении линейной задачи о докритическом деформировании стержня. После их подстановки в (5) и (6), исходя из уравнений (4), приходим к задаче устойчивости, которая при использовании метода конечных сумм и соответствующих интегрирующих матриц сводится к квадратичной задаче на собственные значения системы однородных алгебраических уравнений вида

$$(\boldsymbol{A} + p\boldsymbol{B} + p^2\boldsymbol{C})\{\boldsymbol{X}\} = \{0\}, \tag{7}$$

Решение уравнений (4) находится итерационным способом. Для этого (7) представляется в виде

$$(\boldsymbol{A} + p_{(k)}[\boldsymbol{B} + p_{(k-1)}\boldsymbol{C}])\{\boldsymbol{X}\} = \{0\}, \tag{8}$$

где k - номер итерации. В первом приближении $(k=1)$, матричная система (7) примет вид

$$(\boldsymbol{A}+p_{(1)}\boldsymbol{B}+)\{\boldsymbol{X}\}=\{0\} \qquad (9)$$

и её найденное собственное значение $p_{(1)}$ подставляется в (8). Итерации выполняются до того момента, пока погрешность $\Delta=|(p_{(k)}-p_{(k-1)})/p_{(k)}|$ не станет меньше заданного значения. Если принять гипотезу о недеформируемости стержня в докритическом состоянии, то линеаризованные уравнения преобразуются к стандартной задаче на собственные значения (2).

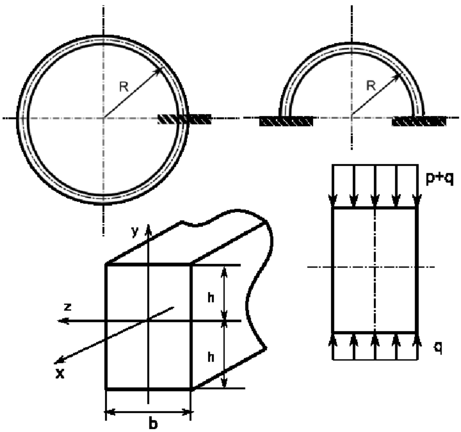


Рис.1

Путём введения безразмерных параметров

$$\varepsilon_r=\frac{h}{R},\ \ \varepsilon_h=\frac{b}{2h},\ \ r_q=2\varepsilon_r\frac{q}{p},\ \ p^*=P\frac{R^3}{g_{11}I_z}$$

анализировались ФПУ и соответствующие им критические нагрузки для арки и кольца, находящихся под действием внешнего равномерного давления и равномерного обжатия (рис.1). Установлено, что минимальной критической нагрузке соответствует изгибно-крутильная ФПУ, при реализации которой кольцо выходит из своей плоскости (превращается в «восьмёрку»). Данная ФПУ реализуется даже при $\varepsilon_h=1$, т.е. квадратном поперечном сечении стержня. Изгибно-сдвиговая ФПУ, при которой кольцо остаётся в своей плоскости, реализуется только при $\varepsilon_h=2$, т.е. прямоугольном поперечном сечении.

Проведённые вычислительные эксперименты показали, что учёт деформационных параметрических слагаемых в линеаризованных уравнениях равновесия мало влияет на величину критической нагрузки. К аналогичным выводам приводят расчёты на устойчивость кольца, выполненного из композиционных материалов с различными жесткостными характеристиками.

В третьей главе рассмотрен характерный класс тонкостенных конструкций (рис.2), представляющий собой пластину, соединённую на одной из кромок с прямолинейным стержнем. Для постановки задач устойчивости таких конструкций используются уравнения частного вида, которые можно получить исходя из общих нелинейных уравнений, построенных В.Н.Паймушиным и описывающих контактное сопряжение двух тонких оболочек ($k=1,2$) посредством дискретно расположенного стержня. Эти уравнения основаны на представлении векторов перемещений оболочек $\boldsymbol{U}^{(k)}$ и стержня $\boldsymbol{U}$ в виде

$$\boldsymbol{U}^{(k)}=u_i^{(k)}\boldsymbol{e}_i^{(k)}+w^{(k)}\boldsymbol{m}^{(k)}+z^{(k)}\left(\gamma_i^{(k)}\boldsymbol{e}_i^{(k)}+\gamma^{(k)}\boldsymbol{m}^{(k)}\right), i=k=1,2 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{U}=\left(U+z\varphi+x_1\varphi_1\right)\boldsymbol{e_1}+\left(V+z\chi+x_1\psi\right)\boldsymbol{e_2}+\left(W-x_1\varphi+z\varphi_3\right)\boldsymbol{m} \tag{11}$$

где $\boldsymbol{e}_1^{(k)},\boldsymbol{m}^{(k)}$ и $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{m}$ - единичные векторы выбранных систем координат, $u_i^{(k)},w^{(k)},\gamma_i^{(k)},\gamma^{(k)}$ - соответственно, компоненты векторов перемещений, углов поворотов нормалей и функции обжатия оболочек в направлении векторов $\boldsymbol{m}^{(k)}$; U,V,W - перемещения точек осевой линии стержня, χ,ψ,φ - углы поворота поперечных сечения, φ_1,φ_3 - функции обжатия стержня.

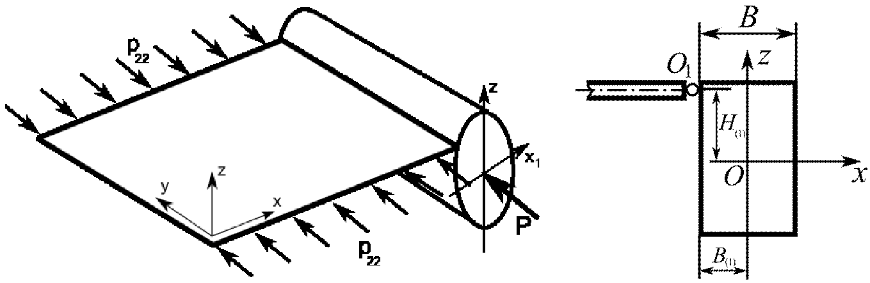


Рис.2

Предполагается, что пластина со сторонами a,L, толщиной t шарнирно опёрта на контурах $y_1=0, y_1=L$ и шарнирно соединена со стержнем на контурной линии $x_1=a$. Если пластина и подкрепляющий стержень до потери устойчивости находятся в условиях сжатия усилиями $T_{22}^0=-p_{22}, Q_y^0=-P$ в направлении y_1, система дифференциальных уравнений нейтрального равновесия, соответствующая представлениям (10), (11), после ряда упрощений будет иметь вид:

для пластины

$$
\begin{aligned}
&B_{11}\left(u,_x+\nu_{12}v,_y\right),_x+B_{12}\left(u,_y+v,_x\right),_y=0\\
&B_{12}\left(u,_y+v,_x\right),_x+B_{22}\left(v,_y+\nu_{21}u,_x\right),_y=0\\
&\left[B_{13}\left(w,_x+\gamma_1\right)-p_{11}w,_x\right],_x+\left[B_{23}\left(w,_y+\gamma_2\right)-p_{22}w,_y\right],_y=0\\
&D_{11}\left(\gamma_1,_x+\nu_{21}\gamma_2,_y\right),_x+D_{12}\left(\gamma_1,_y+\gamma_2,_x\right),_y-B_{13}\left(w,_x+\gamma_1\right)=0\\
&D_{12}\left(\gamma_1,_y+\gamma_2,_x\right),_x+D_{22}\left(\gamma_2,_y+\nu_{12}\gamma_1,_x\right),_y-B_{23}\left(w,_y+\gamma_2\right)=0;
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

для стержня

$$
\begin{aligned}
&L_1=\left(G_{12}^cF-P\right)U_{,yy}+G_{12}^cF\psi_{,y}-\Phi_{11}=0;\; L_2=E_2^cFV_{,yy}-\Phi_{12}=0\\
&L_3=\left(G_{23}^cF-P\right)W_{,yy}+G_{23}^cF\chi_{,y}-\Phi_{13}=0\\
&L_4=E_2^cJ_x\chi_{,yy}-G_{23}^cF\left(W_{,y}+\chi\right)-H_{(1)}\Phi_{12}=0\\
&L_5=E_2^cJ_z\psi_{,yy}-G_{12}^cF\left(U_{,y}+\psi\right)-B_{(1)}\Phi_{12}=0\\
&L_6=B_p\varphi_{,yy}-\left(H_{(1)}\Phi_{11}-B_{(1)}\Phi_{13}\right)=0
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

Для замыкания системы уравнений дополнительно к (12) и (13) вводятся статические и кинематические условия сопряжения на кромке $x_1=a$ и граничные условия для пластины на кромке $x_1=0$. Для приведения сформулированной задачи к одномерной для искомых функций задачи приняты представления вида:

$$u(x,y)=u_n(x)\,sin\,(n\pi y/L),\; v(x,y)=v_n(x)\,cos\,(n\pi y/L),\;\ldots,$$

которые точно удовлетворяют исходным двумерным уравнениям и сформулированным граничным условиям на кромках $y=0,\; y=L$. Для построения её численного решения используется метод конечных сумм в варианте ИМ Р.З.Даутова, согласно которому исходная задача сводится к решению задачи на собственные значения вида (2).

При действии сжимающей нагрузки на пластину без подкрепляющего стержня и на изолированный от пластины стержень возможна их потеря устойчивости только по плоской изгибно-сдвиговой (стержня) и изгибной (пластины) формам ФПУ. Крепление пластины к одной из боковых поверхностей стержня с эксцентриситетом заставляет стержень терять устойчивость по изгибно-крутильной форме. Как показывают вычисления, при $H_{(1)}\neq 0$ (крепление пластины к стержню с эксцентриситетом) в конструкции реализуются ФПУ, когда стержень теряет устойчивость по неклассической изгибно-крутильной форме. Анализ результатов расчетов показывает, что для рассматриваемой конструкции возможна реализация ФПУ, характеризующихся:

-плоской изгибно-крутильной ФПУ стержня, когда его деформированная ось представляет собой плоскую (или почти плоскую) кривую, лежащую в одной из главных плоскостей инерции стержня, совпадающей с одной из его координатных плоскостей с величиной угла закручивания φ, имеющей тот же порядок, что и другие функции перемещений и углов поворота стержня;

- пространственной изгибно-крутильной ФПУ стержня, когда его деформированная ось представляет собой пространственную кривую с порядком величины угла закручивания, соизмеримым с функциями перемещений точек осевой линии стержня или его углов поворота.

В четвёртой главе исходя из основных соотношений, описывающих в рамках представлений (10) и (11) контактную постановку нелинейных задач механики оболочек, соединённых по торцевых сечениям плоским криволинейным стержнем (Паймушин В.Н. ПММ,2014, Т.78, №1, С.125-144), построены линеаризованные уравнения нейтрального равновесия тонкостенных конструкций исследуемого класса. В них наряду с докритическими усилиями сохранены также все деформационные параметрические слагаемые. Полученная система соотношений, содержащая в общем случае 36 двумерных и одномерных неизвестных, состоит из:

- дифференциальных уравнений нейтрального равновесия сопрягаемых оболочек;
- дифференциальных уравнений нейтрального равновесия шпангоута;
- статических граничных условий для оболочек, являющихся статическими условиями их сопряжения со шпангоутом;
- кинематических условий сопряжения оболочек со шпангоутом;
- статических или кинематических граничных условий в других торцевых сечениях оболочек.

На основе выведенных уравнений сформулированы задачи устойчивости конструкций, представляющих собой две оболочки вращения с произвольными формами меридианов, соединяемых по торцевым сечениям посредством кругового шпангоута. Одна из таких конструкций представляет собой две цилиндрические оболочки различного диаметра, соединённых через кольцевой шпангоут (рис.3).

У таких конструкций одной из криволинейных координат является угловая координата θ $(0 \le \theta \le 2\pi)$. Поэтому в предположении об осесимметричности действующей на конструкцию внешней нагрузки все неизвестные задачи, описывающей её возмущённое равновесие, ищутся в виде

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_i\,(x^{(k)}) sin i\pi\theta + \tilde{\boldsymbol{u}}_i\,(x^{(k)}) cos i\pi\theta \qquad (14)$$

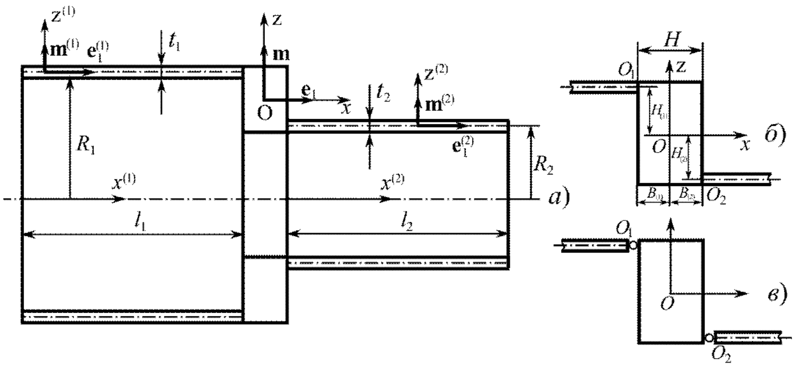


Рис.3

где $\boldsymbol{u}$ - вектор, элементами которого являются искомые неизвестные функции. В центре тяжести поперечного сечения кольца, имеющего площадь поперечного сечения F, введены в рассмотрение декартовые координатные оси x, z, являющиеся главными центральными осями. В точках O_1, O_2, имеющих координаты $B_{(k)}, H_{(k)}$ (рис.3б), считаем соединения оболочек с кольцом или абсолютно жесткими (рис. 3б), или шарнирными (рис. 3в).

Для редукции сформулированной задачи к интегро-алгебраическим уравнениям введены в рассмотрение вектор-функции

$$s_{j,j=1,2}^{(k)} = (S_{j1}^{(k)}, S_{j2}^{(k)}, S_{j3}^{(k)}, H_{j1}^{(k)}, H_{j2}^{(k)}, H_{j3}^{(k)}), \quad s_1^{(k)+} = s_1^{(k)}\Big|_{x^{(k)}=0}, \quad s_1^{(k)-} = s_1^{(k)}\Big|_{x^{(k)}=l_k}$$

$$s_3^{(k)} = (0, \frac{S_{23}^{(k)}}{R_k}, -\frac{S_{22}^{(k)}}{R_k}, -N_{13}^{(k)}, \frac{H_{23}^{(k)}}{R_k} - N_{23}^{(k)}, \frac{H_{22}^{(k)}}{R_k} - N_{33}^{(k)})$$

$$s^* = (0, Q_z^*, -Q_y^*, -RN_z^*, -RN_y^*, -RN_x^*, -RT_x^*, -RT_z^*)$$

$$s_\theta^* = (Q_x^*, Q_y^*, Q_z^*, M_x^*, M_y^*, M_z^*, S_{yx}^*, S_{yz}^*)$$

$$s_q = (-X_1^q, -X_2^q, -X_3^q, -m_x^q, -m_y^q, -m_z^q, -t_1^q, -t_3^q)$$

$$\Phi^{(k)} = (\Phi_{11}^{(k)}, \Phi_{12}^{(k)}, \Phi_{13}^{(k)}, R_{11}^{(k)}, R_{12}^{(k)}, R_{13}^{(k)})$$

$$U = (U, V, W, \psi, \chi, \varphi, \varphi_1, \varphi_2)$$

$$u^{(k)}=(u_1^{(k)},u_2^{(k)},w^{(k)},\gamma_1^{(k)},\gamma_2^{(k)},\gamma^{(k)}),\quad u_+^{(k)}=u^{(k)}\Big|_{x^{(k)}=0},\quad u_-^{(k)}=u^{(k)}\Big|_{x^{(k)}=l_k}$$

При их использовании в случае жесткого соединения оболочек с кольцом соотношения сформулированной краевой задачи представлены в матричном виде ($x^{(k)}$ – меридиональные координаты оболочек)

$d_{x^{(k)}}\, s_1^{(k)}+R_k^{-1}d_\theta\, s_2^{(k)}+s_3^{(k)}=0$ (уравнения равновесия оболочек)

$d_\theta\, s_\theta^{*}+s^{*}+R\, s_q=0$ (уравнения равновесия шпангоута)

$\boldsymbol{\Gamma}^{(k)}\, u^{(k)}\Big|_{x^{(k)}=(k\text{-}1)l_k}-(E-\boldsymbol{\Gamma}^{(k)})\, s_1^{(k)}\Big|_{x^{(k)}=(k\text{-}1)l_k}=0$ (граничные условия для оболочек) (15)

$s_1^{(k)}\Big|_{x^{(k)}=(\bar{k}\text{-}1)l_k}=\Phi^{(k)},\ u^{(k)}\Big|_{x^{(k)}=(\bar{k}\text{-}1)l_k}=N^{(k)}\,U$

(статические и кинематические условия сопряжения оболочек со шпангоутом).

После стандартных преобразований сформулированная задача (15) приведена к интегральному виду, которая при использовании представления (14) и метода конечных сумм сводится к системе алгебраических уравнений вида (2), если в уравнениях устойчивости не учитываются докритические деформационные параметрические слагаемые, или к виду (7), если они учитываются.

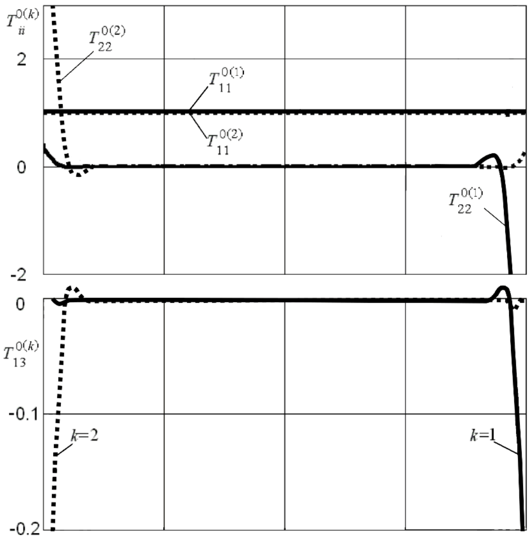
Алгоритм численного решения задачи реализован в среде MATLAB в виде соответствующего программного обеспечения, позволяющего определить докритическое напряженно-деформированное состояние (НДС) и параметр критической нагрузки m при произвольном виде осесимметричного нагружения элементов рассматриваемой конструкции, разных видах закрепления или нагружения торцевых сечений $x^{(1)}=0$ и $x^{(2)}=l_2$ оболочек, соединяемых со стержнем в сечениях $x^{(1)}=l_1$ и $x^{(2)}=0$ жестко или шарнирно. На основе разработанного метода проведено исследование всех возможных ФПУ конструкции, показанной на рис.3 и имеющей

$$R_1=R+(H+t)/2,\ R_2=R-(H+t)/2,\ H_1=(H+t)/2$$
$$H_2=-(H+t)/2,\ B_{(1)}=-B/2,\ B_{(2)}=B/2$$

Если торцевое сечение $x^{(1)}=l_1$ первой оболочки у рассматриваемой конструкции закреплено, а к торцевому сечению $x^{(2)}=l_2$ второй оболочки приложено погонное растягивающее усилие P , то в силу условия $R_1>R_2$ соединяющий оболочки шпангоут будет подвергаться действию погонного крутящего момента. При этом в окрестности шпангоута в первой оболочке, кроме усилия $T_{11}^{0(1)}$, будет формироваться окружное усилие сжатия $T_{22}^{0(1)}$, а во второй оболочке, кроме $T_{11}^{0(2)}$, – окружное усилие растяжения $T_{22}^{0(2)}$ (рис.4). В шпангоуте главным оказывается формирующийся в поперечном сечении погонный внутренний изгибающий момент относительно оси z, являющийся причиной потери устойчивости изолированного шпангоута по изгибно-сдвиговой форме с параметром волнообразования $i^* = 2$.

Для оболочек, жестко соединенных со шпангоутом, на первых двух фрагментах рис. 5 приведены графики зависимостей критических усилий P^* (сплошные кривые), $\tilde{P}^*$ (штриховые), углов поворотов φ (штрихпунктирные) поперечного сечения шпангоута вокруг осевой линии и прогибов W (пунктирные) от параметра H. Критическая нагрузка P^* соответствует удержанию в уравнениях устойчивости всех параметрических слагаемых, содержащих параметры докритического НДС $T_{11}^{0(k)},...,M_{13}^{0(k)}$; $\tilde{P}^*$ соответствует постановке задачи, когда в разрешающих уравнениях, составляемых для оболочек, полагается $T_{11}^{0(k)} = 0,...,M_{13}^{0(k)} = 0$.

Имеют место такие значения параметра H, при которых критические усилия P^* и $\tilde{P}^*$ достигают как максимальных, так и минимальных значений.



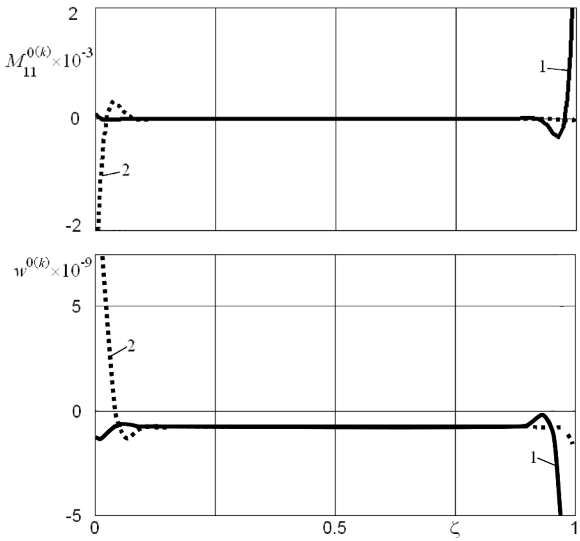


Рис.4

Практически при всех параметрах H ФПУ является пространственной, смешанной изгибно-крутильной. К потере устойчивости конструкции главным образом в рассматриваемом случае приводит формирование в оболочке большего радиуса окружных усилий T_{22}^{0}, а в шпангоуте – погонного изгибающего момента M_{y}^{0} и усилия обжатия T_{z}^{0}.

С целью иллюстрации на нижнем фрагменте рис.5 приведены графики изменения функций P^{*}, $\tilde{P}^{*}$, φ и W в зависимости от параметра H для конструкции с параметром $L = 1 м$, имеющей шарнирное соединение оболочек со шпангоутом.

Проведены также исследования устойчивости рассматриваемой конструкции с учётом деформационных параметрических слагаемых в уравнениях. Показано, что их учёт может привести к многократному снижению определяемой величины критической нагрузки.

На основе разработанного метода проведено также исследование всех возможных ФПУ для оболочечно-стержневой конструкции «цилиндрическая оболочка - шпангоут – сферическая оболочка» (рис.6). Рассмотрен случай нагружения конструкции внутренним давлением, при котором главный вектор внешних сил, действующих на сферическую оболочку, вызывает нагружение шпангоута погонным крутящим моментом. При этом в оболочках возникает докритическое НДС такого же вида, что и в конструкции «цилиндрическая оболочка - шпангоут - цилиндрическая оболочка» (рис.4).

Результаты численных экспериментов показали, что круговой шпангоут в составе рассматриваемой конструкции (рис.6) в большинстве расчётных случаев теряет устойчивость по изгибно-крутильной ФПУ, а учёт деформационных параметрических слагаемых в исходных уравнениях нейтрального равновесия также может привести к многократному снижению величины критической нагрузки.

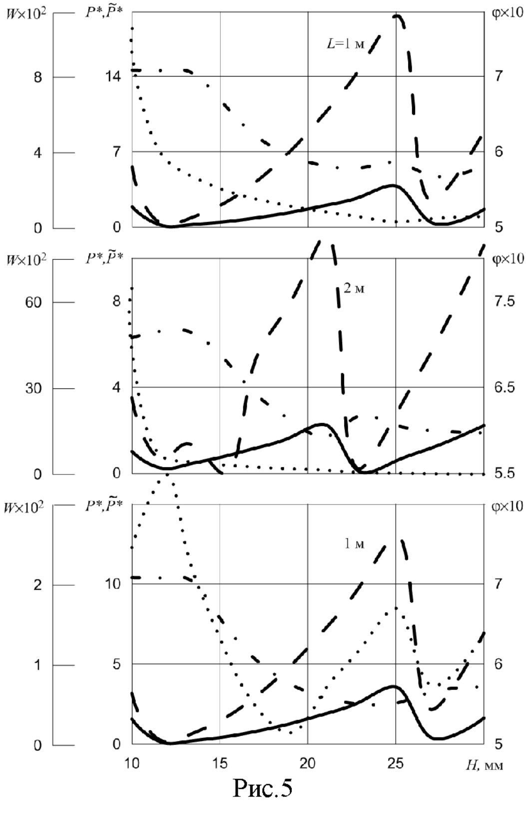


Рис.5

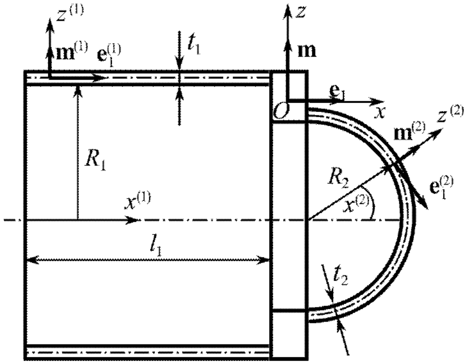


Рис.6

ОСНОВЫНЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Исходя из уточнённых геометрически нелинейных уравнений теории стержней, оболочек и оболочечно-стержневых конструкций, предложенных В.Н.Паймушиным, построены линеаризованные уравнения для исследования всех возможных «классических» и «неклассических» ФПУ упругих стержней и оболочечно-стержневых конструкций с учётом параметров их докритического деформирования.
2. Сформулирована задача о неклассических ФПУ прямолинейного стержня при действии на него сжимающей силы совместно с крутящим моментом и разработан алгоритм её численного решения методом конечных сумм. Показано, что из трёх используемых вариантов ИМ, лежащих в основе метода конечных сумм (ИМ М.Б.Вахитова, ИМ В.А.Фирсова, ИМ Р.З.Даутова), к устойчивым численным решениям задач рассматриваемого класса приводит использование интегрирующих матриц Р.З.Даутова.
3. Исходя из выведенных линеаризованных уравнений общего вида и метода конечных сумм в варианте ИМ Р.З.Даутова разработан численный метод исследования плоского криволинейного стержня (кольца и арки) с учётом деформационных параметрических слагаемых при действии произвольной системы внешних сил. На его основе выявлена неклассическая пространственная изгибно-крутильная ФПУ кольца или арки при действии на них внешнего давления или обжатия в радиальном направлении. Показано, что учёт деформационных параметрических слагаемых в исходных уравнениях слабо влияет на величину параметра критической нагрузки.
4. Исходя из нелинейных уравнений, соответствующих контактной постановки задач механики оболочек, соединённых по торцевых сечениям плоским криволинейным стержнем, выведены линеаризованные уравне-

ния упругой устойчивости пластины, подкреплённой на одном из торцов прямолинейным стержнем. Для такой пластины, находящейся в условиях одноосного сжатия силами, приложенными к двум противоположным шарнирно опёртым кромкам, на основе метода конечных сумм в варианте ИМ Р.З.Даутова разработан численный метод решения соответствующей задачи устойчивости. На основе него выявлены и исследованы все возможные ФПУ (в том числе неклассическая изгибно-крутильная ФПУ) стержня, реализующиеся в составе рассматриваемой конструкции.

5. На основе линеаризованных уравнений устойчивости оболочечно-стержневой конструкции общего вида разработан численный метод решения задач устойчивости конструкций, представляющих собой две оболочки вращения с произвольными формами меридианов, соединяемых по торцевым сечениям посредством кругового шпангоута и находящихся в условиях осесимметричного нагружения. На его основе выявлены и всесторонне исследованы все возможные «классические» и «неклассические» ФПУ оболочечно-стержневых конструкций в виде:
   - двух цилиндрических оболочек с различными радиусами срединных поверхностей, соединённых посредством кольцевого шпангоута и подвергающихся растяжению в осевом направлении;
   - цилиндрической и сферической оболочек с различными радиусами срединных поверхностей, соединённых посредством кольцевого шпангоута и подвергающихся внутреннему давлению. При указанных видах нагружения, даже при включении в «работу» примыкающих оболочек, в кольцевом шпангоуте реализуется пространственная изгибно-крутильная ФПУ (глава 2). Показано, что учёт деформационных параметрических слагаемых в исходных уравнениях нейтрального равновесия приводит к многократному снижению величины критической нагрузки.
6. На основе разработанных уточнённых математических моделей и их численной реализации с использованием ИМ Р.З.Даутова создан комплекс проблемно-ориентированных программ и проведена серия вычислительных экспериментов по исследованию изучаемых физических явлений.

СПИСЛК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

В рецензируемых журналах из перечня ВАК и высокорейтинговых изданиях, индексируемых в базах данных «Сеть науки» (Web of Science) или «Скопус» (Scopus):

1. Иванов В.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Полякова Н.В., Фирсов В.А., Холмогоров С.А.. Точные аналитические и численные решения задач устойчивости прямого композитного стержня при осевом сжатии с

кручением. Механика композитных материалов. 2009. Т.45, № 2. С.167-200.
2. Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А.. О неклассических формах потери устойчивости соединенных шпангоутом цилиндрических оболочек при некоторых видах нагружения. Прикладная математика и механика. 2014. Т.78. Вып.4. С.557-575.
3. Булашов Д.А., Луканкин С.А., Холмогоров С.А. Классификация математических моделей многослойных оболочек по геометрическим параметрам. Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева.- Казань, Изд-во Казанск. гос. тех. ун-та, №1, 2008. С.44-48.
4. Закиров И.И., Закиров И.М., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Осреднённые упругие и прочностные характеристики сотового заполнителя теоретико-экспериментальный метод их определения. Механика композитных материалов. 2012. Т.48. Вып.5. С.745-764.

В прочих изданиях:

5. Луканкин С.А., Полякова Н.В., Холмогоров С.А. Численное исследование неклассических форм потери устойчивости прямых и криволинейных стержней при различных видах их нагружения и закрепления торцевых сечений. Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек. – Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2008. С.88-89
6. Иванов В.А., Коноплев Ю.Г., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Саченков А.А., Фирсов В.А., Холмогоров С.А. О численных и точных аналитических решениях задач устойчивости прямого стержня при осевом сжатии с кручением. Материалы XIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им.А.Г.Горшкова. Т.1, М.: 2008. С.100-103
7. Луканкин С.А., Полякова Н.В., Холмогоров С.А. Численные решения неклассических задач о потери устойчивости плоских криволинейных стержней при различных видах их нагружения и закрепления торцевых сечений. Материалы XV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им.А.Г.Горшкова. Т.1, М.: 2009. С.108-109
8. Карпиков Ю.А., Луканкин С.А., Холмогоров С.А. Численные исследования классических и неклассических форм потери устойчивости прямоугольной пластины, имеющей на одной из кромок подкрепление в виде прямолинейного стержня. Проблемы нелинейной механики твёрдого деформируемого тела: Труды Второй международной конференции. Казань: Казан.гос.ун-т, 2009. С. 254-256
9. Луканкин С.А., Холмогоров С.А. Численные исследование неклассической изгибно-крутильной формы потери устойчивости в композитных плоских криволинейных стержнях. Проблемы нелинейной механики

твёрдого деформируемого тела: Труды Второй международной конференции. Казань: Казан.гос.ун-т, 2009. С. 256-258
10. Карпиков Ю.А, Луканкин С.А., Полякова Н.В., Холмогоров С.А. Численное решение задач об устойчивости пластины и шарнирно соединённого с ней прямолинейного стержня. Материалы XVI международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им.А.Г.Горшкова. Т.2. – Ч.: ГУП «ИПК «Чувашия»», 2010. С. 264.
11. Газизуллин Р.К., Карпиков Ю.А., Холмогоров С.А. Численное исследование форм потери устойчивости конструкции пластина-стержень алгоритмами высокого порядка точности. Материалы VII Школы-семинара молодых учёных и специалистов академика РАН В.Е.Алемасова. Казань: Исследовательский центр проблем энергетики КазНЦ РАН, 2010.- С.350.
12. Газизуллин Р.К., Карпиков Ю.А., Холмогоров С.А. Численное исследование неклассических форм потери устойчивости композитных плоских криволинейных стержней с учётом докритических деформаций и углов поворота. Материалы VII Школы-семинара молодых учёных и специалистов академика РАН В.Е.Алемасова. Казань: Исследовательский центр проблем энергетики КазНЦ РАН, 2010.- С.369-370.
13. Газизуллин Р.К., Карпиков Ю.А., Холмогоров С.А. Высокоточный алгоритм численного исследования неклассических форм потери устойчивости плоских криволинейных стержней. Материалы VII Школы-семинара молодых учёных и специалистов академика РАН В.Е.Алемасова. Казань: Исследовательский центр проблем энергетики КазНЦ РАН, 2010.- С.371-372.
14. Луканкин С.А., Карпиков Ю.А., Полякова Н.В., Холмогоров С.А. Метод интегрирующих матриц в задачах устойчивости плоских криволинейных стержней. Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. Т.1. - М.: ООО «ТР-принт», 2011. С. 132-133.
15. Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Численное исследование устойчивости тонких оболочек вращения, сопряжённых через кольцевой шпангоут. Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. Т.1. - М.: ООО «ТР-принт», 2011. С. 157-159.
16. Карпиков Ю.А., Холмогоров С.А. Численное исследование устойчивости композитной конструкции, состоящей из тонких оболочек вращения, сопряжённых через кольцевой шпангоут. Материалы XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным при-

кладным программным системам (ВМСППС'2011), 25-31 мая 2011г., Алушта. - М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. С.432-433
17. Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Неклассические формы потери устойчивости при растяжении двух соосных цилиндрических оболочек, соединяемых через шпангоут. Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г.Горшкова., - М: ООО «ТР-принт», 2012 т.2. С. 64-67.
18. Паймушин В.Н., Луканкин С.А., Холмогоров С.А. Исследование неклассических форм потери устойчивости двух соосных цилиндрических оболочек, соединённых через шпангоут, с учётом деформационных параметрических слагаемых. Материалы XIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им.А.Г.Горшкова. Т.2. – М.: ООО «ТР-принт», 2013. С.119-123.
19. Бадриев И.Б., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Определение критических нагрузок и форм потери устойчивости составных оболочечно-стержневых конструкций при произвольных видах нагружения // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ: РОСПАТЕНТ, 2014, № 2014619079 от 08.09.2014.