

Аль-Хассани Мудхар Аббас Маджид

**ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА В
МНОГООБРАЗИЕ НЕВЫРОЖДЕННЫХ НУЛЬ-ПАР ПРОЕКТИВНОГО
ПРОСТРАНСТВА**

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре «Высшей математики» ФГАОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, профессор
Ивлев Евгений Тихонович.

Официальные оппоненты: Шелехов Александр Михайлович.
доктор физико-математических наук, профессор кафедры
функционального анализа и геометрии ФГБОУ ВПО
«Тверской государственной университет».

Банару Михаил Борисович.
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
математики и информатики ФГБОУ ПО «Смоленский
государственный университет», СмолГУ.

Ведущая организация: ФГАОУ ВПО «Балтийский федеральный университет имени
Иммануила Канта».

Защита состоится «18» июня 2015 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного
совета: Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный
университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35, Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ
ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул.
Кремлевская, 35.

Автореферат разослан « » марта 2015 г. и размещен на официальном сайте Казанского
(Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,
кандидат физ.-мат. Наук, доцент,

Е. К. Липачев

§1. Общая характеристика работы

1.1. Актуальность темы

1.1.1. Как известно [7], дифференциально-геометрические структуры на погруженных многообразиях играют существенную роль при исследовании внутренней геометрии этих многообразий.

В соответствии с [11] к внутренней геометрии погруженного многообразия относятся все геометрические и аналитические конструкции, которые формулируются в терминах геометрических объектов, охваченных компонентами внутреннего фундаментального геометрического погруженного многообразия. При этом, как указывается в [11, с. 349], всякое поле локальных геометрических объектов погруженного многообразия, охваченное одним из полей его фундаментальных объектов, является полем, инвариантно присоединённым к этому многообразию.

С развитием новых методов дифференциально-геометрических исследований и в особенности метода Г.Ф. Лаптева [11] происходит расширение объектов исследований по указанным структурам. В соответствии с [13, с. 275] и [7] дифференциально-геометрической структурой на дифференцируемом многообразии M_n называется заданное на этом многообразии поле геометрического объекта, присоединённого к некоторой группе Ли G . Этот геометрический объект называется структурным объектом дифференциально-геометрической структуры, причем всякая G -структура является дифференциально-геометрической структурой. Следует отметить, что всякое оснащенное многообразие так же относится к многообразиям с заданным полем дифференциально-геометрической структуры. Современное положение теории оснащенных многообразий, включенных в общую теорию G -структур и в теорию пространств со связностью, достаточно подробно изложено Столяровым А.В. в [22]. Здесь же отмечается, что геометрия оснащенных многообразий практически неисчерпаема.

1.1.2. Не менее важной проблемой в теории дифференциально-геометрических структур является проблема изучения этих структур для дифференцируемых отображений. Достаточно полный обзор работ по теории дифференцируемых отображений приведен в [19] и [20]. При этом в обзоре [19] приведены работы по дифференциальной геометрии точечных отображений пространств равной размерности (проективных, аффинных, евклидовых). Несколько работ, посвященных отображениям плоскостей, в двадцатые годы 20 века отражено в книге [27]. Дальнейшее развитие исследований точечных отображений преимущественно связано с характеристическими направлениями, рассмотренными Боровкой в [25]. Как следует из [19] и [20], значительное расширение точечных отображений с конца сороковых годов 20 столетия происходит благодаря фундаментальным работам Чеха. С 1957 г дальнейшее развитие точечных отображений получило благодаря работам итальянских, чехословацких и румынских геометров, отражённым в обзорах [19] и [20]. В библиографии, приведенной Швецем в [31], отражены работы по точечным отображениям, вышедшие до 1959 г. Среди отечественных работ по указанным отображениям особое место занимают интересные результаты, полученные А. П. Норденом, Рыжковым В.В. и его учениками, Базылевым В.Т., так же отраженным в обзорах [19] и [20].

1.1.3. Наряду с точечными отображениями пространств изучаются так же и двойственные отображения точечного пространства в многообразия линейных подпространств. Такие отображения рассматривались Сегре [28] и [29], Бартолотти [24] и Сперанца [30]. К этим отображениям относится и статья [8].

Следует заметить, что в текущем столетии появляются не много работ по точечным и двойственным дифференцируемым отображениям пространств. К таким работам можно отнести работы [4] – [6] и [8].

Во всех отмеченных статьях по дифференцируемым отображениям пространств не рассматривались точечные отображения пространств в многообразия невырожденных нуль-пар проективных пространств. В связи с этим возникает необходимость изучения дифференцируемого отображения

$$f_m^{2n} : Q_m \rightarrow M^{2n}$$

аффинного пространства Q_m размерности m в $2n$ -мерное многообразие M^{2n} всех невырожденных нуль-пар, ассоциированное с n -мерным проективным пространством P_n . Интерес к этому отображению объясняется еще и ниже следующими соображениями.

1) С отображением f_m^{2n} всегда ассоциируются точечное $V_{m,n}^1$ и двойственное (тангенциальное) $V_{m,n}^2$ отображения пространств Q_m и P_n^* (P_n^* двойственно P_n).

2) Многообразии M^{2n} , ассоциированное с пространством P_n , представляет несомненный интерес с геометрической точки зрения, поскольку в этом пространстве с учетом принципа двойственности любой геометрический результат, имеющий место для точек, будет иметь место и для гиперплоскостей пространства P_n , не проходящих через соответствующие точки.

3) С многообразием M^{2n} инвариантным образом ассоциируются хорошо известные в литературе аффинные связности, которые можно использовать для дополнительной геометрической интерпретации полей геометрических образов, определяемых компонентами внутреннего фундаментального геометрического объекта отображения f_m^{2n} в смысле [11] и [12].

4) Выбор аффинного пространства Q_m в отображении $f_m^{2n} : Q_m \rightarrow M^{2n}$ обосновывается в соответствии с [18, §82, с. 369] тем, что оно может быть принято за касательное пространство в текущей точке некоторого дифференцируемого многообразия размерности m .

1.2. Цель работы

Целью диссертации является решение следующих задач:

1. Доказать, что в общем случае при точечном отображении $V_{m,n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$ и тангенциальном отображении $V_{m,n}^2 : Q_m \rightarrow P_n^*$ инвариантным образом определяется отображение $f_m^{2n} : Q_m \rightarrow M^{2n} = P_n \times P_n^*$.

2. Провести геометрическую классификацию отображений f_m^{2n} при всех возможных значениях чисел m и n ($m \leq n, m > n, m \leq 2n, m > 2n$), т.е. выяснить поведение в общем случае полей инвариантных геометрических образов, определяемых компонентами внутреннего фундаментального геометрического объекта отображения f_m^{2n} при указанных значениях m и n .

3. Провести аналитическую и геометрическую классификацию отображений $V_{m,n}^{(r)1}, V_{m,n}^{(r)2}$ и $f_m^{(r)2n}$ ранга $r \leq \min(m, n)$ при указанных значениях m и n . Здесь r – ранг основных матриц размера $m \times n$ из компонент соответствующих внутренних фундаментальных геометрических объектов первого порядка указанных отображений.

1.3. Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Проведена в общем случае достаточно полная геометрическая и аналитическая классификация отображений f_m^{2n} при всех возможных значениях чисел m и n .

2. Доказано существование отображений $V_{m,n}^{(r)1}, V_{m,n}^{(r)2}$ и $f_m^{(r)2n}$ ранга $r < \min(m, n)$ с указанием соответствующих геометрических характеристик. Указано геометрическое построение отображения $f_m^{(r)2n}$.

3. Доказана новая геометрическая интерпретация характеристических направлений отображений $V_{m,n}^1$ и $V_{m,n}^2$ при всех r , удовлетворяющих условиям $1 < r \leq \min(m, n)$.

В диссертации приведены доказательства всех основных предложений, сформулированных в виде теорем.

1.4. Научные положения, выносимые на защиту

1. Точечное $V_{m,n}^1: Q_m \rightarrow P_n$ и тангенциальное $V_{m,n}^2: Q_m \rightarrow P_n^*$ отображения в общем случае инвариантным образом индуцируют отображение $f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M^{2n}$ при всех допустимых значениях m и n .

2. Новая геометрическая интерпретация характеристических направлений отображений $V_{m,n}^1$ и $V_{m,n}^2$ при всех допустимых значениях m и n .

3. Аналитическая и геометрическая характеристика классификации отображения f_m^{2n} при всех допустимых значениях m и n с помощью полей инвариантных геометрических образов и инвариантных ассоциированных связностей.

4. Классификация отображений $V_{m,n}^{(r)}$, $V_{m,n}^{(r)}$ и $f_m^{(r)2n}$ ранга $r < \min(m, n)$ при всех указанных значениях m и n с доказательством геометрических характеристик, теорем существования и геометрическим построением отображений $f_m^{(r)2n}$.

1.5. Основные методы исследования

В диссертации используются инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований:

1. Метод продолжений и охватов Г.Ф. Лаптева [11].
2. Метод внешних дифференциальных форм Э. Картана [23].
3. Метод канонизации подвижного репера погруженного многообразия Н. М. Остиану [16].
4. Некоторые фрагменты метода нормализации А. П. Нордена [14].

Использование указанных методов позволило ввести в рассмотрение те геометрические факты, которые связаны с дифференциальными окрестностями образующих элементов исследуемых многообразий до третьего порядка включительно. Все рассмотрения проводятся с локальной точки зрения. При этом встречающиеся функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми. Заметим, что результаты по геометрии отображений $f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M^{2n}$ получены с применением фактов дифференциально-геометрических исследований в смысле Г. Ф. Лаптева [11].

1.6. Теоретическая и практическая значимость.

Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение и могут быть использованы при геометрическом и аналитическом изучении дифференцируемых отображений многообразий, оснащенных полями некоторых линейных структур.

Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в спецкурсах для студентов и научных работах для аспирантов по геометрии дифференцируемых отображений погруженных многообразий.

1.7. Апробация

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. На международной научно-практической конференции «Наука в современном информационном обществе» (Москва, Россия), 2013г.
2. На VIII всероссийском смотре-конкурсе научных и творческих работ иностранных студентов и аспирантов вузов (Томск, Россия), 2014г.
3. На научном семинаре кафедры высшей математики Томского политехнического университета (2010 – 2014 г.г.).
4. На геометрическом семинаре им. Н.Г. Туганова при кафедре геометрии Томского

государственного университета (2014 г.).

1.8. Публикации. Основные научные результаты, включенные в диссертацию, опубликованы в 8 работах [32] – [39], пять из которых опубликованы в журнале « Известия Томского политехнического университета», включенного в список ВАК^а.

1.9. Вклад автора в разработку избранных проблем

Диссертация является самостоятельным исследованием автора.

В семи опубликованных в соавторстве работ результаты получены в основном самим автором.

1.10. Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Объем диссертации составляет 153 страниц, а список литературы содержит 122 наименования.

§2. Краткое содержание диссертации

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, представлена цель исследования, научная новизна, практическая значимость, положения, выносимые на защиту, апробация результатов работы, структура и объем диссертации.

2.1. В первой главе изучаются точечные и тангенциальные дифференцируемые отображения m -мерных аффинных Q_m и n -мерных проективных P_n и P_n^* пространств, с которыми инвариантным образом ассоциируется дифференцируемое отображение аффинного пространства в многообразии всех невырожденных нуль-пар проективного пространства $M^{2n} = P_n \times P_n^*$.

2.1.1. В §1 аффинное пространство Q_m и проективное пространство P_n относятся к подвижному аффинному $Q = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\} (a = \bar{1}, \bar{m})$ и проективному $P = \{\bar{A}_I\} (I = \bar{0}, \bar{n})$ реперам с соответствующими деривационными формулами и структурными уравнениями. В этом же параграфе приводятся следующие дифференцируемые отображения, изучаемые в данной главе:

1) Точечное отображение $V_{m,n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$, которое каждой точке $B \in Q_m$ в проективном пространстве P_n сопоставляет вполне определенную точку $A_0 \in P_n$.

2) Тангенциальное отображение $V_{m,n}^2 : Q_m \rightarrow P_n^*$, которое каждой точке $B \in Q_m$ сопоставляет в P_n^* вполне определенную гиперплоскость $L_{n-1} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n) \subset P_n$, не проходящей через аналитическую точку \bar{A}_0 , соответствующую геометрической точке A_0 .

Здесь символ $L_{s-1} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s)$ означает $(s-1)$ -мерную плоскость $((s-1)$ -плоскость) пространства P_n , проходящую через линейно независимые аналитические точки (или псевдовекторы в смысле [15, §17, с. 59 – 60]) $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s$ этого пространства.

3) Отображение $f_m^{2n} : Q_m \rightarrow M^{2n} = \{A_0, L_{n-1}\}$, $A_0 \notin L_{n-1}$, которое каждой точке $B \in Q_m$ сопоставляет вполне определенную невырожденную нуль-пару $\{A_0, L_{n-1}\}$ $2n$ -мерного многообразия $M^{2n} = P_n \times P_n^*$.

Выводятся дифференциальные уравнения каждого отображения 1) – 3), которым удовлетворяют компоненты соответствующих внутренних фундаментальных геометрических объектов Γ_1^τ и Γ_2^τ ($\tau = \bar{1}, \bar{3}$) первого и второго порядков в смысле Г.Ф. Лаптева [11] и [12].

В данном параграфе отмечается, что при m и n , удовлетворяющих каждому из соотношений ($m = n$, $m < n$, $m > n$), решаются следующие задачи:

1) С отображением $V_{m,n}^1$ инвариантным образом ассоциируются отображения $V_{m,n}^2$ и f_m^{2n} .

2) С отображением $V_{m,n}^2$ инвариантным образом ассоциируются отображения $V_{m,n}^1$ и f_m^{2n} .

2.1.2. В §2 решается указанная задача 1 в случае $m = n$.

Точке $B \in Q_n$ в соответствующем при отображении $V_{n,n}^1 : Q_n \rightarrow P_n$ проективном пространстве P_n сопоставим гиперплоскость $y \in A_0$. Тогда каждой точке $B \in Q_n$ и соответствующей гиперплоскости $y \subset P_n$ отвечает гиперплоскость

$$U_{n-1}(y) = \{u = (\bar{B}, \bar{\epsilon}_a)u^a \in Q_n \mid V_{n,n}^1(u) \in y\} \subset Q_n.$$

Пусть характеристикой $\text{Ch}\{(U_{n-1}(y))_v\}$ этой гиперплоскости вдоль направления $v \in Q_n$, т.е. пересечением $U_{n-1}(y)$ со своей бесконечно-близкой первого порядка, будет $(n-2)$ -плоскость $U_{n-2}(y, v) \subset Q_n$. Обозначим $\tilde{U}_{n-1}(y, v, \lambda)$ – пучок гиперплоскостей в Q_n , проходящих через $U_{n-1}(y)$ и пучок гиперквадрик

$$Q_{n-1}^2(y; \lambda) = \{v \in Q_n \mid v \in \tilde{U}_{n-1}(y; v; \lambda)\} \subset Q_n.$$

Тогда каждой гиперплоскости $y \subset P_n$, соответствующей точке $B \in Q_n$, отвечает в P_n гиперконус $\tilde{K}_{n-1}^2(y)$ второго порядка с вершиной в точке A_0 – образ асимптотического гиперконуса $K_{n-1}^2(y) \subset Q_n$ гиперквадрик $Q_{n-1}^2(y; \lambda)$. Следовательно, полярной направления $z \in P_n$, отвечающего точке $B \in Q_n$, относительно $\tilde{K}_{n-1}^2(y)$ будет гиперплоскость, которую обозначим \tilde{y} . В итоге каждой точке $Z \in z$, соответствует пучок проективных преобразований $\Pi(\lambda, z)$ пространстве P_n , такой, что \tilde{y} является неподвижной при всех $\Pi(\lambda, z)$.

Оказывается, что на каждой прямой $z \in P_n$ существует по одной точке $G(z)$ не совпадающей с A_0 , в которой след преобразования $\Pi(\lambda, z)$ нулевой независимо от λ . Поэтому точке $B \in Q_n$ в проективном пространстве P_n отвечает гиперплоскость L_{n-1} ; $A_0 \notin L_{n-1}$, проходящая через точки $G(z)$ всех направлений z .

Таким образом, в случае $m = n$ имеют место следующая теорема – С каждым невырожденным отображением $V_{n,n}^1$ в общем случае инвариантным образом ассоциируется отображение $V_{n,n}^2 : Q_n \rightarrow P_n$ а, следовательно, и отображение

$$f_n^{2n} : Q_n \rightarrow M^{2n}, \quad M^{2n} = \{A_0; L_{n-1}\},$$

2.1.3. §3 посвящен решению аналогичной параграфу 2 задачи для отображения $V_{m,n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$ ($m < n$). В этом случае отображение $V_{m,n}^1$ является инъективным отображением, с которым инвариантным образом ассоциируется невырожденное отображение $V_{m,m}^1 : Q_m \rightarrow L_m$. Здесь L_m – касательная m -плоскость L_m к m -поверхности $S_m = \{A_0\}_m$ в текущей точке A_0 , соответствующей точке $B \in Q_m$ при отображении $V_{m,n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$.

Каждой точке $B \in Q_m$ в соответствующем пространстве P_n сопоставляется оснащающая (нормальная) $(n-m)$ -плоскость P_{n-m}^1 ($P_{n-m}^1 \cap L_m = A_0$, $P_{n-m}^1 \cup L_m = P_n$) в точке $A_0 \in S_m \subset P_n$.

Символом \bar{L}_{n-m-1} обозначается $(n-m-1)$ -плоскость в P_{n-m}^1 , $A_0 \notin \bar{L}_{n-m-1}$, отвечающая точке $B \in Q_m$ и являющаяся линейной полярной точкой A_0 относительно фокусной алгебраической поверхности $(n-m)$ -плоскости P_{n-m}^1 в смысле [1].

Каждой гиперплоскости $y \in P_n$, проходящей через $(n-m)$ -плоскость $P_{n-m}^1 \subset P_n$, соответствующей точке $B \in Q_m$, в пространстве P_n отвечает гиперконус $\tilde{K}_{n-1}^2(y) \subset P_n$ второго порядка с вершиной в точке A_0 . Этот гиперконус $\tilde{K}_{n-1}^2(y)$ пересекается с L_m по конусу

$\tilde{K}_{m-1}^2(y)$. Обозначим $\tilde{y} = L_{m-1} \subset L_m$ линейное подпространство, которое полярно сопряжено некоторому направлению $z \in L_m$, относительно конуса $\tilde{K}_{m-1}^2(y) \subset L_m$. Тогда каждой точке $Z \in z$ отвечает пучок проективных преобразований $\Pi(\lambda, z)$ m -плоскости L_m в себя для которых $(m-1)$ -плоскость $\tilde{y} \subset L_m$ неподвижна. Следовательно, точке $B \in Q_m$ в m -плоскости $L_m \subset P_n$ отвечает $(m-1)$ -плоскость

$$\tilde{L}_{m-1} = \{z \in L_m \mid \text{ter} \Pi(\lambda, z) = 0\}, \quad A_0 \notin \tilde{L}_{m-1},$$

Оказывается, что каждой нормальной $(n-m)$ -плоскости P_{n-m}^1 , соответствующей точке $B \in Q_m$, с отображением $V_{m,n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$ ($m < n$) инвариантным образом ассоциируется отображение:

$$f_m^{2n} : Q_m \rightarrow M^{2n}, \quad M^{2n} = \{A_0, L_{n-1}\}, \quad L_{n-1} = \tilde{L}_{m-1} \cup \bar{L}_{n-m-1}$$

В §3 определенным аналитическим и геометрическим образом показывается, что каждой точке $B \in Q_m$ в пространстве P_n отвечает конечное число нормальных $(n-m)$ -плоскостей P_{n-m}^1 . Поэтому справедлива теорема

– С каждым отображением $V_{m,n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$ в случае $m < n$, $m+2 < n < \frac{m(m+3)}{2}$ конечным числом способов ассоциируется отображение f_m^{2n} .

2.1.4. В §4 данной главы выше указанная задача 1 решается для отображения $V_{m,n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$ в случае ($m > n$).

Обозначим Γ_{m-n}^1 – $(m-n)$ -плоскость в Q_m , проходящую через точку $B \in Q_m$, которая представляет собой совокупность всех направлений $u = (\bar{B}, \bar{\epsilon}_a)u^a \in Q_m$, принадлежащих ядру отображения $V_{m,n}^1$. Эта $(m-n)$ -плоскость определяет голономное распределение $\Delta_{m,m-n}^1 : B \rightarrow \Gamma_{m-n}^1$, вдоль интегральных кривых которого, описываемых точкой B , точка $A_0 \in P_n$, соответствующая точке $B \in Q_m$ при отображении $V_{m,n}^1$, является неподвижной. Оказывается, что каждая $(m-n+1)$ -плоскость

$$\Gamma_{m-n+1}^1(u) = (\Gamma_{m-n}^1, \bar{\epsilon}_{a_1})u^{a_1} \subset Q_m, \quad (a_1 = \overline{1, n}),$$

при отображении $V_{m,n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$ ($m > n$) переходит в некоторое направление $x = (\bar{A}_0, \bar{A}_i)x^i \in P_n$.

Точке $B \in Q_m$ в соответствующем проективном пространстве P_n сопоставляется гиперплоскость $L_{n-1}(x) \ni A_0$. Тогда каждой точке этой гиперплоскости отвечает $(m-n-1)$ -мерный конус $Q_{m-n-1}^2(x) \subset \Gamma_{m-n}^1$ второго порядка с вершиной в точке $B \in Q_m$. Этот конус представляет собой совокупность всех направлений в Γ_{m-n}^1 , касательных к интегральным кривым распределения Δ_{m-n}^1 в точке $B \in Q_m$, вдоль которых Γ_{m-n}^1 и бесконечно близкая к ней $(\Gamma_{m-n}^1)'$ первого порядка при отображении $V_{m,n}^1$ принадлежат $L_{n-1}(x) \subset P_n$. Рассмотрим множество всех гиперплоскостей $L_{n-1}(x) \subset P_n$, которым в аффинном пространстве Q_m отвечают вырожденные гиперконусы $Q_{m-n-1}^2(x)$ по крайней мере с прямолинейными вершинами, проходящими через точку $B \in Q_m$. Оказывается, что множество $\{L_{n-1}(x)\}$ образует в точке $B \in Q_m$ гиперконус $K_{n-1}^{m-n} \subset P_n$ класса $m-n$ с вершиной $A_0 \in P_n$, который определяется при $m > n$, удовлетворяющих неравенствам

$$m-2 > 2, \quad n \leq \frac{(m-n)(m-n+3)}{2}.$$

Каждой точке $B \in Q_m$ в проективном пространстве P_n сопоставляется система $\Psi(x)$ из n линейно независимых направлений в точке $A_0 \in P_n$:

$$x_i = (\overline{A_0}, \overline{A_j})x_i^j, \quad \det[x_i^j] \neq 0, \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Эта система $\Psi(x)$ называется основной относительно гиперконуса $K_{n-1}^{m-n} \subset P_n$, отвечающего точке $B \in Q_m$, если каждое направление $x_i \in \Psi(x)$ является линейным полюсом соответствующей гиперплоскости G_{n-1}^j ($i \neq j$) относительно $K_{n-1}^{m-n} \subset P_n$ ($i \neq j$), проходящей через все остальные направления этой системы.

Оказывается, что точке $B \in Q_m$ в соответствующем проективном пространстве P_n в общем случае отвечает конечное число (основных) направлений $L_1^i \in P_n$, проходящих через точку A_0 и принадлежащих основной системе $\Psi(x)$.

Таким образом, в соответствии с [3] в каждой точке $B \in Q_m$ в проективном пространстве P_n инвариантным образом определена линейная n -сеть из прямых L_1^j .

В соответствии с [3] и [26] замечаем, что в точке $B \in Q_m$ на каждой прямой $L_1^j \in P_n$ ($j = \overline{1, n}$) существует по одной точке G_j , которая является гармоническим полюсом точки $A_0 \in P_n$ относительно фокусов на этой прямой вдоль интегральных кривых гиперраспределения $\Delta_{m, m-1}^{a_1} : B \rightarrow \Gamma_{m-1}^{a_1}$ ($a_1 = \overline{1, n}$, a_1 – фиксировано), а $\Gamma_{m-1}^{a_1}$ – прообраз гиперплоскости $G_{n-1}^{a_1}$, $L_1^j \notin G_{n-1}^{a_1}$ при отображении $V_{m, n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$ ($m > n$). Поэтому каждой точке $B \in Q_m$ в пространстве P_n отвечает гиперплоскость $L_{n-1} \ni G_j$ ($j = \overline{1, n}$), причем $A_0 \notin P_n$. Следовательно, в §4 справедлива следующая теорема.

– С отображением $V_{m, n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$ при m и n , удовлетворяющих неравенствам

$$m > n, m - n > 2, n < \frac{(m-n)(m-n+1)}{2},$$

инвариантным образом ассоциируются отображения:

$$f_m^{2n} : Q_m \rightarrow M^{2n}, \quad M^{2n} = \{\overline{A_0}, L_{n-1}\}, \quad A_0 \notin L_{n-1}.$$

2.1.5. В §5 главы 1 решается задача 2 аналогично решению задачи 1 с использованием принципа двойственности между точками и гиперплоскостями в проективном пространстве P_n .

Доказывается следующая теорема

– С каждым отображением $V_{n, n}^2$ в общем случае инвариантным образом ассоциируется отображение $V_{n, n}^1$ а, следовательно, и отображение f_n^{2n} .

2.1.6. В заключительном §6 главы 1 доказывается теорема

– Направление $v = (\overline{B}, \overline{\varepsilon_a})v^a \in Q_m$ будет характеристическим направлением (первого типа) в смысле [24] и [21] тогда и только тогда, когда его образ $z = V_{m, n}^1 v$ при отображении $V_{m, n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$: невырожденном в случае $m = n$ (невырожденном ассоциированном отображении $V_{m, m}^1 : Q_m \rightarrow L_m$ в случае $m < n$), является неподвижным при центропроективите $\Pi(z)$ пространства P_n (m -плоскости L_m) в себя.

Пользуясь принципом двойственности между точками и гиперплоскостями в проективном пространстве, доказывается справедливость следующей теоремы.

– Направление $v = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a)v^a \in Q_n$ будет характеристическим направлением (второго типа) тогда и только тогда, когда его образ $\bar{z} \subset P_n$ при невырожденном тангенциальном отображении $V_{n,n}^1 : Q_n \rightarrow P_n^*$ является неподвижной гиперплоскостью при проективитете $\Pi(\bar{z})$.

В этом же параграфе делается вывод о том, что для детального изучения отображений $V_{m,n}^1$ и $V_{m,n}^2$ следует подвергнуть детальному анализу отображение f_m^{2n} , инвариантно возникающему при рассмотрении этих отображений.

2.2. Вторая глава посвящена изучению основных полей геометрических образов дифференцируемого отображения $f_m^{2n} : Q_m \rightarrow M^{2n}$, которые определяются компонентами внутреннего фундаментального геометрического объекта этого отображения в смысле Г.Ф. Лаптева [12]. В данной главе проводится классификация отображений f_m^{2n} по размерностям m и n , удовлетворяющих каждому из следующих соотношений: 1) $m \leq n$; 2) $n < m \leq 2n$; 3) $m > 2n > n$.

Геометрическая интерпретация этой классификации обеспечивается полями указанных геометрических образов.

2.2.1. В §1 отмечается, что основным объектом рассмотрения в главе 2 является отображение $f_m^{2n} : Q_m \rightarrow M^{2n}$, с которым инвариантным образом ассоциируются точечное отображение $V_{m,n}^1 : Q_m \rightarrow P_n$ и тангенциальное отображение $V_{m,n}^2 : Q_m \rightarrow P_n^*$.

В §2 уточняется, что направление $t = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a)t^a \in Q_m$, касательное к кривой $k(t)$, описываемой точкой B , при отображении $V_{m,n}^1$ перейдет в направление $T(A_0)_t = (\bar{A}_0, \bar{A}_i)x^i$, касательное к линии $(A_0)_t$. При тангенциальном отображении направление $t \in Q_m$ перейдет в $\text{Ch}(L_{n-1})_t \subset P_n$ – характеристику гиперплоскости $L_{n-1} \subset P_n$ вдоль кривой $k(t)$. Поэтому при отображении f_m^{2n} имеем:

$$T(A_0)_t = f_m^{2n} t, \quad \text{Ch}(L_{n-1})_t = f_m^{2n} t.$$

2.2.2. В §3 детально анализируется случай $n \geq m \geq 2$. Рассматривается гиперконус

$$Q_{m-1}^2 = \{u = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a)u^a \in Q_m \mid f_m^{2n} u \in [\text{Ch}(L_{n-1})_u \cup A_0]\} \subset Q_m,$$

В случае $m = n$ этот гиперконус уже рассматривался в §2 глава 1. Оказывается, что при $m = n$ каждой точке $B \in Q_n$ в соответствующем проективном пространстве P_n отвечают следующие гиперконусы с вершиной в точке A_0 второго порядка и второго класса, соответственно:

$$\tilde{q}_{n-1}^2 = V_{n,n}^1 Q_{n-1}^2, \quad \tilde{q}_{n-1,2}^2 = V_{n,n}^2 Q_{n-1}^2.$$

Каждый из этих гиперконусов в общем случае не имеет по крайней мере прямолинейной вершины, проходящей через точку A_0 . Гиперконусы \tilde{q}_{n-1}^2 и $\tilde{q}_{n-1,2}^2$ огибают друг друга. В этом же параграфе 2 в случае $m < n$ возникают линейные подпространства: L_m – касательная m -плоскость к m -поверхности $S_m = \{A_0\}_m$ в точке A_0 и $L_{n-m-1}^* = \bigcap_{\forall t \in Q_m} \text{Ch}(L_{n-1})_t$, отвечающие точке $B \in Q_m$. Поэтому $(n-m)$ -плоскость $P_{n-m}^1 = A_0 \cup L_{n-m-1}^* \subset P_n$ является оснащающей $(n-m)$ -плоскостью к S_m в точке A_0 – нормалью первого рода, а нормалью второго рода является $(m-1)$ -плоскость $L_{m-1} = L_m \cap L_{n-1}$. Следовательно, m -поверхность $S_m \subset P_n$ оказывается нормализованной в смысле А. П. Нордена [14].

2.2.3. §4 посвящен геометрической интерпретации случая $m > n$. Доказаны следующие теоремы:

– В пространстве Q_m при $m > n$ инвариантным образом определяются голономные распределения: $\Delta_{m,m-n}^1 : B \rightarrow \Gamma_{m-n}^1$, $\Delta_{m,m-n}^2 : B \rightarrow \Gamma_{m-n}^2$.

Здесь $(m-n)$ -плоскость $\Gamma_{m-n}^1(\Gamma_{m-n}^2)$ в Q_m представляет собой совокупность всех направлений $u = (\bar{B}, \bar{\epsilon}_a)u^a \in Q_m$, вдоль которых при отображении $V_{m,n}^1(V_{m,n}^2)$ соответствующая точка A_0 (гиперплоскость L_{n-1}) в проективном пространстве P_n неподвижна.

– Отображение $V_{m,n}^1\{V_{m,n}^2\}$, ассоциированное с отображением $f_m^{2n} : Q_m \rightarrow M^{2n}$, в случае $m \leq n$ { в случае $m > n$ } каждую $(m-n+1)$ -плоскость в Q_m :

$$\Gamma_{m-n+1}^1(u) = (\Gamma_{m-n}^1, \bar{\epsilon}_{a_1})u^{a_1} \{ \Gamma_{m-n+1}^2(u) = (\Gamma_{m-n}^2, \bar{\epsilon}_{a_1})u^{a_1} \}, \quad (a_1 = \overline{1, n})$$

переводит в направление $x = (\bar{A}_0, \bar{A}_i)A_{a_1}^i u^{a_1}$ { в $(n-2)$ -плоскость $X_{n-2} = \text{Ch}(L_{n-1})_u$ }.

– Гиперконус $Q_{m-1}^2 \subset Q_m$ ($m = 2n$) в каждой точке $B \in Q_m$ является в общем случае невырожденным, т.е. не имеет по крайней мере прямолинейной вершины, проходящей через точку B , причем n -плоскости Γ_n^1 и Γ_n^2 принадлежат этому гиперконусу Q_{m-1}^2 .

– Гиперконус $Q_{m-1}^2 \subset Q_m$ в случае $m > 2n$ в каждой точке $B \in Q_m$ является вырожденным, т.е. его вершиной служит $(m-2n)$ -плоскость $\Gamma_{m-2n} \subset Q_m$, проходящая через точку $B \in Q_m$.

– Гиперконус $Q_{m-1}^2 \subset Q_m$ в точке $B \in Q_m$ в общем случае при $n < m \leq 2n$ является невырожденным, т.е. в общем случае не имеет по крайней мере прямолинейной вершины, проходящей через точку B .

– Каждой точке $B \in Q_m$ в общем случае при $n < m \leq 2n$ инвариантным образом отвечают в пространстве Q_m следующие линейные подпространства (плоскости соответствующих размерностей):

1⁰. $(m-n)$ -плоскость Γ_{m-n}^2 представляет собой совокупность всех таких направлений $u \in Q_m$, вдоль которых при отображении $f_m^{2n} : Q_m \rightarrow M^{2n}$ гиперплоскость $L_{n-1} \subset P_n$ является неподвижной.

2⁰. $2(m-n)$ -плоскость $\Gamma_{2(m-n)}^3 = \Gamma_{m-n}^2 \cup \Gamma_{m-n}^1$.

3⁰. n -плоскость Γ_n^4 полярно сопряжена $2(m-n)$ -плоскости $\Gamma_{2(m-n)}^3$ относительно гиперконуса $Q_{m-1}^2 \subset Q_m$.

4⁰. $(2n-m)$ -плоскость Γ_{2n-m}^5 полярно сопряжена $(m-n)$ -плоскости Γ_{m-n}^1 относительно конуса $Q_{m-1}^2 \cap \Gamma_n^4$.

Оказывается, что оснащающей плоскостью инволютивного распределения $\Delta_{m,m-n}^1 : Q_m \rightarrow \Gamma_{m-n}^1$ ($2n > m$) является n -плоскость $\Gamma_n^1 = (\bar{B}, \bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_n) = \Gamma_{m-n}^2 \cup \Gamma_{2n-m}^5$.

2.2.4. В §5 находятся инвариантные поля гиперконусов $\check{Q}_{m-1}^2 \subset Q_m$ и некоторых локальных центроаффинных преобразований пространства Q_m ($m \leq n$).

В пятом же параграфе после несложных рассуждений, свойственных случаю $m > n$ ($m = 2n$, $m < 2n$ и $m > 2n$), показывается существование в каждой точке $B \in Q_m$ гиперконуса $\check{Q}_{m-1}^2 \subset Q_m$ и аффинного преобразования Π аффинного пространства Q_m в себя с центром в точке B . Например, в случае $(m = 2n)$ доказана следующая теорема.

– Точке $B \in Q_m$ отвечает в случае $m = 2n$ центроаффинное преобразование Π пространства Q_m в себя с центром в точке B , которое удовлетворяют следующими свойствами:

1) Линейные подпространства Γ_n^2 и Γ_n^1 неподвижны при этом линейном преобразовании в точке $B \in Q_m$.

2) Линейное преобразование Π разбивается на два линейных преобразования с центром в точке $B \in Q_m$:

- а) $B^{(1)}$ – центроаффинное преобразование n -плоскости Γ_n^1 в себя;
- б) $B^{(2)}$ – центроаффинное преобразование n -плоскости Γ_n^2 в себя.

Аналогичные теоремы имеют место и в случаях $m > 2n$ и $m < 2n$.

2.3. Третья глава посвящена изучению инвариантных связностей, ассоциированных с отображением $f_m^{2n} : Q_m \rightarrow M^{2n}$. При этом в этой главе отображение f_m^{2n} интерпретируется как $(m+2n)$ -мерное расслоенное пространство (расслоение) с m -мерной аффинной базой Q_m и $2n$ -мерными слоями M^{2n} с заданным гладким сечением f_m^{2n} : каждой точке $B \in Q_m$ сопоставляется вполне определенная невырожденная нуль-пара $(A_0, L_{n-1}) \in M^{2n}$.

В главе 3 изучаются только те связности расслоения $\Pi_{m,2n}$, которые инвариантным образом ассоциируются с полями геометрических образов отображения f_m^{2n} , изученных в главе 2 и в §2 главы 3.

2.3.1. В §1 определяется расслоение $\Pi_{m,2n}$. В §2 изучаются некоторые поля инвариантных геометрических образов на базе Q_m расслоения $\Pi_{m,2n}$ или отображения f_m^{2n} .

В точке $B \in Q_m$ рассматриваются два направления $w = (\bar{B}, \bar{\epsilon}_a)w^a \in Q_m$, $v = (\bar{B}, \bar{\epsilon}_b)v^b \in Q_m$, касательные к соответствующим кривым k_w и k_v в точке $B \in Q_m$. Оказывается, что точке $B \in Q_m$ отвечают две гиперплоскости в Q_m :

$$H_{m-1}^1(v) = \{w \in Q_m \mid [T(A_0)_v \cap L_{n-1}] \in \text{Ch}(L_{n-1})_w\};$$

$$H_{m-1}^2(v) = \{w \in Q_m \mid [T(A_0)_w \cap L_{n-1}] \in \text{Ch}(L_{n-1})_v\}.$$

которые определяются в общем случае несимметрическим тензором A_{ab} ($a, b = \overline{1, m}$). С симметрической g_{ab} частью этого тензора, удовлетворяющего дифференциальным уравнениям $\nabla g_{ab} = g_{abc} \theta^c$, $g_{[ab]c} = 0$ ассоциируется гиперконус

$$Q_{m-1}^2 = \{v \in Q_m \mid H_{m-1}^1(v) = H_{m-1}^2(v)\},$$

который в общем случае является невырожденным. При отображении f_m^{2n} этот гиперконус перейдет в конус второго порядка с вершиной в точке $A_0 \in P_n$, который принадлежит m -плоскости L_m , касательной к m -поверхности $S_m \subset P_n$ в точке A_0 .

С кососимметрической частью $f_{ab} = \frac{1}{2} A_{[ab]}$ тензора A_{ab} в точке $B \in Q_m$ ассоциируется линейный гиперкомплекс $K_{m-1} \subset Q_m$, который каждому направлению $v \in Q_m$ в нуль-системе сопоставляет гиперплоскость $H_{m-1}(v) \subset Q_m$, проходящую через v и $H_{m-1}^1(v) \cap H_{m-1}^2(v)$. Заметим, что при $m \leq n$ в общем случае

$$\det[f_{ab}] = \begin{cases} \neq 0, & m - \text{четное}; \\ 0, & m - \text{нечетные}. \end{cases}$$

Поэтому в случае нечетного m гиперкомплекс K_{m-1} будет иметь особое направление $z = (\bar{B}, \bar{\epsilon}_a)z^a \in Q_m$. Геометрически это означает, что гиперплоскость $H_{m-1}(v)$ при любом направлении $v \in Q_m$ проходит через особое направление z .

Заметим в соответствии с главой 2, §5, что в каждой точке $B \in Q_m$ определен инвариантным образом гиперконус $\overset{*}{Q}_{m-1}^2 \subset Q_m$ во всех случаях $m \leq n$, $m > n$: $m > 2n$, $m < 2n$, $m = 2n$, с помощью которого определяется гиперконус второго порядка $K_{m-1}^2(v) \subset Q_m$, отвечающего направлению $v \in Q_m$.

Поэтому аналогичным образом получаем, что каждому направлению $v \in Q_m$ с гиперконусом $Q_{m-1}^2 \subset Q_m$ инвариантным образом ассоциируется гиперконус $\tilde{K}_{m-1}^2 \subset Q_m$, аполярный гиперконусу Q_{m-1}^2 . Следовательно, гиперконусы Q_{m-1}^2 и $\tilde{K}_{m-1}^2(v)$ каждому направлению $v \in Q_m$ в точке $B \in Q_m$ сопоставляет центроэкваффинное отображение $\Pi(v)$ базы Q_m в себя с центром в точке $B \in Q_m$. Это отображение $\Pi(v) = \{P_{ac}^b\}$ при каждом направлении $v \in Q_m$ направлению $u \in Q_m$ сопоставляет направление $w \in Q_m$, которое является полюсом гиперплоскости относительно гиперконуса $Q_{m-1}^2(v) \subset Q_m$, являющейся полярной направления u относительно $\tilde{K}_{m-1}^2(v)$.

2.3.2. В §3 рассматриваются базовые инвариантные связности, т.е. связности, определенные на базе Q_m расслоения $\Pi_{m,2n}$.

В соответствии с [15] и [18] на базе Q_m расслоения $\Pi_{m,2n}$ ($m \leq n$) определена связность Вейля W . Система величин

$$\tilde{g}_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{pc} (g_{acb} + g_{cba} - g_{abc}), \quad \tilde{g}_{[ab]}^c = 0, \quad g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c, \quad (a, b, c, p = \overline{1, m}),$$

образует объект связности W . При этом в соответствии с [18], как и следовало ожидать, симметрический, тензор g_{ab} , определяющий гиперконус $Q_{m-1}^2 \subset Q_m$, ковариантно постоянен в связности W .

Справедлива следующая теорема.

– Если пространство Q_m является эквиваффинным, то связность W будет эквиваффинной на базе Q_m расслоения $\Pi_{m,2n}$ тогда и только тогда, когда $l_b = \tilde{g}_{ac}^c \equiv 0$ на базе Q_m .

Отметим, что связность W существует на базе Q_m и в случае $m = 2n$. В этом случае линейные подпространства $\Gamma_n^1 \subset Q_m$ и $\Gamma_n^2 \subset Q_m$ ($\Gamma_n^1 \cap \Gamma_n^2 = B \in Q_m$) определяют на базе Q_m голономные распределения $\Delta_{m,n}^1 : B \rightarrow \Gamma_n^1$, $\Delta_{m,n}^2 : B \rightarrow \Gamma_n^2$.

Как отмечено выше, каждому направлению $v \in Q_m$ отвечает гиперконус $\tilde{K}_{m-1}^2(v) \subset Q_m$ второго порядка с вершиной в точке $B \in Q_m$. Поэтому направлению $v = (\bar{B}, \bar{\epsilon}_a)v^a \in Q_m$ отвечает центроаффинное преобразование базы Q_m на себя с центром в точке $B \in Q_m$: $\bar{G}(v) = \{\bar{G}_{ab}^c v^a\}$, которое каждое направление $u \in Q_m$ переводит в направление $w \in Q_m$ так, что направлению $u \in Q_m$ относительно гиперконуса $\tilde{K}_{m-1}^2(v) \subset Q_m$ полярно сопряжена такая гиперплоскость в Q_m , для которой направление $w \in Q_m$ является полюсом относительно гиперконуса $Q_{m-1}^2 \subset Q_m$.

Справедливы следующие теоремы.

– Система величин \bar{G}_{ac}^b , определяющая центроаффинное отображение $\bar{G}(v)$ базы Q_m на себя для любого направления $v \in Q_m$, является объектом некоторой аффинной связности \tilde{W} ($m \neq n$) с нулевым кручением и с соответствующим тензором кривизны. При этом связность \tilde{W} ($m \neq n$) будет эквиваффинной тогда и только тогда, когда база Q_m расслоения $\Pi_{m,2n}$ будет эквиваффинным пространством.

– Система величин P_{ac}^b , несимметричная в общем случае по индексам a и c и определяющая отображение $\Pi(v)$ базы Q_m на себя с центром в точке $B \in Q_m$ при любом направлении $v \in Q_m$, является объектом некоторой аффинной связности \tilde{W}^* в общем случае с ненулевым тензором кручения и с соответствующим тензором кривизны.

– Объекты связностей Вейля и \tilde{W}^* в каждой точке $B \in Q_m$ связаны соотношениями:

$$\tilde{g}_{ac}^b = \Pi_{(ac)}^b + \frac{1}{m} l_{(a} \delta_{c)}^b - \frac{1}{2} g_{acp} g^{pb}, \quad g^{ab} g_{bc} = \delta_a^c.$$

– Кручение аффинной связности \tilde{W}^* тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда линейный гиперкомплекс $K_{m-1} \subset Q_m$ ($m \leq n$) является неопределенным.

В §3 рассматриваются перспективные связности [7], определяемые линейными подпространствами $\Gamma_{m-n}^1 \subset Q_m$ и $\Gamma_n^2 \subset Q_m$ при $m > n$:

1⁰. Связность S_1 – отображение бесконечно близкой $(\Gamma_{m-n}^1)'$ первого порядка на исходную Γ_{m-n}^1 в направлении n -плоскости Γ_n^2 .

Связность S_1^h ($h=1,2$; h -фиксировано) – ограничение связности S_1 на соответствующее распределение Δ^h :

$$\Delta^1 = \Delta_{m,m-n}^1 : B \rightarrow \Gamma_{m-n}^1, \quad \Delta^2 = \Delta_{m,n}^2 : B \rightarrow \Gamma_n^2.$$

2⁰. Связность S_2 – отображение бесконечно близкой $(\Gamma_n^2)'$ первого порядка на исходную Γ_n^2 в направлении Γ_{m-n}^1 .

Связность S_2^h ($h=1,2$; h -фиксировано) – ограничение связности S_1 на соответствующее распределение Δ^h .

Справедливы следующие теоремы.

– Связности S_2^1 и S_2^2 имеют нулевое кручение при $m = 2n$.

– Связность Вейля на базе Q_m расслоения $\Pi_{m,2n}$ при $m = 2n$ является локально плоской тогда и только тогда, когда каждое линейное подпространство Γ_n^h параллельно переносится относительно связности W вдоль интегральных кривых соответствующего распределения $\Delta_{n,n}^h$ ($h=1,2$).

– Если связность Вейля на базе Q_m расслоения $\Pi_{m,2n}$ при $m = 2n$ является локально плоской, то связности S_g^h ($g, h=1,2$) являются локально плоскими на базе Q_m .

2.3.3. В соответствии с [18] и [22] заключаем, что гиперплоскость $L_{n-1} \subset P_n$, соответствующая точке $B \in Q_m$ (базе расслоения $\Pi_{m,2n}$), порождает вертикальную аффинную связность C . Существует гиперраспределение $\Delta_{m,m-1} : B \rightarrow E_{m-1}$, где гиперплоскость $E_{m-1} \subset Q_m$, вдоль интегральных кривых которого эта связность эквивалентна. Оказывается, что распределение $\Delta_{m,m-1}$ на базе Q_m голономно тогда и только тогда, когда линейный гиперкомплекс $K_{m-1} \subset Q_m$ является неопределенным. Если связность C – эквивалентна, то гиперкомплекс K_{m-1} является неопределенным.

2.4. В главе 4 изучаются специальные классы отображений $V_{m,n}^1$, $V_{m,n}^1$ и f_m^{2n} . Прежде всего отметим, что с каждым из этих отображений, изученных в главах 1 – 3, ассоциируются соответствующие матрицы размера $m \times n$, соответственно: $[A_a^i]$ и $[A_{ia}]$ ($a = \overline{1, m}$; $i = \overline{1, n}$). Во всех рассуждениях предыдущих глав предполагалось, что ранги r этих матриц равны $\min(m, n)$. При этом каждое из этих отображений называется регулярным.

Глава 4 посвящена изучению указанных отображений, когда $r < \min(m, n)$ ($m \leq n$ и $m > n$).

2.4.1. В §1 каждое из отображений $V_{m,n}^1, V_{m,n}^2$ и f_m^{2n} называется отображением ранга r и обозначается $V_{m,n}^{(r)1}, V_{m,n}^{(r)2}$ и $f_m^{(r)2n}$, если в каждой точке $B \in Q_m$ выполняются соответственно условие

$$V_{m,n}^{(r)1} : r = \text{rank}[A_a^i] < \min(m, n);$$

$$V_{m,n}^{(r)2} : r = \text{rank}[A_{ia}] < \min(m, n);$$

$$f_m^{(r)2n} : r = \text{rank}[A_a^i] = \text{rank}[A_{ia}] < \min(m, n);$$

2.4.2. §2 посвящен изучению отображения $V_{m,n}^{(r)1}$. Оказывается, что при $m = n$ совокупность всех направлений $u \in Q_n$, которые при отображении $V_{n,n}^{(r)1}$ переходят в точку $A_0 \in P_n$, образует $(n-r)$ -плоскость $\Gamma_{n-r} \subset Q_n, B \in \Gamma_{n-r}$, которая является ядром отображения $V_{n,n}^{(r)1}$. Эта $(n-r)$ -плоскость определяет голономное распределение $\Delta_{n,n-r} : B \rightarrow \Gamma_{n-r}$ ($m = n$). При этом точка A_0 в соответствующем при отображении $V_{n,n}^{(r)1}$ пространстве P_n описывает r -поверхность $S_r \subset P_n$ с касательной r -плоскостью L_r .

Справедливы теоремы.

– Дифференцируемое отображение ранга $r : V_{n,n}^{(r)1} : Q_n \rightarrow P_n$ при $m = n$ характеризуется тем, что оно каждую $(n-r+1)$ -плоскость $\Gamma_{n-r+1}(u) = (\Gamma_{n-r}, \bar{\epsilon}_{\alpha_1})u^{\alpha_1} \subset Q_n$ переводит в соответствующее направление $x = (\bar{A}_0, \bar{A}_{i_1})A_{\alpha_1}^{i_1}u^{\alpha_1} \in L_r \subset P_n$, ($\alpha_1 = \bar{1}, r; i_1 = \bar{1}, r$).

– Дифференцируемое отображение ранга $r : V_{m,n}^{(r)1} : Q_m \rightarrow P_n$ ($m < n$) характеризуется тем, что оно каждую $(m-r+1)$ -плоскость $\Gamma_{m-r+1}(u) = (\Gamma_{m-r}, \bar{\epsilon}_{\alpha_1})u^{\alpha_1} \subset Q_m$ переводит в соответствующее направление $x = (\bar{A}_0, \bar{A}_{i_1})A_{\alpha_1}^{i_1}u^{\alpha_1} \in L_r \subset L_m \subset P_n$.

Здесь $(m-r)$ -плоскость $\Gamma_{m-r} \subset Q_m$ является ядром указанного отображения, а r -плоскость $L_r \subset L_m$ касается r -поверхности $S_r \subset P_n$. При этом m -поверхность S_m с касательной m -плоскостью L_m в точке $A_0 \in S_m$ является тангенциально вырожденной в смысле М.А. Акивиса [2].

В случае $m > n$ в соответствии с §4 главы 2 в точке $B \in Q_m$ определена $(m-n)$ -плоскость $\Gamma_{m-n}^1 \subset Q_m, B \in \Gamma_{m-n}^1$, представляющая собой совокупность всех таких направлений $u \in Q_m$, при которых при отображении $V_{m,n}^1$ точка $A_0 \in P_n$ неподвижна.

Справедлива теорема

– Дифференцируемое отображение ранга $r : V_{m,n}^{(r)1} : Q_m \rightarrow P_n$ ($m > n$) характеризуется тем, что оно каждую $(m-r+1)$ -плоскость $\Gamma_{m-r+1}^1 = (\Gamma_{m-r}^1, \bar{\epsilon}_{\alpha_1})u^{\alpha_1} \subset Q_m$ переводит в соответствующее направление $x = (\bar{A}_0, \bar{A}_{i_1})A_{\alpha_1}^{i_1}u^{\alpha_1} \in L_r \subset P_n$.

Здесь Γ_{m-r}^1 , является ядром указанного отображения, а r -плоскость $L_r \subset P_n$ касается r -поверхности $S_r \subset P_n$ в точке $A_0 \in S_r$. При этом r -поверхность $S_r \subset P_n$ является тангенциально вырожденной в смысле М.А. Акивиса [2].

В этом же параграфе доказывается, что каждой гиперплоскости $H_{n-1} \subset P_n$, $A_0 \notin H_{n-1}$, отвечающей точке $B \in Q_m$ при отображении $V_{m,n}^{(r)1}$ в пространстве Q_m отвечает (основной) гиперконус $Q_{m-1}^2(H_{n-1})$ второго порядка с вершиной в точке $B \in Q_m$. Этот гиперконус представляет собой совокупность всех направлений $u \in Q_m$, вдоль которых при отображении $V_{m,n}^{(r)1}$ соответствующее направление $x \in P_n$ пересекает гиперплоскость H_{n-1} в точках характеристики $\text{Ch}(H_{n-1})_u$.

Справедлива следующая теорема.

– Каждой гиперплоскости $H_{n-1}, A_0 \notin H_{n-1}$ проективного пространства P_n , соответствующего точке $B \in Q_m$ при отображении $V_{m,n}^{(r)1} : Q_m \rightarrow P_n$, отвечающий ей основной гиперконус $Q_{m-1}^2(H_{n-1}) \subset Q_m$ проходит через $(m-r)$ -плоскость $\Gamma_{m-r} \subset Q_m$ (при любых $m > 2$ и $n > 2$).

2.4.3. В §3 изучается отображение $V_{m,n}^{(r)2} : Q_m \rightarrow P_n^*$ во всех случаях $m \leq n$ и $m > n$. При этом, пользуясь принципом двойственности между точками и гиперплоскостями в проективном пространстве P_n , можно получить геометрические свойства отображения $V_{m,n}^{(r)2}$, аналогичные свойствам отображения $V_{m,n}^{(r)1}$.

2.4.4. §4 посвящен изучению отображения $f_m^{(r)2n}$ ранга r . Поскольку это отображение является как бы объединением отображений $V_{m,n}^{(r)1}$ и $V_{m,n}^{(r)2}$, то оно обладает одновременно теми же геометрическими свойствами, которыми обладают указанные отображения. В этом же параграфе доказывается существование отображения $f_m^{(r)2n}$, а, следовательно, и отображений $V_{m,n}^{(r)1}$ и $V_{m,n}^{(r)2}$. Оказывается, что можно дать следующее геометрическое представление дифференцируемого отображения $f_m^{(r)2n}$. В аффинном пространстве Q_m с произволом r функций $(m-r)$ аргументов задается голономная $(m-r)$ -поверхность $\tilde{S}_{m-r} = \{B\}_{m-r} \subset Q_m$ с касательной $(m-r)$ -плоскостью Γ_{m-r} в текущей точке $B \in \tilde{S}_{m-r} \subset Q_m$. Каждой точке $B \in \tilde{S}_{m-r}$ сопоставляется центропроективное пространство P_n с центром в точке A_0 так, что в этом пространстве задаются r -плоскость $L_r \ni A_0$ и $(n-r-1)$ -плоскость $L_{n-r-1} \subset L_{n-r}$. В итоге вдоль $\tilde{S}_{m-r} \subset Q_m$ точка A_0 является текущей точкой r -поверхности $S_r \subset P_n$ с касательной r -плоскостью L_r , а гиперплоскость L_{r-1} будет текущим элементом r -семейства $\{L_{n-1}\}_r$ с характеристическим элементом L_{n-r-1} .

2.4.5. В §5 изучается специальный вид характеристических направлений в r -плоскости L_r в случае отображения $V_{n,n}^{(r)1}$ в смысле [24] и [21].

Каждой точке $A_0 \in S_r$, отвечающей точке $B \in Q_m$ при отображении $V_{n,n}^{(r)1}$ сопоставим оснащающую $(n-r)$ -плоскость L_{n-r}^1 к S_r в точке A_0 . Так же, как и в регулярном случае, показывается, что $(n-r)$ -плоскость L_{n-r}^1 отвечает центропроективное преобразование $\Pi^{(r)}(z)$ r -плоскости L_r в себя с центром в точке A_0 , отвечающей точке $Z \in L_r$.

Справедлива теорема

– Каждой оснащающей $(n-r)$ -плоскости L_{n-r}^1 r -поверхности S_r в точке A_0 , отвечающей точке $B \in Q_n$ при отображении $V_{n,n}^{(r)1}$ в аффинном пространстве Q_n соответствуют характеристические $(n-r+1)$ -плоскости, образами которых при указанном отображении являются неподвижные направления $z = A_0 Z \in L_r$ при центропроективном преобразовании $\Pi^{(r)}(z)$, отвечающим любой точке Z прямой z . Эти направления в r -плоскости L_r касательной к S_r в точке A_0 называются характеристическими направлениями.

Эта теорема дает дополнительные геометрические свойства отображений $V_{n,n}^{(r)1}$. Отметим, что при заданной оснащающей $(n-r)$ -плоскости L_{n-r}^1 в точке $A_0 \in S_r \subset P_n$ существует не более $2^r - 1$ характеристических направлений в r -плоскости L_r . Так же, как и в §3 главы 1, можно провести инвариантное построение оснащающей $(n-r)$ -плоскости L_{n-r}^1 к S_r в точке $A_0 \in P_n$ в случае $r+2 < n \leq \frac{r(r+3)}{2}$.

Справедлива теорема

– Каждой точке $B \in Q_n$ в r -плоскости L_r , касательной в точке A_0 к r -поверхности S_r , в случае отображения $V_{n,n}^{(r)1}$ при n и r , удовлетворяющих неравенствам

$$r+2 < n \leq \frac{r(r+3)}{2},$$

отвечает в общем случае не более $2^r - 1$ характеристических направлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Математика – 1957. – №1. – С. 9 – 19.
2. Акивис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т.146. – №3. – С. 515 – 518.
3. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей // Уч. зап. Московского гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. М., – 1965, – № 243. – С. 29 – 37.
4. Болодурин В.С. О проективно-дифференциальных свойствах точечных соответствий между тремя гиперповерхностями // Известия вузов. Математика, – 2012, – № 12, – С.16 – 29.
5. Болодурин В.С. О свойствах точечных соответствий между тремя многомерными поверхностями проективных пространств // Известия вузов. Математика, – 2013, – № 9, – С.3 – 15.
6. Дмитриева Т.В. (Зудина Т.В.) О классификации эквиобъемных отображений псевдоримановых многообразий / Зудина Т.В., Степанов С. Е // Известия вузов. Математика, – 2006, – № 8, – С.19 – 28.
7. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. – 1979. – Т. 9. – С. 3 – 246.
8. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображение аффинного пространства в многообразии гиперконусов другого пространства // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т.317. – №2. – С. 5 – 8.
9. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображение аффинных и евклидовых пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т.317. – №2. – С. 8 – 14.

10. Ивлев Е.Т., Молдованова Е. А. О дифференцируемых отображениях аффинных пространств в многообразия m -плоскостей в многомерном евклидовом пространстве // Известия вузов. Математика, – 2009. – № 11. – С.24 – 42.
11. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М. – 1953. – Т. 2. – С. 275 – 382.
12. Лаптев Г.Ф. К инвариантной аналитической теории дифференцируемых отображений // Тр. Геом. Семинара – М. – 1974. – Т.6 – С. 37 – 42.
13. Лумисте Ю. Г. Дифференциальная геометрия подмногообразий // В сб. Алгебра. Топология. Геометрия, (Итоги науки и техники). – Т. 13 – М. – 1975. – С. 273 – 340.
14. Норден А. П. Обобщение основной теоремы теории нормализации // Известия вузов. Математика, – 1966. – № 2. – С.9 – 19.
15. Норден А. П. Пространства аффинной связности. – М.: Наука, – 1976, – С.432.
16. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – №2. – Р. 231 – 240.
17. Остиану Н.М. Распределения гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Труды геометрического семинара. – Т. 4. – М., ВИНТИ АН СССР, – 1973. – С. 71 – 120.
18. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ // М.: Наука, – 1967. – С. 664.
19. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Геометрия. Москва, – 1965. – С. 65 – 107.
20. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. – Москва, – 1971. – С. 153 – 174.
21. Рыжков В. В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n // Труды геометр. семинара. – М. – Т. 3. – М. – 1971. – С. 235 – 242.
22. Столяров А.В. Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография // Чебоксары: Изд-во Чувашский гос. пед. Институт, – 1994. – 290 с.
23. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. –Л.: ГИТТЛ. – 1948. – 432с.
24. Bortolotti E. Sulla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni dualitiche // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. – 1938, 28, – С. 224 – 250.
25. Borůvka O. Sur les correspondances analytiques enter plans projectifs. I, II // Spisy prfrodovèd. Fak- Brnè, 1926, 27, 72, 85.
26. Casanova. La notion de pole harmonique // Rev. math. spec. – 1955. – Т. 65. – № 6. – Р. 437 – 440.
27. Fubini G., Čech E. Introduction à la géométrie projective differentielle des surfaces, Paris, Gauthier-Villars, 1931.
28. Segre B. Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane // Univ. E Politecn. Torino Rend. Sem. Mat., – 1949, 8, – 49 – 55.
29. Segre B. Some properties of differentiable varieties and transformations // Springer. Berlin – Göttingen, – 1957.
30. Speranza F. Sunerficie anolonome e corrispondenze dualistiche // Atti Accad. Naz. Lincei Rend Cl. Sci. Fis. Mat. e natur., – 1961, 30, – №4, – 479 – 486.
31. Svec A. Sur les correspondances enter deux espaces // Bibliographie. Comment. math. Univ. Carolinae, – 1960, 1, – №2, – 23 – 37.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

32. Аль-Хассани М. А. Связности аффинного расслоения многообразия невырожденных нуль-пар проективного пространства / М.А. Аль-Хассани // Том. политехн. ун-т. – Томск, 2013. – 50 с.: ил.- Библиогр.: 37 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ. – № 288. – В 2013 от 18 октябрь. . – 3.03 п.л.
33. Аль-Хассани М.А. Поля инвариантных геометрических образов дифференцируемого отображения аффинного пространства в многообразии невырожденных нуль-пар проективного пространства / М.А. Аль-Хассани // Том. политехн. ун-т. – Томск, 2013. – 47с.: ил. – Библиогр.: 17 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 08.08.2013, № 236 – в 2013. – 2.85 п.л.
34. Аль-Хассани М.А. Дифференцируемое отображение ранга r аффинного Q_m и проективного P_n пространств / М.А. Аль-Хассани, А.А. Лучинин // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т.324. – № 2. – С. 35 – 39. – 0.15 п.л.
35. Аль-Хассани М.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_n и проективного P_n пространств / М.А. Аль-Хассани, Е.А. Молдованова // Известия Томского политехнического университета – 2013 – Т.323 – № 2 – С. 28 – 32. – 0.15 п.л.
36. Аль-Хассани М.А. Дифференцируемое отображение аффинного пространства в многообразии невырожденных нуль-пар проективного пространства / М.А. Аль-Хассани, Е.А. Молдованова // Материалы международной научно-практической конференции «Наука в современном информационном обществе». – Москва. – Том. 2. – 2013. – С. 158 – 160. – 0.09 п.л.
37. Аль-Хассани М.А. Отображение аффинного пространства в многообразии нуль-пар проективного пространства / М.А. Аль-Хассани, Е.А. Молдованова // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т.322. – № 2 – С. 24 – 28. – 0.15 п.л.
38. Аль-Хассани М.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_m и проективного P_n пространств ($m > n$) / Е.Т. Ивлев, М.А. Аль-Хассани, А.А. Лучинин // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т.324. – № 2. – С.47 – 51. – 0.1 п.л.
39. Аль-Хассани М.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_m и проективного P_n пространств ($m < n$) / Е.Т. Ивлев, М.А. Аль-Хассани, А.А. Лучинин // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т.323. – № 2. – С. 16 – 20. – 0.1 п.л.