На правах рукописи

Фадеев Роман Николаевич

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2015

Работа выполнена на кафедре теории функций и приближений Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Волосивец Сергей Сергеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Вологодской государственной молочнохозяйственной академии им. И.В. Верещагина. Плотников Михаил Геннадьевич
	кандидат физико-математических наук, доцент Казанского национального исследовательского технологического университета им. С.М.Кирова Веселова Лидия Владимировна
Ведущая организация:	Московский физико-технический институт(государственный университет)

Защита состоится «19» марта 2015 в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, Казань ул. Кремлевская, 35, ауд. 610

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, Казань ул. Кремлевская, 35.

Автореферат разослан «____» января 2015 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент Е. К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Данная работа посвящена условиям принадлежности функции (или суммы ряда по мультипликативной системе) различным функциональным пространствам в терминах коэффициентов Фурье функции по мультипликативной системе (или коэффициентов ряда). К этой задаче примыкает задача оценки наилучших приближений функции по мультипликативной системе в заданном пространстве.

Актуальность темы диссертации. Первый пример ортонормированной мультипликативной системы конечнозначных функций принадлежит Дж.Уолшу. В 1947 году Н.Я.Виленкин изучил системы характеров коммутативных компактных нульмерных групп со второй аксиомой счетности, переходящие при отображении на полуинтервал $[0, 1)$ в мультипликативные системы ортонормированных функций. Дж.Прайс определил мультипликативные системы функций на полуинтервале в более общей ситуации. Вклад отечественных математиков в данную теорию рядов по мультипликативным системам достаточно полно отображен в монографиях Б.И.Голубова, А.В.Ефимова и В.А.Скворцова[1] и Г.Н.Агаева, Н.Я.Виленкина, Г.М.Джафарли и А.И.Рубинштейна[2]. Достижения венгерских и американских математиков изложены в монографии Ф.Шиппа, У.Уэйда и П.Шимона[3].

Теория рядов по мультипликативным системам, особенно по действительнозначной системе Уолша, находит серьезные приложения в вычислительной математики в вопросах обработки, кодирования и сжатия информации. Кроме того функции этих систем являются собственными функциями операторов, континуальные p-аддитивные аналоги которых находят в настоящее время применение в математической физике (В.С Владимиров, И.В.Волович и др).

Теория приближений полиномами по мультипликативным системам развивалась в нескольких направлениях. С использованием понятие обобщенной производной были получены различные варианты прямых и обратных теорем приближения (А.В.Ефимов, П.Л.Бутцер, Х.Вагнер, Хе Зелин). Большое число работ было посвящено вопросам сходимости линейных средних рядов Фурье, в том числе, количественным оценкам скорости

---

[1] *Голубов Б. И.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения / Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов. —М.:Наука, 1987.

[2] *Агаев Г. Н.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах / Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн.—Баку: Элм, 1981.

[3] *Schipp F.* Walsh series. An introduction to dyadyc analysis / F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon.—Budapest: Akademia Kiado, 1990.

сходимости (С.Л.Блюмин, В.А.Глухов, А.И.Рубинштейн, Е.С.Смаилов).

Серьезное развитие получила теория единственности рядов по мультипликативным системам(С. Ф. Лукомский, М. Г. Плотников, Н. Н. Холщевникова).

Для функции f, принадлежащей пространству $L_{2\pi}^{p}$ измеримых 2π-периодичных функций, интегрируемых в p-й степени на периоде, Г. Харди и Дж. Литтлвуд установили соотношения между нормой $\|f\|_{L_{2\pi}^{p}}$ и рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{p-2} \left(|a_k|^p + |b_k|^p\right),$$

где $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ — косинус и синус коэффициенты Фурье. Более того, в случае монотонного убывания $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ к нулю, они установили при $1 < p < \infty$ эквивалентность условия $\|f\|_{L_{2\pi}^{p}} < \infty$ и сходимости ряда приведенного выше.

Развивая этот подход, А. А. Конюшков получил оценку наилучших приближений $f \in L_{2\pi}^{p}, 1 < p < \infty$ с монотонными коэффициентами Фурье, а В. М. Кокилашвили установил двустороннюю оценку модуля гладкости порядка $k \in \mathbb{N}$ функции f квазимонотонными коэффициентами Фурье. В настоящее время эта тематика разрабатывается Л. Лейндлером, С. Тихоновым, С. Жу и другими математиками. Т. М. Вуколова и М. И. Дьяченко получали двусторонние оценки норм функции в $L_{2\pi}^{p}$, $0 < p < \infty$, коэффициенты Фурье являются монотонными или выпуклыми.

Для рядов по системе Уолша аналог результата Харди - Литтлвуда о тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами был получен Ф. Морицем. Для более общих мультипликативных систем следует отметить результаты М. Ф. Тимана и А. И. Рубинштейна, а также С. С. Волосивца. Для рядов по мультипликативным системам с обобщенно-монотонными коэффициентами Фурье оценки наилучших приближений были получены Н. Ю. Агафоновой.

Р. Аски и С. Вейнгер[4] рассмотрели класс знакопеременных коэффициентов тригонометрических рядов AW_{α}^{p}, для которых сумма ряда принадлежала пространству $L_{2\pi}^{p}$ о степенных весом. Позднее М. и Ш. Изуми были получены оценки модулей непрерывности четных или нечетных функций из $L_{2\pi}^{p}$, коэффициенты Фурье которых принадлежат классам AW_{0}^{p}. В первой главе данной работы получаются оценки приближений функций, коэффициенты Фурье которых принадлежат аналогичным классам последо-

[4] *Askey R.* Integrability theorems for Fourier series / R. Askey, S. Wainger // Duke Math. J. — 1966. — Vol. 33, no. 2. — Pp. 223–228.

вательностей.

Определения классических пространств С. Л. Соболева и О. В. Бесова можно найти в монографии С. М. Никольского[5]. М. К. Потапов рассмотрел обобщения этих пространств для 2π- периодических функций и установил взаимосвязь между ними. Аналоги этих пространств, связанные с мультипликативными системами ввел С.С. Волосивец. М. Бериша получил ряд необходимых и достаточных условий принадлежности сумм тригонометрического ряда обобщенным пространствам О. В. Бесова - М. К. Потапова в терминах коэффициентов этих рядов. Во второй главе данной работы получаются необходимые и достаточные условия принадлежности сумм рядов по мультипликативным системам обобщенным пространствам О. В. Бесова - М. К. Потапова, связанным с мультипликативными системами.

Г. Лоренц[6] установил связь между принадлежностью функции классам Липшица и поведением некоторых сумм тригонометрических коэффициентов Фурье. С. Алянчич и М. Томич, а также А. А. Конюшков получили оценку монотонно убывающих коэффициентов Фурье в терминах модуля непрерывности или наилучших приближений функции. Двумерные аналоги указанных выше результатов были доказаны Л. П. Кагадий. Для мультипликативных систем аналоги результатов Лоренца были получены Н. Я. Виленкиным и А. И. Рубинштейном. В третьей главе данной работы получаются аналоги двумерных результатов Л. П. Кагадий для мультипликативных систем и изучается вопрос их неулучшаемости.

Цель работы.

Целью данной диссертационной работы является решение следующих задач:

1) Получить оценки наилучших приближений по мультипликативным системам функций со знакопеременными коэффициентами Фурье в различных интегральных метриках ($L^p[0,1)$ при $1 \le p < \infty$, $\mathbf{P}$-ичное пространство Харди $H(\mathbf{P},[0,1))$.

2) Для функций двух переменных получить оценки сверху приближения углом функций в метрике $L^p[0,1)^2$, $1 < p < \infty$, и в метрике пространства Харди в терминах коэффициентов Фурье по мультипликативным системам.

3) Установить необходимые и достаточные условия принадлежности функции модифицированным классам Бесова в терминах ее коэффициентов

[5] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М.:Наука, 1977.

[6] *Lorentz G. G.* Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen / G. G. Lorentz. // Math. Zeitschrift. — 1948. — Vol. 51. — Pp. 135–149.

Фурье по мультипликативной системе.
4) Установить аналоги теорем Лоренца для двойных рядов Фурье по мультипликативным системам и показать их неулучшаемость.

Методы исследования.

При решении поставленных задач применяются общие методы математического и функционального анализа, методы гармонического анализа, теории приближений и теории ортонормированных рядов.

Научная новизна.

Все основные результаты работы являются новыми. В работе получены оценки наилучших приближений сверху и снизу в интегральных метриках в терминах коэффициентов Фурье, охватывающие более широкие классы, чем ранее полученные результаты. Получены оценки сверху приближений углом в пространствах $Ł^p[0,1)^2$, $1 < p < \infty$, и пространстве Харди $H(\mathbf{P},[0,1)^2)$, причем оценки в пространстве Харди неизвестны в тригонометрическом случае. Приведены необходимые и достаточные условия принадлежности функции модифицированным пространствам Бесова, тесно связанные с мультипликативными системами, которые до недавнего времени не изучались. Получены двумерные аналоги теорем Лоренца и установлена их неулучшаемость в определенном смысле.

Практическая ценность.

Основные результаты работы носят теоретический характер и могут найти применение в теории ортогональных рядов,в теории приближений,в гармоническом анализе. Они могут быть использованы в учебном процессе при чтении специальных курсов для студентов, магистрантов и аспирантов.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались и обсуждались на :
1) научных семинарах кафедры теории функций и приближений и научно-практических конференциях сотрудников Саратовского государственного университета "Актуальные проблемы математики, механики и их приложения" (Саратов, 2011, 2012);
2) 14-ой Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" , посвященной памяти академика П.Л.Ульянова (Саратов, 2008);
3) 15-ой Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" , посвященной 125-летию со дня рождения В.В.Голубева и 100-летию СГУ (Саратов, 2010);
4) 16-ой Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функ-

ций и их приложения" (Саратов, 2012);
5) расширенном заседании кафедры математического анализа Казанского (Приволжского) федерального университета(Казань, 2014).

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в работах [1] - [8]. В работе [1] научному руководителю принадлежит постановка задачи. Работы [1] - [4] опубликованы в журналах, включённых в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени кандидата наук.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы, содержащего 75 наименований. Каждая глава разбита на разделы, всего в диссертации 11 разделов. Общий объем работы 140 страницы.

Краткий обзор содержания диссертации.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, определена ее цель, описана структура диссертации и введены основные определения.

Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что, $2 \leqslant p_n \leqslant N$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1,\ m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n).$$

Данное разложение определено однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, брать разложение с конечным числом $x_j \neq 0$. Для $x \in [0,1)$ и $y \in [0,1)$ введем обобщенное сложение

$$x \oplus y = z, z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}.$$

При фиксированном x число z определено для почти всех y.

Всякое $k \in \mathbb{Z}_+$ представимо в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z} \cap [0, p_i).$$

Для $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ по определению полагаем

$$\chi_k(x) = exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)\right).$$

Систему $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называют мультипликативной системой или системой Виленкина. Известно, что $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированная полная в $L^1[0,1)$ система, и что $\chi_n(x \oplus y) = \chi_n(x)\chi_n(y)$ для всех $y \in [0,1)$, кроме счетного числа, при фиксированном $x \in [0,1)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$.

В **главе 1** находятся оценки наилучших приближений и приближений углом функции через ее коэффициенты Фурье и их разности в различных интегральных метриках.

Пространство $L^p[0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, рассматривается с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$$

Максимальная функция $M(f)$ определяется равенством

$$M(f)(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} m_n \left| \int_{I^{(n)}(x)} f(t) \, dt \right|,$$

где $I^{(n)}(x)$ - интервал вида $[k/m_n, (k+1)/m_n)$, в который попадает точка x. Если $M(f) \in L^1[0,1)$, то функция f принадлежит $\mathbf{P}$-ичному пространству Харди $H(\mathbf{P}, [0,1))$ с нормой $\|f\|_H = \|M(f)\|_1$.

Аналогичные нормы используются в двумерном случае.

Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \hat{f}(k) = 0, k \geq n\}$, $\quad n \in \mathbb{N}$. Тогда наилучшее приближении функции f в пространстве X есть следующая величина $E_n(f)_X = \inf\left\{\|f - t_n\|_X : t_n \in \mathcal{P}_n\right\}$, $\quad n \in \mathbb{N}$. В двумерном случае наилучшее приближение определяется аналогично.

В двумерном случае будем также рассматривать так называемое приближение углом. Если $\mathcal{P}_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, есть множество $f(x_1, x_2)$, таких что при фиксированных x_j, $j = 1, 2$, $j \neq i$, имеем $f(x_1, x_2) \in \mathcal{P}_n$, то по определению

$$A_{n,m}(f)_X = \inf\left\{\|f - u - v\|_X : u \in \mathcal{P}_n^{(1)}; v \in \mathcal{P}_m^{(2)}\right\}.$$

Здесь либо $X = L^p[0,1)(L^p[0,1)^2)$, $1 \leq p < \infty$ (в этом случае для краткости будем писать $E_{n,m}(f)_p$ вместо $E_{n,m}(f)_{L^p}$ и аналогично $E_n(f)_p$ вместо $E_n(f)_{L^p}$), либо $X = H(\mathbf{P}, [0,1)^2)$(в этом случае для краткости будем писать $E_{n,m}(f)_H$ и $E_n(f)_H$).

Основными результатами главы 1 являются

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *такова, что* $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{2p-2} \left(\sum\limits_{j=k}^{\infty} \left|\Delta^2 a_j\right|\right)^p < \infty$, $\quad 1 < p < \infty$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ *является* *рядом Фурье некоторой функции $f \in L^p[0,1)$ и справедлива оценка*

$$E_n^p(f)_p \le C\left(n^{p-1}|a_n|^p + n^{2p-1}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\left|\Delta^2 a_i\right|\right)^p + \sum_{k=n}^{\infty} k^{2p-2}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\left|\Delta^2 a_i\right|\right)^p\right).$$

Здесь $\Delta^2 a_i = a_i - 2a_{i+1} + a_{i+2}$.

Теорема 1.2.2 является аналогом результата М. и Ш. Изуми для тригонометрических рядов, где оценивается модуль непрерывности функции через разности ее коэффициентов Фурье первого порядка.

Теорема 1.2.4. *Пусть сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\Delta a_k|\ln(k+1)$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, *тогда ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k(x)$ *является рядом Фурье функции* $f \in H(\mathbf{P},[0,1))$ *и сходится к ней в* $H(\mathbf{P},[0,1))$*.При этом*

$$E_n(f)_H \le C\sum_{k=n}^{\infty}|a_k - a_{k+1}|\ln(k+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Результат теоремы 1.2.4 известен в тригонометрическом случае в метрике $L^1_{2\pi}$. Здесь используется более сильная метрика пространства Харди.

Теорема 1.3.1. *Пусть двойная последовательность* $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* AW_2^p *для некоторого* $p \in (1,\infty)$*, то есть* $a_{jk} \to 0$ *при* $\max(j,k) \to \infty$ *и* $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(m+1)^{p-2}(n+1)^{p-2}(d_{mn})^p < \infty$*, где* $d_{mn} = \sum\limits_{i=m}^{\infty}\sum\limits_{j=n}^{\infty}|\Delta_{11}a_{ij}|$ *. Тогда ряд* $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)$ *является рядом Фурье функции* $f \in L^p[0,1)^2$ *и для* $m,n \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка*

$$A_{nm}^p(f)_p \le C\Bigg(n^{p-1}m^{p-1}d_{n,m}^p(a) + n^{p-1}\sum_{k=m}^{\infty} d_{n,k}^p(a)k^{p-2} +$$

$$+m^{p-1}\sum_{j=n}^{\infty} d_{j,m}^p(a)j^{p-2} + \sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty} d_{j,k}^p(a)k^{p-2}j^{p-2}\Bigg)$$

Здесь $\Delta_{11}a_{jk} = a_{j,k} - a_{j+1,k} - a_{j,k+1} + a_{j+1,k+1}$.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $\lim\limits_{j+k\to\infty} a_{jk} = 0$ *и* $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\Delta_{11}a_{jk}|\ln(j+2)\ln(k+2) < \infty$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)$ *сходится к функции* $f \in$

$H(\mathbf{P},[0,1)^2)$ *и при этом для всех* $n,m\in\mathbb{N}$

$$E_{nm}(f)_H \le C \sum_{\max(j-n,k-m)\ge 0} |\Delta_{11}a_{jk}| \ln(j+2)\ln(k+2)$$

$$A_{nm}(f)_H \le C \sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty} |\Delta_{11}a_{jk}| \ln(j+2)\ln(k+2)$$

В теоремах 1.3.1 и 1.3.2 используется приближение углом, позволяющее перенести методы оценки наилучших приближений А. А. Конюшкова и других на многомерный случай.

Результаты главы 1 опубликованы в [1], [2], [8].

В **главе 2** изучаются необходимые и достаточные условия принадлежности функции обобщенным пространствам Бесова в терминах ее коэффициентов Фурье.

Пусть $\alpha(t)$ — положительная на $[0,1)$ и интегрируемая на всех $[\delta,1)$, $\delta>0$, функция, для которой выполнено δ_2-условие

$$\int_{\delta/2}^{\delta}\alpha(t)dt \le C\int_{\delta}^{2\delta}\alpha(t)dt \le C\int_{\delta}^{1}\alpha(t)dt, \quad \delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

Пусть для $f\in L^p[0,1)$, $1\le p<\infty$, по определению $\omega^*(f,t)_p = \sup\limits_{0<h<t}\|f(\cdot\oplus h)-f(\cdot)\|_p$. Если величина

$$I(p,\theta,\alpha)=\left(\int_0^1 \alpha(t)\left(\omega^*(f,t)_p\right)^{\theta}\,dt\right)^{1/\theta}$$

конечна, то f принадлежит классу Бесова $B(p,\theta,\alpha)$. Аналогично определяются $I(H,\theta,\alpha)$ и $B(H,\theta,\alpha)$. Классы $B(p,\theta,\alpha)$ являются аналогами классов, введенных М.К.Потаповым. В $B\,(\theta,p,\alpha)$ можно ввести норму

$$\|f\|_{B(\theta,p,\alpha)}=\|f\|_p+I_{\theta,p,\alpha}.$$

Введем следующие обозначения:

$$A(i)=\int_{1/(i+1)}^{1/i}\alpha(t)dt \quad ,\mu(i)=\int_{1/m_i}^{1/m_{i-1}}\alpha(t)dt \quad ,\beta(i)=\int_{1/(i+1)}^{1}\alpha(t)dt \quad ,i\in\mathbb{N},$$

Основными результатами главы 2 являются

Теорема 2.3.5. *1) Пусть $2 \le p < \infty$, $f \in L^p[0,1)$, $\theta > 0$.*
а) Если $\theta/p \ge 1$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A(k)^{1-\theta/p}\beta(k)^{\theta/p}\left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}$, то $f \in B(p,\theta,\alpha)$.
б) Если $0 < \theta/p \le 1$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(k)\left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}$, то $f \in B(p,\theta,\alpha)$.

2) Пусть $1 < p \le 2, f \in L^p[0,1), \theta > 0$.
а) Если $\theta \ge 2$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A(k)^{1-\theta/2}\beta(k)^{\theta/2}\left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}$, то $f \in B(p,\theta,\alpha)$.
б) Если $\theta \le 2$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(k)\left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}$, то $f \in B(p,\theta,\alpha)$.

Теорема 2.3.6. *Пусть $1 < p < \infty$, $\theta \ge 1$, $f \in B\left(\theta,p,\alpha\right)$.*
Тогда а) При $1 < p \le 2$ и $\theta/p \ge 1$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(k)\left|\hat{f}(k)\right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}$.
б) При $1 < p \le 2$ и $\theta/p \le 1$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A(k)^{1-\theta/p}\beta(k)^{\theta/p}k^{\theta-2\theta/p}|\hat{f}(k)|^{\theta}$.
в) При $p \ge 2$ и $\theta \ge 2$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(k)\left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}$.
г) При $p \ge 2$ и $\theta \le 2$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A(k)^{1-\theta/2}\beta(k)^{\theta/2}\left|\hat{f}(k)\right|^{\theta}$.

Достаточные условия принадлежности сумм тригонометрического ряда классам Бесова-Потапова были изучены М. Беришей, аналогичные необходимые условия установлены им же. Аналогами этих результатов являются теоремы 2.3.5 и 2.3.6.

Теорема 2.3.9. *Пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|a_k\right|^2 < \infty$, $\theta > 0$, $1 \le p \le \infty$, $f \in L^1[0,1)$ такова, что $\hat{f}(n) = a_k$ при единственном $n_k \in [m_k, m_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\hat{f}(n) = 0$ при остальных $n \in [m_k, m_{k+1})$. Тогда включение $f \in B(p,\theta,\alpha)$ влечет*
а) сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(m_k - 1)\left|a_k\right|^{\theta}$ при $\theta \ge 2$ и
б) сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\mu(k)\right)^{1-\theta/2}\beta^{\theta/2}(m_k - 1)\left|a_k\right|^{\theta}$ при $0 < \theta \le 2$.

Обратно.
в) Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(m_k - 1)\left|a_k\right|^{\theta}$ при $0 < \theta \le 2$ и
г) из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\mu(k)\right)^{1-\theta/2}\beta^{\theta/2}(m_k - 1)\left|a_k\right|^{\theta}$ при $\theta \ge 2$

следует $f \in B\,(p, \theta, \alpha)$.

Через $C^*[0,1)$ обозначим замыкание множества всех полиномов по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в равномерной норме $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1)} |f(x)|$. Пространство $B\,(\theta, \infty, \alpha)$ определяется аналогично $B\,(\theta, p, \alpha)$.

Теорема 2.3.10. *Пусть* $\theta > 0, f \in C^*[0,1)$ *удовлетворяет условию теоремы 2.3.9, причем* $a_k \geq 0$ *и* $\alpha(t)$ *такова, что* $\beta(m_k - 1) \asymp \mu(k)$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда* $f \in B\,(\infty, \theta, \alpha)$ *в том и только том случае, когда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(k)\,|a_k|^\theta < \infty$.

Изучение условия принадлежности классам Бесова-Потапова сумм лакунарных тригонометрических рядов или рядов с монотонными коэффициентами начато М. К. Потаповым и М. Беришей для классических пространств Бесова. Теоремы 2.3.9 и 2.3.10 являются развитием этих результатов для мультипликативных систем.

Результаты главы 2 опубликованы в [4] и [5].

В **главе 3** приводятся аналоги упомянутых выше результатов Г. Лоренца, С. Алянчича и М. Томича для двойных рядов по мультипликативным системам.

Введем следующие величины

$$\sigma_{rs}(p) = \left(\sum_{i=m_r}^{\infty}\sum_{j=m_s}^{\infty}\left|\hat{f}(i,j)\right|^p\right)^{1/p}, \quad \delta_{nm}(p) = \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|\hat{f}(i,j)\right|^p\right)^{1/p}.$$

Пусть $\Delta_{uv} f(x,y) = f(x \oplus u, y \oplus v) - f(x \oplus u, y) - f(x, y \oplus v) + f(x,y)$. Тогда для $f \in L^p[0,1)^2$, $1 \leq p < \infty$, полагаем

$$\omega^*_{kl}(f)_p = \sup\{\|\Delta_{uv} f\|_p : 0 \leq u < m_k^{-1}, 0 \leq v < m_l^{-1}\}, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+.$$

Пространство $C^*[0,1)^2$ определяется аналогично $C^*[0,1)$.

Основными результатами главы 3 являются

Теорема 3.2.1. *а) Пусть* $f \in L^\nu[0,1)^2$, $2 \leq \nu < \infty$ *или* $f \in C^*[0,1)^2 (\nu = \infty)$ *и сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty} (\omega^*_{kl}(f)_\nu)^p\,(m_k m_l)^{1-p/2}$, $\quad 1 \leq p \leq 2$. *Тогда сходится ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|\hat{f}(i,j)\right|^p$ *и справедлива оценка*

$$\sigma^p_{rs}(p) \leq C \sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty} (\omega^*_{kl}(f)_\nu)^p\,(m_k m_l)^{1-p/2}, \quad r, s \in \mathbb{Z}_+.$$

б) Пусть $\{\omega_{kl}\}_{k,l=0}^{\infty}$ *— двойная последовательность, убывающая по* k *и по* l *и сходящаяся к нулю, для которой сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty} \omega^p_{kl}(m_k m_l)^{1-p/2}$ *и* *выполняется аналог условия Бари* $\sum\limits_{k=r}^{\infty}\sum\limits_{l=s}^{\infty}\omega_{kl} = O(\omega_{rs}), \quad r,s\in\mathbb{Z}_+$. *Тогда существует* $f_0\in C^*[0,1)^2$, *такая что* $\omega^*_{kl}(f)_\infty \le C\omega_{kl}, \quad k,l\in\mathbb{Z}_+$, *и*

$$\sigma^p_{rs}(p) \ge C\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=s+1}^{\infty}\omega^p_{kl}(m_km_l)^{1-p/2}, \quad r,s\in\mathbb{Z}_+.$$

Теорема 3.2.3. 1) *Пусть* $1\le p\le 2$, $f\in L^\nu[0,1)^2$, $2\le\nu<\infty$, *тогда*

$$\delta_{m_r-1,m_s-1}(p,f) \le C\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{s-1}\left(\omega^*_{kl}(f)_\nu\right)^p(m_km_l)^{1-p/2}.$$

2) *Пусть* $1\le p\le 2$, $\{\omega_{kl}\}_{k,l=0}^{\infty}$ *убывает по* k *и по* l, $\omega_{kl}>0$ *при всех* $k,l\in\mathbb{Z}_+$ *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\omega^p_{kl}(m_km_l)^{1-p/2}$ *расходится и выполняется условие типа Бари (3.2.3), то найдется* $f_0\in C^*[0,1)^2$, *такая что* $\omega^*_{kl}(f_0)_\infty\le C_1\omega_{kl}$, $k,l\in\mathbb{Z}_+$, *и*

$$\delta_{m_r-1,m_s-1}(p,f) \ge C_2\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s}\omega^p_{kl}(m_km_l)^{1-p/2}, \quad r,s\in\mathbb{N}.$$

Часть а) теоремы 3.2.1 и часть 1) теоремы 3.2.3 являются аналогом результатов Л. П. Кагадий для двойных тригонометрических рядов. Более существенными являются части б) и 2) этих теорем, где утверждается неулучшаемость оценок из частей а) и 1) соответственно.

Теорема 3.2.4. *Пусть* $1\le p\le 2$, $1/p+1/q=1$, $f\in C^*[0,1)^2$ *и* $\sigma_{rs}(p) = O(\omega_{rs}), \quad r,s\in\mathbb{Z}_+$, *где* $\{\omega_{kl}\}_{k,l=0}^{\infty}$ *убывает по* k *и по* l, $\omega_{kl}>0$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\omega_{kl}(m_km_l)^{1/q}$ *сходится и*

$$\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\omega_{kl}(m_km_l)^{1/q} = O\left(\omega_{rs}(m_rm_s)^{1/q}\right), \quad r,s\in\mathbb{Z}_+,$$

то

$$\omega^*_{kl}(f)_\infty = O\left(\omega_{kl}(m_km_l)^{1/q}\right), \quad \omega^*_{kl}(f)_q = O(\omega_{kl}), \quad k,l\in\mathbb{Z}_+.$$

Теорема 3.2.4 представляет собой пример обратной теоремы Лоренца, которая по убыванию сумм из коэффициентов Фурье устанавливает принадлежность функции классам типа Гельдера.

Результаты главы 3 опубликованы в [2], [3], [6], [7].

В заключение автор выражает глубокую благодарность кандидату физико-математических наук Сергею Сергеевичу Волосивцу за научное руководство, постановку задачи и постоянную помощь и поддержку при выполнении данной работы.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Volosivets S. S.* Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems. / S. S. Volosivets, R. N. Fadeev // *Analysis Mathematica.* — 2011. — Vol. 37, no. 3. — Pp. 215–238.

[2] *Фадеев Р. Н.* Аналоги теорем Лоренца для двойных мультипликативных систем. / Р. Н. Фадеев //Изв. вузов. Матем. — 2012. — №2. — С. 76–85.

[3] *Фадеев Р. Н.* Равномерная сходимость рядов по мультипликативным системам. / Р. Н. Фадеев //Саратов, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, №1, ч. 1. — С. 76–85.

[4] *Фадеев Р. Н.* Необходимые и достаточные условия принадлежности классам Бесова-Потапова и коэффициенты Фурье по мультипликативным системам. / Р. Н. Фадеев //Саратов, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, №4. — С. 41–48.

[5] *Фадеев Р. Н.* Необходимые и достаточные условия принадлежности обобщенным классам Бесова. / Р. Н. Фадеев //Саратов, Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. научн. Сборник.— 2012. — Вып. 7 — С. 9-21.

[6] *Фадеев Р. Н.* О некоторых условиях абсолютной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам. / Р. Н. Фадеев //Саратов, Математика. Механика. Сб. науч. тр. — 2008. — Вып. 10. — С. 81–83.

[7] *Фадеев Р. Н.* Условия выполнимости равенства Парсеваля для рядов Фурье-Уолша. / Р. Н. Фадеев //Саратов, Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. научн. Сборник. — 2008. — Вып. 5. — С. 17–24.

[8] *Фадеев Р. Н.* Оценки кратных коэффициентов Фурье-Виленкина. / Р. Н. Фадеев //Саратов, Математика. Механика. Сб. науч. тр. — 2013. — Вып. 15. — С. 89–91.

Работы [1] - [4] опубликованы в журналах, включённых в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени кандидата наук.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

- Оценки сверху наилучшего приближения функции в пространстве $L^p[0,1)$ и пространстве Харди $H(\mathbf{P},[0,1))$ в терминах ее коэффициентов Фурье и их разностей.

- Оценка сверху наилучшего приближения функции и ее приближения углом в пространстве Харди $H(\mathbf{P},[0,1)^2)$ в терминах ее коэффициентов Фурье и их разностей.

- Необходимые и достаточные условия принадлежности функции $f \in L^p[0,1)$ обобщенным пространствам Бесова $B(p,\theta,\alpha)$ в том числе для лакунарных рядов и рядов с обобщенно монотонными коэффициентами.

- Неулучшаемые оценки некоторых сумм коэффициентов Фурье функции $f \in L^p[0,1)^2, 2 \leq p < \infty$ через ее модуль непрерывности.

Подписано в печать .10.14.
Формат 60× 84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Компьютер Модерн.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100. Заказ

Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.