На правах рукописи

Хасанов Юсуфали

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ И СУММИРУМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ–ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01–Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико–математических наук

Казань – 2014

Работа выполнена на кафедре информатики и информационных систем экономического факультета Российско-Таджикского (славянского) университета.

Научный консультант: Тиман Майор Филиппович
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой высшей
математики Днепропетровского государственного
аграрного университета

Официальные оппоненты: Дьяченко Михаил Иванович
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории функций и
функционального анализа Московского
Государственного Университета
им. М.В.Ломоносова

Скопина Мария Александровна
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного университета

Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры информационных систем и
технологий Вологодского государственного
университета

Ведущая организация: Московский физико-технический институт

Защита состоится 25 сентября 2014 г. в 14 ч. 30 мин. на заседании Диссертационного совета ДМ 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35, корп. 2, ауд. 610

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан «___» ____________________ 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент Липачёв Е.К.

Общая характеристика работы

Одной из актуальных проблем теории почти-периодических функций является исследование признаков абсолютной сходимости рядов Фурье, а в случае их расходимости изучение суммируемости таких рядов, аналоги которых ранее проводились в пространстве периодических функций. Такой подход обусловлен тем, что между теориями почти-периодических функций и периодических функций имеется много аналогий, ибо периодическая функция является подклассом почти-периодических функций. Как и в случае периодических, для почти-периодических функций можно отнести ряд Фурье и почти-период почти-периодических функций определяет показатели Фурье этой функции. Т.е. можно найти целые числа n_k, для которых выполняется $|\lambda_k\tau - 2\pi n_k| < \delta$, где λ_k - показатели Фурье, τ - почти-период, $0 < \delta < \pi,\ k = 1,2,\ldots,N,$ N - целое положительное число.

В отличие от периодических функций, в случае почти-периодических функций не удается дать простых и вместе с тем достаточно общих признаков сходимости рядов Фурье. Поэтому в теории почти-периодических функций еще большее значение приобретают методы суммирования рядов Фурье, потому что поведение ряда Фурье почти-периодических функций еще зависит от поведения ее показателей Фурье. Например, С.Бохнер показал признаки сходимости таких рядов в случае, когда показатели Фурье стремятся к бесконечности. Б.М.Левитан указал аналогичные признаки, когда показатели Фурье стремятся к нулю.

Все рассмотренные результаты были посвящены только непрерывным почти-периодическим функциям. Распространение теории почти-периодических функций на разрывные (суммируемые) функции оказалось нелегкой задачей.

Безикович[1] рассматривал наиболее широкий класс почти-периодических функций. В классе функций Безиковича возможно обобщение теоремы Рисса-Фишера, т.е. существует почти-периодическая функция Безиковича, для которой тригонометрический ряд является ее рядом Фурье.

Актуальность темы. Особую роль в теории почти-периодических функций играют исследования проблем абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье таких функций.

Значительный вклад в исследования абсолютной сходимости рядов Фурье периодических функций внесли С.Н.Бернштейн, О.Сас, А.Зигмунд, С.Б.Стечкин, Р.Салем, С.В.Бочкарев, Ж.-П.Кахан, А.А.Конюшков, П.Л.Ульянов, М.Ф.Тиман, Р.М.Тригуб. В случае кратных тригонометрических рядов Фурье известны результаты М.Ф.Тимана, Б.И.Голубова, Ю.Муселиака, О.Д.Габисония, М.И.Дьяченко. В настоящий момент в теории абсолютно сходящихся рядов Фурье периодических функций одной переменной получены глубокие и окончательные результаты, которые изложены в монографии Ж.-П.Кахана[2]. Что же касается вопросов абсолютной суммируемости таких функций, то имеются работы Л.Лейндлера, К.Тандори, М.Ф.Тимана, Л.В.Грепачевской. В случае кратных рядов Фурье проведены исследования в работах В.Г.Челидзе, М.Ф.Тимана, И.Е.Жака, Ю.А.Пономаренко, М.И.Дьяченко.

Напротив, теория абсолютно сходящихся рядов Фурье почти-периодических функций исследована слабо. Это связано с тем, что показатели Фурье таких функций могут лежать всюду плотно и, следовательно, неясно, в каком порядке следует суммировать члены ря-

---

[1] Besicovitch A.S. Almost periodic functions. Cambridge, 1932. 180 p.
[2] Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976. 204 с.

да Фурье. В том случае, когда ряд Фурье сходится абсолютно, вопрос о порядке членов ряда Фурье отпадает.

В работах Б.М.Левитана, Е.А.Бредихиной, Н.П.Купцова, Я.Г.Притулы, Ю.Муселиака, А.С.Джафарова и Г.А.Мамедова получены некоторые достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Бора и Безиковича функций.

Многие вопросы, полностью исследованные в периодическом случае: аппроксимативный критерий абсолютной сходимости, достаточные условия, учитывающие рост вариации функции, выпуклость, для почти-периодических функций не решены. Не проводились исследования по проблемам суммирования рядов Фурье почти–периодических функций. Кроме того, аналогичные вопросы не рассмотрены для кратных рядов Фурье почти-периодических функций многих переменных.

В связи с вышеизложенным особый интерес вызывает проведение исследований по получению признаков абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций.

Цели диссертационной работы. I. Исследовать критерии абсолютной сходимости и абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье некоторых классов почти-периодических функций, когда: а) их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности; б) их спектр имеет единственную предельную точку в нуле, как для функций одной переменных, так и для функций многих переменных.

II. Устанавливать оценки уклонения различных классов почти-периодических функций от некоторых сумм и интегралов в равномерной метрике.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории функций и функционального анализа, теории рядов Фурье и теории суммирования рядов методом Чезаро.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты.

1. Доказаны теоремы, устанавливающие различные необходимые (в случае монотонности коэффициентов Фурье) и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье некоторых классов почти-периодических функций, когда их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности, или в нуле.

2. Получены критерии абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье некоторых классов почти-периодических функций, в зависимости от поведения их спектров.

3. Установлены связи между коэффициентами Фурье и степенью суммируемости почти-периодических в смысле Безиковича и Степанова функций.

4. Доказаны теоремы, дающие достаточные условия абсолютной сходимости и суммируемости кратных рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций многих переменных.

5. Установлены аналоги результатов С.Н.Бернштейна и Джексона для равномерных почти-периодических функций с произвольным спектром.

6. Найдены оценки уклонения равномерных почти-периодических функций от некоторых сумм и интегралов в равномерной метрике.

Практическая и теоретическая значимость. Материалы диссертации в значительной степени носят теоретический характер. В ней на основе методов функционального анализа изучены признаки абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье некоторых классов почти-периодических функций.

Результаты диссертации могут найти применение в фундаментальных исследованиях по теории рядов Фурье и гармонического анализа. Разработанные в работе методы могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов отделении математики РТСУ и математических факультетах других ВУЗов.

Структура и содержание диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав и списка цитированной литературы. Объем диссертации составляет 254 страниц. Список литературы состоит из 155 наименований.

Во введении обосновывается актуальность рассматриваемых в диссертационной работе проблем, приводится история вопроса и обзор литературных источников, формулируется цель исследований и кратко излагается основное содержание работы.

Первая глава посвящена изучению критериев абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича.

В параграфе 1.1 приводятся основные понятия и определения и ранее другими авторами установленные результаты исследования абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье периодических и почти-периодических функций.

Определение 1. *Непрерывная на всей действительной оси функция* $f(x)$ *называется равномерной почти-периодической функцией, если для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое положитель-*

ное число $l = l(\varepsilon)$*, что в каждом интервале длины* l *найдется хотя бы одно число* τ*, для которого*

$$\left| f(x+\tau) - f(x) \right| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty).$$

Через B обозначим пространство всех равномерных почти-периодических функций с нормой

$$\| f(x) \|_B = \sup_x | f(x) |.$$

При исследовании признаков абсолютной сходимости рядов Фурье таких функций в зависимости от поведения их спектров рассматриваются следующие их структурные характеристики:

1. Модуль непрерывности порядка ***k*** функции $f(x) \in B$

$$\omega_k(f;h)_B = \sup_{|t| \le h} \sup_x \left| \Delta_t^k f(x) \right|,$$

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} f(x+rt) \quad (h > 0,\ k \in N);$$

2. Модуль усреднения порядка k функции $f(x) \in B$ на $(-\infty, \infty)$

$$W_k(f;H)_B = \sup_{T \ge H} \sup_x \left| f_{T^k}(x) \right|,$$

где $H > 0,\ k \in N$,

$$f_{T^k}(x) = (2T)^{-k} e^{ix} \int_{x-T}^{x+T} dt_1 \int_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \ldots \int_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T} dt_{k-1} \int_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} f(t_k) e^{-it_k} dt_k$$

.

Для измеримой и интегрируемой в смысле Лебега на любом конечном отрезке функции $|f(x)|^p$ $(1 \le p < \infty)$, положим

$$\|g\|_{B_p} = \left\{ \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |g(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad \text{(A)}$$

Определение 2. *Функцию* $f(x)$ *с конечной нормой (А) будем называть* B_p $(1 \le p < \infty)$ *- почти-периодической, или почти-периодической в смысле Безиковича, если существуют последовательности действительных чисел* $\{\lambda_n\}$ $(n = 1,2,...)$ *и ряд вида*

$$P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(i(\lambda_n x)$$

для прямоугольных сумм $P_n(x)$*, которой выполняется равенства*

$$\lim_{n \to \infty} \| f(x) - P_n(x) \|_{B_p} = 0.$$

Пространство функций $f(x)$, удовлетворяющих всем условиям определения 1, будем называть B_p - пространством, или пространством Безиковича, в котором за норму функции $f(x) \in B_p$ $(p \ge 1)$ принимается величина (А).

Известно, что всякая функции $f(x) \in B_p$ разлагается в ряд Фурье

$$\sum_n A_n \exp(i(\lambda_n),$$

где

$$A_n = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-i(\lambda_n) dx \text{ -}$$

коэффициенты Фурье, являющиеся комплексными числами. Последовательности $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ называют показателями Фурье или спектром функции $f(x) \in B_p$ по переменной x.

В <u>параграфе 1.2</u> исследуются критерий абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций, когда показатели Фурье имеют предельную точку в бесконечности, т.е. когда ряд Фурье функции $f(x) \in B_2$ имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}, \tag{1}$$

где $\quad A_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\exp(-i\lambda_n x)dx,$

то ее показатели Фурье удовлетворяют условиям:

$$\lambda_0 = 0;\ \ \lambda_{-n} = -\lambda_n,\ \ |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|;\ \ \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty. \tag{2}$$

Приводятся критерии сходимости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} n^{\gamma} \tag{3}$$

для различных значений $\beta\ (0 < \beta < 2)$ и $\gamma\ (0 \le \gamma < 1)$.

Теорема 1.20. *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *удовлетворяет условиям (2) и* $n^{\alpha} = O\{\lambda_n\}$ $(\alpha > 0)$.

Если при $0 < \beta < 2,\ 0 \le \gamma < 1,\ k > \dfrac{\gamma + 1 - \frac{\beta}{2}}{\alpha\beta}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} \omega_k^{\beta}(f; \frac{1}{n})_{B_2} < \infty \quad (\rho = \frac{\gamma + 1 - \frac{\beta}{2}}{\alpha}),$$

то ряд (3) сходится.

При $\gamma = 0,\ k = 1$ эта теорема содержит результат Ю.Муселиака[3], но при $\beta = 1,\ 0 < \alpha \le 1/2$ выполнение условие Муселиака влечет за собой то, что функция $f(x)$ почти всюду константа. Поэтому, так как

$$\omega_k(f; h)_{B_2} \le 2^k \omega_1(f; h)_{B_2},$$

[3] Musielak J. Bull. Acad. Polon. sci. ci., 1957, 3, № 5, p. 9-17.

то при $\gamma = 0$ теорема 1.20 дает более сильный критерий сходимости рядов вида (3), чем теорема Ю.Муселиака и удается ликвидировать недостаток критерия Ю.Муселиака при $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$.

Здесь также рассматриваются аналогичные вопросы для функций, имеющих ограниченные вариации.

Теорема 1.21. *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in BV_{m,2}$ $(o < m < 2)$ *удовлетворяет условиям (2) и* $n^{\alpha} = \mathrm{O}\{\lambda_n\}$ $(\alpha > 0)$.

Если при $0 < \beta < 2$ *справедливо*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} \omega_k^{\beta(1-\frac{m}{2})}\left(f; \frac{1}{n}\right)_B < \infty,$$

где $\rho = \dfrac{1-\frac{\beta}{2}}{\alpha} - \dfrac{\beta}{2}$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta}$ *сходится.*

При $\gamma = \mathbf{0}$, $k = \mathbf{1}$, этот результат установлен Ю.Муселиаком[4]. В случае, когда $k < 1$, $\beta = \dfrac{2}{2-k}$ и $\alpha \le \dfrac{1-k}{3-k}$, условие теоремы Муселиака приводит к тому, что функция $f(x) \in B_2$ почти всюду константа.

Приводятся необходимые условия для абсолютной сходимости рядов Фурье функции $f(x) \in B_2$ с монотонно убывающими коэффициентами Фурье.

Теорема 1.22. *Пусть функция* $f(x) \in B_2$ *и ее коэффициенты Фурье* $\{A_n\}$ *монотонно убывают. Если числа* $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n,\ \lambda_n = n^{\alpha}\ (\alpha > 0),$$

то сходимость ряда (3) влечет сходимость ряда

---

[4] Musielak J. Bull. Acad. Polon. sci. ci., 1957, 3, № 5, p. 9-17.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu\cdot(\gamma+1-\frac{\beta}{2})} \omega_k^{\beta}(f;2^{-\nu\alpha})_{B_2} \quad (0<\beta<2,\ 0\le\gamma<1,\ k>\frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha\beta}).$$

Обобщая достаточные условия абсолютной сходимости рассматриваемых рядов, исследуется ряды вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)|A_n|^{\beta} \quad (0<\beta<2), \tag{4}$$

где $\varphi(n)$ - четная, положительная функция, определенная на множестве целых чисел, $\{A_n\}$ - коэффициент Фурье функции $f(x)\in B_2$.

Теорема 1.23. *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $f(x)\in B_2$ *удовлетворяет условиям (2). Если при* $0<\beta<2$ *выполнены условия*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2^\nu}}{\lambda_{2^{\nu-1}}}\right)^{k\beta} \psi_{\beta}(2^{\nu})\omega_k^{\beta}(f;\lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2}<\infty,$$

где $\psi_{\beta}(2^{\nu})=\left\{\sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}+1}[\varphi(n)]^{\frac{2}{2-\beta}}\right\}^{1-\frac{\beta}{2}}$ *, то ряд (4) сходится.*

В <u>третьем параграфе главы I</u> изучаются признаки абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций, когда показатели Фурье имеют предельную точку в нуле, т.е.

$$\lambda_{-n}=-\lambda_n,\ |\lambda_n|<|\lambda_{n-1}|;\ \lim_{n\to\infty}|\lambda_n|=0 \tag{5}$$

Теорема 1.24. *Пусть для спектра* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $f(x)\in B_2$ *выполняются условия*

$$\lambda_{-n}=-\lambda_n,\ \lambda_n=\mathrm{O}\{n^{\alpha}\}\,(\alpha>0).$$

Если выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} W_k^{\beta}(f;n)_{B_2} < \infty, \tag{6}$$

где $0<\beta<2,\quad \rho=\dfrac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha},\quad 0\le\gamma<1,\quad k>\dfrac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha\beta}$,

тогда ряд (3) сходится.

Следующим утверждением рассматривается вопрос, в каком мере условия (6) в теореме 1.24 является необходимым для сходимости рядов вида (3).

Теорема 1.25. *Пусть показатели Фурье* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $f(x)\in B_2$ *удовлетворяют условиям*

$$\lambda_{-n}=-\lambda_n,\ \lambda_n=n^{-\alpha}\ \ (\alpha>0),$$

и последовательность ее коэффициентов Фурье $\{A_n\}$ *монотонно убывают. Тогда из сходимости ряда (3) вытекает сходимость ряда*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu(\gamma+1-\frac{\beta}{2})}\cdot W_k^{\beta}(f;2^{\nu\alpha})_{B_2},$$

где $0<\beta<2,\ 0\le\gamma<1,\ k>\dfrac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha\beta}$.

Теорема 1.26. *Пусть показатели Фурье* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $f(x)\in B_2$ *удовлетворяют условиям (5).*

Если при $0<\beta<2$ *выполнено условие*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi_{\beta}(2^{\nu})W_k^{\beta}(f;\lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2}<\infty,$$

где

$$\psi_{\beta}(2^{\nu}) = \left\{ \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}+1} [\varphi(n)]^{\frac{2}{2-\beta}} \right\}^{1-\frac{\beta}{2}},$$

то ряд (4) сходится.

Аналог теоремы 1.26 при $\gamma = \mathbf{0}, k = \mathbf{2}, \alpha = \mathbf{1}$ получен А.С.Джафаровым и Г.А Мамедовым[5], но в качестве структурной характеристики свойств функции использована величина, определяющаяся с помощью преобразования Лапласа.

Вторая глава диссертации посвящена изучению признаков абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций.

В первом параграфе этой главы изучаются основные положения методов суммирования рядов, в частности метод средних арифметических (Чезаро).

В параграфе 2.2 изучаются вопросы абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций, когда их спектр имеют предельную точку на бесконечности.

Теорема 2.4. *Пусть функция* $f(x) \in B_2$ *и ее спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|, \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty, n^{\delta} = O\{\lambda_n\} \ (n > 0, \delta > 0).$$

Если при $0 < \beta < 2,\ 0 \le \gamma < 1,\ k > \dfrac{\gamma + 1 - \frac{\beta}{2}}{\beta\delta},\ \rho = \dfrac{\gamma + 1 - \frac{\beta}{2}}{\delta}$

[5] Джафаров А.С., Мамедов Г.А. Известия Ан Азерб. ССР, серия физ-тех и мат., 1983, №5, с.8-13.

выполнены $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1}\omega_k^{\beta}(f;\frac{1}{n})_{B_2} < \infty,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^{\beta}$ *суммируем методом* $|C,-\gamma|$.

При различных значений $\alpha > \mathbf{0}$ для $|C,\alpha|$ - суммируемости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(i\lambda_n x) \qquad (7)$$

справедливо следующие утверждения:

Теоремы 2.5 - 2.7. *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *удовлетворяет условиям*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|, \lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty.$$

Тогда:

I. *При* $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ *условие*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\frac{1}{2}-\alpha)} (\frac{\lambda_{2^{\nu+1}}}{\lambda_{2^{\nu}}})^k \omega_k(f;\lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2} < \infty$$

влечет $|C,\alpha|$ *- суммируемость ряда (7);*

II. *Условие* $\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} (\frac{\lambda_{2^{\nu+1}}}{\lambda_{2^{\nu}}})^k \omega_k(f;\lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2} < \infty$

влечет $\left|C,\frac{1}{2}\right|$ *- суммируемость ряда (7);*

III. *При* $\alpha > \frac{1}{2}$ *условие*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu}\left(\lg 2^{\nu}\right)^{-1/2}\left(\frac{\lambda_{2^{\nu+1}}}{\lambda_{2^{\nu}}}\right)^{k}\omega_k(f;\lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2} < \infty$$

влечет $|C,\alpha|$ *- суммируемость ряда (7).*

Аналог результатов, сформулированных в теореме 2.5-2.7, в случае $f(x)\in L_2$ в тригонометрической системе и по любой ортогональной на отрезке системе функций получен Л.В.Грепачевской[6], а случае $f(x)\in L_p$ $(1 < p \le 2)$ и $0 \le \alpha < 1/2$, М.Ф.Тиманом[7].

В <u>параграфе 2.3</u> рассмотрен вопрос о $|C,\alpha|$ - суммируемости почти всюду ряда Фурье функции $f(x)\in B_2$ для значений α $(-1<\alpha<\frac{1}{2})$ в случае, когда ее показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ имеют единственную предельную точку в нуле.

Теорема 2.8. *Пусть для спектра* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $f(x)\in B_2$ *выполняются условия*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n,\ \lambda_n = \mathrm{O}\{n^{-\delta}\} \quad (\delta > 0).$$

Если выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} W_k^{\beta}(f;n)_{B_2} < \infty,$$

где $\quad 0<\beta<2, \quad 0\le\gamma<1, \quad k > \dfrac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\beta\delta}, \quad \rho = \dfrac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\delta},$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|C_n|^{\beta}$ *суммируем методом* $|C,-\gamma|$.

---

[6] Грепачевская Л.В. Математический сборник, № 3, 65 (107), 1964, с. 370-389.
[7] Тиман М.Ф. Сообщение Ан Груз. ССР, № 6, 1961, с.641-646.

Следующие результаты параграфа 2.3 устанавливают некоторые критерии $|C,\alpha|$ - суммируемости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(i\lambda_n x) \qquad (8)$$

для различных значений $\alpha > 0$.

Теоремы 2.9-211. *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, \ |\lambda_{n+1}| < |\lambda_n|, \ \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0.$$

Тогда:

I. *Если при* $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ *выполнены условия*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\frac{1}{2}-\alpha)} W_k\,(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2} < \infty,$$

то ряд (8) $|C,\alpha|$ *- суммируем почти всюду;*

II. *При* $\alpha = \frac{1}{2}$ *условие*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} W_k(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2} < \infty$$

влечет $\left|C,\frac{1}{2}\right|$ *- суммируемость ряда* (8) *почти всюду*;

III. *При* $\alpha > \frac{1}{2}$ *условие*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \left(\lg 2^\nu\right)^{-1/2} W_k(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2} < \infty$$

влечет $|C,\alpha|$ *- суммируемость ряда (8) почти всюду.*

В параграфе 2.4 рассматривается вопрос о связи между степенью суммируемости функции и коэффициентами Фурье в пространствах Безиковича и Степанова, т.е. приводятся результаты, которые обобщают теорему Пэли для почти–периодических в смысле Безиковича и Степанова функций при $p > 2$ по произвольной тригонометрической системе.

Теорема 2.15. *Пусть задан тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(i\lambda_n x), \tag{9}$$

где $\Lambda\{\lambda_n\}$*- произвольное счетное множество действительных чисел. Если при некотором* $p > 2$

$$\sigma_p = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^p n^{p-2} < \infty, \tag{10}$$

то в пространстве B_p *найдется функция* $f(x)$*, для которой ряд (9) будет ее рядом Фурье, т.е.*

$$A_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-i\lambda_n x) dx$$

и

$$D_{B_p}\{f(x)\} \le C_p \sigma_p^{1/p}.$$

Теорема 2.16. *Пусть задан ряд (9), где* $\Lambda\{\lambda_n\}$ *- последовательность чисел, удовлетворяющая при некотором* $\alpha > 0$ *для всех* n

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \alpha.$$

Если при некотором $p > 2$*выполнено условие (10), то в пространстве* S_p*найдется функция* $f(x)$*, для которой* $\{A_k\}$ *будут ее коэффициентами Фурье и*

$$D_{S_p}\{f(x)\} \le C_p \cdot \sigma_p^{1/p},$$

где

$$D_{S_p}\{f(x)\} = \underset{x}{Sup}\left(\frac{1}{l}\int\limits_x^{x+l}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Глава 3 работы посвящена исследованию признаков абсолютной сходимости и суммируемости кратных рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций многих переменных.

В параграфе 3.1 дается краткий исторический обзор результатов исследований В.Г.Челидзе, Ю.Муселиака, И.Е.Жака, М.Ф.Тимана. Приводятся найденные признаки абсолютной сходимости кратных рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций многих переменных.

Определение 3. *Функцию* $f(x_1, x_2,...,x_k)$ *будем называть* $B_p^{(k)}$ *- почти-периодической, или почти-периодической в смысле Безиковича (* $p \geq 1$*), если:*

1. $|f(x_1, x_2,...,x_k)|^p$ *измерима и интегрируема в смысле Лебега на любом* k *– мерном кубе пространства* R^k;

2. $\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{(2T)^k}\int\limits_{-T}^{T}\cdots\int\limits_{-T}^{T}|f(x_1,x_2,...,x_k)|^p\,dx_1\cdots dx_k\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$;

3. *Существуют последовательности действительных чисел* $\left\{\lambda_{n_j}^{(j)}\right\}_{j=1}^{k}$ $(n_j \in \mathrm{Z})$ *и ряд вида*

$$P(x_1,...,x_k) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=-\infty}^{\infty}A_{n_1,...,n_k}\exp\left(i(\lambda_{n_1}^{(1)}x_1+\cdots+\lambda_{n_k}^{(k)}x_k)\right)$$

для последовательности прямоугольных сумм $P_{n_1,...,n_k}(x_1,...,x_k)$, *которой выполняется равенства*

$$\lim_{n_j\to\infty}\left\|f(x_1,...,x_k) - P_{n_1,...,n_k}(x_1,...,x_k)\right\|_{B_p^{(k)}} = 0 \ (j = 1,..k).$$

Пространство функций $f(x_1, x_2, ..., x_k)$, удовлетворяющих всем условиям определения 3, будем называть $B_p^{(k)}$ - пространством, или k – мерным пространством Безиковича, в котором за норму функции $f(x_1, ..., x_k) \in B_p^{(k)}$ $(p \geq 1),\ k = 1, 2, ...)$ принимается величина

$$\| f(x_1, ..., x_k) \|_{B_p^{(k)}} = \left\{ \overline{M} \left\{ | f(x_1 ..., x_k) |^p \right\} \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

Пусть функция $f(x_1, ..., x_k) \in B_p^{(k)}$ имеет ряд Фурье вида

$$\sum_{n_1} ... \sum_{n_k} A_{n_1, ..., n_k} \exp(i(\lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + ... + \lambda_{n_k}^{(k)} x_k)),$$

где

$$\lambda_{-n_j}^{(j)} = -\lambda_{n_j}^{(j)}; \left| \lambda_{n_{j-1}}^{(j-1)} \right| < \left| \lambda_{n_j}^{(j)} \right|; \lim_{n_j \to \infty} \lambda_{n_j}^{(j)} = \infty \left(j = \overline{1, k} \right), \qquad (11)$$

т.е. показатели Фурье имеют единственную предельную точку на бесконечности.

Для таких функций $f(x_1, ..., x_k) \in B_p^{(k)}$, в качестве характеристик их свойств рассмотрим величины

$$\omega_{r,(j)}(f; h)_{B_p^{(k)}} = \sup_{|t| \leq h} \left\| \Delta_{t,j}^r f(x_1, ..., x_k) \right\|_{B_p^{(k)}},$$

где

$$\Delta_{t,j}^r f(x_1, ..., x_k) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + mt, x_{j+1}, ..., x_k).$$

Устанавливаются утверждения, показывающие какими свойствами должна обладать функция по каждой из переменных в отдельности для абсолютной сходимости её кратного ряда Фурье в случае, когда показатели Фурье

$$\Lambda_1 \{ \lambda_{n_1}^{(1)} \}_{n_1 = 1}^{\infty}, \Lambda_2 \{ \lambda_{n_2}^{(2)} \}_{n_2 = 1}^{\infty}, ..., \Lambda_k \{ \lambda_{n_k}^{(k)} \}_{n_k = 1}^{\infty},$$

удовлетворяет условиям (11).

Теорема 3.11. *Пусть функция* $f(x_1,\ldots,x_k)\in B_p^{(k)}$ $(\mathbf{1}<p\le\mathbf{2})$ *и её спектр* $\Lambda_j\{\lambda_{n_j}^{(j)}\}_{j=1}^k$ *удовлетворяет условиям (11). Если при* $\mathbf{0}<\beta<\frac{p}{p-\mathbf{1}}$, $r>k\left(\frac{\mathbf{1}}{\beta}-\frac{p-\mathbf{1}}{p}\right)$ *и каждом* $j=1,2,\ldots,k$ *выполнены условия*

$$\sum_{\nu=\mathbf{1}}^{\infty}\mathbf{2}^{\nu k\left(\mathbf{1}-\beta\frac{p-\mathbf{1}}{p}\right)}\left(\frac{\lambda_{\mathbf{2}^{\nu}}^{(j)}}{\lambda_{\mathbf{2}^{\nu-\mathbf{1}}}^{(j)}}\right)^{r}\omega_{r,(j)}^{\beta}\left(f;\frac{\mathbf{1}}{\lambda_{\mathbf{2}^{\nu}}^{(j)}}\right)_{B_p^{(k)}}<\infty,$$

то ряд

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=0}^{\infty}\left|A_{n_1,\ldots,n_k}\right|^{\beta}<\infty.$$

Далее в параграфе 3.1 устанавливаются признаки абсолютной сходимости кратных рядов Фурье функции $f(x_1,\ldots,x_k)\in B_p^{(k)}$ $(\mathbf{1}<p\le\mathbf{2})$, когда показатели Фурье $\Lambda_j\{\lambda_{n_j}^{(j)}\}_{j=1}^k$ функции $f(x_1,\ldots,x_k)$ имеют единственную предельную точку на нуле, т.е. удовлетворяют условиям

$$\lambda_{-n_j}^{(j)}=-\lambda_{n_j}^{(j)};\ \left|\lambda_{n_{j-1}}^{(j-1)}\right|>\left|\lambda_{n_j}^{(j)}\right|;\ \lim_{n_j\to\infty}\lambda_{n_j}^{(j)}=0\ \ \left(j=\overline{1,k}\right).\tag{12}$$

Пусть функция $f(x_1,\ldots,x_k)\in B_p^{(k)}$ имеет спектры $\Lambda_j\{\lambda_{n_j}^{(j)}\}$ (j=1,2,…,k), к которым не принадлежат их предельные точки, т.е.

$$\overline{M_{x_j}}\{f(x_1,\ldots,x_k)\}\ne 0\quad (j=1,2,\ldots,k).\tag{13}$$

Для функции $f(x_1,\ldots,x_k)\in B_p^{(k)}$, когда её спектр удовлетворяет условиям (12) введём в рассмотрение модуль усреднения порядка r $(r\in N)$ данной функции на $(-\infty,\infty)$.

$$W_{r,(j)}(f;H)_{B_2^{(k)}} = \sup_{|T|\ge H}\left\| f_{T^r}^{(j)}(x_1,\dots,x_k)\right\|_{B_p^{(k)}} \qquad (H>0),$$

где

$$f_{T^r}^{(j)}(x_1,\dots,x_k)=$$

$$=\frac{1}{(2T)^r}\int\limits_{x_j-T}^{x_j+T}dt_1\int\limits_{t_1-T}^{t_1+T}dt_2\dots\int\limits_{t_{r-2}-T}^{t_{r-2}+T}dt_{r-1}\int\limits_{t_{r-1}-T}^{t_{r-1}+T}f\quad(x_1,\dots,x_{j-1},t_r,x_{j+1},\dots,x_k)\,dt_r.$$

В этом случае, когда показатели Фурье удовлетворяют условиям (12) и (13), основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 3.13. *Пусть спектр* $\Lambda_j\ \{\lambda_{n_j}^{(j)}\}_{j=1}^{k}$ *функции* $f(x_1,\dots,x_k)\in B_p^{(k)}$ $(\mathbf{1}<p\le\mathbf{2})$ *удовлетворяет условиям (12) и (13). Если при* $\mathbf{0}<\beta<\frac{p}{p-\mathbf{1}},\ r>k\left(\frac{\mathbf{1}}{\beta}-\frac{p}{p-\mathbf{1}}\right)$ *и каждом* $j=1,2,\dots,k$ *выполнены условия*

$$\sum_{\nu=\mathbf{1}}^{\infty}\mathbf{2}^{\nu k\left(\mathbf{1}-\beta\frac{p-\mathbf{1}}{p}\right)}W_{r,(j)}^{\beta}\left(f;\frac{\mathbf{1}}{\lambda_{\mathbf{2}^\nu}^{(j)}}\right)_{B_p^{(k)}}<\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{n_1}\dots\sum\limits_{n_k}\left|A_{n_1,\dots,n_k}\right|^{\beta}$ *сходится.*

Теоремы 3.11 и 3.13 для функций $f(x_1,\dots,x_k)\in L_p^{(k)}$ $(1<p\le 2)$ получены М.Ф.Тиманом[8].

В параграфе 3.3 установлены критерии абсолютной чезаровской суммируемости кратных рядов Фурье почти-периодических функций многих переменных.

---

[8] Тиман М.Ф. Математический сборник, 75 (117), №3, 1968, с.361-373.

Определение 4. *Кратный ряд* $\sum\limits_{n_1,\dots,n_k}^{\infty} u_{n_1,\dots,n_k}$ *называется* $|C;\beta_1,\dots,\beta_k|$ *- суммируемым* $(\beta_i > -1,\ i = 1,2,\dots,k)$*, если для любой совокупности индексов* $n_{\nu_1},\dots,n_{\nu_m}$ $(m \le k)$ *выполнены условия*

$$\sum_{n_{\nu_1}=1}^{\infty} \dots \sum_{n_{\nu_m}=1}^{\infty} \frac{\left|\tau_{n_{\nu_1},\dots,n_{\nu_m}}^{\beta_{\nu_1},\dots,\beta_{\nu_m}}\right|}{n_{\nu_1}\dots n_{\nu_m}} < \infty$$

где

$$\tau_{n_{\nu_1},\dots,n_{\nu_m}}^{\beta_{\nu_1},\dots,\beta_{\nu_m}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\mu_{\nu_1}=1}^{n_{\nu_1}} \dots \sum\limits_{\mu_{\nu_m}=1}^{n_{\nu_m}} A_{n_{\nu_1}-\mu_{\nu_1}}^{\beta_{\nu_1}-1} \dots A_{n_{\nu_m}-\mu_{\nu_m}}^{\beta_{\nu_m}-1} \mu_{\nu_1}\dots\mu_{\nu_m} u_{0,\dots 0,\mu_{\nu_1},0,\dots,0,\mu_{\nu_m},\dots,0}}{A_{n_{\nu_1}}^{\beta_{\nu_1}} \dots A_{n_{\nu_m}}^{\beta_{\nu_m}}}$$

$$A_n^{\beta} = \frac{(\beta+1)\dots(\beta+n)}{n!}.$$

Установлены утверждения, которые дают критерии абсолютной суммируемости кратного ряда Фурье функции $f(x_1,\dots,x_k) \in B_2^{(k)}$ в терминах коэффициентов Фурье.

Теоремы 3.15-3.17. *Пусть* $f(x_1,\dots,x_k) \in B_2^{(k)}$.

1. *Если выполнены условия*

$$\sum_{n_{\nu_1}=0}^{\infty} \dots \sum_{n_{\nu_i}=0}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{i} 2^{\frac{n_{\nu_\mu}(1-2\alpha_{\nu_\mu})}{2}} \left(\sum_{k_1=2^{n_{\nu_1}}}^{2^{n_{\nu_1}+1}-1} \dots \sum_{k_i=2^{n_{\nu i}}}^{2^{n_{\nu_i}+1}-1} \rho_{o,\dots,0,n_{\nu_1},0,\dots 0,n_{\nu_i},0,\dots,0}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

где $-1 < \alpha_\nu < \frac{1}{2}$, $\nu = 1,2,\dots,k$ *при любом* $i \le k$*, то ряд Фурье функции* $f(x_1,\dots,x_k) \in B_2^{(k)}$ *почти всюду* $|C;\alpha_1,\dots,\alpha_k|$ *- суммируем.*

2. *Если выполнены условия*

$$\sum_{n_{\nu_1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_{\nu_i}=0}^{\infty}\left(\prod_{\mu=1}^{i} n_{\nu_\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k_1=2^{n_{\nu_1}}}^{2^{n_{\nu_1}+1}-1}\cdots\sum_{k_i=2^{n_{\nu i}}}^{2^{n_{\nu_i}+1}-1}\rho^2_{o,\dots,0,n_{\nu_1},0,\dots0,n_{\nu_i},0,\dots,0}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

,

где $\alpha_\nu=\frac{1}{2}$, $\nu=1,2,\dots,k$ *при любом* $i\le k$, *то ряд Фурье функции* $f(x_1,\dots,x_k)\in B_2^{(k)}$ *почти всюду* $\left|C;\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right|$ *- суммируем.*

3. *Если выполнены условия*

$$\sum_{n_{\nu_1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_{\nu_i}=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=2^{n_{\nu_1}}}^{2^{n_{\nu_1}+1}-1}\cdots\sum_{k_i=2^{n_{\nu i}}}^{2^{n_{\nu_i}+1}-1}\rho^2_{o,\dots,0,n_{\nu_1},0,\dots0,n_{\nu_i},0,\dots,0}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

где $\alpha_\nu>\frac{1}{2}$, $\nu=1,2,\dots,k$ *при любом* $i\le k$, *то ряд Фурье функции* $f(x_1,\dots,x_k)\in B_2^{(k)}$ *почти всюду* $|C;\alpha_1,\dots,\alpha_k|$ *- суммируем.*

Теоремы 3.15-3.17 являются обобщениям теоремы Лейндлера[9], которая была получена для $f(x)\in L_2$, т.е. в одномерном случае.

В параграфе 3.4 рассматриваются вопросы о том, какие структурные свойства функции по каждой из переменных в отдельности обеспечивают абсолютную чезаровскую суммируемость кратного ряда Фурье почти-периодической функции $f(x_1,\dots,x_k)\in B_2^{(k)}$.

Теоремы 3.21 - 3.22. *Пусть функция* $f(x_1,\dots,x_k)\in B_2^{(k)}$ *и ее спектр* $\left\{\lambda^{(j)}_{n_j}\right\}$ $(j=1,2,\dots,k)$ *удовлетворяют условиям (11)*

1. *Если при* $0<\beta<2$, $r>k$ *и каждом* $j=1,2,\dots,k$ *выполнены условия*

---

9 Leindler L. Acta sci. math., (Szeged), 1961, 22, s. 243-268.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu\left(\frac{k}{2}-\alpha_\nu-1\right)} \left(\frac{\lambda^{(j)}_{2^\nu}}{\lambda^{(j)}_{2^{\nu-1}}}\right)^r \omega_{r,(j)}\left(f;\frac{1}{\lambda^{(j)}_{2^\nu}}\right)_{B_2^{(k)}} < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} |A_{n_1,\dots,n_k}| \qquad (14)$$

$|C;\alpha_1,\dots,\alpha_k|$ *- суммируемым при* $0 < \alpha_i \le \frac{1}{2}$, $i = 1,2,\dots$.

2. *Если при* $0 < \beta < 2$, $r > k$ *и каждом* $j = 1,2,\dots,k$ *выполнены условия*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{\nu\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{\ln 2^\nu}} \left(\frac{\lambda^{(j)}_{2^\nu}}{\lambda^{(j)}_{2^{\nu-1}}}\right)^r \omega_{r,(j)}\left(f;\frac{1}{\lambda^{(j)}_{2^\nu}}\right)_{B_2^{(k)}} < \infty,$$

то ряд (14) $|C;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k|$ *-суммируемым при* $\alpha_i > \frac{1}{2}$, $i = 1,2,\dots$.

В параграфе 3.5 установлены аналоги теоремы 3.21-3.22 для кратных рядов Фурье, когда спектр функции $f(x_1,\dots,x_k) \in B_2^{(k)}$ имеет предельную точку в нуле, т.е. когда выполнены условия (12) и (13)

Теорема 3.23 - 3.24. *Пусть функция* $f(x_1,\dots,x_k) \in B_2^{(k)}$ *и ее спектр* $\left\{\lambda^{(j)}_{n_j}\right\}$ $(j = 1,2,\dots,k)$ *удовлетворяют условиям (12) и (13).*

1. *Если при* $0 < \beta < 2$, $r > k$ *и каждом* $j = 1,2,\dots,k$ *выполнены условия*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu\left(\frac{k}{2}-\alpha_\nu-1\right)} W_{r,(j)}\left(f;\frac{1}{\lambda^{(j)}_{2^\nu}}\right)_{B_2^{(k)}} < \infty,$$

то ряд (14) суммируемым методом $\left|C;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\right|$ *для значений* $0<\alpha_i\le\frac{1}{2},\ i=1,2,\dots.$

2. *Если при* $0<\beta<2,\ r>k$ *и каждом* $j=1,2,\dots,k$ *выполнены условия*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2^{\nu\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{\ln 2^{\nu}}}W_{r,(j)}\left(f;\frac{1}{\lambda_{2^{\nu}}^{(j)}}\right)_{B_2^{(k)}}<\infty,$$

то ряд (14) является суммируемым методом $\left|C;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\right|$ *при* $\alpha_i>\frac{1}{2},\ i=1,2,\dots.$

Глава 4 диссертации посвящена некоторым вопросам приближения почти-периодических функций в равномерной метрике, когда показатели Фурье имеют предельную точку в бесконечности.

В параграфе 4.1 рассматривается $B(\sigma)$ - класс целых функций степени не выше σ, ограниченных на всей действительной оси. Для класса равномерных почти-периодических функций обобщаются результаты С.Н.Бернштейна о том, что среди функций из класса $B(\sigma)$, осуществляющих на $(-\infty;\infty)$ наилучшее равномерное приближение порядка σ периодической (периода 2π) функции $f(x)$, найдется тригонометрический полином степени не выше σ.

Теорема 4.1. *Пусть* $f(x)$ *- равномерная почти-периодическая функция с произвольным спектром* $\Lambda\{\lambda_k\}$ *и* $A(\sigma;f)$ $(\sigma>0)$ *- наилучшее равномерное приближение порядка* σ *функции* $f(x)$ *функциями из класса* $B(\sigma)$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдется конечная тригонометрическая сумма*

$$P(x;N,\sigma)=\sum_{k=1}^{N}b_k\exp(i\lambda_k x), \tag{15}$$

где $\lambda_k \in \Lambda,\ |\lambda_k| \le \sigma \quad (k = 1,2,\ldots,N)$, *такая, что равномерно по* x

$$|f(x) - P(x;N,\sigma)| \le \mathrm{A}(\sigma; f) + \varepsilon .$$

Теорема 4.2. *Пусть* $f(x)$ *- равномерная почти-периодическая функция, спектр которой* $\Lambda(\lambda_л)$ *на каждом конечном отрезке действительной оси имеет конечное число предельных точек. Тогда среди функций* $g(x;\sigma) \in B(\sigma)$ *и удовлетворяющих соотношению*

$$\sup_x |f(x) - g(x;\sigma)| = \mathrm{A}(\sigma; f) \quad (-\infty < x < \infty),$$

найдется тригонометрический полином степени $\le \sigma$ *вида (15) такой, что*

$$|f(x) - P(x;N,\sigma)| \le \mathrm{A}(\sigma; f).$$

Наряду с этими утверждениями справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть* $f(x)$ *- равномерная почти-периодическая функция с произвольным спектром* $\Lambda(\lambda_k)$. *Тогда можно указать полином вида (15) степени* $\le \sigma$ *такой, что*

$$|f(x) - P(x;N,\sigma)| \le C(k)\Omega_k(f;\frac{1}{\sigma}),$$

где $C(k)$ *не зависит от* f, N *и* σ, *а* $\Omega_k\left(f;\frac{1}{\sigma}\right)$ *означает модуль гладкости порядка* k *функции* $f(x)$ *с шагом* $\frac{1}{\sigma}$ *в равномерной метрике.*

В <u>параграфе 4.2</u> изучается порядок поведения величины

$$R_{\sigma,r}(f)_{L_p} = \| f(x,y) - U_{\sigma,r}(f;x,y) \|_{L_p},$$

где

$$U_{\sigma,r}(f;x,y)=\int_0^{\sigma}(1-\frac{u^r}{\sigma^r})S^*_{u,u}(f;x,y)du.$$

Теорема 4.4. *Если* $f(x,y)\in L_p(R^2)\quad(1<p\le 2)$, *то справедлива оценка*

$$R_{\sigma,r}(f)_{L_p}\le C_{p,r}\left[\omega_r^{(1)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p}+\omega_r^{(2)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p}\right],$$

$$\omega_r^{(1)}(f;u)=\sup_{|h|\le u}\left\|\Delta^r_{x,h}f\right\|_{L_p}=\mathop{Sup}_{|h|\le u}\left\|\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{r-\nu}\binom{r}{\nu}f(x+\nu h,y)\right\|_{L_p},$$

$$\omega_r^{(2)}(f;u)=\sup_{|h|\le u}\left\|\Delta^r{}_{h,y}f\right\|_{L_p}=\mathop{Sup}_{|h|\le u}\left\|\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{r-\nu}\binom{r}{\nu}f(x,y+\nu h)\right\|_{L_p},$$

где $C_{p,r}$ *– константа, зависящая лишь от* p *и* r.

Теорема 4.5. *В предложениях теоремы 4.4 при* $1<p\le 2$ *имеет место следующая оценка*

$$\omega_r^{(\nu)}(f;\frac{1}{\sigma})\le M_{p,r}R_{\sigma,r}(f)_{L_p}\qquad(\nu=1,2),$$

где константа $M_{p,r}$ *зависит лишь от* p *и* r.

В параграфе 4.3 устанавливаются оценки уклонения равномерных почти-периодических функций двух переменных от сумм типа Марцинкевича-Зигмунда.

Определение 5. *Функция* $f(x,y)\quad(-\infty<x,y<\infty)$ *называется равномерной почти-периодической функцией, если для каждого* $\varepsilon>0$ *можно указать такое число* $l=l(\varepsilon)$, *что в каждом интервале длины* l *найдется хотя бы одно число* τ, *для которого*

$$|f(x+\tau,y)-f(x,y)|<\varepsilon \qquad \text{равномерно по } y,$$

$$|f(x,y+\tau)-f(x,y)|<\varepsilon \qquad \text{равномерно по } x$$

Пусть $\boldsymbol{B}$ – класс равномерных почти-периодических функций и пусть ряд Фурье функции $f(x,y)\in B$ имеет следующий вид

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(\lambda_m,\mu_n)e^{i(\lambda_m x+\mu_n y)}, \qquad (16)$$

где
$$G(\lambda_m,\mu_n)=M\left\{f(x,y)e^{-i(\lambda_m x+\mu_n y)}\right\}$$

- коэффициенты Фурье функции $f(x,y)$,

$$S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)=\sum_{|\lambda_m|\le\sigma}\sum_{|\mu_n|\le\sigma}G(\lambda_m,\mu_n)\Phi_\sigma(\lambda_m,\mu_n)e^{i(\lambda_m x+\mu_n y)}$$

- частичная сумма ряда (16).

$\Phi_\sigma(t,z)$ - произвольная, вещественная, непрерывная, четная функция, и такая, что

$$\Phi_\sigma(0,0)=1;\quad \Phi_\sigma(t,z)=0,$$

при $\left\{|t|\ge\sigma,\ |z|\ge\sigma;\ |t|\ge\sigma,\ |z|\le\sigma;\ |t|\le\sigma,\ |z|\ge\sigma\right\}.\ |t|\ge\sigma,\ |z|\ge\sigma;$

Положим

$$U_\sigma(f;\varphi;x,y)=\sum_{|\lambda_m|\le\sigma}\sum_{|\mu_n|\le\sigma}G(\lambda_m,\mu_n)\Phi_\sigma(\lambda_m,\mu_n)e^{i(\lambda_m x+\mu_n y)}.$$

Пусть $B(R_2)$ – пространство всех ограниченных и равномерно почти-периодических в плоскости переменных $x,\ y$ функций $f(x,y)$ с нормой

$$\|f\|_B=\sup_{-\infty<x,y<\infty}|f(x,y)|$$

Рассмотрим величину

$$R(f;\varphi,x,y)=\left\|U_\sigma(f;\varphi,x,y)-f(x,y)\right\|_B\ , \qquad (17)$$

в которой

$$U_\sigma(f;\varphi x,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t,y+z)\Phi_\sigma(t,z)dtdz\,,$$

$$\Phi_\sigma(t,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \varphi_\sigma(u)K_u(t,z)du\,,$$

$$K_u(t,z)=4\left[\cos(ut)\frac{\sin(uz)}{z}+\cos(uz)\frac{\sin(ut)}{t}\right],$$

$\varphi_\sigma(u)$ – некоторая четная функция, абсолютно интегрируемая на интервале $(0,\infty)$ при каждом фиксированном $\sigma>0$ и такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Phi_\sigma(t,z)\right|dtdz<\infty\,,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_\sigma(t,z)dtdz=1.$$

Исследуется вопрос о поведении величины (17) в зависимости от скорости стремления к нулю $E_{\sigma,\sigma}(f)$ (при $\sigma\to\infty$) для случаев, когда в качестве $\varphi_\sigma(u)$ выбраны функции

$$\varphi_\sigma(u)=\varphi_{\sigma,a}(u)=\begin{cases}1\quad, & |u|\le a\quad (0<a<\sigma);\\ \dfrac{\sigma-|u|}{\sigma-a}\,, & a<|u|<\sigma;\\ 0\quad, & |u|\ge\sigma.\end{cases}\tag{18}$$

Теорема 4.6. *Если* $f(x,y)\in B(R_2)$, *функция* $\varphi_\sigma(u)=\varphi_{\sigma,a}(u)$ *определена равенством (18), то при любом* Λ $(0<\Lambda<a<\sigma)$ *справедлива оценка*

$$R(f;\varphi_{\sigma,a})\le M\frac{\sigma+a}{\sigma-a}E_{\Lambda,\Lambda}(f)_B\,,$$

где M – константа.

Теорема 4.7. *Пусть* $f(x,y)$ *равномерная почти-периодическая функция, показатели Фурье которой не имеют пре-*

дельных точек на конечном расстоянии, т.е. $\lambda_n \to \infty$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| f(x,y) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_{k,k}(f;x,y) \right\|_B \le \frac{M}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_{k,k}(f)_B,$$

где

$$E_{\Lambda,\Lambda}(f)_B = \inf_{G(\lambda_m,\mu_n)} \left\| f(x,y) - \sum_{|\lambda_m|\le\Lambda}\sum_{|\mu_n|\le\Lambda} G(\lambda_m,\mu_n) e^{i(\lambda_m x+\mu_n y)} \right\|_B$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Получены необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье некоторых классов почти-периодических функций, когда их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности, или в нуле. В случае, когда спектр функции имеет предельную точку в нуле впервые, в качестве структурной характеристики использован модуль усреднения.

2. Впервые получены новые критерии абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье некоторых классов почти-периодических функций, в зависимости от поведения их спектров.

3. Доказаны утверждения о связи между коэффициентами Фурье и степенью суммируемости некоторых классов почти-периодических функций.

4. Исследованы достаточные условия абсолютной сходимости и суммируемости кратных рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций многих переменных, когда их спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности, или нуле.

5. Установлены аналоги результатов С.Н.Бернштейна и Джексона для равномерных почти-периодических функций с произвольным спектром.

6. Установлены оценки уклонения класса равномерных почти - периодических функций двух переменных от сумм типа Марцинкевича-Зигмунда в равномерной метрике.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались: на Всесоюзной конференции «Теория приближения функций» (Украина, Днепропетровск, 1990); на Международной научно-практической конференции «Конструктивная теория функций», посвященная 70-летию профессора В.С. Виденского (Санкт-Петербург, 1992); на Международной конференции «Ряды Фурье: теория и приложения», посвященная 50-летию профессора А.С. Степанца (Украина, Киев, 1992); на Всесоюзной зимней математической школе «Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании» (Воронеж, 25 января – 3 февраля 1993); на Международной конференции «Теорія наближення та задачі обчислювальноі математики» (Украина, Днепропетровск, 1993); на 3-й Международной конференции по математическому моделированию (Россия, Якутск, 2001); на 4-й Международной конференции по математическому моделированию» (Россия, Якутск, 2004); на 9-ом Украинском математическом конгрессе (Украина, Киев, 2009); на семинаре профессора Моторного В.П. (Днепропетровский государственный университет); на семинаре профессора Тимана М.Ф. (Днепропетровский государственный аграрный университет); на семинарах Института математики АН РТ (2008-2013); на VI международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 25 мая – 1 июня 2010 г.); на международной конференции «Banach spaces geometry» (Санкт-Петербург, 5-11 сентября 2010 г.); на международной конференции «International Conference in Modern Analysis» (Donetsk, June 20-23, 2011); на VII международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 27 мая – 3 июня 2012 г.); на Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 27 января – 2 февраля 2013); на Казанской летней научной школы-конференции «Теории функций, ее приложения и смежные проблемы» (Казань, 22-28 августа 2013); на семинаре кафедры высшей математики Московского физико-технического института (2014).

Конкретное личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. По теме диссертации опубликовано 31 научных статей, из которых 22 – в изданиях, рекомендованных ВАК. Список основных публикаций приведен в конце автореферата.

Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Отдельные результаты работ [11], [15], [18] и [24] получены совместно с научным консультантом профессором М.Ф.Тиманом, которому принадлежит некоторые идеи постановки рассматриваемых задач. Остальные 27 работ написаны диссертантом единолично.

Статьи автора по теме диссертации в журналах из списка ВАК:

1. Хасанов, Ю.Х. О приближении функций двух переменных некоторыми интегралами Фурье / Ю.Х.Хасанов // Докл. АН РТ. - 1993. - Т. 36, № 3. - С. 174-176
2. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье / Ю.Х.Хасанов // Докл. АН РТ. - 1994. - Т. 37, № 1. - С. 12-15.
3. Хасанов, Ю.Х. О приближении почти-периодических функций двух переменных / Ю.Х.Хасанов // Докл. АН РТ. - 1994. - Т. 37, № 3-4. С. 7-11.
4. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций / Ю.Х.Хасанов // Докл. АН РТ. - 1996. - Т. 39, № 9-10. - С. 42-47.
5. Хасанов, Ю.Х. Аналог теоремы Пэли для почти-периодических в смысле Безиковича функций / Ю.Х.Хасанов // Вестник педагогического университета. - 1999. - № 5 (2). - С. 32-33.
6. Хасанов, Ю.Х. Теорема Пэли для коэффициентов Фурье почти-периодических в смысле Безиковича функций / Ю.Х.Хасанов // Докл. АН РТ. - 2000. - Т. 43, № 3. - С. 27-32.
7. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Матем. заметки ЯГУ. - 2001. – Т. 8(2). - С. 84-92.
8. Хасанов, Ю.Х. О приближении почти-периодических функций двух переменных суммами типа Марцинкевича-Зигмунда / Ю.Х.Хасанов // Матем. заметки ЯГУ. - 2002. – Т. 9(2). - С. 117-127.
9. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье некоторых классов почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Матем. заметки ЯГУ. - 2003. – Т. 10(2). - С. 102-114.

10. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье некоторых классов почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Докл. АН РТ. - 2005. - Т. 48, № 3-4. С. 28-37.
11. Тиман, М.Ф. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье некоторых классов почти-периодических функций / М.Ф.Тиман, Ю.Х.Хасанов // Укр. матем. журнал. - 2009. - Т. 61, № 9. - С. 1267-1276.
12. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций с предельными точками в бесконечности / Ю.Х.Хасанов // Докл. АН РТ. - 2009. - Т. 52, № 12. - С. 913-920
13. Хасанов, Ю.Х. О связи степени суммируемости и коэффициентов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Докл. АН РТ. - 2010. - Т. 53, № 1. - С. 13-19.
14. Хасанов, Ю.Х. О приближении почти-периодических функций двух переменных / Ю.Х.Хасанов // Известия вузов. Математика. - 2010. - № 12. - С. 82-86.
15. Тиман, М.Ф. О приближениях равномерных почти-периодических функций целыми функциями / М.Ф.Тиман, Ю.Х.Хасанов // Докл. АН РТ. – 2010. - Т. 53, № 11. - С. 824-831.
16. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2011. Спецвыпуск, Ростов-на- Дону. - С. 71-73.
17. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной суммируемости кратных рядов Фурье / Ю.Х.Хасанов // Известия АН РТ. Отд. физ-мат, хим., геол. и техн. наук. – 2011. - № 4 (145). - С. 27-34.

18. Тиман, М.Ф. О приближениях почти-периодических функций целыми функциями / М.Ф.Тиман, Ю.Х.Хасанов // Известия вузов. Математика. - 2011, № 12. - С. 73-79.
19. Хасанов, Ю.Х. Об отклонении гармонических почти-периодических функций от их значений на границе / Ю.Х.Хасанов // Докл. АН РТ. – 2012. - Т. 55, № 8. - С. 611-616.
20. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Analysis Mathematica. – 2013. - V.39. – P. 259-270.
21. Хасанов, Ю.Х. Абсолютная сходимость рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, № 5. – С. 745-756.
22. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Укр. матем. журнал. - 2013. - Т. 65, № 12. - С. 1716-1722.

Работы автора по теме диссертации в других изданиях

23. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Конструктивная теория функций. Санкт – Петербург. – 1992. - С. 66-68.
24. Тиман, М.Ф. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций / М.Ф.Тиман, Ю.Х.Хасанов // Ряды Фурье: теория и приложения. Киев, ИМ АН Украины. - 1992. - С. 142-146.
25. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье / Ю.Х.Хасанов // Теорія наближення та задачі обчислювальноі математики. Днепропетровск. – 1993. - С. 196.

26. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича / Ю.Х.Хасанов // Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании. Воронеж. – 1993. - С. 138.
27. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Тезисы докладов VI Международного симпозиума «Ряды Фурье и их приложения». Ростов-на- Дону - 2010. - С. 36.
28. Хасанов, Ю.Х. Абсолютная сходимость рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Banach spaces geometry. – 2010. - St. Peterburg. - P. 15-16.
29. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Тезисы докладов VII Международного симпозиума «Ряды Фурье и их приложения». Ростов-на- Дону - 2012. - С. 40-41.
30. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж - 2013. - С. 259-261.
31. Хасанов, Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х.Хасанов // Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2013. - Т.46. - С. 451- 454.