*На правах рукописи*

Корольков Сергей Алексеевич

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КОНЦАМИ

01.01.01. – математический анализ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций ГОУ ВПО «Волгоградский государственный университет»

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук, профессор Лосев Александр Георгиевич |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук, профессор Авхадиев Фарит Габидинович |
| | доктор физико-математических наук, профессор Лобода Александр Васильевич |
| Ведущая организация: | Институт Математики Сибирского Отделения РАН, г. Новосибирск |

Защита состоится 17 июня 2009 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С текстом диссертации можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «    » мая 2009 года

Учёный секретарь
Совета Д 212.081.10
к.ф.-м.н., доцент Е.К. Липачёв

## А. Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию решений уравнения Лапласа—Бельтрами и стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях. Рассматриваемый круг задач и используемые методы большей частью принадлежат теории функций, теории потенциала и теории уравнений в частных производных.

**Актуальность темы. Исторические сведения.** В исследованиях последних десятилетий была отмечена глубокая связь между классическими проблемами теории функций, теорией решений эллиптических уравнений в частных производных второго порядка, в частности, уравнения Лапласа-Бельтрами и стационарного уравнения Шредингера, и геометрией римановых многообразий. Данная тематика нашла свое развитие в работах российских и зарубежных математиков: М. Андерсона, С.К. Водопьянова, А.А. Григорьяна, А.А. Клячина, В.А. Клячина, Е.М. Ландиса, П. Ли, А.Г. Лосева, Е.А. Мазепы, В.Г. Мазьи, В.М. Миклюкова, Н.С. Надирашвили, Л. Ниренберга, О.А. Олейник, Ю.Г. Решетняка, С.Л. Соболева, Д. Сулливана, Л.Ф. Тама, В.Г. Ткачева, Н.Н. Уральцевой, С.Т. Яу и ряда других авторов.

Изучение эллиптических уравнений на римановых многообразиях является достаточно новым направлением в современной математике и лежит на стыке математического анализа, теории уравнений с частными производными, дифференциальной геометрии, теории случайных процессов. Истоки указанной проблематики восходят к классификационной теории двумерных некомпактных римановых многообразий и поверхностей. Важный класс проблем данного направления относится к получению теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность пространств ограниченных решений некоторых эллиптических уравнений на многообразии. Классическая формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция является тождественной постоянной. В последнее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии $M$ задан класс функций $A$ и эллиптический оператор $L$. Будем говорить, что на $M$ выполнено обобщенное $(A, L)$-лиувиллево свойство, если пространство решений уравнения $Lu = 0$, принадлежащих функциональному классу $A$, имеет конечную размерность. Достаточно подробно об этой тематике написано в обзоре А.А. Григорьяна [2], в работе А.Г. Лосева [7] и др. Оценки размерностей различных пространств решений эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях были получены в работах ряда математиков (см. [1]–[8] и др.).

Многие работы были посвящены изучению решений эллиптических уравнений на многообразиях с концами. Так, П. Ли, Л.Ф. Там в [5] доказали, что если многообразие $M$ имеет $m$ концов, то размерность пространства гармонических на $M$ функций, которые ограничены либо сверху, либо снизу на каждом конце, не меньше, чем $m$. Там же было доказано, что если $M$ имеет гиперболический тип, то размерность конуса неотрицательных гармонических на $M$ функций также не меньше, чем $m$.

На многообразиях с *регулярными концами* А.А. Григорьяном в работе [1] была доказана разрешимость некоторых краевых задач для положительных гармонических функций и были получены оценки размерности пространства ограниченных и конуса положительных гармонических функций. Здесь под регулярностью конца понимается выполнение неравенства Харнака для неотрицательных гармонических функций на соответствующем конце. А.Г. Лосевым в работе [6] были получены условия выполнения теорем типа Лиувилля на многообразиях с модельными концами, а также даны точные оценки размерности пространства ограниченных и конуса положительных гармонических функций на таких многообразиях.

В работах А.А. Григорьяна, С.В. Кима, Я.Х. Ли, А.Г. Лосева, Е.А. Мазепы и других математиков также рассматривались решения эллиптических уравнений более общих, чем уравнение Лапласа-Бельтрами, в частности, решения стационарного уравнения Шредингера (далее — $L$-гармонические функции)

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \tag{1}$$

где $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция.

Так, А.Г. Лосевым и Е.А. Мазепой в работе [8] были найдены условия разрешимости задачи Дирихле для ограниченных $L$-гармонических функций на многообразиях с квазимодельными концами.

В работе С.В. Кима, Я.Х. Ли [4] была получена оценка размерности конуса положительных и пространства ограниченных $L$-гармонических функций на многообразиях с $L$-регулярными концами. Здесь $L$-регулярность означает выполнение неравенства Харнака для неотрицательных $L$-гармонических функций на соответствующих концах.

**Целью работы** является дальнейшее исследование связей между геометрическим строением некомпактных римановых многообразий и поведением решений уравнений Лапласа—Бельтрами и Шредингера на таких многообразиях, получение необходимых и достаточных условий разрешимости некоторых краевых задач для рассматриваемых уравнений и оценка размерностей различных пространств решений уравнений Лапласа—Бельтрами и Шредингера на некомпактных римановых многообразиях.

**Методика исследования.** В работе применяется техника априорных оценок решений уравнений Лапласа—Бельтрами и Шредингера, метод Фурье и другие методы, относящиеся к теории потенциала и теории уравнений с частными производными. Используются также теоретико-функциональные методы, связанные с исследованием поведения решений рассматриваемых уравнений на римановых многообразиях специального вида.

**Научная новизна и практическая значимость.** В настоящей диссертационной работе исследованы свойства гармонических и $L$-гармонических функций на римановых многообразиях, введено понятие $L$-параболичности типа риманова многообразия, получены условия выполнения теорем типа Лиувилля для различных классов гармонических и $L$-гармонических функций. В работе развивается подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях с концами, основанный на введении понятия класса $[f]$ эквивалентных на каждом конце многообразия $M$ непрерывных ограниченных функций.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в научных коллективах, занимающихся изучением решений эллиптических дифференциальных уравнений на римановых многообразиях, а также найти применение в специальных курсах по математическому анализу.

**Результаты, выносимые на защиту.**

1. Получено обобщение понятия параболичности и гиперболичности типа некомпактного риманова многообразия и любого его открытого подмножества для стационарного уравнения Шредингера (1). Доказана теорема Лиувилля для ограниченных $L$-гармонических функций на многообразиях $L$-параболического типа.

2. Получен критерий $L$-строгости конца многообразия.

3. Получены оценки размерностей различных пространств $L$-гармонических функций на римановых многообразиях с произвольными концами, найдены условия точности данных оценок.

4. Получены условия существования и единственности решений некоторых краевых задач, аналогичных, так называемой, третьей краевой или смешанной задаче.

5. Получены необходимые и достаточные условия на вид метрики квазимодельных концов многообразия, при которых а) концы являются $L$-регулярными; б) на таком многообразии выполнена теорема типа Лиувилля; в) на таком многообразии разрешимы, причем единственным образом, некоторые краевые задачи.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация содержит 100 страниц и состоит из введения, трех глав и приложения. Главы разделяются на параграфы с подчиненной нумерацией. Библиография содержит 60 наименований.

**Апробация работы.** Основные результаты данной работы докладывались на Международной школе-конференции "Геометрический анализ и его приложения" (г. Волгоград, 2004 г.); Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики" (г. Казань, 2004 г.); Международной школе-конференции "Современные методы теории краевых задач" (г. Воронеж, 2007); Международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения" (г. Новосибирск, 2007); 8-й Международной Казанской летней научной школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (г. Казань, 2007); 7-й молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения — 2008" (г. Казань, 2008); на научных конференциях молодых ученых Волгоградской области (2002 — 2008 гг.), в разное время на семинарах ВолГУ "Геометрический анализ и его приложения" (рук. проф. В.М. Миклюков) и "Эллиптические дифференциальные уравнения второго порядка на римановых многообразиях" (рук. проф. А.Г. Лосев); на семинаре кафедры уравнений математической физики Самарского государственного университета (рук. проф. О.П. Филатов); на семинаре по геометрической теории функций кафедры математического анализа Казанского государственного университета (рук. проф. Л.А. Аксентьев).

**Публикации.** Основные научные результаты, включённые в диссертационную работу, опубликованы в 12 печатных работах автора. Все результаты из совместных статей, выносимые автором на защиту, получены им самостоятельно.

Пользуясь случаем, автор хотел бы выразить глубокую благодарность за полезные обсуждения и замечания по теме настоящей работы своему научному руководителю д.ф.-м.н. А.Г. Лосеву, а также к.ф.-м.н. Е.А. Мазепе и В.Ю. Чебаненко.

## B. Содержание работы

Все утверждения сохраняют принятую в основном тексте нумерацию. В работе рассматриваются $L$-гармонические функции, т.е. решения уравнения (1) на некомпактных римановых многообразиях с пустым краем.

**Глава 1. "$L$-параболичность типа римановых многообразий"** Первый параграф данной главы носит вводный характер. Здесь содержатся сведения, которые используются в работе и напоминаются некоторые понятия анализа на римановых многообразиях. В частности, определяется оператор Лапласа—Бельтрами и стационарный оператор Шредингера на римановом многообразии, приводятся определения функции Грина оператора Лапласа—Бельтрами на многообразии, емкости конденсатора и параболичности типа риманова многообразия, а также определение гармонической и $L$-гармонической функции. Кроме того, излагаются характеристические свойства многообразий параболического типа.

Во втором параграфе первой главы вводится определение $L$-параболичности типа произвольного открытого подмножества многообразия $M$, а затем и всего многообразия.

Определим сначала понятие $L$-гармонической меры произвольного непустого открытого множества $\Omega \subset\subset M$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Всюду далее предполагаем, что $M$ — многообразие без края.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание $M$, т.е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств с гладкими границами $\partial B_k$ такая, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$ для всех $k \geq 1$ и $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = M$. При этом предполагаем, что исчерпание выбрано таким образом, что $\partial B_k$ и $\partial\Omega$ трансверсальны для всех $k$. Пусть $u_k$ является решением следующей задачи Дирихле в $\Omega \cap B_k$

$$\begin{cases} Lu_k = 0 & \text{в} \quad \Omega \cap B_k, \\ u_k = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega \cap B_k, \\ u_k = 1 & \text{на} \quad \partial B_k \cap \Omega. \end{cases}$$

Последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ в силу принципа максимума убывает и ограничена. Тогда существует предельная функция $u_\Omega = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которую мы будем называть *$L$-гармонической мерой множества* $\Omega$. В случае $\Omega = M$, функцию $L_M \equiv u_M$ называют *функцией Лиувилля многообразия* $M$ (см. [3], [4]).

Нам также понадобится понятие $L$-потенциала произвольного открытого множества $\Omega$ многообразия $M$, которое мы вводим по аналогии с определенным в работе [9] понятием $L$-потенциала многообразия. Пусть $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность решений следующих задач Дирихле

$$\begin{cases} Lv_k = 0 & \text{в} \quad B_k \cap \Omega, \\ v_k = 1 & \text{на} \quad \partial\Omega \cap B_k, \\ v_k = 0, & \text{на} \quad \partial B_k \cap \Omega. \end{cases}$$

Последовательность функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в силу принципа максимума монотонно возрастает и сходится к предельной функции $v_\Omega(x) = \lim\limits_{k\to\infty} v_k(x)$, которая является $L$-гармонической в $\Omega$ и $0 \le v_\Omega(x) \le 1$ в $\Omega$. Функция $v_\Omega(x)$ называется *$L$-потенциалом множества* $\Omega$.

**Определение 1.4.** *Будем говорить, что множество $\Omega$ имеет $L$-параболический тип, если его $L$-гармоническая мера $u_\Omega \equiv 0$. В противном случае будем говорить, что $\Omega$ имеет $L$-гиперболический тип. Будем говорить, что многообразие $M$ имеет $L$-параболический тип, если функция Лиувилля многообразия $L_M \equiv 0$. В противном случае будем говорить, что $M$ имеет $L$-гиперболический тип.*

Основным результатом первой главы является следующее утверждение.

**Теорема 1.2 (Теорема Лиувилля).** *Пусть $M$ — многообразие $L$-параболического типа, $c(x) \not\equiv 0$. Тогда всякая ограниченная $L$-гармоническая на $M$ функция является тождественным нулем.*

В третьем параграфе первой главы вводится определение многообразия с концами. Пусть $M$ — полное некомпактное риманово многообразие и $B \subset M$ — компактное множество. Связную неограниченную компоненту $D_i \subset M \setminus B$ такую, что $\partial D_i$ — компакт, будем называть концом $M$ по отношению к $B$ (см., например, [2]). Если число концов $M$ относительно некоторого компактного множества равномерно ограниченно сверху целым числом, то говорят, что $M$ имеет конечное число концов. В этом случае существует такой компакт $B$, что $M \setminus B$ имеет ровно $k$ неограниченных компонент.

В третьем параграфе показано, что многообразие с конечным числом концов имеет $L$-параболический тип тогда и только тогда, когда все его концы имеют $L$-параболический тип.

Зафиксируем некоторый конец $D_i$. Пусть $\{B_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание конца $D_i$, т.е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств с гладкими границами $\partial B_k^i$ такая, что $\partial D_i \subset \overline{B}_k^i$, $B_k^i \subset D_i$, $\overline{B}_k^i \setminus \partial D_i \subset B_{k+1}^i$ для всех $k \geq 1$ и $\cup_{k=1}^{\infty} B_k^i = D_i$. Будем говорить, что непрерывные ограниченные на $D_i$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* $D_i$, и использовать обозначение $f_1(x) \sim f_2(x)$, если выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{D_i \setminus B_k^i} |f_1(x) - f_2(x)| = 0.$$

Понятие эквивалентных функций не зависит от выбора исчерпания конца $D_i$. Обозначим класс эквивалентных $f$ функций через $[f]$.

Будем говорить, что функции $f_1$ и $f_2$ *слабо эквивалентны на* $D_i$, если

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq C v_{D_i}(x)$$

на $D_i$ для некоторой константы $C$. Здесь $v_{D_i}$ — $L$-потенциал конца $D_i$. В параграфе 3 первой главы показано, что введенное отношение слабой эквивалентности действительно является отношением эквивалентности. Обозначим класс слабо эквивалентных $f$ функций через $[f]^*$.

В дальнейшем нам потребуется определение $L$-строгого конца многообразия и $L$-регулярного конца многообразия. При этом, понятие $L$-строгого конца мы введем по аналогии с определением $L$-строгого многообразия, приведенного в работе Мазепы Е.А. [9].

**Определение 1.7.** *Будем говорить, что конец $D_i$ является $L$-строгим, если его $L$-потенциал $v_{D_i} \in [0]$.*

**Определение 1.8 ([4]).** *Говорят, что конец $D_i$ является $L$-регулярным, если на нем выполнено неравенство Харнака для всякой неотрицательной*

*$L$-гармонической функции, т.е. существует такая константа $C > 0$, что для всех достаточно больших $r > 0$ и для всякой неотрицательной $L$-гармонической на $(B_{2r}(o) \setminus B_{r/2}(o)) \cap D_i$ функции $f$ выполнено*

$$\sup_{\partial B_r(o)\cap D_i} f \le C \inf_{\partial B_r(o)\cap D_i} f.$$

*Здесь $B_r(o)$ — геодезический шар радиуса $r$ с центров в точке $o \in B$.*

Отметим, что введенные определения $L$-строгого конца и конца $L$-гиперболического типа не эквивалентны.

В четвертом параграфе первой главы приводится определение квазимодельного конца и указаны необходимые и достаточные условия на вид метрики квазимодельного конца, при которых он имеет $L$-гиперболический тип.

Результаты первой главы опубликованы в работах [11], [16], [18], [20].

**Глава 2. "$L$-гармонические функции на многообразиях с концами"** Данная глава посвящена изучению свойств $L$-гармонических функций на римановых многообразиях с концами.

Пусть $D_i$ — некоторый конец многообразия. Будем говорить, что функция $f_i$ принадлежит *классу допустимых на конце $D_i$ функций*, если на конце $D_i$ существует $L$-гармоническая функция $u$ такая, что $u \sim f_i$ на $D_i$.

Всюду далее через $K_i$ будем обозначать класс допустимых на конце $D_i$ функций.

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** *Следующие условия эквивалентны.*

*(A) Существует $L$-гармоническая на $D_i$ функция $\underline{u}(x)$ такая, что*

$$\underline{u}(x)|_{\partial D_i} < 1, \quad \underline{u}(x)|_{D_i} \sim v_{D_i}.$$

*(B) Существует $L$-гармоническая на $D_i$ функция $\overline{u}(x)$ такая, что*

$$\overline{u}(x)|_{\partial D_i} > 1, \quad \overline{u}(x)|_{D_i} \sim v_{D_i}.$$

*(C) Для любой непрерывной на $\partial D_i$ функции $\Phi$ и для любой непрерывной ограниченной на $D_i$ функции $f_i \in K_i$ существует $L$-гармоническая на $D_i$ функция $h(x)$ такая, что $h \in [f_i]$, $h|_{\partial D_i} = \Phi$.*

*(D) Конец $D_i$ является $L$-строгим.*

**Замечание.** Импликация $(D) \to (C)$ доказана в [9].

Всюду далее будем считать, что $M = B \cup D_1 \cup \ldots \cup D_{s+l}$ — произвольное многообразие без края с концами $D_1, \ldots, D_{s+l}$, где $D_1, \ldots, D_s$ — концы $L$-параболического типа, $D_{s+1}, \ldots, D_{s+l}$ — концы $L$-гиперболического типа. При этом предполагаем, что компакт $B$ выбран таким образом, что многообразие $M$ имеет ровно $s + l$ концов относительно любого другого компакта $B' \supset B$.

Обозначим через $\mathbb{BH}_L(M)$, $\mathbb{H}_L^+(M)$ и $\mathbb{H}_L'(M)$ пространство ограниченных $L$-гармонических на $M$ функций, конус неотрицательных $L$-гармонических на $M$ функций и пространство $L$-гармонических на $M$ функций, ограниченных с одной стороны на каждом конце многообразия, соответственно.

Отметим, что из некомпактности многообразия $M$ следует, что оно имеет как минимум один конец, откуда $s + l \geq 1$.

Во второй главе были получены следующие утверждения.

**Теорема 2.2.** *Пусть $M$ — многообразие, имеющее $s$ концов $D_1, \ldots, D_s$ $L$-параболического типа и $l$ концов $D_{s+1}, \ldots, D_{s+l}$ $L$-гиперболического типа, $c(x) \not\equiv 0$ на $D_i$, $i = 1, \ldots s$. Тогда*

$$\dim \mathbb{BH}_L(M) \geq l, \quad \dim \mathbb{H}_L^+(M) \geq s + l, \quad \dim \mathbb{H}_L'(M) \geq s + l.$$

**Замечание.** В случае $l = 0$ под записью $\dim \mathbb{BH}_L(M) = 0$ будем понимать справедливость теоремы Лиувилля для ограниченных $L$-гармонических на $M$ функций.

**Теорема 2.3.** *Пусть $M$ — многообразие, имеющее $s$ концов $D_1, \ldots, D_s$ $L$-параболического типа и $l$ концов $D_{s+1}, \ldots, D_{s+l}$ $L$-гиперболического типа, $c(x) \not\equiv 0$ на $D_i$, $i = 1, \ldots s$, и все концы $L$-регулярны. Тогда*

$$\dim \mathbb{H}_L^+(M) = \dim \mathbb{H}_L'(M) = s + l, \quad \dim \mathbb{BH}_L(M) = l.$$

**Замечание.** Условие $c(x) \not\equiv 0$ на $D_i$, $i = 1, \ldots s$ в формулировках теорем 2.2 и 2.3 является существенным. Например, для неотрицательных гармонических функций выполнена теорема Лиувилля на многообразиях параболического типа (случай $l = 0$), т.е. $\dim \mathbb{H}_L^+(M) = 1$ вне зависимости от количества $s$ концов параболического типа.

**Замечание.** В случае, когда многообразие $M$ содержит хотя бы один $L$-строгий конец $L$-гиперболического типа, не являющийся $L$-регулярным, пространство $\mathbb{BH}_L(M)$ а, следовательно, и $\mathbb{H}_L'(M)$, и конус $\mathbb{H}_L^+(M)$, могут быть бесконечномерными (см. [8]).

**Теорема 2.4.** *Пусть $M$ — многообразие, имеющее $s$ концов $L$-параболического типа и $l \geq 1$ концов $L$-гиперболического типа. Тогда для любого набора непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s + 1, \ldots, s + l$, существует функция $u \in \mathbb{BH}_L(M)$ такая, что $u \in [f_j]^*$ на $D_j$, $j = s + 1, \ldots, s + l$.*

**Теорема 2.5.** *Пусть $M$ — многообразие, имеющее $s$ концов $L$-параболического типа и $l \geq 1$ концов $L$-гиперболического типа, причем все его концы $L$-гиперболического типа являются $L$-строгими. Тогда для любого набора непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s + 1, \ldots, s + l$, существует единственная функция $u \in \mathbb{BH}_L(M)$ такая, что $u \in [f_j]$ на $D_j$, $j = s + 1, \ldots, s + l$.*

Отметим, что в работе [4] утверждалось (без приведения доказательства), что всякая неотрицательная $L$-гармоническая функция на многообразии, содержащем лишь концы $L$-параболического типа, есть тождественный ноль. Однако, в случае $c(x) \not\equiv 0$, это не так, что легко проверить, рассмотрев, например, решения уравнения $\Delta u - u = 0$ на цилиндре в $\mathbb{R}^3$. Более того, из теоремы 2.2 следует, что на таком многообразии размерность конуса неотрицательных $L$-гармонических функций будет не менее числа концов многообразия.

Другой целью второй главы является рассмотрение случая $c(x) \equiv 0$, т.е. гармонических функций. Заметим, что не все сформулированные выше утверждения будут справедливы без изменений и для гармонических функций. Например, как уже указывалось, на многообразии, содержащем лишь концы $L$-параболического типа, теорема Лиувилля выполнена для ограниченных и не выполнена для неотрицательных $L$-гармонических функций. В то же время, на многообразии, содержащем только концы параболического типа, теорема Лиувилля выполнена как для ограниченных, так и для неотрицательных гармонических функций (см., например, [2]). При рассмотрении гармонических функций появляется возможность постановки задач с условиями на концы не только гиперболического, но и параболического типа. Соответственно, происходит расширение функционального класса, в котором ищутся решения рассматриваемых задач. Для постановки краевых задач нам потребуется понятие потока гармонической функции по концу многообразия.

**Определение 2.1.** *Потоком гармонической функции $u$ по концу $D_i$ назо-*

*вем число*

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u = \int\limits_{\partial B_k^i \setminus \partial D_i} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\mu',$$

*где $\nu$ — единичная внешняя нормаль к $B_k^i$, $k$ — произвольный фиксированный номер.*

Заметим, что в силу формулы Грина определение потока не зависит от выбора $k$.

Обозначим через $\mathbb{BH}(M)$, $\mathbb{H}^+(M)$ и $\mathbb{H}'(M)$ пространство ограниченных гармонических на $M$ функций, конус неотрицательных гармонических на $M$ функций и пространство гармонических на $M$ функций, ограниченных с одной стороны на каждом конце многообразия, соответственно. Справедливы следующие утверждения

**Теорема 2.6.** *Пусть $M$ — многообразие, имеющее $s$ концов параболического типа и $l$ концов гиперболического типа, $l \geq 1$. Тогда для любых констант $a_1, \ldots, a_s$ и любых непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s+1, \ldots, s+l$, существует функция $u(x) \in \mathbb{H}'(M)$ такая, что*

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u(x) = a_i,\ i = 1, \ldots, s, \quad u(x) \in [f_j]^* \text{ на } D_j,\ j = s+1, \ldots, s+l.$$

**Теорема 2.7.** *Пусть $M$ — многообразие, имеющее $s$ концов параболического типа и $l$ концов гиперболического типа, $l \geq 1$, при этом все концы гиперболического типа являются $\Delta$-строгими, а концы параболического типа регулярными. Тогда для любых констант $a_1, \ldots, a_s$ и любых непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s+1, \ldots, s+l$, существует единственная функция $u(x) \in \mathbb{H}'(M)$ такая, что*

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u(x) = a_i,\ i = 1, \ldots, s, \quad u(x) \in [f_j] \text{ на } D_j\,, j = s+1, \ldots, s+l.$$

**Теорема 2.8.** *Пусть $M$ — многообразие, имеющее $s$ концов параболического типа и $l$ концов гиперболического типа. Если все концы многообразия регулярны, то*

$$\dim \mathbb{H}'(M) = s + l.$$

Результаты главы 2 опубликованы в работах [13]–[15].

**Глава 3. "$L$-гармонические функции на римановых многообразиях с квазимодельными концами“** Данная глава посвящена изучению свойств $L$-гармонических функций на римановых многообразиях с квазимодельными концами. Всюду далее считаем, что $M$ — многообразие с квазимодельными концами, т.е. каждый конец $D_i$ многообразия $M$ изометричен прямому произведению $(r_0, +\infty) \times S_{i1} \times S_{i2} \times ... \times S_{ik}$ с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g_{i1}^2(r)d\theta_{i1}^2 + ... + g_{ik}^2(r)d\theta_{ik}^2,$$

где $S_{ij}$ — компактные римановы многообразия без края, $g_{ij}(r)$ — положительные гладкие на $(r_0, +\infty)$ функции, $d\theta_{ij}^2$ — метрика на $S_{ij}$, $j = 1, \ldots, k$, $k = k(i)$. Будем также предполагать, что $c(x) \equiv c_i(r)$ на каждом конце $D_i$.

Пусть $n_{ij} = \dim S_{ij}$. Введем обозначения

$$s_i(t) = g_{i1}^{n_{i1}}(t)...g_{ik}^{n_{ik}}(t), \quad q_{ij}(t) = \frac{s_i(t)}{g_{ij}^2(t)}, \quad Q_i = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{s_i(t)}dt,$$

$$J_{ij} = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{s_i(t)} \left( \int\limits_{r_0}^{t} q_{ij}(z)dz \right) dt, \quad N_{ij} = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{s_i(t)} \left( \int\limits_{t}^{\infty} q_{ij}(z)dz \right) dt,$$

где $j = 1, ..., k$.

В первом параграфе третьей главы рассматриваются гармонические функции, т.е. случай $c(x) \equiv 0$ на $M$.

**Теорема 3.1.** *Пусть $D_i$ — квазимодельный конец. Справедливы следующие утверждения.*

*(i) Если конец $D_i$ имеет гиперболический тип, то $D_i$ является регулярным тогда и только тогда, когда $J_{ij} = \infty$ для всех $j = 1, \ldots, k$.*

*(ii) Если конец $D_i$ имеет параболический тип и $N_{ij} = \infty$ для всех $j = 1, \ldots, k$, то $D_i$ является регулярным.*

**Замечание.** Конец $D_i$ имеет гиперболический тип тогда и только тогда, когда $Q_i < \infty$. Кроме того, всякий квазимодельный конец гиперболического типа является $\Delta$-строгим.

Будем говорить, что квазимодельный нерегулярный конец $D_i$ гиперболического типа является нерегулярным концом порядка $(k, s_i)$ $(1 \leq s_i \leq k)$, если $J_{ij} < \infty$ для всех $j \leq s_i$ и $J_{ij} = \infty$ при $j > s_i$.

Следующее утверждение является следствием теоремы 3.1 и результатов, полученных во второй главе диссертации.

**Следствие 3.2.** *Пусть $M$ имеет $s$ квазимодельных концов $D_1, ..., D_s$ параболического типа, $l$ квазимодельных регулярных концов $D_{s+1}, ..., D_{s+l}$ гиперболического типа и $p$ квазимодельных нерегулярных концов $D_{s+l+1}, ..., D_{s+l+p}$ гиперболического типа порядков $(k_1, s_1)$, ..., $(k_p, s_p)$, соответственно. Пусть $l + p \geq 1$. Тогда для любого набора $(a_1, ..., a_s,$ $b_{s+1}, ..., b_{s+l},$ $\Phi_{s+l+1}, ..., \Phi_{s+l+p})$, где $a_1, ..., a_s,$ $b_{s+1}, ..., b_{s+l}$ — произвольные константы, а $\Phi_i = \Phi_i(\theta_{i1}, ..., \theta_{is_i})$ — непрерывные на $S_{i1} \times ... \times S_{is_i}$ функции ($i = s+l+1, \ldots, s+l+p$), существует функция $u \in \mathbb{H}'(M)$ такая, что*

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u = a_i, i = 1, ..., s; \quad \lim_{D_i} u = b_i, i = s+1, ..., s+l;$$
$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta_{i1}, \ldots \theta_{ik}) = \Phi_i(\theta_{i1}, \ldots, \theta_{is_i}) \text{ на } D_i, \tag{2}$$
$$i = s+l+1, ..., s+l+p.$$

*При этом, если все концы параболического типа $D_1, ..., D_s$ являются регулярными, то решение краевой задачи (2) будет единственным в $\mathbb{H}'(M)$.*

Существование решения задачи (2) без условий на концы параболического типа среди функций $u \in \mathbb{BH}(M)$ ранее было доказано А.Г. Лосевым и Е.А. Мазепой в работе [8]. В следствии 3.2 получено обобщение данного результата: в постановке задачи появляются условия на концы параболического типа, решения ищутся в пространстве $\mathbb{H}'(M)$; кроме того, найдены точные условия единственности решения данной задачи.

Во втором параграфе третьей главы рассматриваются $L$-гармонические функции, т.е. случай $c(x) \not\equiv 0$ на каждом конце $D_i$ многообразия. Обозначим

$$I_i = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{s_i(t)} \left( \int\limits_{r_0}^{t} c_i(z) s_i(z) dz \right) dt.$$

**Теорема 3.2.** *Пусть $D_i$ — квазимодельный конец. Справедливы следующие утверждения.*

*(i) Если конец $D_i$ имеет $L$-гиперболический тип, то $D_i$ является $L$-регулярным тогда и только тогда, когда $J_{ij} = \infty$ для всех $j = 1, \ldots, k$.*

*(ii) Если конец $D_i$ имеет $L$-параболический тип и $N_{ij} = \infty$ для всех $j = 1, \ldots, k$, то $D_i$ является $L$-регулярным.*

**Замечание.** Конец $D_i$ имеет $L$-гиперболический тип тогда и только тогда, когда $I_i < \infty$. Кроме того, всякий квазимодельный конец $L$-гиперболического типа является $L$-строгим.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [10]–[12], [16]–[21].

## Список литературы


[1] Григорьян, А.А. О множестве положительных решений уравнения Лапласа — Бельтрами на римановых многообразиях специального вида / А.А. Григорьян // Изв. вузов. Матем. — 1987. № 2. — С. 30–37.

[2] Grigor‘yan, A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor‘yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 36. — P. 135–249.

[3] Grigor'yan, A. Liouville property for a Schro"dinger operator / A. Grigor'yan, W. Hansen // Math. Ann. — 1998. — V. 312. — P. 659-716.

[4] Kim, S.W. Generalized Liouville property for Shrödinger operator on Riemannian manifolds / S.W. Kim, Y.H. Lee // Math. Z. — 2001. — V. 238. — P. 355–387.

[5] Li, P. Harmonic functions and the structure of complete manifolds / P. Li, L.F. Tam // J. Diff. Geom. — 1992. — V. 35. — P. 359–383.

[6] Лосев, А.Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А.Г. Лосев // Изв. вузов. Матем. — 1991. № 12. — С. 15–24.

[7] Лосев, А.Г. Стационарное уравнение Шредингера на квазимодельных римановых многообразиях / А.Г. Лосев // Труды кафедры МАТФ ВолГУ. — Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета. — 2002. — С. 94–124.

[8] Лосев, А.Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А.Г. Лосев, Е.А. Мазепа // Алгебра и анализ. — 2001. Т. 13. Вып. 1. — С. 84–110.

[9] Мазепа, Е.А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е.А. Мазепа // Сиб. мат. журнал. — 2002. Т. 43. №. 3. — С. 591–599.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[10] Корольков, С.А. Решения уравнения Лапласа—Бельтрами на многообразиях с модельными концами / С.А. Корольков // Вестник ВолГУ. Сер.9: Исследования молодых ученых. — 2005. Вып. 4. Ч. 2. — С. 11–17.

[11] Корольков, С.А. О разрешимости некоторых краевых задач для гармонических функций на многообразиях с модельными концами / С.А. Корольков // Избранные труды молодых ученых математического факультета ВолГУ. — Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета. — 2005. — С. 25–30.

[12] Корольков, С.А. Решения стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях с квазимодельными концами / С.А. Корольков // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы. Тез. докл. — Воронеж: Издательство Воронежского государственного университета. — 2007. — С. 93–94.

[13] Корольков, С.А. О разрешимости некоторых краевых задач для гармонических функций на римановых многообразиях с концами / С.А. Корольков // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа. Тез. докл. — Новосибирск: Издательство Новосибирского государственного университета — 2007. — С. 208–209.

[14] Корольков, С.А. Гармонические функции на римановых многообразиях с концами / С.А. Корольков // Сиб. Мат. Журнал. — 2008. Т. 49. №. 6. — С. 1319–1332.

[15] Корольков, С.А. $L$-гармонические функции на многообразиях с концами / С.А. Корольков // Труды математического центра

им. Н.И. Лобачевского (Материалы Седьмой молодежной научной школы-конференции). Тез. докл. — Казань: Издательство Казанского математического общества. — 2008. Т. 37. — С. 94–96.

[16] Корольков, С.А. О множестве положительных решений уравнения Лапласа—Бельтрами на модельных многообразиях / С.А. Корольков, А.Г. Лосев // Вестник ВолГУ. Сер.1: Математика. Физика. — 2003–2004. Вып. 8. — С. 48–61.

[17] Корольков, С.А. Решения стационарного уравнения Шредингера на модельных многообразиях / С.А. Корольков, А.Г. Лосев // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского (Материалы международной научной конференции). Тез. докл. — Казань: Издательство Казанского математического общества. — 2004. Т. 25. — С. 148–149.

[18] Корольков, С.А. Ограниченные решения стационарного уравнения Шредингера на модельных многообразиях / С.А. Корольков, А.Г. Лосев // Вестник ВолГУ. Сер.1: Математика. Физика. — 2005. Вып. 9. — С. 15–26.

[19] Корольков, С.А. Гармонический функции на римановых многообразиях с квазимодельными концами / С.А. Корольков, А.Г. Лосев, Е.А. Мазепа // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского (Материалы Восьмой международной Казанской летней научной школы-конференции). Тез. докл. — Казань: Издательство Казанского математического общества. — 2007. Т. 35. — С. 136–138.

[20] Корольков, С.А. О гармонических функциях на римановых многообразиях с квазимодельными концами / С.А. Корольков, А.Г. Лосев, Е.А. Мазепа // Вестник СамГУ. Математика. — 2008. № 3. — С. 175–191.

[21] Лосев, А.Г. О множестве положительных решений уравнения Лапласа — Бельтрами на модельных многообразиях / А.Г. Лосев, С.А. Корольков // Геометрический анализ и его приложения: тез. докл. международной школы-конференции. — Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета. — 2004. — С. 115–118.