На правах рукописи

Фролов Александр Геннадьевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ В ТЕОРИИ СЛАБОНАПРАВЛЯЮЩИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ — 2012

Работа выполнена на кафедре прикладной математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Карчевский Евгений Михайлович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, доцент Желтухин Виктор Семенович, доктор физико-математических наук, профессор Смирнов Юрий Геннадьевич.
Ведущая организация:	Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова.

Защита состоится 24 мая 2012 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного Совета Д 212.081.21 в Казанском федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, дом 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета.

Автореферат разослан «____»________________2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук,
профессор О.А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задачи теории диэлектрических волноводов возникают при проектировании и анализе таких современных оптических волноводных структур, как оптические интегральные схемы и волоконно-оптические линии связи. В диссертации решаются скалярные задачи о собственных волнах неоднородных слабонаправляющих диэлектрических волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде. В работах Р.З. Даутова, Е.М. Карчевского и С.И. Соловьева доказано существование поверхностных волн волноводов в однородной среде, изучены их свойства. Разработано большое количество численных методов, ориентированных на поиск поверхностных волн таких волноводов. Значительно слабее развиты методы расчета вытекающих волн. Е.М. Карчевским и С.И. Соловьевым для поиска вытекающих волн слабонаправляющего волновода с переменным в ограниченной области плоскости поперечного сечения показателем преломления сформулирована нелинейная спектральная задача для двумерного слабо сингулярного интегрального уравнения. Одним из наиболее экономичных методов решения подобных задач является метод коллокации, сходимость которого в общем случае исследована Г.М. Вайникко. Численные методы для задачи о поверхностных волнах волновода в плоско-слоистой среде развиты относительно слабо, однако вопросы существования и свойства ее решения хорошо изучены A.S. Bonnet-Ben Dhia и N. Gmati. Для задачи о собственных волнах волновода в полупространстве известна лишь физическая постановка. В работах А.С. Ильинского, Ю.Г. Смирнова, Ю.В. Шестопалова, Е.В. Чернокожина исследованы близкие задачи о собственных волнах щелевых и полосковых линий.

Таким образом, актуальной проблемой является исследование в рамках единой математической модели свойств поверхностных и вытекающих собственных волн неоднородного слабонаправляющего диэлектрического волновода, находящегося в полупространстве. Важно доказать существование собственных волн. Дальнейшего развития требует применение метода двумерных слабо сингулярных интегральных уравнений в сочетании с методом коллокации в задачах о поверхностных собственных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода в плоско-слоистой среде, о вытекающих собственных волнах волновода в однородной среде и о поверхностных и вытекающих собственных волнах волновода в полупространстве, так как известные вычислительные схемы, применяющиеся для решения этих задач, не имеют достаточно полного теоретического обоснования.

Цель и задачи работы состоят в исследовании свойств поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода в полупространстве, доказательстве существования поверхностных волн такого волновода; разработке теоретически обоснованных и экономичных алгоритмов вычисления собственных волн неоднородных слабонаправляющих диэлектрических волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде, их реализации в виде комплекса программ.

Методы исследований. В работе используются методы теории слабо сингулярных интегральных уравнений, спектральной теории фредгольмовых голоморфных оператор-функций, спектральной теории ограниченных самосопряженных операторов, теории проекционных методов решения линейных и нелинейных спектральных задач для фредгольмовых операторов.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми и состоят в получении новой фомулировки задачи о собственных волнах неоднородного слабонаправляющего волновода в полупространстве; доказательстве существования решения этой задачи и установлении непрерывной зависимости постоянных распространения собственных волн от частоты электромагнитных колебаний; разработке и обосновании численных методов отыскания собственных волн неоднородных слабонаправляющих волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде; реализации этих методов в виде комплекса программ.

Достоверность результатов работы обеспечивается строгими математическими доказательствами; сопоставлением полученных результатов с точными решениями задач, известными в простейших частных случаях.

Практическое значение. Разработанные подходы, методы, алгоритмы и программы могут быть использованы при расчете широкого класса оптических интегральных схем и волоконно-оптических линий связи, а также при решении других спектральных задач теории дифракции.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на международных научных конференциях ММЕТ (Киев, 2010 г.), «Дни дифракции» (Санкт-Петербург, 2011 г.), молодежных научных школах-конференциях «Лобачевские чтения» (Казань, 2010 и 2011 гг.), Всероссийской молодежной научно-инновационной школе «Математика и математическое моделирование» (Саров, 2010 г.), Международном семинаре «Супервычисления и математическое моделирование» (Саров, 2009 г.), на семинаре «Математическое моделирование и математическая физика» кафедры прикладной математики КФУ (руководитель — Н.Б. Плещинский), на итоговых конференциях КФУ 2011 и 2012 гг., на итоговых научно-образовательных конференциях студентов КФУ 2009, 2010 и 2011 гг.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ, в том числе 3 статьи в изданиях из списка ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, приложения, списка литературы и изложена на 185 страницах. Список литературы состоит из 97 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель работы, приводится обзор литературы по исследуемой теме, излагается содержание диссертации.

В **первой главе** исследуются спектральные задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде. В §1.1 приводятся постановки этих задач.

Ненулевая функция $u \in U_A$ называется собственной функцией *общей* задачи (A) о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде, отвечающей собственным значениям $\omega > 0$ и $\beta \in \Lambda$, если:

$$\left[\Delta + \left(k^2 n^2 - \beta^2\right)\right] u = 0; \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \tag{1}$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Здесь Ω — ограниченная область на плоскости $\mathbb{R}^2$, $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ — граница Ω, область $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$; $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, ε_0 (μ_0) — электрическая (магнитная) постоянная; $n(x) = n_\infty > 0$ при $x \in \Omega_\infty$, где n_∞ — постоянный показатель преломления окружающей среды; функция $n(x) > n_\infty$ при $x \in \Omega$, $n \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$; U_A — множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ и $\overline{\Omega}_\infty$, дважды непрерывно дифференцируемых в Ω и Ω_∞, удовлетворяющих парциальным условиям излучения; Λ — риманова поверхность функции $\ln \chi(\beta)$, где $\chi(\beta) = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$; u — функция, аппроксимирующая в приближении слабонаправляющего волновода компоненты H_1 и H_2 комплексной амплитуды собственной волны.

Парциальные условия излучения, предложенные А.Г. Свешниковым, заключаются в том, что функция u должна быть представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда, допускающего почленное дифференцирование до любого порядка:

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi r) \exp(il\varphi), \quad r \geqslant R_0. \tag{3}$$

Здесь R_0 — такое положительное число, что Ω целиком лежит в круге радиуса R_0; $H_l^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода порядка l; r, φ — полярные координаты точки x.

Общей задаче (A) удовлетворяют амплитуды u, и поверхностных, и вытекающих собственных волн.

Ненулевая функция $u \in U_B$ называется собственной функцией задачи (B) о *поверхностных* собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде, отвечающей собственным значениям $\omega > 0$ и $\beta > kn_\infty$, если выполнены условия (1) и (2). Символом U_B обозначено множество вещественных функций непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ и $\overline{\Omega}_\infty$, дважды непрерывно дифференцируемых в Ω и Ω_∞, удовлетворяющих условию

$$u = \exp(-\sigma r)\, O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \sigma > 0,\ r \to \infty. \tag{4}$$

Ненулевая функция $u \in U_C$, называется собственной функцией *общей* задачи (C) о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве, отвечающей собственным значениям $\omega > 0$ и $\beta \in \Lambda$, если:

$$\left[\Delta + \left(k^2 n^2 - \beta^2\right)\right] u = 0, \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty; \tag{5}$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma; \tag{6}$$

$$u = 0, \quad x_2 = 0. \tag{7}$$

Здесь $\Omega_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0\} \setminus \overline{\Omega}$; U_C — множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ и $\overline{\Omega}_\infty$, дважды непрерывно дифференцируемых в Ω и Ω_∞, удовлетворяющих парциальным условиям излучения вида

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi r) \sin(l\varphi), \quad r \geqslant R_0,\, x_2 \geqslant 0. \tag{8}$$

Множество вещественных функций, удовлетворяющих тем же свойствам гладкости, но на бесконечности, имеющих асимптотику (4), обозначается символом U_D.

Общей задаче (C) удовлетворяют амплитуды, и поверхностных, и вытекающих собственных волн волновода в полупространстве.

Ненулевая функция $u \in U_D$ называется собственной функцией задачи (D) о *поверхностных* собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве, отвечающей собственным значениям $\omega > 0$, $\beta > kn_\infty$, если выполнены условия (5)–(7).

Ненулевая функция $u \in U_E$, называется собственной функцией задачи (E) о *поверхностных* волнах слабонаправляющего волновода в плоско-слоистой среде, отвечающей собственным значениям $\omega > 0$ и $\beta > kn_\infty$, если:

$$\left[\Delta + \left(k^2 n^2 - \beta^2\right)\right] u = 0, \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty; \tag{9}$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma; \tag{10}$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial x_2} = \frac{\partial u^-}{\partial x_2}, \quad x_2 = 0. \tag{11}$$

Здесь $\Omega_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \neq 0\} \setminus \overline{\Omega}$; U_E — множество вещественных, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ и $\overline{\Omega}_\infty$, дважды непрерывно дифференцируемых в Ω и Ω_∞ функций, удовлетворяющих условию

$$|u| \leqslant c \exp(-\alpha r), \quad c,\, \alpha > 0, \quad r > R_0. \tag{12}$$

Предполагается, что область Ω целиком лежит в нижней полуплоскости; показатель преломления $n(x) = n_\infty = \text{const}$ при $x \in \Omega_\infty,\ x_2 < 0$, кроме того, $n(x) = n_t = \text{const}$ при $x \in \Omega_\infty,\ x_2 > 0$, где $n_\infty > n_t > 0$.

В §1.2 доказывается теорема 1.1 о том, что в общей задаче (C) о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве при фиксированном $\omega > 0$ на главном листе

$$\Lambda_0^{(1)} = \{\beta \in \Lambda : -\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2,\ \operatorname{Im}(\chi(\beta)) \geqslant 0\}$$

поверхности Λ собственные значения β могут принадлежать лишь множеству

$$G = \left\{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+,\ \operatorname{Im}(\chi(\beta)) = 0\right\}, \quad n_+ = \max_{x \in \overline{\Omega}} n(x).$$

В §1.3 строятся интегральные представления собственных функций. Сначала доказывается лемма 1.1 о том, что любая собственная функция общей задачи (C) о собственных волнах волновода в полупространстве, отвечающая собственным значениям $\omega > 0$, $\beta \in \Lambda$, представляется в виде

$$u(x) = \int\limits_\Omega G_C(x, y)\, g^2(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{13}$$

где $G_C(x, y)$ — известная функция Грина задачи Дирихле для полуплоскости, $g^2(y) = k^2(n^2(y) - n_\infty^2)$.

Далее доказывается лемма 1.2 о том, что любая собственная функция задачи (E), отвечающая собственным значениям $\omega > 0$, и $\beta > kn_\infty$, представляется в виде (13), где вместо фундаментального решения используется известная функция Грина задачи сопряжения $G_E(x, y)$. Из этого интегрального представления следует, в частности, что модуль градиента собственной функции экспоненциально убывает на бесконечности, а именно, удовлетворяет условию (12).

В §1.4 методами спектральной теории фредгольмовых голоморфных оператор-функций изучается задача (C). При $x \in \Omega$ равенство (13) представляет собой интегральное уравнение, которое трактуется как уравнение

$$v = \lambda(\omega) T_C(\omega, \beta)\, v \tag{14}$$

в пространстве $L_2(\Omega)$. Здесь

$$(T_C(\omega, \beta))\, v(x) = \int\limits_\Omega K_C(\omega, \beta; x, y) v(y) dy, \quad x \in \Omega, \tag{15}$$

$$v = pu, \quad p^2(x) = \frac{n^2(x) - n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2} > 0,$$
$$\lambda = k^2 \left(n_+^2 - n_\infty^2\right) > 0, \tag{16}$$

где ядро $K_C = G_C(x,y)p(x)p(y)$ — слабо полярно.

Доказывается теорема 1.2 об эквивалентности задач (C) и (14). Она состоит в том, что если $u \in U_C$ является собственной функцией задачи (C), отвечающей некоторым собственным значениям $\omega > 0$ и $\beta \in \Lambda$, то $v = pu$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$ и дает нетривиальное решение уравнения (14) при тех же самых значениях параметров ω и β. С другой стороны, если при некоторых значениях ω и β уравнение (14) имеет нетривиальное решение $v \in L_2(\Omega)$, то $u = v/p$ удовлетворяет равенству (13), принадлежит множеству U_C и является собственной функцией задачи (C), отвечающей тем же самым значениям ω и β.

Далее вводится оператор-функция параметра β:

$$C(\omega, \beta) = I - \lambda(\omega) T_C(\omega, \beta), \tag{17}$$

где $\omega > 0$ — фиксированный параметр, I — единичный оператор в $L_2(\Omega)$. Доказывается, что при $\beta \in \Lambda$ оператор $C(\omega, \beta)$ фредгольмов.

В §1.4 доказывается теорема 1.3. Она состоит в следующем. Регулярное множество оператор-функции $C(\omega, \beta)$ не пусто, а именно, $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(C)$. Характеристическое множество оператор-функции $C(\omega, \beta)$ может состоять лишь из изолированных точек, являющихся ее характеристическими значениями. Каждое характеристическое значение β оператор-функции $C(\omega, \beta)$ непрерывно зависит от параметра $\omega > 0$. Кроме того, с изменением $\omega > 0$ характеристические значения оператор-функции $C(\omega, \beta)$ могут появляться и исчезать только на границе поверхности Λ, т. е. в точках $\beta = \pm k n_\infty$ и на бесконечности.

Изложение материала в этом параграфе начинается с формулировки известного утверждения об эквивалентности общей задачи (A) о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде и аналогичной (14) задачи вида

$$v = \lambda(\omega) T_A(\omega, \beta)\, v. \tag{18}$$

Далее формулируется аналогичное теореме 1.3 известное утверждение о свойствах решения задачи (18).

В §1.5 используется новый метод доказательства существования поверхностных волн слабонаправляющих волноводов. Он основан на сочетании трех эквивалентных формулировок для каждой из трех задач ((B), (D) и (E)): исходной классической постановки (I), формулировки в виде спектральной задачи для интегрального оператора с симметричным слабо полярным ядром (II), вариационной формулировки задачи на всей плоскости или полуплоскости (III). Интегральные операторы с указанными свойствами являются самосопряженными и вполне непрерывными. Для доказательства положительной определенности этих операторов применяется формулировка (III) и эквивалентность постановок (I)–(III) для каждой задачи.

Такой подход конструктивен. В §1.5 задачи (B), (D) и (E) сводятся к параметрическим линейным спектральным задачам для вполне непрерывных, самосопряженных, положительно определенных интегральных операторов в ограниченной области поперечного сечения волновода, а во второй главе предлагаются и исследуются конечномерные аппроксимации указанных операторов.

Параграф 1.5 начинается с изучения задачи (B) о поверхностных собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде. Собственные функции u отвечают собственным значениям $\omega > 0$ и $\beta > kn_\infty$. В этом случае вещественная часть числа χ равна нулю, а мнимая часть положительна: $\chi = i\sigma$, где

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2} > 0. \tag{19}$$

Доказывается, что при выполнении этого условия ядро интегрального оператора $T_A(\omega, \sigma)$ является не только слабо полярным, но также симметричным и положительным. Этот оператор рассматривается как оператор $T_B(\sigma)$, зависящий от параметра σ, а задача (18) при фиксированных $\sigma > 0$ — как линейная спектральная задача определения характеристических чисел λ и собственных функций v оператора $T_B(\sigma)$:

$$v = \lambda T_B(\sigma)\, v. \tag{20}$$

Формулируется теорема 1.4 об эквивалентности задачи (B) и задачи (20). Эта теорема с учетом сделанных в §1.5 предположений, фактически, является частным случаем известного утверждения об эквивалентности задачи (A) и задачи (18).

Затем доказывается теорема 1.5 о существовании решений задачи (20), а именно о том, что для любого $\sigma > 0$ оператор $T_B(\sigma)$ является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, следовательно, у этого оператора существует счетное множество положительных конечнократных характеристических чисел с единственной точкой накопления на бесконечности, а система собственных функций может быть выбрана ортонормированной. Кроме того, минимальное характеристическое число $\lambda_1(\sigma)$ простое (его кратность равна единице), соответствующая собственная функция $v_1(x)$ не меняет знака в области Ω. Последнее утверждение теоремы 1.5 следующее: $\lambda_1(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$.

Минимальное характеристическое число $\lambda_1 = \lambda_1(\sigma)$ и отвечающая ему собственная функция v_1 при фиксированном $\sigma > 0$ определяют собственную волну, которая в теории волноводов носит название основной. Следовательно, последние два утверждения теоремы 1.5 можно сформулировать так: у волновода, находящегося в однородной среде, при любой частоте $\omega > 0$ существует ровно одна основная волна.

Теорема 1.5 обобщает хорошо известные результаты о существовании и свойствах поверхностных собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной среде, полученные методом разделения переменных.

Далее исследуется существование решений задачи (D) о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве. Доказывается, что при $\omega > 0$ и $\beta > kn_\infty$ она сводится к решению задачи вида

$$v = \lambda T_D(\sigma)\, v, \tag{21}$$

где ядро интегрального оператора T_D выражается через функцию Грина для полуплоскости и является слабо полярным, симметричным и положительным. Формулируется теорема 1.6 об эквивалентности этой задачи исходной задаче (D), если параметры σ и λ связаны с ω и β равенствами (16) и (19). Эта теорема является частным случаем теоремы 1.2.

Доказывается теорема 1.7 о существовании собственных волн волновода в полупространстве, а именно, о том, что для любого $\sigma > 0$ оператор $T_D(\sigma)$ является вполне непрерывным самосопряженным и положительно определенным, и для этого оператора справедливы все утверждения, в точности повторяющие утверждения теоремы 1.5, кроме последнего, которое формулируется следующим образом: существует такое положительное число c, что $\lambda_1(\sigma) \to c > 0$ при $\sigma \to 0$. Это утверждение означает, что у слабонаправляющего волновода в полупространстве при достаточно малых ω не существует поверхностных собственных волн. В этом заключается принципиальное отличие спектральных характеристик волновода в полупространстве от волновода в однородной окружающей среде, у которого при любой частоте $\omega > 0$ существует, по крайней мере одна поверхностная собственная волна (основная).

Завершается §1.5 исследованием задачи (E) о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в слоистой среде. Доказывается, что при $\omega > 0$, $\beta > kn_\infty > kn_t$ интегральный оператор T_E вида (15), где используется функция Грина задачи сопряжения, имеет слабо полярное, вещественное и симметричное ядро. Ставится задача: найти значения $\sigma > 0$, $\lambda > 0$ и ненулевые функции $v \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющие равенству

$$v = \lambda T_E\,(\sigma, \lambda)\, v. \tag{22}$$

Доказывается теорема 1.8 об эквивалентности задачи (22) и исходной задачи (E), если параметры σ и λ связаны с ω и β равенствами (16) и (19). Далее фиксируется $\sigma > 0$ и наряду с задачей (22) рассматривается следующая задача:

$$v = \gamma T_E\,(\sigma, \lambda)\, v. \tag{23}$$

Ясно, что если при некотором $\lambda > 0$ существует значение $\gamma = \lambda$ и ненулевая функция $v \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющие равенству (23), то тройка σ, λ, v есть решение задачи (22).

Доказывается теорема 1.9 о существовании решений задачи (23), а именно о том, что при $\sigma > 0$, $\lambda > 0$ оператор $T_E\,(\sigma, \lambda)$ является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, и, следовательно, у этого оператора существует счетное множество положительных конечнократных характеристических чисел с единственной точкой накопления на бесконечности, а система собственных функций может быть выбрана ортонормированной.

Далее вводятся в рассмотрение функции $\gamma_i = \gamma_i(\lambda)$ параметра $\lambda > 0$, где $i = 1, 2, \ldots$, $\gamma_i(\lambda)$ — характеристические числа оператора $T_E(\sigma,\lambda)$, $\sigma > 0$ есть фиксированный параметр. Приводятся результаты расчетов конкретных волноводов в слоистой среде, полученные в диссертации методом коллокации, показывающие, что в рассмотренных частных случаях существуют приближенные решения уравнений $\gamma_i(\lambda) = \lambda$.

Параграф 2.1 **второй главы** посвящен численному решению спектральных задач (20), (21) и (22). Строится правильная регулярная триангуляция Ω_h области Ω, вершины многоугольника Ω_h принадлежат Γ (через h обозначается максимальный диаметр элементов триангуляции). Вводится сетка Ξ_h, состоящая из центров масс $\xi_{j,h}$ элементов триангуляции $\Omega_{j,h}$ (их число обозначается N).

При фиксированных значениях параметров, от которых зависят интегральные операторы, приближенное решение задач (20), (21) и (22) разыскивается в виде кусочно-постоянной функции

$$u^{(h)}(x) = \sum_{j=1}^{N} u_h(\xi_{j,h})\varphi_{j,h}, \tag{24}$$

где $\varphi_{j,h}(x) = 1$, если $x \in \Omega_{j,h}$, $\varphi_{j,h}(x) = 0$, если $x \notin \Omega_{j,h}$. Значения $u_{j,h} = u_h(\xi_{j,h})$ определяются из уравнений

$$u_{i,h} = \lambda \sum_{j=1}^{N} u_{j,h} \int\limits_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y)dy, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{25}$$

Множество характеристических чисел оператора T обозначается через $\mathrm{sp}(T)$. Через $\mathrm{sp}(T_h)$ обозначается множество чисел $\lambda_h = 1/\mu_h$, где μ_h — характеристическое число матрицы T_h с вещественными элементами

$$t_{ij} = \int\limits_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y)dy, \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

Доказывается теорема 2.10, которая состоит в следующем. Пусть оператор T определяется правой частью равенства (20) или (21) при фиксированном $\sigma > 0$, либо равенства (22) при фиксированных $\lambda > 0$ и $\sigma > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\lambda_0 \in \mathrm{sp}(T)$, то существует такое семейство $\lambda_h \in \mathrm{sp}(T_h)$, что $\lambda_h \to \lambda_0$ при $h \to 0$.

2. Если семейство чисел $\lambda_h \in \mathrm{sp}(T_h)$ такое, что $\lambda_h \to \lambda_0 > 0$ при $h \to 0$, то $\lambda_0 \in \mathrm{sp}(T)$.

3. Если $n \in C^2(\Omega)$, а характеристическое число $\lambda_0 \in \mathrm{sp}(T)$ простое, то существует такое $\overline{h} > 0$, что

$$|\lambda_h - \lambda_0| \leqslant ch^2, \quad h \in (0, \overline{h}).$$

Доказательство теоремы основывается на применении известных лемм из монографии Г.М. Вайникко[1)], где рассмотрен более общий случай многомерных интегральных операторов с полярными ядрами. В **приложении** к диссертации эти леммы формулируются и (проще и подробнее) доказываются применительно к рассматриваемому в работе частному случаю.

В §2.2 задача (25) сводится к обобщенной алгебраической задаче на собственные значения для симметричных вещественных матриц. Приводятся расчетные формулы для вычисления интегралов матричных элементов метода коллокации. Особое внимание уделяется вычислению слабо сингулярных интегралов диагональных элементов. Они имеют логарифмическую особенность при совпадении аргументов, которая выделяется аналитически.

Приводятся результаты численного решения ряда конкретных задач спектральной теории диэлектрических волноводов. Полученные результаты сравниваются с известными точными решениями и результатами расчетов из работ других авторов, полученных другими методами. Рассчитываются поверхностные волны и таких волноводов в полупространстве и слоистой среде, для которых результаты расчетов не известны. Оценивается реальная скорость сходимости метода коллокации в зависимости от h. Во всех экспериментах демонстрируется второй порядок точности метода.

Параграф 2.3 посвящен решению методом коллокации нелинейных спектральных задач (14) и (18). Пусть частота $\omega > 0$ фиксирована. Тогда общие задачи о собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде и полупространстве имеют вид

$$A(\omega, \beta)u = (I - \lambda(\omega)T(\omega, \beta))u = 0, \tag{26}$$

где A — соответствующая фредгольмова, голоморфная по $\beta \in \Lambda$ оператор-функция. Оператор T аппроксимируется точно так же, как описано в первом параграфе второй главы. Приближением по методу

[1)] Vainikko G. Multidimensional weakly singular integral equations. Springer, 1993. 159 p.

коллокации к решению задачи (26) называется решение нелинейной алгебраической спектральной задачи

$$A_h(\omega, \beta) u_h = 0,$$

где $A_h(\omega, \beta)$ — матрица с элементами, нелинейно зависящими от β:

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \lambda(\omega) \int\limits_{\Omega_{j,h}} K(\omega, \beta; \xi_{i,h}, y) dy, \quad i, j = 1, ..., N. \qquad (27)$$

Характеристическое множество оператор-функции $A(\omega, \beta)$ обозначается символом $\sigma(A)$. Через $\sigma(A_h)$ обозначается множество характеристических чисел $\beta_h \in \Lambda$ матрицы $A_h(\omega, \beta)$.

Доказывается теорема 2.11, которая заключается в следующем. Пусть частота $\omega > 0$ фиксирована; оператор-функция $T(\omega, \beta)$ параметра $\beta \in \Lambda$ определена равенством вида (15) с ядром, выражающимся через соответствующую функцию Грина; пусть $A(\omega, \beta)$ — соответствующая оператор-функция параметра $\beta \in \Lambda$ определенная равенством (26). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\beta_0 \in \sigma(A)$, то существует такое семейство $\beta_h \in \sigma(A_h)$, что $\beta_h \to \beta_0$ при $h \to 0$.

2. Если семейство $\beta_h \in \sigma(A_h)$ такое, что $\beta_h \to \beta_0 \in \Lambda$ при $h \to 0$, то $\beta_0 \in \sigma(A)$.

3. Пусть семейство $\beta_h \in \Lambda$ и семейство нормированных векторов u_h такие, что $\beta_h \in \sigma(A_h)$, $A_h(\omega, \beta_h) u_h = 0$ и $\beta_h \to \beta_0$, $u_h \to u_0$ при $h \to 0$. Тогда $\beta_0 \in \sigma(A)$ и $A(\omega, \beta_0) u_0 = 0$, $\|u_0\|_{L_2(\Omega)} = 1$.

Здесь через E_h обозначено пространство сеточных функций со значениями в точках коллокации и максимум-нормой, p_h — соответствующий проектор.

Доказательство этой теоремы опирается на известные результаты Г.М. Вайникко о сходимости проекционных методов решения нелинейных спектральных задач для фредгольмовых операторов.

В §2.4 описываются численные эксперименты поиска методом коллокации вытекающих собственных волн волноводов, находящихся в однородной среде и полупространстве. Для решения нелинейных конечномерных спектральных задач применяется метод обратных итераций с невязкой. Приводятся результаты расчета дисперсионных кривых и линий уровня вытекающих собственных волн однородных и неоднородных волноводов различных сечений. Исследуется сходимость метода коллокации в зависимости от h путем сравнения решений, полученных при разных h, с известными точными решениями и решениями, полученными на больших сетках. Эксперименты показывают, что метод имеет второй порядок точности.

В §2.5 описывается комплекс программ на языке Matlab, который реализует предложенные методы и алгоритмы. Программы позволяют строить дисперсионные кривые и находить амплитуды поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющих волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и слоистой среде. Работоспособность программ демонстрируется в широком диапазоне значений физических и расчетных параметров.

Основные результаты диссертации

1. Сформулирована нелинейная спектральная задача для фредгольмовой голоморфной оператор-функции, содержащей двумерный слабо сингулярный интегральный оператор, эквивалентная общей задаче о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве. Доказано, что для всех значений частоты электромагнитных колебаний характеристическое множество может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями. Установлено, что характеристические значения непрерывно зависят от частоты и могут появляться и исчезать лишь на границе области голоморфности оператор-функции.

2. Сформулированы параметрические задачи на собственные значения для интегральных операторов с симметричными, слабо полярными ядрами, эквивалентные задачам о поверхностных собственных волнах волноводов в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде. Доказано, что для всех допустимых значений параметров у задачи о поверхностных волнах волновода в полупространстве существует счетное множество решений.

3. Разработан метод коллокации численного решения спектральных задач для двумерных слабо сингулярных интегральных уравнений: линейных, эквивалентных задачам о поверхностных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде; и нелинейных, эквивалентных общим задачам о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах слабо-

направляющих волноводов в однородной среде и полупространстве. Доказана сходимость метода коллокации решения линейных и нелинейных задач.

4. Метод коллокации реализован в виде комплекса программ на языке Matlab. Показана практическая эффективность предлагаемого метода. Численными экспериментами подтвержден теоретический результат о том, что метод имеет второй порядок скорости сходимости при вычислении простых характеристических чисел линейных задач; продемонстрировано, что метод имеет такую же скорость сходимости и при решении нелинейных задач.

Публикации по теме диссертации

В рецензируемых журналах из списка ВАК

1. Фролов, А.Г. Численное решение задачи о распространении электромагнитных волн в слабонаправляющих волноводах [Текст] / Е.М. Карчевский, А.Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2011. — №1(17). — С. 47–57.

2. Фролов, А.Г. Собственные волны слабонаправляющего волновода в полупространстве [Текст] / Е.М. Карчевский, А.Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2012. — №1(21). — С. 22–30.

3. Фролов, А.Г. Метод коллокации для спектральных задач теории диэлектрических волноводов [Текст] / А.Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2012. — №2(22). — С. 3–15.

В других изданиях

4. Фролов, А.Г. Математическая модель диэлектрического волновода [Текст] / Е.М. Карчевский, Э.Р. Миниахметов, А.Г. Фролов // Супервычисления и математическое моделирование, XI международный семинар, 5–9 апреля 2009 г.: тезисы. — Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2009. — С. 75–76.

5. Фролов, А.Г. Задача о собственных волнах оптического волновода [Текст] / А.Г. Фролов // Итоговая научно–образовательная конференция студентов Казанского государственного университета 2009 года: сборник тезисов. — Казань: Казан. гос. ун–т, 2009. — С. 92–93.

6. Фролов, А.Г. Собственные волны градиентного волновода [Текст] / А.Г. Фролов // Итоговая научно–образовательная конференция студентов Казанского государственного университета 2010 года: сборник тезисов. — Казань: Казан. гос. ун–т, 2010. — С. 99–100.

7. Frolov, A. Natural modes of weakly guiding optical fiber [Электронный ресурс] / A. Frolov, E. Karchevskiy // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kyiv, Ukraine, September 6–8, 2010. — Proceedings, Kyiv, Ukraine, 2010. — 1 электрон. опт. диск (CD–ROM). — IEEE Catalog Number: CFP10761–CDR. — ISBN: 978–1–4244–8860–5.

8. Фролов, А.Г. Собственные волны градиентного диэлектрического волновода [Текст] / А.Г. Фролов // Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы Девятой молодёжной научной школы–конференции «Лобачевские чтения – 2010»; Казань, 1 – 6 октября 2010 г. — Казань: Казан. мат. о–во, 2010. — Т.40. — С. 353–357.

9. Фролов, А.Г. Метод коллокации для решения спектральных задач теории диэлектрических волноводов [Текст] / А.Г. Фролов // Итоговая научно–образовательная конференция студентов Казанского университета 2011 года: сборник тезисов. — Казань: Казан. ун–т, 2011. — С. 104–105.

10. Frolov A. Generalized modes of optical fiber [Текст] / Frolov, A. Generalized modes of optical fiber / A. Frolov, E. Karchevskiy // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction' 2011. Saint Petersburg, May 30 – June 3, 2011. — IEEE, 2011. — IEEE Catalog No.: CFP11489-PRT. — P. 67–71.

11. Frolov, A. Generalized modes of optical fiber [Текст] / A. Frolov, E. Karchevskiy // Days on Diffraction' 2011. Int. Conf. Saint Petersburg, May 30 – June 3, 2011: Abstracts. Universitas Petropolitava. — P. 35–36.

12. Фролов, А.Г. Метод коллокации поиска постоянных распространения слабонаправляющего диэлектрическго волновода [Текст] / А.Г. Фролов // Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы Десятой молодёжной научной школы–конференции «Лобачевские чтения – 2011»; Казань, 1 – 5 ноября 2011 г. — Казань: Казан. мат. о–во, 2011. — Т.44. — С. 324–327.

13. Фролов, А.Г. Метод коллокации для поиска собственных волн диэлектрического волновода [Текст] / А.Г. Фролов // Исследования

по прикладной математике и информатике. — Казань: Изд-во Казан. федерал. ун-та, 2011. — Вып. 27. — С. 171–178.