На правах рукописи

Чубаров Георгий Владимирович

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ НАДСТРОЕЧНЫХ СЛОЕНИЙ

Специальность 01.01.04 — Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2013

Работа выполнена на кафедре геометриии и высшей алгебры механико-математического факультета ФГАОУ ВПО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (Национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент Жукова Нина Ивановна.

Официальные оппоненты: Аминова Ася Васильевна,
доктор физико-математических наук,
профессор ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»,

Султанов Адгам Яхиевич,
кандидат физико-математических наук,
профессор ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет».

Ведущая организация: ФГБУН «Институт математики с ВЦ УНЦ РАН».

Защита состоится 19 декабря 2013 года в 17 ч. 30 мин. на заседании Диссертационного совета Д.212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35.

Автореферат разослан « ___ » ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент Е.К Липачёв

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из способов построения слоений является предложенный Хефлигером[1] в 1962 году, алгоритм надстройки (suspension). Слоения, которые можно построить с помощью алгоритма надстройки, называются надстроечными.

Надстроечные слоения изучались Тёрстоном и Хиршем[2] с точки зрения слоёных расслоений.

В теории динамических систем важную роль играет вариант надстройки[3], с помощью которой строятся специальные потоки над диффеоморфизмами. Надстройка использовалась для построения примеров слоений с «экзотическими» свойствами. Так Данжуа посредством надстройки сконструировал поток класса C^1 на двумерном торе, определяющий одномерное слоение с исключительным минимальным множеством.

Блюменталь и Хебда[4] ввели понятие связности Эресмана для слоений как естественное обобщение понятия связности для расслоений. Исследованиям слоений со связностью Эресмана посвящены работы Волака, Шурыгина, Жуковой, Малахальцева и других. Надстроечные слоения образуют подкласс слоений с интегрируемой связностью Эресмана.

Как известно, на многообразии M с надстроечным слоением $\mathcal{F}$ существует риманова метрика g, относительно которой $(M, \mathcal{F})$ — вполне геодезическое слоение, то есть каждый его слой — вполне геодезическое подмногообразие риманова многообразия (M, g).

Вполне геодезические слоения на римановых многообразиях исследуются в работах Карьера, Жиса[5], Джонсона[6], Блюменталя и Хебды[7], Кейрнса[8]

[1]Haefliger A. Varietes feuilletees // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1962. V. 16. P. 367–397.

[2]Hirsch M.,Thurston W. Foliated bundles, invariant measures and flat manifolds // Ann. Math. 1975. V. 101, № 3. C. 369–390.

[3]Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, №1 (151). С. 113—185.

[4]Blumenthal R.A., Hebda J.J. Ehresmann connection for foliations // Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33. P. 597–611.

[5]Ghys E. Classification des feuilletage totalement geodesiques de codimension 1 // Comment. Math. Helv. 1983. V. 58. P. 543–572.

[6]Jonson D.L. Deformations of totally geodesic foliations // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Dekker, New York. 1987. V. 105. P. 167–178.

[7]Blumenthal R.A., Hebda J.J. Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations // Quarterly J. Math. 1984. V. 35, № 2. P. 383–392.

[8]Cairns G. The duality between Riemannian foliations and geodesible foliations // in P. Molino,

и других.

Понятие группоида голономии слоения введено Эресманом. Позднее Винкельнкемпером[9] была предложена эквивалентная конструкция, названная им графиком слоения.

График $G(\mathcal{F})$ гладкого слоения $\mathcal{F}$ коразмерности q на n мерном многообразии M несёт в себе информацию о ростковых группах голономии слоения $(M, \mathcal{F})$ и является линейно связным, вообще говоря нехаусдорфовым, $(2n-q)$-мерным многообразием того же класса гладкости, что и слоение $\mathcal{F}$.

График применялся: Винкельнкемпером[10] — при оценке количества концов универсального слоя риманова слоения на односвязных компактных многообразиях; Волаком[11] — при решении аналогичной задачи для слоений с трансверсальной системой дифференциальных уравнений; Жуковой[12] [13] — при исследовании локальной устойчивости компактных слоёв слоений.

Конн[14] построил C^*-алгебры комплекснозначных функций, заданных на группоиде голономии $G(\mathcal{F})$ слоения $(M, \mathcal{F})$, и заложил основы некоммутативной геометрии и топологии слоений (см. обзор Кордюкова[15]). В работах, где C^*-алгебры применяются для исследования топологических свойств слоений, нехаусдорфовость графика выступает препятствием, которое либо обходится нетривиальным образом (Конн), либо изначально предполагается хаусдорфовость многообразия $G(\mathcal{F})$ (Гектор[16], Фак и Скандалис[17]).

В этом контексте целесообразно выделить те классы слоений, которые

Riemannian Foliations. Boston: Birkhäuser, 1988. Progress in Math. V. 73. P. 249–263.

[9] Winkelnkemper H.E. The graph of a foliation // Ann. Global Analysis and Geometry. 1983. V. 1. P. 57–75

[10] Winkelnkemper H. E. The number of ends of the universal leaf of a Riemannian foliation // Progr. in Math. 1983. V. 32. P. 247–254

[11] Wolak, R.A. Le graphe d'un feuilletage admettant un systeme transverse d'e'quations diffe'rentielles // Math. Z. 1989. V. 201, № 2. P. 177–182

[12] Zhukova N. I. Local and Global Stability of Compact Leaves and Foliations // Журн. матем. физ., анал., геом. 2013. Т. 9, № 3. P. 400–420.

[13] Жукова Н.И. Графики слоений со связностью Эресмана и слоевая стабильность // Изв. вузов Математика. 1994. № 2. С. 78–81.

[14] Connes A. Geometrie non commutative. Paris: InterEdition, 1990. 240 p.

[15] Кордюков, Ю. А. Теория индекса и некоммутативная геометрия на многообразиях со слоением // Успехи математических наук. 2009. Т. 64, вып. 2 (386). С. 73–202.

[16] Hector G. Groupoides, feuilletages et C^*-algebres // Geometryc study of foliation. Tokyo. 1993. P. 3–34.

[17] Fack T., Skandalis G. Sur les representations et ideaux de la C*-algebre d'un feuilletage // Journal of Operator Theory. 1982. V. 8. P. 95–129.

имеют хаусдорфов график. Винкельнкемпером[18] доказан общий критерий хаусдорфовости графика слоения в терминах локальных голономных диффеоморфизмов.

Для топологизации множества слоений существуют два подхода. Первый — C^r-топология, являющаяся обобщением C^r-топологии на множестве динамических систем. Второй — топология, специально введённая Хиршем и Эпштейном[19] для слоений. Последняя топология учитывает не только близость касательных пространств к слоям, но и близость их голономий.

Понятие структурной устойчивости введено Андроновым и Понтрягиным[20]. Структурная устойчивость диффеоморфизмов и потоков на компактных многообразиях является одной из центральных проблем качественной теории динамических систем.

Глубокие результаты по структурной устойчивости слоений в настоящее время получены лишь для отдельных, наиболее простых классов слоений. Структурной устойчивости собственных слоений с морсовскими особенностями коразмерности 1 на компактных многообразиях посвящены работы Бонатти[21] и Брунеллы[22]. Исследование структурной устойчивости надстроечных слоений на компактных многообразиях начато Палисом[23]. Им был приведён без доказательства критерий структурной устойчивости надстроечных слоений на компактных многообразиях. Различные вопросы структурной устойчивости слоений изучались так же в статьях Леви и Шуба[24], Жуковой[25].

Орбифолдфы можно рассматривать как многообразия с особенностями. Они введены Сатаки[26] и нашли применение в теоретической физике.

---

[18]Winkelnkemper H.E. The graph of a foliation

[19]Epstein D. A topology for the space of foliation // Geometry and Topology, Lecture Notes in Math. 1976. V.597. P.132–150.

[20]Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т.14. N 5. С. 247–250.

[21]Bonatti C. Sur les feuilletages singuliers stables des variétés de dimension trois. // Commun. Math. Helv. 1985. V. 60 № 2. P. 429-444.

[22]Brunella M. Remarks on structurally stable proper foliations // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1994. V.115, № 1. P. 111–120.

[23]Palis J. Regidity of centralizers of diffeomorphisms and structural stability of suspended foliations // Lecture Notes in Math. 1978. V. 652. P.114–121.

[24]Levin H., Shub M. Stability of foliations // Trans of AMS. 1973. V. 184. P. 419–437.

[25]Жукова Н.И. Компактные слои структурно устойчивых слоений // Труды МИАН, 2012. Т. 278. С. 102–113.

[26]Satake I. The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds // J. Math. Soc. Japan. 1957. V. 9. P. 464–492.

Двумерные орбифолды использовал Тёрстон[27] для классификации трёхмерных многообразий. Орбифолды возникают так же в теории слоений как пространства слоёв некоторых классов слоений.

Всё выше сказанное говорит об актуальности темы диссертации.

Цель диссертационной работы. Исследование надстроечных слоений:

- с точки зрения хаусдорфовости их графиков, а именно — сравнение множества слоений с хаусдорфовым и нехаусдорфовым графиками:
  - в теоретико-множественном аспекте;
  - в топологическом аспекте;
- с точки зрения структурной устойчивости, применительно:
  - к слоениям с хаусдорфовыми и нехаусдорфовыми графиками,
  - к общим надстроечным слоениям;
- с точки зрения возможности обобщения конструкции надстройки.

Методы исследования. В работе использовались методы римановой геометрии, теории регулярных накрытий, теории связностей Эресмана для расслоений и слоений. При исследовании структурной устойчивости надстроечных слоений использовались результаты качественной теории динамических систем и теории представлений групп.

Научная новизна. Все результаты, выносящиеся на защиту, являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказательство критерия изоморфизма надстроечных слоений в категории слоений $\mathcal{F}ol^{r,s}$ (теорема 1.4.1).

2. Доказательство эквивалентности хаусдорфовости графика $G(\mathcal{F})$ надстроечного слоения $(M, \mathcal{F}) := \mathcal{S}\mathbf{us}(B, T, \rho)$ квазианалитичности действия его структурной группы $\Psi := \operatorname{Im}\rho$ на трансверсальном многообразии T (теорема 2.2.2). Построение на основе этого результата двух континуальных

[27] Thurston W.P. The geometry and topology of 3-manifolds // Mimeographed Notes. Princeton Univ. 1978.

семейств попарно неизоморфных вполне геодезических слоений с хаусдорфовыми и нехаусдорфовыми графиками на каждой из следующих компактных локально евклидовых поверхностей: торе, цилиндре, листе Мёбиуса, и бутылке Клейна (теорема 2.3.1).

3. Доказательство структурной устойчивости представления

$$\rho : \pi_1(B, b_0) \to Diff^r(T),$$

в пространстве представлений $A^r(\pi_1(B, b_0), T)$, задающего структурно устойчивое слоение $(M, \mathcal{F}) = \mathcal{S}\mathbf{us}(T, B, \rho)$ в пространстве слоений $\mathcal{F}ol^r_q(M)$ (предложение 3.2.1).

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы при исследованиях в геометрической теории слоений, а так же применены в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов физико-математических специальностей и при выполнении курсовых и учебно-исследовательских работ.

Апробация. Результаты диссертации докладывались: на международной летней школе-семинаре «Современные проблемы теоретической и математической физики» в Казани в 1999, 2001, 2002, 2003 гг.; на международной конференции «Лаптевские чтения» в Москве (МГУ) в 2000 г.; в весенней математической школе «Понтрягинские чтения-XIII» в Воронеже в 2002 г, на международной конференции «Дифференциальные уравнения и динамические системы» в Суздале в 2004 и в 2010 гг., на Четвёртой молодёжной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» в Казани в 2005 г., на международной конференции «Нелинейные уравнения и комплексный анализ», проводимой Институтом математики с ВЦ УНЦ РАН на Южном Урале в 2009 году.

По теме диссертации делались доклады: на «Итоговой научной конференции ННГУ» в Нижнем Новгороде в 1999, на геометрических семинарах кафедры геометрии и высшей алгебры ННГУ (рук. проф. Е.И. Яковлев) в 1999-2013 гг.

Исследования по теме диссертации вошли в научные проекты, поддержанные следующими грантами в которых диссертант являлся исполнителем: 2001–2003 гг. Грант РФФИ «Слоение и расслоение со связностями» проект № 01-01-590-а; 2009-2011 гг. ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», контракт №П495; 2012-2013 гг. ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2012-2013 годы», контракт № 14.B37.21.0361.

Публикации по теме диссертации и вклад соискателя. По теме диссертации опубликовано 15 работ. Среди них 6 статей, из которых 4 входят в издания, рекомендованные ВАК РФ. Две работы написанны единолично, остальные совместно с научным руководителем.

Во всех совместных работах с научным руководителем вклад каждого из соавторов составляет 50 %.

Все результаты, выносимые на защиту, получены Чубаровым Г.В. самостоятельно.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, заключения и четырёх глав основного текста, разбитых на 10 разделов (4 в первой главе 3 во второй и 2 в третьей и 1 в четвёртой) 10-ти рисунков и списка литературы из 81 наименований. Общий объём работы 114 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, дан краткий обзор литературы по вопросам, рассмотренным в диссертации, сформулированны цели, методы и основные результаты диссертации, кратко описано её содержание, приведён список публикаций автора по теме диссертации.

В **главе 1** описаны два способа конструктивного определения надстроечного слоения, а так же даны различные характеризации надстроечных слоений. В заключение доказан критерий изоморфизма надстроечных слоений в категории слоений.

Раздел 1.1 носит реферативный характер. В нём даётся определение слоения и связности Эресмана для слоений, вводится категория C^r-слоений $\mathcal{F}ol^{r,s}$, морфизмами в которой служат C^s-диффеоморфизмы, где $s \leq r$, переводящие слои в слои (определение 1.3.3).

Раздел 1.2 посвящён описанию двух подходов к определению надстроечного слоения и доказательству их эквивалентности. Для построения надстроечного слоения нужно задать два гладких многообразия B и T размерности p и q соответственно и гомоморфизм $\rho : \pi_1(B, b_0) \to Diff^r(T)$ фундаментальной группы многообразия B в группу глобальных диффеоморфизмов многообразия T. Введём обозначения $G := \pi_1(B, b)$ и $\Psi := \rho(G)$.

Пусть $f : \widehat{B} \to B$ – универсальное накрывающее отображение, рассматриваемое как главное расслоение со структурной группой G и базой B. Гомоморфизм ρ задаёт левое действие группы G на многообразии T, поэтому можно построить[28] расслоение $M(B, G, T, \widehat{B})$, ассоциированное с главным. Действие дискретной группы G на $\widehat{B} \times T$ сохраняет тривиальное p-мерное слоение $F := \{\widehat{B} \times \{t\} \mid t \in T\}$ произведения $\widehat{B} \times T$. Поэтому фактор-отображение $f_0 : \widehat{B} \times T \to (\widehat{B} \times T)/G = M$ индуцирует на $(p+q)$-мерном фактор-многообразии M гладкое p-мерное слоение $\mathcal{F}$, слои которого трансверсальны слоям расслоения $p : M \to B$.

Пара $(M, \mathcal{F})$ называется *надстроечным слоением* и обозначается нами через $\mathcal{S}\mathbf{us}(T, B, \rho)$. Субмерсия $p : M \to B$ называется *трансверсальным расслоением*, а T — *полной трансверсалью*. Группа диффеоморфизмов $\Psi := \rho(G)$ многообразия T называется *структурной группой* надстроечного слоения $(M, \mathcal{F})$.

Предположения. Везде далее предполагается, что T компактно, а группа G имеет конечное число образующих.

В **разделе 1.3** надстроечные слоения охарактеризованны в классе двуслоений (предложение 1.3.2) и в классе слоений со связностью Эресмана (предложение 1.3.3). Здесь доказано также, что слоение $(M, \mathcal{F})$ трансверсальное слоям субмерсии $p : M \to B$ со связными компактными слоями, является надстроечным тогда и только тогда, когда на M существует полная риманова метрика g, относительно которой $(M, \mathcal{F})$ — вполне геодезическое слоение (предложение 1.3.5).

Раздел 1.4 посвящён доказательству следующего критерия изоморфизма надстроечных слоений в категории слоений, который выносится на защиту (пункт 1).

Теорема 1.4.1. *Пусть*

1) $(M, \mathcal{F}) = \mathcal{S}\mathbf{us}(T, B, \rho)$ *и* $(M', \mathcal{F}') = \mathcal{S}\mathbf{us}(T', B', \rho')$ *— надстроечные* C^r*-слоения,* $r \geq 1$*;*

[28]Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука. 1981. Т.1

2) $\hat{G}$, $\hat{G}'$ — группы накрывающих преобразований универсальных накрытий для слоёных многообразий M и M' соответственно;

3) $q_2 : \hat{G} \to \hat{G}_2$, $q_2' : \hat{G}' \to \hat{G}_2'$ — естественные эпиморфизмы на индуцированные группы диффеоморфизмов $\hat{G}_2$ и $\hat{G}_2'$ многообразий $\hat{T}$ и $\hat{T}'$ соответсвенно.

Слоения $(M, \mathcal{F})$ и $(M', \mathcal{F}')$ изоморфны в категории $\mathcal{F}ol^{r,s}$, $0 \le s \le r$ тогда и только тогда, когда существуют

1) C^s-диффеоморфизмы $u : \hat{B} \times \hat{T} \to \hat{B}' \times \hat{T}'$ и $v : \hat{T} \to \hat{T}'$;

2) изоморфизмы групп $\mu : \hat{G} \to \hat{G}'$ и $\chi : \hat{G}_2 \to \hat{G}_2'$,

которые для любого $g \in \hat{G}$ удовлетворяют коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{T} \arrow[rrr, "q_2(g)"] \arrow[ddd, "v"'] & & & \widehat{T} \arrow[ddd, "v"] \\
& \widehat{B} \times \widehat{T} \arrow[ul, "pr_2"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & \widehat{B} \times \widehat{T} \arrow[ur, "pr_2"] \arrow[d, "u"] & \\
& \widehat{B}' \times \widehat{T}' \arrow[dl, "pr_2'"'] \arrow[r, "\mu(g)"] & \widehat{B}' \times \widehat{T}' \arrow[dr, "pr_2'"] & \\
\widehat{T}' \arrow[rrr, "q_2'(\mu(g))=\chi(q_2(g))"] & & & \widehat{T}'
\end{tikzcd}\ .$$

Как показывают примеры (пример 1.4.1), структурная группа Ψ надстроечного слоения не является инвариантной в категории слоений.

В **главе 2** доказывается критерий хаусдорфовости графика надстроечного слоения и на его основе даётся теоретико-множественная оценка соотношения между множествами бесконечно гладких надстроечных слоений с хаусдорфовым и нехаусдорфовым графиком на компактных поверхностях.

Раздел 2.1 посвящён описанию базовых для главы 2 понятий, таких как ростковая группа голономии $\Gamma(L, x)$, группа $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$, график слоения $G(\mathcal{F})$. Кроме того, приводится пример надстроечного строения с нехаусдорфовым графиком (пример 2.1.1).

В **подразделе 2.2.1** доказывается, что расслоение $M(B, T, \pi_1(B, b_0), \hat{B})$ с проекцией $p : M \to B$, трансверсальное надстроечному слоению, имеет группу голономии $\Phi(x)$, изоморфную структурной группе Ψ; группа $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ изоморфна группе изотропии Ψ_x структурной группы Ψ, а ростковая группа голономии $\Gamma(L, x)$ образована ростками диффеоморфизмов из группы изотропии Ψ_x в точке x (теорема 2.2.1).

В **подразделе 2.2.2** напоминается понятие квазианалитического действия группы диффеоморфизмов на многообразии (определение 2.2.1) и доказывается следующий критерий, выносящийся на защиту (в пункте 2).

Теорема 2.2.2. *Если* $(M, \mathcal{F}) := \mathcal{S}\mathbf{us}(B, T, \rho)$ *— произвольное надстроечное слоение на многообразии* M *со структурной группой* $\Psi := Im\,\rho$, *то график слоения* $G(\mathcal{F})$ *хаусдорфов тогда и только тогда, когда группа* Ψ *действует на многообразии* T *квазианалитически.*

Следствие. *Если для надстроечного слоения* $(M, \mathcal{F}) := \mathcal{S}\mathbf{us}(B, T, \rho)$ *выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*

а) все стационарные подгруппы структурной группы Ψ *конечны;*

б) фундаментальная группа многообразия M *конечна;*

в) фундаментальная группа многообразия B *конечна,*

то график $G(\mathcal{F})$ *этого слоения хаусдорфов* (следствия 2.2.1 – 2.2.3).

В **разделе 2.3** доказывается, что среди двумерных поверхностей нетривиальные надстроечные слоения допускают только цилиндр, тор, бутылка Клейна и лист Мёбиуса (предложение 2.3.1). На каждой из этих поверхностей строятся два континуальных семейства бесконечно гладких попарно неизоморфных надстроечных слоений. Все слоения первого семейства имеют хаусдорфов график, а второго — нехаусдорфов график. Вывод содержится в теореме 2.3.1 и следствии 2.3.1.

В **главе 3** изучаются топологические аспекты пространства надстроечных слоений.

Раздел 3.1 посвящён топологической оценке множества слоений с хаусдорфовым графиком в пространстве всех одномерных надстроечных слоений на n-мерном замкнутом многообразии с C^1-топологией.

Напомним, что E называется множеством первой категории в топологическом пространстве X, если оно представимо в виде конечного или счётного объединения подмножеств, нигде не плотных в X. Если E является дополнением в X к множеству первой категории, то E называется множеством второй категории. Свойство подмножества E называется типичным в X, если E – множество второй категории в X.

Через $F_q^r(M)$ обозначаем топологическое пространство C^{r+1}-слоений коразмерности q с C^r-топологией. Доказывается, что свойство графика слоения быть хаусдорфовым типично в подпространстве одномерных надстроечных слоений $F^1_{n-1}(M)$ на компактном многообразии M (теорема 3.1.3).

Обозначим через $Sus^2(M)$ пространсво C^2-гладких надстроечных слоений с C^1-топологией на двумерной поверхности M. Пусть $SusH^2(M)$ – подпространство слоений в $Sus^2(M)$ с хаусдорфовым графиком, а $SusNH^2(M)$ — с нехаусдорфовым графиком. Доказывается, что множества классов эквивалентности слоений в категории слоений $\mathcal{F}ol^{2,0}$, находящихся в множествах $SusH^2(M)$ и $SusNH^2(M)$, *равномощны.* При этом $SusH^2(M)$ является множеством *второй категории*, а $SusNH^2(M)$ — множеством *первой категории* в пространстве $Sus^2(M)$ (Предложение 3.1.1).

В **разделе 3.2** пространство слоений класса C^r коразмерности q на n-мерном многообразии M с топологией Хирша – Эпштейна обозначается через $\mathcal{F}ol^r_q(M)$.

В **подразделе 3.2.1** описывается топология на множестве $A^r(G,T)$ гладких класса C^r представлений дискретной группы G в $Diff^r(T)$ и даётся определение C^r-структурно устойчивого представления $\rho \in A^r(G,T)$ (определение 3.2.3).

Слоение $(M,\mathcal{F})$ называется структурно устойчивым в пространстве $\mathcal{F}ol^r_q(M)$, если для любой окрестности $U = U(\mathrm{Id}_M)$ в $Homeo(M)$ существует такая окрестность $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{F},U)$ слоения $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}ol^r_q(M)$, что для каждого слоения $\mathcal{F}' \in \mathcal{U}$ найдётся гомеоморфизм $d \in U$, который является изоморфизмом слоений $(M,\mathcal{F})$ и $(M,\mathcal{F}')$ в категории слоений $\mathcal{F}ol^{r,0}$ (определение 3.2.5).

В **подразделе 3.2.4** доказано следующее необходимое условие структурной устойчивости надстроечных слоений, выносящееся на защиту (п.3).

Предложение 3.2.1. *Если слоение $(M,\mathcal{F}) = \mathcal{S}\mathbf{us}(T,B,\rho)$ структурно устойчиво в пространстве слоений $\mathcal{F}ol^r_q(M)$, то структурно устойчиво и представление $\rho : \pi_1(B,b_0) \to Diff^r(T)$ в пространстве представлений $A^r(\pi_1(B,b_0),T)$.*

Обратное утверждение к предложению 3.2.1 доказано Жуковой в совместной работе с соискателем [3]. Суммарный результат сформулирован в виде критерия структурной устойчивости надстроечного слоения (теорема 3.2.2).

Связь с результатами Палиса. Палис[29] исследовал C^∞-структурную устойчивость надстроечных слоений на компактных многообразиях M. В этом случае база $B = p(M)$ также компактна, следовательно, фундаментальная группа $G = \pi_1(B, b_0)$ — конечно порождённая.

Нами исследуются надстроечные слоения в более общих предположениях:

1) требование компактности многообразия M ослаблено до компактности стандартного слоя T расслоения $p : M \to B$ и конечной порождённости группы G;

2) наши результаты получены в классе гладкости C^r, для любого $r \geq 1$;

3) в определении структурной устойчивости слоений и представлений групп, в отличие от Палиса, мы предполагаем, что сопрягающий гомеоморфизм есть ε-гомеоморфизм, то есть является малым. В случае потоков это соответствует структурной устойчивости в смысле Андронова-Понтрягина.

Пейксото в определении структурной устойчивости требовал лишь существования топологического сопряжения. Позднее, как подчеркнул Аносов[30], «весьма нетривиальным образом» была доказана эквивалентность определений структурной устойчивости Андронова-Понтрягина и Пейксото для динамических систем. Не известно, как обстоит дело в случае слоений.

В **подразделе 3.2.5** доказываются несколько следствий из критерия структурной устойчивости. В частности, если группа $\pi_1(B, b_0) :=< g >$ имеет одну образующую, то слоение $(M, \mathcal{F}) = \mathcal{S}\mathbf{us}(T,B,\rho)$, полученное надстройкой гомоморфизма $\rho : \pi_1(B, b_0) \to Diff(T)$, структурно устойчиво тогда и только тогда, когда диффеоморфизм $\psi = \rho(g)$ структурно устойчив (теорема 3.2.3).

Опираясь на это утверждение, в **подразделе 3.2.6** доказывается, что все надстроечные слоения с нехаусдорфовыми графиками C^1-структурно неустойчивы (следствие 3.2.4). Это объясняет различие между теоретико множественной и топологической оценкой подпространства надстроечных

[29]Palis J. Regidity of centralizers of diffeomorphisms and structural stability of suspended foliations // Lecture Notes in Math. 1978. V.652. P.114–121.

[30]Аносов, Д.В. О развитии теории динамических систем за последнюю четверть века // Студенческие чтения МК НМУ. М.: МЦНМО, 2000. Вып. 1. 74 с

слоений с нехаусдорфовым графиком на компактных поверхностях.

В **главе 4** нами вводятся и исследуются обобщённые надстроечные слоения.

В **подразделе 4.1.1** напоминается определение орбифолда и гладкого отображения орбифолдов. Обобщённое надстроечное слоение получается надстройкой гоморфизма $\rho : \pi_1^{orb}(B, b) \to Diff^r(T)$ фундаментальной группы хорошего орбифолда в группу диффеоморфизмов произвольного многообразия T. В случае, когда орбифолд является многообразием, эта конструкция совпадает с надстроечным слоением.

В **подразделе 4.1.2** нами вводится понятие канонического двуслоения (определение 4.1.3). Доказывается, что любое двуслоение, накрытое произведением, изоморфно некоторому каноническому двуслоению, определённому однозначно, с точностью до сопряжённости (теорема 4.1.1).

В **подразделе 4.1.3** в классе канонических двуслоений выделяется подкласс слоений, которые являются обобщёнными надстроечными (лемма 4.1.1). Доказывается, что любое обобщённое надстроечное слоение изоморфно в категории слоений некоторому каноническому обобщённому надстроечному слоению (теорема 4.1.2). На основании этой теоремы строятся примеры обобщённых надстроечных слоений, не являющихся надстроечными (пример 4.1.1).

В **заключении** проводится краткий обзор основных результатов, полученных диссертантом.

Публикации в журналах из списка ВАК

[1] Чубаров, Г.В. Об одном типичном свойстве одномерных суспенсированных слоений /Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров // Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2003. – Вып. 1 (26). – С. 12–21.

[2] Chubarov, G.V. Aspects of the Qualitative Theory of Suspended Foliations / N.I. Zhukova, G.V. Chubarov // J. Diff. Equat. and Appl. – 2003. – V. 9, № 3/4. – P. 393–405.

[3] Чубаров, Г.В. Критерий структурной устойчивости надстроечных слоений / Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров // Вестник Нижегородского

университета им. Н.И. Лобачевского. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2011. – №1. – С. 153–161.

[4] Чубаров, Г.В. Обобщённые надстроечные слоения / Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2012. – №5(1). – С. 157–164.

Публикации в других изданиях

[5] Чубаров, Г.В. Вполне геодезические слоения с нехаусдорфовыми графиками /Н.И. Жукова Г.В. Чубаров // Международная школа-семинар памяти Н.В. Ефимова, 1998 г. Тезисы докладов. – Ростов-на-Дону: НПП Коралл-Микро. – 1998. – С. 28–29.

[6] Чубаров, Г.В. Графики суспенсированных слоений /Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров // XI Международная школа семинар по современным проблемам теоретической и математической физики. Тезисы докладов. – Казань: «Хэттер». – 1999. – С. 63.

[7] Чубаров, Г.В. Графики слоений накрытых произведениями / Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров // Материалы международной конференции посвящённая 90-летию Г.Ф. Лаптева. – М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ. – 1999. – С. 21–22.

[8] Чубаров, Г.В. О суспенсированных слоениях / Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров // В кн.: Новейшие проблемы теории поля 1999–2000. – Казань: Изд-во КГУ. – 2000. – С. 95–103.

[9] Чубаров, Г.В. Пространство суспенсированных слоений / Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров // Международная научная конференция «Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения» (МНК АДМ – 2000). Тезисы докладов. – Воронеж: Изд-во ВГУ. – 2000. – С. 97–98.

[10] Чубаров, Г.В. Суспенсированные слоения и их графики /Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров // XIII Международная школа семинар по современным проблемам теоретической и математической физики. Тезисы докладов. – Казань: «Хэттер». – 2001. – С. 54–55.

[11] Чубаров, Г.В. Некоторые вопросы качественной теории суспенсированных слоений / Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров // Современные методы в теории краевых задач. Материалы воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XIII» 3-9 мая 2002 г. Воронеж: Изд-во ВГУ. – 2002. – С. 54.

[12] Чубаров, Г.В. Типичность хаусдорфовости графика слоения / Г.В. Чубаров // XIV Международная школа семинар по современным проблемам теоретической и математической физики. Тезисы докладов. – Казань: ООО «Издательство РегентЪ». – 2002. – С. 38–39.

[13] Чубаров, Г.В. Структурная устойчивость суспенсированных слоений с абелевой голономией / Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 5-10 июля 2004 г. Тезисы докладов. – Владимир: Изд-во ВлГУ. – 2004. – С. 89–91.

[14] Чубаров, Г.В. О хаусдорфовости графиков некоторого класса вполне геодезических слоений / Г.В. Чубаров // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 31. – Казань: Изд-во Казанского математического общества. – 2005. – С. 170–172.

[15] Чубаров, Г.В. Критерий структурной устойчивости надстроечных слоений и его применение / Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2-7 июля 2010 г. Тезисы докладов. – М.: МИАН. – 2010. – С. 83–84.