На правах рукописи

УДК 517.095

МЕЛИШЕВА Екатерина Петровна

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2013

Работа выполнена на кафедре математики
и методики обучения ФГБОУ ВПО "Поволжская государственная
социально-гуманитарная академия"
и в отделе физико-математических и технических наук
ГАНУ "Институт прикладных исследований АН РБ"

Научный руководитель: **Сабитов Камиль Басирович**,
доктор физико-математических наук,
чл.-корр. АН РБ, профессор,
ГАНУ ИПИ АН РБ

Официальные оппоненты: **Солдатов Александр Павлович**,
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГАОУ ВПО НИУ "БелГУ"

Хайруллин Равиль Сагитович,
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВПО КГАСУ

Ведущая организация: ФГБУН "Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН", г. Нальчик

Защита состоится 5 декабря 2013 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008 Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, НБ КФУ

Автореферат разослан ноября 2013 г. и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.ksu.ru

Ученый секретарь совета Д 212.081.10
к.ф.-м.н., доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В современной теории дифференциальных уравнений с частными производными важное место занимают исследования уравнений смешанного типа. Повышенный интерес к этим классам уравнений объясняется как теоретической значимостью полученных результатов, так и их важными практическими приложениями.

Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта.

Затем Ф. И. Франкль впервые обнаружил важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач в трансзвуковой газовой динамике. И. Н. Векуа указал на важность проблемы уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, а также в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака.

А. В. Бицадзе впервые сформулировал принцип экстремума задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева М. А.

$$u_{xx} + sgn\, y \cdot u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Позднее он был установлен для других уравнений смешанного типа и других краевых задач.

Дальнейшим развитием теории краевых задач для уравнений смешанного типа занимались Ф.И. Франкль, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, C.S. Morawetz, M.N. Protter, Л. Берс, В.Ф.Волкодавов, В.Н. Врагов, Т.Д. Джураев, В.И. Жегалов, А.Н. Зарубин, И.Л. Кароль, Н.Ю. Капустин, Г.Д. Каратопраклиев, Ю.М. Крикунов, А.Г. Кузьмин, О.А. Ладыженская, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, L. Nirenberg, Н.Б. Плещинский, С.П. Пулькин, О.А. Репин, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, Р.С. Хайруллин, М.М. Хачев и многие другие. В работах этих авторов помимо задач Трикоми и Геллерстедта поставлены и исследованы новые краевые задачи для уравнений смешанного типа.

Первые работы по нагруженным уравнениям были посвящены нагруженным интегральным уравнениям. Здесь отметим исследования A.Kneser, L.Lichtenstein, а также более поздние, W.Gibson, J.Groh и других.

Нагруженные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения рассматривали в своих работах Н.Н.Кочина, Нахушев А.М., Кожанов А.И., Пулькина Л.С. и другие. Именно в работах А.М. Нахушева было дано общее определение нагруженных уравнений.

Потребность в изучении нагруженных уравнений возникает в различных ситуациях, таких как: при приближенном решении интегродифференциальных уравнений, при исследовании некоторых обратных задач, при линеаризации нелинейных уравнений, при соответствующем преобразовании нелокальных краевых задач дифференциальных уравнений в локальные задачи нагруженных уравнений, при изучении различных задач оптимального управления, моделировании процессов фильтрации, а также управления и регулирования уровнями грунтовых вод, моделировании процессов переноса частиц и т.д.

Задача Дирихле для дифференциальных уравнений рассматривалась в работах Ф.И. Франкля, А.В. Бицадзе, В.И. Жегалова, J.R. Cannon, А.М. Нахушева, А.П. Солдатова, К.Б. Сабитова, Е.А. Уткиной, Р.С. Хайруллина, М.М. Хачева, В.Б. Шабата и многих других.

Степень разработанности проблемы. Работы А.М.Нахушева и его учеников дали начало интенсивному и систематическому изучению краевых задач для уравнений вида

$$Ku \equiv Lu(x,y) + Mu(x,y) = f(x,y) \tag{2}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, где L – дифференциальный оператор, а M – дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор, включающий операцию взятия следа от искомой функции $u(x,y)$ на многообразиях из замыкания $\overline{\Omega}$ размерности строго меньше 2. В их работах исследовались вопросы существования и единственности решения уравнения (2) в классических областях Ω, т.е. в областях, у которых гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник. Наиболее близкой к нашей теме является следующая нелокальная задач для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с характеристической нагрузкой и с параметром $\lambda = \lambda^+$ при $y > 0$ и $\lambda = \lambda^-$ при $y < 0$

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda^+ u(x,0) = 0, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^- u(x,0) = 0, & y < 0, \end{cases} \tag{3}$$

в области Ω, ограниченной отрезками $AC : x + y = 0,\ 0 \le x \le r/2$; $BC : x - y = r,\ r/2 \le x \le r$; $AA_0 : x = 0,\ 0 \le y \le h$; $BB_0 : x = r,\ 0 \le y \le h$; $A_0B_0 : y = h,\ 0 \le x \le r$.

Задача. Найти регулярное в областях Ω^+ и Ω^- решение $u(x,y)$ уравнения (3) из класса $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее условию

$$u(iy) = \varphi_0(y),\ u(r + iy) = \varphi_r(y), 0 \le y \le h,$$

и граничному условию на характеристике AC:

$$u\left[\Theta_0(x)\right] = \lambda^- D_{0x/2}^{-2} u(t) + \psi(x),\ 0 \le x \le r,$$

где $\varphi_0(y)$ и $\varphi_r(y)$ – заданные непрерывные на сегменте $[0,h]$ функции, а $\Theta_0(x)=x(1-i)/2$, $\psi(x)$ – заданная функция из класса $C^2\left(\overline{I}_r\right)$, $I_r=\{x:0<x<r\}$, $D_{0x/2}^{-2}u(t)=\int\limits_0^x (x-t)u(t)dt$.

А.М. Нахушевым получены условия однозначной разрешимости поставленной задачи. Само решение $u(z)$ в области Ω^- определяется как решение задачи Коши для уравнения гиперболического типа, а в области Ω^+ – как решение $u(z)$ первой краевой задачи для уравнения параболического типа.

К.Б. Сабитов рассмотрел начально-граничную задачу для нагруженного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu=\begin{cases} u_t-u_{xx}+C_1(t)u(x,0)=0, & t>0,\\ u_{tt}-u_{xx}+C_2(t)u(x,0)=0, & t<0,\end{cases}$$

в прямоугольной области $D=\{(x,t)|\,0<x<1,\ -\alpha<t<\beta\}$, где $C_1(t)$, $C_2(t)$ – заданные непрерывные функции, α и β – заданные положительные действительные числа, со следующими условиями:

$$u(x,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D_-)\cap C^{2,1}_{x,t}(D_+);$$

$$Lu(x,t)\equiv 0,\ (x,t)\in D_+\cup D_-;$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\ -\alpha\le t\le\beta;$$

$$u(x,-\alpha)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1,$$

здесь $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, при этом $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $D_+=D\cap\{t>0\}$, $D_-=D\cap\{t<0\}$. Установлен критерий единственности решения. Само решение при некоторых ограничениях на функцию $\varphi(x)$ и число α построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи на собственные значения.

Интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа возник после известных работ Ф.И. Франкля, в которых впервые обращено внимание на то, что ряд задач трансзвуковой динамики сводятся к этой задаче. Так, например, если рассматривать задачу перехода через звуковой барьер установившихся двумерных безвихревых течений идеального газа в соплах когда сверзвуковые волны примыкают к стенкам сопла вблизи минимального сечения, то она сводится к задаче Дирихле для уравнения Чаплыгина.

На некорректность задачи Дирихле для уравнения (1) в смешанной области, гиперболическая часть γ границы которой лежит в характеристическом треугольнике $0\le x+y<x-y\le 1$, впервые обратил внимание А.В. Бицадзе. Причем некорректность задачи Дирихле не зависит от малости меры области, заключенной между γ и $y=0$.

Результат А.В. Бицадзе с необходимостью поставил вопрос поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной.

В.Б. Шабат исследовал задачу Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области $y > -h$, $h > 0$, и области, гиперболическая часть которой лежит целиком внутри характеристического треугольника, построенного на отрезке действительной оси $[0,1]$.

В работе J.R. Cannon доказана корректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области при определенных ограничениях на область гиперболичности.

А.М. Нахушев установил критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа первого рода в цилиндрической области.

В.И. Жегалов доказал однозначную разрешимость нелокальной задачи Дирихле для уравнения (1) в области D, где D_- – квадрат $0 < -y, x < 1$, а D_+ – односвязная область при $y \geq 0$, ограниченная простой дугой σ с концами в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и интервалом $I = (0,1)$ оси x.

В работах А.П. Солдатова доказаны теоремы существования и единственности решения задач типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в смешанной области, ограниченной при $y > 0$ и $y < 0$ соответственно гладкими дугами Γ и γ с общими концами в точках $(0,0)$ и $(0,1)$, при этом дуга γ при $y < 0$ лежит внутри характеристического треугольника.

М.М. Хачев доказал теоремы единственности и существования решения задачи Дирихле для уравнения

$$Lu = (sgn\, y)\,[a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u] + u_{yy} = 0$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\, 0 < x < 1,\, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha,\, \beta > 0$, в которой на числа α и β наложены некоторые ограничения.

Р.И. Сохадзе для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$u_{xx} + yu_{yy} + bu_y = 0,$$

где $0 < b < 1$ и $b > 1$ – не целое число, исследовал первую краевую задачу в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\, 0 < x < l,\, -\alpha < y < \beta\}$ при определенных условиях на α и β.

К.Б. Сабитовым исследована задача Дирихле для вырождающегося уравнения смешанного типа первого рода

$$(sgn\, y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - b^2(sgn\, y)|y|^m u = 0, \quad m > 0, \quad b \geq 0 \tag{4}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|0 < x < 1, \quad -\alpha < y < \beta\}$, α, β – заданные действительные числа. Методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения, которое построено в виде суммы ряда Фурье.

В работах К.Б. Сабитова и А.Х. Трегубовой (Сулеймановой) для двух видов уравнений смешанного типа второго рода

$$u_{xx} + (sgn\, y)|y|^m u_{yy} - b^2 u = 0, \quad 0 < m < 2, \quad b = const \geq 0,$$

$$u_{xx} + y u_{yy} + a u_y - b^2 u = 0, \quad a = const,$$

исследован вопрос о корректности постановки задачи Дирихле в зависимости от показателя степени m вырождения и коэффициента a.

Р.С. Хайруллин установил критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнения

$$u_{xx} + y u_{yy} + a u_y = 0$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ при отрицательных значениях параметра $a \leq -1/2$.

Задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и уравнений более высоких порядков рассмотрена в работах Р.С. Хайруллина, Е.А. Уткиной.

В данной работе, в отличие от рассмотренных выше работ, рассматривается задача Дирихле для нагруженных уравнений эллиптико-гиперболического типа в прямоугольной области. Ранее были изучены краевые задачи (локальные и нелокальные) для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных отдельных и смешанных типов в классических областях, т.е. в областях, у которых гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник.

Цель и задачи диссертационного исследования. В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для нагруженного уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu \equiv K(y) u_{xx} + u_{yy} - b^2 K(y) u + C(y) u(x, 0) = 0 \tag{5}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, \quad -\alpha < y < \beta\}$, где $K(y) = sgn\, y \cdot |y|^n$, $n \geq 0$, $b \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа,

$$C(y) = \begin{cases} C_1(y), & y \geq 0, \\ C_2(y), & y \leq 0, \end{cases}$$

$C_i(y), i = 1, 2,$ – заданные непрерывные функции.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u\,(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u\,(x,\, y) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D_+ \cup D_-\right); \tag{6}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{7}$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta; \tag{8}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{9}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Основными задачами исследования являются постановка и доказательство единственности, существования и устойчивости решений задачи Дирихле для уравнения (5) в области D .

Объектом исследования является задача Дирихле для нагруженных уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе и обобщенным оператором Трикоми.

Теоретическую и методологическую основу исследования вопросов единственности, существования и устойчивости решения задачи Дирихле для нагруженных уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа составляют методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, спектрального анализа и теории специальных функций.

Научная новизна исследования. Результаты работы, выносимые на защиту являются новыми.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Доказательство единственности, существования и устойчивости решения задачи Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области. Для поставленной задачи установлен критерий единственности, решение построено в виде суммы ряда Фурье с обоснованием сходимости в классе регулярных решений, доказана устойчивость решения по граничным данным.

2. Доказательство единственности, существования и устойчивости решения задачи Дирихле для нагруженного вырождающегося уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа в прямоугольной области. Установлен критерий единственности, решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье с обоснованием сходимости в классе регулярных решений, доказана устойчивость решения по граничным данным.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки теории задачи Дирихле для дифференциальных нагруженных уравнений в частных производных смешанного типа.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научных семинарах: по теории дифференциальных уравнений имени С.П. Пулькина при Поволжской государственной социально-гуманитарной академии и Институте прикладных исследований АН РБ (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор К.Б. Сабитов, 2010 – 2013 гг.), кафедры уравнений математической физики Самарского государственного университета (научный руководитель – д.ф.-м.н.,профессор Л.С. Пулькина, 2010 – 2013 гг.), кафедры дифференциальных уравнений Казанского федерального университета (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор В.И. Жегалов, 2013 г.), а также на следующих всероссийских и международных конференциях: **1.** Седьмая школа молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики"(г. Нальчик, 25 - 30 июня 2010 г.) **2.** Вторая международная конференция "Математическая физика и ее приложения"(г. Самара, 29 августа - 4 сентября 2010 г.). **3.** Девятая молодежная научная школа-конференция "Лобачевские чтения - 2010"(г. Казань, 1 - 6 октября 2010 г.). **4.** Международная конференция, посвященная 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И.Г. Петровского (г. Москва, 30 мая - 4 июня 2011 г.). **5.** Всероссийская научная конференция с международным участием "Дифференциальные уравнения и их приложения"(г. Стерлитамак, 27-30 июня 2011 г.). **6.** Международная конференция "Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел"(г. Белгород, 17-21 октября 2011 г.). **7.** Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева "Обратные и некорректные задачи математической физики"(г. Новосибирск, 5-12 августа 2012 г.). **8.** Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"(г. Стерлитамак 26-30 июня 2013 г.). **9.** XI Казанская международная летняя школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы"(г. Казань, 22-28 августа 2013 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [12] общим объемом 3,93 п.л. При этом статьи [1] – [3] опубликованы в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. В совместной работе [2] постановка задачи и идея доказательств принадлежат научному руководителю К.Б. Сабитову.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 104 наименования. Общий объём диссертации – 93 страницы.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю К.Б. Сабитову за предложенную тематику исследований, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** даётся обзор литературы, формулируются постановки задач, приводятся основные результаты диссертации, а также кратко описывается содержание параграфов.

В **главе 1** § **1.1** исследуется задача Дирихле (6) – (9) для нагруженного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа (5) при $n = 0, b = 0$, т.е. для уравнения Лаврентьева – Бицадзе

$$Lu \equiv (sgn\, y)u_{xx} + u_{yy} + C(y)u(x, 0) = 0 \tag{10}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|\, 0 < x < 1, \quad -\alpha < y < \beta\}$.

Методом разделения переменных построены частные решения уравнения (10), которые имеют следующий вид: $u_k(x, y) = X_k(x)Y_k(y)$,

$$X_k(x) = \sqrt{2}\sin \pi kx,\ k = 1, 2, ..., \tag{11}$$

$$Y_k(y) = \begin{cases} c_k e^{\lambda_k y} + d_k e^{-\lambda_k y} - \frac{c_k + d_k}{\lambda_k} C_{1k}(y), & y > 0, \\ a_k \cos \lambda_k y + b_k \sin \lambda_k y + \frac{a_k}{\lambda_k} C_{2k}(y), & y < 0, \end{cases} \tag{12}$$

здесь a_k, b_k, c_k, d_k – произвольные постоянные,

$$C_{1k}(y) = \int\limits_0^y C_1(t)\, \mathrm{sh}\, [\pi k (y - t)]dt,\ C_{2k}(y) = \int\limits_y^0 C_2(t) \sin [\pi k (t - y)]dt.$$

Используя частные решения (11) и (12), решение задачи (6), (8) – (10) построено в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y) \sin \pi kx, \tag{13}$$

где

$$u_k(y) = \begin{cases} \frac{\psi_k}{\pi k \Delta_1(k)} A_{y\beta}(k) + \frac{\varphi_k}{\Delta_1(k)} \Delta_{\alpha y 1}(k), & y > 0, \\ \frac{\psi_k}{\Delta(k)} \Delta_{-y\beta 1}(k) - \frac{\varphi_k}{\pi k \Delta_1(k)} B_{y\alpha}(k), & y < 0, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\varphi_k = \sqrt{2} \int\limits_0^1 \varphi(x) \sin \pi k x dx, \; \psi_k = \sqrt{2} \int\limits_0^1 \psi(x) \sin \pi k x dx,$$

$$\Delta_{\alpha y1}(k) = -\sin \pi k\alpha \operatorname{ch} \pi k y - \operatorname{sh} \pi k y \cos \pi k \alpha +$$

$$+\frac{1}{\pi k}\left[C_{1k}(y) \sin \pi k \alpha - C_{2k}(-\alpha) \operatorname{sh} \pi k y\right], \quad y > 0,$$

$$A_{y\beta}(k) = C_{1k}(y) \operatorname{sh} \pi k \beta - C_{1k}(\beta) \operatorname{sh} \pi k y + \pi k \operatorname{sh}[\pi k (y - \beta)], \quad y > 0,$$

$$\Delta_{-y\beta 1}(k) = \sin \pi k y \operatorname{ch} \pi k \beta - \operatorname{sh} \pi k \beta \cos \pi k y -$$

$$-\frac{1}{\pi k}\left[C_{1k}(\beta) \sin \pi k y + C_{2k}(y) \operatorname{sh} \pi k \beta\right], \quad y < 0,$$

$$B_{y\alpha}(k) = C_{2k}(y) \sin \pi k \alpha + C_{2k}(-\alpha) \sin \pi k y + \pi k \sin \pi k(\alpha + y), \quad y < 0,$$

при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_1(k) = -\sin \pi k \alpha \operatorname{ch} \pi k \beta - \operatorname{sh} \pi k \beta \cos \pi k \alpha +$$

$$+\frac{1}{\pi k}\left[C_{1k}(\beta) \sin \pi k \alpha - C_{2k}(-\alpha) \operatorname{sh} \pi k \beta\right] \neq 0. \tag{15}$$

При доказательстве единственности решения используется только полнота системы функций $\left\{\sqrt{2} \sin \pi k x\right\}_{k=1}^{+\infty}$ в пространстве $L_2[0,1]$.

Если $\Delta_1(k) = 0$ при некоторых α, β, $C_1(y)$, $C_2(y)$ и $k = p \in \mathbb{N}$, то однородная задача (6) – (9) для дифференциального уравнения (10) (где $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x, y) = \begin{cases} -\frac{a_p}{\pi p \operatorname{sh} \pi p \beta} A_{y\beta}(p) \sin \pi p x, & y > 0, \\ -\frac{a_p}{\operatorname{sh} \pi p \beta} \Delta_{-y\beta 1}(p) \sin \pi p x, & y < 0, \end{cases} \tag{16}$$

где $a_p \neq 0$ – произвольная постоянная.

При некоторых α выражение $\Delta_1(k)$ обращается в нуль, например, при $C_{2k}(-\alpha) = 0$, следует, что $\Delta_1(k) = 0$ только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{\gamma_k}{\pi k} + \frac{n}{k}, \; n \in \mathbb{N}.$$

.

Теорема 1.1. *Если существует решение задачи (6), (8) – (10), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (15) при всех* $k \in \mathbb{N}$.

Поскольку α, β – любые числа из промежутков задания, то при достаточно больших k выражение $\Delta_1(k)$ может стать достаточно малым, то есть возникает проблема "малых знаменателей". В связи с этим, для обоснования существования решения надо показать существование чисел α, β и функций $C_i(y)$, $i=1,\,2$, таких, что при достаточно больших k выражение $\Delta_1(k)$ отделено от нуля.

Лемма 1.1. *Если выполнено одно из следующих условий: 1) $\alpha=p$ – натуральное; 2) $\alpha=p/q\notin\mathbb{N}, p,q\in\mathbb{N}, (p,q)=1, (q,4)=1$, то существуют постоянные C_0 и $k_0\in\mathbb{N}$, такие, что при всех $k>k_0$ и любом фиксированном $\beta>0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_1(k)|\geq C_0e^{\pi k\beta}>0. \tag{17}$$

Пусть $\|C_1\|=\max\limits_{0\leq y\leq\beta}|\,C_1(y)\,|$ и $\|C_2\|=\max\limits_{-\alpha\leq y\leq 0}|\,C_2(y)\,|$.

Лемма 1.2. *Если α является любым алгебраическим иррациональным числом степени 2 и нормы $\|C_1\|$ и $\|C_2\|$ достаточно малы, то существуют положительные постоянные C_0 и β_0, такие, что при всех $k\in\mathbb{N}$ и $\beta>\beta_0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_1(k)\,|\geq e^{\pi k\beta}\frac{C_0}{k}. \tag{18}$$

Если при указанных в лемме 1.1 чисел α выражение $\Delta_1(l)=0$ при $k=l=k_1,k_2,...,k_p\leq k_0$, где $1\leq k_1<k_2<...<k_p$, $k_i, i=\overline{1,p}$, и p – заданные натуральные числа, то для разрешимости задачи (6), (8) – (10) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\varphi_l=\psi_l=0,\; l=k_1,k_2,...,k_p. \tag{19}$$

В этом случае решение задачи (6), (8) – (10) определяется в виде ряда

$$u(x,y)=\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+...+\sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p-1}+\sum_{k=k_p+1}^{+\infty}\right)u_k(y)\sin\pi kx+$$
$$+\sum_{l}C_lu_l(x,y)\,, \tag{20}$$

где $u_l(x,y)$ определяется по формуле (16), C_l – произвольные постоянные, в сумме $\sum\limits_{l}$ индекс l принимает значения $k_1,k_2,...,k_p$, конечные суммы в (20) следует считать нулями, если верхний предел меньше нижнего.

Теорема 1.2. *Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)\in C^3[0,1]$, $\varphi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(1)=\psi^{(i)}(1)=0, i=0,2,$ $C_1(y)\in C[0,\beta]$, $C_2(y)\in C[-\alpha,0]$ и выполнена оценка (17) при всех $k>k_0$. Тогда если $\Delta_1(k)\neq0$ при всех $k=\overline{1,k_0}$, то задача (6), (8) – (10) имеет единственное решение, которое определяется рядом (13); если $\Delta_1(k)=0$ при $k=l=k_1,k_2,...,k_p\leq k_0$, то задача (6), (8) – (10) разрешима, когда выполнены условия (19) и решение в этом случае определяется рядом (20).*

Теорема 1.3. *Пусть функции* $\varphi(x), \psi(x) \in C^4[0,1]$, $\varphi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) = \psi^{(i)}(1) = 0, i = 0, 2,$ $C_1(y) \in C[0, \beta]$, $\quad C_2(y) \in C[-\alpha, 0]$, *нормы* $\|C_1\|$ *и* $\|C_2\|$ *достаточны малы и выполнена оценка (18). Тогда задача (6), (8)– (10) имеет единственное решение, которое определяется рядом (13).*

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2 и* $\Delta_1(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$. *Тогда для решения (13) задачи (6), (8)– (10) имеют место оценки:*

$$||u(x,y)||_{L_2} \leq M_1 (\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2}), \tag{21}$$

$$||u(x,y)||_{C(\overline{D})} \leq M_2 \left(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1}\right). \tag{22}$$

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия теоремы 1.3. Тогда для решения (13) задачи (6), (8)– (10) имеют место оценки:*

$$||u(x,y)||_{L_2} \leq M_3 \left(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1}\right), \tag{23}$$

$$||u(x,y)||_{C(\overline{D})} \leq M_4 \left(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2}\right). \tag{24}$$

В последних теоремах постоянные $M_i, i = \overline{1,4}$, не зависят от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

В § **1.2** исследуется задача (6) – (9) для уравнения (5) при $n = 0$ и $b > 0$, которое можно привести к следующему виду:

$$Lu = u_{xx} + sgn\ y \cdot u_{yy} - b^2 u(x,y) + C(y)\, u(x,0) = 0, \tag{25}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) | 0 < x < 1, \quad -\alpha < y < \beta\}$.

Методом спектрального анализа построено решение задачи (6) – (9) для уравнения (25) в виде суммы ряда (13), где

$$u_k(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_2(k)} \left[\lambda_k^{-1} \psi_k D_{y\beta}(k) + \varphi_k \Delta_{\alpha y 2}(k)\right], & y > 0, \\ \frac{1}{\Delta_2(k)} \left[\psi_k \Delta_{-y\beta 2}(k) + \lambda_k^{-1} \varphi_k E_{\alpha y}(k)\right], & y < 0, \end{cases} \tag{26}$$

$$\lambda_k^2 = b^2 + (\pi k)^2,$$

$$\Delta_{\alpha y 2}(k) = \sin \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k y + \operatorname{sh} \lambda_k y \cos \lambda_k \alpha +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_k} \left[C_{1k}(y) \sin \lambda_k \alpha + C_{2k}(-\alpha) \operatorname{sh} \lambda_k y\right], \quad y > 0,$$

$$D_{y\beta}(k) = C_{1k}(y) \operatorname{sh} \lambda_k \beta - C_{1k}(\beta) \operatorname{sh} \lambda_k y + \lambda_k \operatorname{sh} [\lambda_k (\beta - y)], \quad y > 0,$$

$$\Delta_{-y\beta 2}(k) = -\sin \lambda_k y \operatorname{ch} \lambda_k \beta + \operatorname{sh} \lambda_k \beta \cos \lambda_k y +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_k} \left[C_{2k}(y) \operatorname{sh} \lambda_k \beta - C_{1k}(\beta) \sin \lambda_k y\right], \quad y < 0,$$

$$E_{\alpha y} = \lambda_k \sin \lambda_k (\alpha + y) + C_{2k}(y) \sin \lambda_k \alpha + C_{2k}(-\alpha) \sin \lambda_k y, \quad y < 0,$$

$$C_{1k}\left(y\right)=\int\limits_{0}^{y}C_{1}\left(t\right)\operatorname{sh}\left[\lambda_{k}\left(t-y\right)\right]dt,\quad C_{2k}\left(y\right)=\int\limits_{y}^{0}C_{2}\left(t\right)\sin\left[\lambda_{k}\left(y-t\right)\right]dt,$$

$\varphi_k,\, \psi_k$ – коэффициенты разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по системе $\left\{\sqrt{2}\sin\pi kx\right\}_{k=1}^{+\infty}$, при условии что при всех $k\in\mathbb{N}$

$$\Delta_{2}\left(k\right)=\sin\lambda_{k}\alpha\operatorname{ch}\lambda_{k}\beta+\operatorname{sh}\lambda_{k}\beta\cos\lambda_{k}\alpha+$$

$$+\frac{1}{\lambda_{k}}\left[C_{1k}\left(\beta\right)\sin\lambda_{k}\alpha+C_{2k}\left(-\alpha\right)\operatorname{sh}\lambda_{k}\beta\right]\neq 0. \tag{27}$$

Если нарушено условие (27) при некоторых α, β, b, $C_1\left(y\right)$, $C_2\left(y\right)$ и $k=p\in\mathbb{N}$, то однородная задача $(6)-(9)$ для дифференциального уравнения (25) (где $\varphi\left(x\right)\equiv 0$, $\psi\left(x\right)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_{p}\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{a_{p}}{\sin\lambda_{p}\alpha}\Delta_{\alpha y2}\left(p\right)\sin\pi px, & y>0,\\ \frac{a_{p}}{\lambda_{p}\sin\lambda_{p}\alpha}E_{\alpha y}\left(p\right)\sin\pi px, & y<0,\end{cases} \tag{28}$$

где $a_p\neq 0$ – произвольная постоянная.

Теорема 2.1. *Если существует решение задачи (6), (8), (9), (25), то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (27) при всех* $k\in\mathbb{N}$.

В представлении (26) функции $u_k(y)$ в заменателе присутствует выражение $\Delta_2\left(k\right)$, которое при некоторых α обращается в нуль. В связи с этим необходимо ответить на вопрос при каких α, β, b и функций $C_i\left(y\right)$, $i=1,\,2$, выражение $\Delta_2(k)$ отделено от нуля.

Лемма 2.1. *Если выполнено одно из следущих условий: 1)* $\alpha=p$ – *натуральное; 2)* $\alpha=p/q,\, p,q\in\mathbb{N},\, (p,q)=1,\, p/q\notin\mathbb{N},\, (q,4)=1$, *то существуют постоянные* C_0 *и* $k_0\in\mathbb{N}$, *такие, что при всех* $k>k_0$ *и любых фиксированных* $b>0$ *и* $\beta>0$ *справедлива оценка*

$$\left|\Delta_{2}\left(k\right)\right|\geq C_{0}e^{\lambda_{k}\beta}>0. \tag{29}$$

Лемма 2.2. *Если* α *является любым алгебраическим иррациональным числом степени* $n=2$, *нормы* $\|C_1\|$ *и* $\|C_2\|$ *достаточно малы, то существуют положительные постоянные* b_0 *и* C_0, *вообще говоря, зависящие от* α, $||C_1||$, $||C_2||$, *такие, что при всех* $k\in\mathbb{N}$ *и* $b<b_0$ *справедлива оценка*

$$\left|\Delta_{2}\left(k\right)\right|\geq e^{\lambda_{k}\beta}\frac{C_{0}}{k}. \tag{30}$$

Если при указанных в лемме 2.1 чисел α выражение $\Delta_2\left(l\right)=0$ при $k=l=k_1,k_2,...,k_p\leq k_0$, где $1\leq k_1<k_2<...<k_p,\, k_i, i=\overline{1,p}$, и p —

заданные натуральные числа, то для разрешимости задачи (6), (8), (9), (25) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\varphi_l = \psi_l = 0,\ l = k_1, k_2, ..., k_p. \tag{31}$$

В этом случае решение задачи (6), (8), (9), (25) определяется в виде ряда

$$u\left(x,y\right) = \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + ... + \sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p-1} + \sum_{k=k_p+1}^{+\infty}\right) u_k\left(y\right)\sin \pi kx +$$

$$+ \sum_l C_l u_l\left(x,y\right), \tag{32}$$

где $u_l\left(x,y\right)$ определяется по формуле (28), C_l — произвольные постоянные, в сумме $\sum\limits_l$ индекс l принимает значения $k_1, k_2, ..., k_p$, конечные суммы в (32) следует считать нулями, если верхний предел меньше нижнего.

Теорема 2.2. *Пусть функции* $\varphi\left(x\right), \psi\left(x\right) \in C^3[0,1]$, $\varphi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) = \psi^{(i)}(1) = 0, i = 0, 2,$ $C_1\left(y\right) \in C\left[0,\, \beta\right],\quad C_2\left(y\right) \in C\left[-\alpha,\, 0\right]$ *и выполнена оценка (29) при всех* $k > k_0$. *Тогда если* $\Delta_2\left(k\right) \neq 0$ *при всех* $k = \overline{1, k_0}$, *то задача (6), (8), (9), (25) имеет единственное решение, которое определяется рядом (13); если* $\Delta_2\left(k\right) = 0$ *при* $k = k_1, k_2, ..., k_p \leq k_0$, *то задача (6), (8), (9), (25) разрешима, когда выполнены условия (31) и решение в этом случае определяется рядом (32).*

Теорема 2.3. *Пусть функции* $\varphi\left(x\right), \psi\left(x\right) \in C^4[0,1]$, $\varphi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) = \psi^{(i)}(1) = 0, i = 0, 2$, $C_1\left(y\right) \in C\left[0,\, \beta\right],\quad C_2\left(y\right) \in C\left[-\alpha,\, 0\right]$, *нормы* $\|C_1\|$ *и* $\|C_2\|$ *достаточны малы и выполнена оценка (30) при всех* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда задача (6), (8), (9), (25) имеет единственное решение, которое определяется рядом (13).*

При обосновании устойчивости построенного решения установлены оценки (21) – (24), но только с другими постоянными.

Во **второй** главе рассматривается само уравнение смешанного типа (5) в прямоугольной области $D = \left\{(x,y)|0 < x < 1, \quad -\alpha < y < \beta\right\}$ и изучена задача Дирихле (6) – (9). Методом разделения переменных построены частные решения уравнения (5): $u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y)$, где $X_k(x)$ определяется по формулам (11), а функции $Y_k\left(y\right)$ имеют вид

$$Y_k\left(y\right) = \begin{cases} a_k\sqrt{y}I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k y^q\right) + b_k\sqrt{y}K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k y^q\right) + b_k\gamma_k C_{1k}\left(y\right), & y > 0, \\ c_k\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right) + d_k\sqrt{-y}Y_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right) + & \\ +d_k\gamma_k C_{2k}\left(y\right), & y < 0, \end{cases} \tag{33}$$

где a_k, b_k, c_k, d_k – произвольные постоянные, $q = (2+n)/2$, $p_k = \sqrt{b^2 + (\pi k)^2}/q$, $I_{\frac{1}{2q}}(z)$ и $K_{\frac{1}{2q}}(z)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода, $J_{\frac{1}{2q}}(z)$ и $Y_{\frac{1}{2q}}(z)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответсвенно, $\gamma_k = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{2q}\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}}$,

$$C_{1k}(y) = \sqrt{y}\int\limits_0^y C_1(t)\sqrt{t}\left[I_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q)\,K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) - K_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q)\,I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)\right]dt,$$

$$C_{2k}(y) = \sqrt{-y}\int\limits_y^0 C_2(t)\sqrt{-t}\times$$

$$\times\left[Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)\,J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q) - J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)\,Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\right]dt.$$

Используя частные решения (11) и (33), решение задачи (6) – (9) найдено в виде суммы ряда (13), где функции $u_k(y)$ определяются по формулам

$$u_k(y) = \begin{cases} \left[\varphi_k\Delta_{\alpha y3}(k) + \psi_k F_{y\beta}(k)\right]\Delta_3^{-1}(k), & y > 0, \\ \left[\varphi_k G_{\alpha y}(k) + \psi_k\Delta_{y\beta3}(k)\right]\Delta_3^{-1}(k), & y < 0, \end{cases}$$

здесь

$$\Delta_{\alpha y3}(k) = \sqrt{\alpha y}I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) + \sqrt{\alpha y}J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\,K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) +$$

$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{y}\gamma_k I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)\,C_{2k}(-\alpha) - \sqrt{\alpha}\gamma_k J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\,C_{1k}(y),$$

$$F_{y\beta}(k) = \sqrt{y\beta}\left[K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)\,I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) - K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\,I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)\right] +$$

$$+\sqrt{y}\gamma_k I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)\,C_{1k}(\beta) - \sqrt{\beta}\gamma_k I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\,C_{1k}(y),$$

$$G_{\alpha y}(k) = \sqrt{-\alpha y}\left[J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) - J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\right] +$$

$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}\gamma_k J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\,C_{2k}(y) - \frac{\pi}{2}\sqrt{-y}\gamma_k J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)\,C_{2k}(-\alpha),$$

$$\Delta_{-y\beta3}(k) = \sqrt{-y\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) + \sqrt{-y\beta}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)\,K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) +$$

$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{\beta}\gamma_k I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\,C_{2k}(y) + \sqrt{-y}\gamma_k J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)\,C_{1k}(\beta),$$

$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2q}}\left[J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) + J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)\right],$$

при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_3(k) = \sqrt{\alpha\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) + \sqrt{\alpha\beta}J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\,K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) +$$

$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{\beta}\gamma_k I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right)C_{2k}\left(-\alpha\right)+\sqrt{\alpha}\gamma_k J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right)C_{1k}\left(\beta\right)\neq 0. \qquad (34)$$

Пусть при некоторых α, β, b, n, $C_1(y)$, $C_2(y)$ и $k=l\in\mathbb{N}$ нарушено условие (34), тогда однородная задача (6) – (9) (где $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_l(x,y)=\begin{cases}\Delta_{\alpha y3}(l)\left[\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_l\alpha^q\right)\right]^{-1}\sin\pi lx, & y>0,\\ G_{\alpha y}(l)\left[\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_l\alpha^q\right)\right]^{-1}\sin\pi lx, & y<0.\end{cases} \qquad (35)$$

Лемма 3.1 *Выражение* $\Delta_3(k)=0$ *имеет счетное множество нулей относительно* α_q, *где* $\alpha_q=\alpha^q/q$, *при любом фиксированном* $\beta>0$, $b>0$, $k\in\mathbb{N}$.

Теорема 3.1. *Если существует решение задачи* (6) – (9), *то оно единственно только тогда, когда выполнено условие* (34) *при всех* $k\in\mathbb{N}$.

Лемма 3.2 *Если* $\alpha_q=p/t, p,t\in\mathbb{N}, (p,t)=1$ *и* $\frac{r}{t}\neq\frac{3}{4}+s$, *где* r *– остаток от деления* p *на* t, $s\in\mathbb{N}_0$, *то существуют положительные постоянные* C_0 *и* k_0 $(k_0\in\mathbb{N})$, *зависящие, вообще говоря, от* $\alpha, \beta, q, b, \|C_1\|, \|C_2\|$, *такие, что при всех* $k>k_0$ *справедлива оценка*

$$|\sqrt{k}\widetilde{\Delta}_3(k)|\geq C_0=const>0. \qquad (36)$$

Если при указанных в лемме 3.1 значений α_q выражение $\Delta_3(l)=0$ при $k=l=k_1,k_2,...,k_m$, где $1\leq k_1<k_2<...<k_m\leq k_0, k_i, i=\overline{1,m}$, и m — заданные натуральные числа, то для разрешимости задачи (6)–(9) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\varphi_l=\psi_l=0,\ m=k_1,k_2,...,k_m. \qquad (37)$$

В этом случае решение задачи (6)–(9) определяется в виде ряда

$$u(x,y)=\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+...+\sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1}+\sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right)u_k(y)\sin\pi kx+$$

$$+\sum_l C_l u_l(y)\sin\pi lx, \qquad (38)$$

где $u_l(x,y)$ определяется по формуле (35), C_l — произвольные постоянные, в сумме $\sum\limits_l$ индекс l принимает значения $k_1,k_2,...,k_m$, конечные суммы в (38) следует считать нулями, если верхний предел меньше нижнего.

Теорема 3.2. *Пусть функции* $\varphi(x),\psi(x)\in C^4[0,1]$, $\varphi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(1)=\psi^{(i)}(1)=0, i=0,2,$ $C_1(y)\in C[0,\beta]$, $C_2(y)\in C[-\alpha,0]$ *и* *выполнена оценка (36) при всех $k > k_0$. Тогда если $\Delta_3(k) \neq 0$ при всех $k = \overline{1, k_0}$, то задача (6)–(9) имеет единственное решение, которое определяется рядом (13); если $\Delta_3(k) = 0$ при $k = m = k_1, k_2, ..., k_l \leq k_0$, то задача (6)–(9) разрешима, когда выполнены условия (37) и решение в этом случае определяется рядом (38).*

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теремы 3.2 и $\Delta_3(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$. Тогда для решения (13) задачи (6)–(9) имеют место оценки:*

$$||u(x, y)||_{L_2} \leq M_5 \left(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} \right),$$

$$||u(x, y)||_{C(\overline{D})} \leq M_6 \left(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2} \right),$$

где постоянные M_5 и M_6 не зависят от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Публикации по теме диссертации

1. **Мелишева, Е.П.:** ***Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа*** **[Текст] / Е.П. Мелишева // Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. – 80(6). – С. 39–47 (2010) – 0,5 п.л.**

2. **Мелишева, Е.П.:** ***Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области*** **[Текст] / Е.П. Мелишева, К.Б. Сабитов // Известия Вузов. Математика. – №7. – С. 62–76 (2013) – 0,87 п.л.**

3. **Мелишева, Е.П.:** ***Задача Дирихле для нагруженного вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области*** **[Текст] / Е.П. Мелишева // Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. – 107(6). – С. 40 – 53 (2013). – 0.88 п.л.**

4. Мелишева, Е.П.: *Критерий единственности решения задачи Дирихле для нагруженного уравнения Лаврентьева-Бицадзе* [Текст] / Е.П. Мелишева // Материалы Седьмой школы молодых учёных "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". – Нальчик. – С. 67–72 (2010) – 0,31 п.л.

5. Мелишева, Е.П.: *Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа* [Текст] / Е.П. Мелишева // Материалы второй Международной конференции "Математическая физика и ее приложения". – Самара: ООО "Книга". – С. 227–229 (2010) – 0,13 п.л.

6. Мелишева, Е.П.: *Критерий единственности решения краевой задачи для нагруженного уравнения Лаврентьева-Бицадзе* [Текст] / Е.П. Мелишева // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. об-во. – **40**. – С. 225–229 (2010) – 0,25 п.л.

7. Мелишева, Е.П..: *Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа* [Текст] / Е.П. Мелишева // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И.Г. Петровского. – М.: Изд-во МГУ. – С. 272 (2011) – 0,06 п.л.

8. Мелишева, Е.П.: *Критерий единственности решения задачи Дирихле для нагруженного вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области* [Текст] / Е.П. Мелишева // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием "Дифференциальные уравнения и их приложения". – Уфа: Гилем. – С. 158–163 (2011) – 0,31 п.л.

9. Мелишева, Е.П.: *Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа со степенным вырождением на переходной линии* [Текст] / Е.П. Мелишева // Сборник материалов Международной конференции "Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел". – Белгород: ИПК НИУ "БелГУ". – С. 81–82 (2011) – 0,06 п.л.

10. Мелишева, Е.П.: *Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области* [Текст] / Е.П. Мелишева // Обратные и некорректные задачи математической физики. Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева. – Новосибирск: Сибирское научное издательство. – С. 398 (2012) – 0,06 п.л.

11. Мелишева, Е.П.: *Задача Дирихле для нагруженного вырождающегося эллиптико-гиперболического уравнения* [Текст] / Е.П. Мелишева // Труды Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы". – Уфа: РИЦ БашГУ. – Т.1. – С. 189–195 (2013) – 0,38 п.л.

12. Мелишева, Е.П.: *Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области* [Текст] / Е.П. Мелишева // Материалы Одиннадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". – Казань: Казан. ун-т. – **46** – С. 301–302 (2013) – 0,12 п.л.