На правах рукописи

Терентьева Юлия Валерьевна

(p, q)-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В КРУГЕ С ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2013

Работа выполнена на кафедре теории функций
ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Щербаков Евгений Александрович
ФГБОУ ВПО "КубГУ"

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Миклюков Владимир Михайлович
ФГАОУ ВПО "ВолГУ"

доктор физико-математических наук, профессор
Шабалин Павел Леонидович
ФГБОУ ВПО "КазГАСУ"

Ведущая организация: ФГБУН "Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН"(Новосибирск)

Защита диссертации состоится 28 ноября 2013 года в 14 часов 30 минут на заседании совета Д212.081.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18)

Автореферат разослан “___” октября 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д212.081.10
к.ф.-м., доцент Липачев Евгений Константинович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработанности проблемы. В современной геометрической теории функций комплексного переменного большое место занимает теория плоских квазиконформных отображений, одно из направлений которых связано с изучением эллиптических систем уравнений.

Первые исследования по квазиконформным отображениям появились около 80 лет назад и принадлежат М. А. Лаврентьеву и Г. Гретшу. В работах Л. Альфорса, И. Н. Векуа и Б. В. Боярского были исследованы квазиконформные отображения с обобщенными производными. Ими были установлены теоремы существования такого рода отображений и компактности их семейств.

С начала 60-х годов активно развивается теория пространственных квазиконформных отображений (см., например, В. М. Миклюков, А. В. Сычев, Ю. Г. Решетняк, Б. В. Шабат).

Наряду с K - квазиконформными отображениями в работах отечественных и зарубежных авторов: Л. Альфорса, П. П. Белинского, Б. В. Боярского, А. А. Вашарина, В. Я. Гутлянского, В. И. Кругликова, С. Л. Крушкаля, Б. Е. Левицкого, В. М. Миклюкова, И. П. Митюка, А. П. Михайлова, И. С. Овчинникова, В. И. Рязанова, Г. Д. Суворова, Е. А. Щербакова, K. Astala, G. R. David, J. J. Gergen, E. W. Stredulinsky, U. Srebro, E. Yakubov, O. Martio и др., — изучались квазиконформные отображения с неограниченными характеристиками.

Первой работой в этом направлении была работа П. П. Белинского о существовании решений вырождающегося уравнения Бельтрами.

Б. В. Боярским, наряду с существованием решения уравнения Бельтрами с двумя комплексными характеристиками (1957 г.):

$$f_{\bar z} = \mu\left(z\right) f_z + \nu\left(z\right) \overline{f_z}, \tag{1}$$

с ограниченной характеристикой $K\left(z\right)$,

$$K\left(z\right) := \frac{1 + \left|\mu\left(z\right)\right| + \left|\nu\left(z\right)\right|}{1 - \left|\mu\left(z\right)\right| - \left|\nu\left(z\right)\right|},$$

показано, что производные K - квазиконформных отображений обладают улучшенными свойствами интегрируемости. Недавно (2008 г.) Б. В. Боярским и др. доказано существование гомеоморфного решения $f\left(z\right)$ уравнения (1), принадлежащего пространству $W_{loc}^{1,s}$, $s \in [1, 2)$.

В. Н. Монаховым (1961 г.) впервые методами квазиконформных отображений были доказаны теоремы существования решения задач нелинейной фильтрации жидкости со свободными границами.

Учеником И. И. Данилюка А. Игликовым (1968 г.) было изучено классическое уравнение Бельтрами с вырождением во внутренней точке единичного круга и показано, что в зависимости от скорости вырождения его решение обладает различными топологическими свойствами.

Е. А. Щербаковым (начиная с 1969 г.) изучались квазиконформные отображения, осуществляемые решениями нелинейных уравнений Бельтрами с различными случаями вырождения. Им был разработан метод доказательства существования таких отображений, основанный на теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений.

В работах Г. Д. Суворова, И. С. Овчинникова, В. М. Миклюкова и их учеников обобщается принцип длины и площади на основе теории нелинейных функциональных пространств. Результатом их исследований стали оценки равностепенной непрерывности и открытости семейств квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками.

Г. Н. Положий в 60-х годах изучал общую теорию p - и (p, q) - аналитических функций. Им были проведены исследования по построению интегральных представлений p - аналитических функций от $z = x + iy$ с весом $p = x^k$ ($k = const > 0$). Основное внимание Г. Н. Положий уделял вопросам приложения развиваемой им общей теории в механике сплошных сред.

В работах П. П. Белинского и его учеников (1974 г.) изучались квазиконформные в среднем отображения колец. Ими были получены экстремальные функции для отображений колец и установлены модули равностепенной непрерывности квазиконформных отображений в среднем. В нашей диссертации показано, что в классе квазиконформных в среднем отображений колец нет отображений кроме K — квазиконформных, которые экстремально всякое подкольцо из $C_{r1} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ переводят на подкольцо из $C_{\rho 1}$.

В настоящее время в работах В. Я. Гутлянского, О. Мартио, Т. Шугавы, М. Вуоринена, В. И. Рязанова, В. М. Миклюкова, Б. В. Боярского, Ю. Г. Решетняка и др. изучается проблема существования квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками, как в плоском, так и пространственном случае.

В работе У. Сребро и Э. Якубова (1997 г.) изучается случай вырождения внутри области, для которого показано, что решение $f(z)$ уравнения Бельтрами принадлежит $W^{1,2}_{loc}$.

K. Astala (2009 г.) исследовал свойства общих квазиконформных отображений плоскости на себя с интегрируемой характеристикой. В частности, им показано, что обобщенные производные первого порядка локально интегрируемы в $\mathbb{C}$, кроме того существует конечное множество, вне которого первые производные локально интегрируемы с квадратом.

Уравнение Бельтрами второго рода

$$f_{\bar{z}} = \nu(z)\,\overline{f_z}, \tag{2}$$

имеет приложения во многих задачах математической физики, а также играет значительную роль в теории гармонических отображений на плоскости.

В. Я. Гутлянским и В. И. Рязановым (2011 г.) исследуются проблемы локального поведения квазиконформных отображений на плоскости и связанные с ним вопросы граничного соответствия. При этом особое внимание уделено случаю, когда комплексные характеристики являются аппроксимативно непрерывными функциями. Здесь приводятся явные решения уравнения Бельтрами для случаев, когда комплексная характеристика μ является произвольной измеримой функцией, но зависит только от одной вещественной переменной $x = Rez$ или $y = Imz$, либо $|\mu|$ или $\arg\mu$. Для этих решений авторами получены интегральные представления, подынтегральная плотность которых зависит от функции $\mu(z)$. В нашей диссертации получены интегральные представления решений и их производных вплоть до второго порядка включительно. При этом подынтегральная плотность зависит от производных координатных функций этих решений.

В. М. Миклюковым, Г. Д. Суворовым, О. Мартио, У. Сребро и др. в разные годы была определена зависимость локального поведения производных первого порядка решения от локального поведения производных первого порядка характеристик.

В. Я. Гутлянским, В. И. Рязановым, У. Сребро, Э. Якубовым (2012 г.) изучались вопросы существования, единственности и ограниченности решений уравнения Бельтрами. Ими, в частности, показано, что каждое гомеоморфное решение $f(z)$ этого уравнения с локально интегрируемой в области $D \subset \mathbb{C}$ характеристикой $K(z)$, принадлежит пространству $W^{1,1}_{loc}(D)$. Более того, если $K(z) \in L^p_{loc}(D)$, $p \in [1, \infty]$, то $f \in W^{1,s}_{loc}(D)$, $s = \frac{2}{1+p^{-1}}$.

В вышеуказанных работах определена зависимость локального поведения производных первого порядка решения от локального поведения производных первого порядка характеристик решения. Нами были изучены свойства интегрируемости производных определенного класса общих квазиконформных отображений, являющихся решениями вырождающихся эллиптических систем в дополнительном предположении, что производные весовых функций обладают некоторыми свойствами интегрируемости. При этом в диссертации автора произведены не локальные (глобальные) оценки производных второго порядка, а показано, что производные первого порядка решений принадлежат весовым пространствам С. Л. Соболева. Существенную роль при этом играют интегральные представления для производных второго порядка, имеющие, хотя и известный вид, но являющиеся при этом нетривиальными из-за того, что, априори, неизвестна интегрируемость плотностей сингулярных интегральных операторов, участвующих в таких интегральных представлениях.

Несмотря на обилие научных исследований в области общих квазиконформных отображений, многие принципиальные вопросы по сию пору остаются неразрешенными. Это определяет **актуальность данной работы**.

Предметом исследования являются квазиконформные отображения $w = u + iv$ с неограниченными характеристиками $K(z)$, осуществляющие топологическое отображение единичного круга $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на себя.

Объектом настоящего исследования являются вырождающиеся на граничном множестве Γ_0 единичного круга B_1, $\Gamma := \partial B_1$, эллиптические системы:

$$\begin{cases} pu_x + qu_y = v_y, \\ -qu_x + pu_y = -v_x, \end{cases} \qquad p = p(z), q = q(z), \tag{3}$$

решения которых называют (p, q) - аналитическими функциями.

Во всей работе относительно функций $p(z)$, $q(z)$ предполагаем выполненным ***условие D:*** пусть функции p, $q : \bar{B}_1 \to \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемы и неотрицательны на множестве $\bar{B}_1 \backslash \Gamma_0$ и в окрестности Γ_0 удовлетворяют условиям:

$$a_1 dist^{\alpha}(z, \Gamma_0) \leq p(z) \leq a_2 dist^{\alpha}(z, \Gamma_0),$$

$$b_1 dist^{\alpha-1}(z, \Gamma_0) \leq |\nabla p(z)| \leq b_2 dist^{\alpha-1}(z, \Gamma_0),$$

$$c_1 dist^{2\alpha}(z, \Gamma_0) \leq q(z) \leq c_2 dist^{2\alpha}(z, \Gamma_0),$$

$$d_1 dist^{2\alpha-1}(z, \Gamma_0) \leq |\nabla q(z)| \leq d_2 dist^{2\alpha-1}(z, \Gamma_0),$$

$$0 < \alpha < 1, 0 < a_1 < a_2, 0 < b_1 < b_2, 0 < c_1 < c_2, 0 < d_1 < d_2.$$

Целью исследования является получение интегральных представлений типа И. Н. Векуа и J. J. Gergen, F. G. Dressel для решений вырождающихся эллиптических систем (3) и дополнительных интегральных свойств производных решений этих систем.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказаны теоремы существования и единственности решений вырождающихся эллиптических систем, осуществляющих топологические отображения круга B_1 на себя, обладающих интегральными представлениями типа И. Н. Векуа и J. J. Gergen, F. G. Dressel.

2. Получены интегральные представления для производных решений вырождающихся эллиптических систем, осуществляющих топологические отображения круга B_1 на себя, вплоть до второго порядка включительно.

3. Доказаны теоремы об оценке сингулярных интегралов с весовой функцией, неограниченной в граничной точке z_0 и на граничной дуге Γ_0.
4. Показано, что решения вырождающихся эллиптических систем, осуществляющие топологическое отображение круга B_1 на себя, принадлежат классическим и весовым семействам пространств С. Л. Соболева с более высокой степенью интегрируемости, чем было известно.

Научная новизна. Все основные результаты, выносимые на защиту, являются новыми и подтверждены доказательствами.

Методы исследования. Основные положения диссертации получены с помощью интегральных представлений И. Н. Векуа и J. J. Gergen, F. G. Dressel, «весовой» теоремы вложения, критерия Винера, теории сингулярных интегральных операторов и других методов теории функций комплексного переменного.

Достоверность полученных результатов обусловлена тем, что применяются проверенные и строго обоснованные методы исследования; основные результаты диссертации доказаны и опубликованы.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные результаты имеют теоретическое значение, заполняя определенный пробел в теории вырождающихся эллиптических систем, и могут быть использованы для получения новых результатов в этом разделе теории функций комплексного переменного.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были доложены на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспектива-2009» (г. Нальчик, КабБГУ, 2009 г.); на студенческих научных конференциях факультета математики и компьютерных наук (г. Краснодар, КубГУ, 2009 г., 2012 г.); на научных семинарах кафедры прикладной математики (г. Краснодар, КубГТУ, 2009 - 2012 г.); на VIII Международной научно-практической интернет-конференции «Проблемы и перспективы развития науки в начале третьего тысячелетия в странах СНГ» (г. Переяславль-Хмельницкий, 26-28 февраля 2013 г.); на 4-й международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования» (г. Москва, РУДН, 25-29 марта 2013 г.); на научном семинаре «Геометрический анализ и вычислительная геометрия» (г. Волгоград, ВолГУ, 13 мая 2013 г.); на научном семинаре «Геометрическая теория функций» (г. Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 21 мая 2013 г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 8 работ, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1-3] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ. В совместной работе [1] Е. А. Щербакову принадлежит постановка задачи, идея решения и лемма о поведении сингулярного интеграла с подынтегральной плотностью, неограниченной в одной граничной точке z_0 круга B_1. Реализация идеи решения поставленной задачи принадлежит Ю. В. Терентьевой. Работы [6, 8] носят совместный характер.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы (150 наименований), изложена на 120 станицах машинописного текста (106 страниц основного текста и 14 страниц литературы).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дан обзор результатов по исследуемой тематике, обоснованы актуальность, цель, научная новизна, основные положения, выносимые на защиту, теоретическая значимость полученных результатов, приведены сведения об апробации результатов, о публикациях по теме диссертации, об объеме и структуре работы, отражен вклад автора в проведенные исследования.

Глава 1 посвящена изучению p - аналитических функций $w\left(z\right)$, являющихся решениями систем (3) при $q\left(z\right)\equiv 0$, осуществляющих топологическое отображение круга B_1 на себя с нормировкой:

$$w\left(z_0\right)=i,\, w\left(z_1\right)=-i,\, w\left(z_2\right)=w_2,\, z_0,\, z_1,\, z_2,\, w_2\in\partial B_1, \tag{4}$$

$$z_0\neq z_1\neq z_2,\, w_2\neq i,\, w_2\neq -i,$$

в случае вырождения на граничном множестве $\Gamma_0=\{z_0\}$.

Переходя к комплексным переменным, запишем систему (3) при $q\left(z\right)\equiv 0$ в следующем виде:

$$w_{\bar z}=\nu\left(z\right)\overline{w_z},\quad \nu\left(z\right):=\frac{1-p\left(z\right)}{1+p\left(z\right)}. \tag{5}$$

Поскольку характеристика $K\left(z\right)$,

$$K\left(z\right):=\frac{|w_{\bar z}|+|w_z|}{|w_{\bar z}|-|w_z|},$$

отображения $w\left(z\right)$, являющегося решением уравнения (5), имеет вид:

$$K\left(z\right)=\frac{1}{p\left(z\right)},$$

и функция $p\left(z\right)$ удовлетворяет условию D, то в точке z_0 функция $K\left(z\right)$ не является ограниченной. Поэтому такие отображения не являются K - квазиконформными ни для какой константы $K\in\mathbb{R}$ в $\bar B_1$. Такие отображения назовем *общими квазиконформными* отображениями, а соответствующую им систему (3) - *вырождающейся*. Система (3) при этом не является равномерно эллиптической.

Следующая теорема существования и единственности решений является известной (В. И. Кругликов, В. М. Миклюков, И. П. Митюк, Е. А. Щербаков), но в нашей работе приводится иной способ доказательства, который позволил получить интегральные представления для решений систем (3).

Теорема 1. *Пусть функция $p\,(z)$ из системы (3) удовлетворяет условию D, в котором $0<\alpha<1$, $\Gamma_0=\{z_0\}$, $z_0\in\partial B_1$, $q\,(z)\equiv 0$, и допускает продолжение в $\mathbb{C}$ функцией, являющейся $A_2\,(\mathbb{C})$ - весом. Тогда существует единственное решение $w\,(z)$ уравнения (5), непрерывное вплоть до границы B_1, нормированное условием (4), являющееся квазиконформным в среднем топологическим отображением круга B_1 на себя. Для функции $\omega\,(z)=p\,(z)\,u\,(z)+iv\,(z)$ и её производной $\omega_z\,(z)$ имеют место интегральные представления типа J. J. Gergen, F. G. Dressel в круге B_1:*

$$\omega\,(z)=\Phi\,(z)-\frac{1}{2\pi}\iint_{B_1}\left[\frac{\omega_{\bar\zeta}\,(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z}{z\bar\zeta-1}\overline{\omega_{\bar\zeta}\,(\zeta)}\right]d\xi d\eta, \tag{6}$$

$$\omega_z\,(z)=\Phi'\,(z)-\frac{1}{2\pi}\iint_{B_1}\left[\frac{\omega_{\bar\zeta}\,(\zeta)}{(\zeta-z)^2}+\frac{\overline{\omega_{\bar\zeta}\,(\zeta)}}{\left(z\bar\zeta-1\right)^2}\right]d\xi d\eta, \tag{7}$$

$$\Phi\,(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}Im\,\omega\,(\zeta)\,dt+\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}Re\,\omega\,(\zeta)\,dt,\;\zeta=e^{it},\;\omega_{\bar\zeta}=p_{\bar\zeta}u.$$

При доказательстве теоремы 1 был использован критерий Винера регулярности граничных точек функций $u\,(z)$, $v\,(z)$ в задачах Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений:

$$\left(\frac{1}{p}v_x\right)_x+\left(\frac{1}{p}v_y\right)_y=0,\qquad v\,(z)|_{\partial B_1}=Im\,\Phi\,(z)|_{\partial B_1}\,, \tag{8}$$

$$(pu_x)_x+(pu_y)_y=0,\qquad u\,(z)|_{\partial B_1}=\begin{cases}\sqrt{1-v^2\,(z)},\; z\in\Gamma_0,\\ -\sqrt{1-v^2\,(z)}\,,\; z\in\partial B_1\backslash\Gamma_0,\end{cases} \tag{9}$$

которые являются следствиями системы (3) при $q\,(z)\equiv 0$.

Нами обобщен результат И. Н. Векуа о поведении $I_{\alpha\beta}$ - интегралов на случай сингулярных интегралов с подынтегральной плотностью, неограниченной на граничном множестве Γ_0, представляющее собой в главе 1 точку z_0. Пусть $dist\,(\zeta,\Gamma_0)$ — расстояние от точки ζ до Γ_0.

Теорема 2. *Пусть $t\,(\zeta):=dist\,(\zeta,\Gamma_0)^{\alpha-1}$, $z_0\in\partial B_1, 0<\alpha<1$, и $r=r\,(\zeta)$ -*

ограниченная в круге B_1 функция, $z \in B_1$, $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда

$$\left| \iint_{B_1} \frac{t(\zeta)\, r(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta \right| \leq \frac{1}{dist\,(z, \Gamma_0)^{1-\alpha}} A(z),$$

где $A(z) \in L_p(B_1)$, $\forall p$, $p > 1$.

Данный результат позволил получить улучшенные интегральные свойства производных функций $u(z)$, $v(z)$ отображения $w(z)$, являющегося решением системы (3) в случае вырождения на $\Gamma_0 = \{z_0\}$.

Теорема 3. *Пусть функция $p(z)$ из системы (3) удовлетворяет условию D, в котором $0 < \alpha < 1$, $\Gamma_0 = \{z_0\}$, $z_0 \in \partial B_1$, $q(z) \equiv 0$, и существуют производные первого порядка в $\bar{B}_1$, такие, что:*

$$\frac{p_x(z)}{\sqrt{p(z)}}, \frac{p_y(z)}{\sqrt{p(z)}} \in L_{2+l}(B_1), l > 0,$$

и вес $p(z)$ допускает продолжение в $\mathbb{C}$ функцией, являющейся $A_2(\mathbb{C})$ - весом. Пусть $w(z) = u(z) + iv(z)$ - квазиконформное в среднем отображение из теоремы 1, являющееся решением уравнения (5) в B_1, нормированное условием (4). Тогда функции $u(z)$, $v(z)$ принадлежат семействам пространств:

$$v(z) \in W^{1,\tau_1}\left(dist^{\alpha^*}(z, z_0), B_1\right), \; \tau_1 = \frac{2(2+\alpha^*)}{2-\alpha}, \; \alpha^* \in [-\alpha; 0]; \tag{10}$$

$$v(z) \in W^{1,\tau_2}(dist^{\alpha^{**}}(z, z_0), B_1), \; \tau_2 = \frac{2(2-\delta)(2+\alpha^{**})}{4 - 4\alpha + \alpha\delta}, \tag{11}$$

$$\alpha^{**} \in \left[\frac{\alpha(2-\delta)}{\alpha - 2}; 0\right];$$

$$u \in W^{1,q_1}\left(dist^{k_1}(z, z_0), B_1\right), \; q_1 = \frac{2(2+\alpha^*)(2-\delta+k_1)}{(2+\alpha)(2+\alpha^*) + \delta(\alpha - 2)}, \tag{12}$$

$$\delta - 2 < k_1 < \frac{4\alpha + \alpha^*(2+\alpha)}{2-\alpha};$$

$$u \in W^{1,q_2}\left(dist^{k_2}(z, z_0), B_1\right), \; q_2 = \frac{2(2-\delta)(2+\alpha^{**})(2-\delta+k_2)}{(4-\alpha\delta)(2+\alpha^{**}) + \delta(4\alpha - \alpha\delta - 4)}, \tag{13}$$

$$\delta - 2 < k_2 < \frac{4\alpha(2-\delta) + \alpha^{**}(4-\alpha\delta)}{4 - 4\alpha + \alpha\delta};$$

где δ, $0 < \delta < 1$, - фиксированная константа.

Для вычисления показателя τ_1 в данной теореме были использованы доказанные нами интегральные представления типа И. Н. Векуа:

$$v_{zz}(z) = F'(z) - \frac{1}{4\pi}\iint_{B_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \tag{14}$$

$$f(\zeta) = \frac{p_\xi(\zeta)}{p(\zeta)} v_\xi(\zeta) + \frac{p_\eta(\zeta)}{p(\zeta)} v_\eta(\zeta),$$

для нахождения показателя τ_2 мы применили теорему 2 к доказанным нами интегральным представлениям типа И. Н. Векуа для $\omega(z)$ и $\omega_z(z)$ в B_1:

$$\omega(z) = R(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{B_1} \frac{\omega_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta,\ \omega_z(z) = R'(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{B_1} \frac{\omega_{\bar\zeta}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \tag{15}$$

где $F(z)$, $R(z)$ - аналитические в круге B_1 функции.

Сравнивая показатели τ_1 и τ_2, можно сказать, что при скоростях вырождения α, достаточно близких к единице, и малом δ, высокую степень суммируемости производных v_x, v_y дает показатель τ_2, если же α достаточно близко к нулю, то более высокую степень интегрируемости дает показатель τ_1. Заметим также, что пространства (10), (11) совпадают лишь, когда $\alpha = \frac{2}{3-\delta}$, $\alpha^* = \alpha^{**}$, а пространства (12), (13) – при $k_1 = k_2$,

$$\alpha^* = \frac{\alpha^{**}\left(-4\alpha + 8\delta - 2\alpha\delta + \alpha\delta^2 - 2\delta^2\right) + 4(\delta - 2)(\alpha - \delta)}{2\alpha^{**}(\alpha - \delta) + \alpha(2 - \delta)^2}.$$

Глава 2 посвящена изучению p - аналитических функций, являющихся решениями систем (3) при $q(z) \equiv 0$, осуществляющих топологическое отображение круга B_1 на себя, нормированных условиями:

$$w(z_1) = i,\ w(z_2) = -i,\ w(z_3) = w_3, \tag{16}$$

$$z_3, w_3 \in \partial B_1 \backslash \bar\Gamma_0,\ z_1 \neq z_2 \neq z_3,\ w_3 \neq i,\ w_3 \neq -i,\ z_1,\ z_2 \in \partial B_1,$$

в случае вырождения на граничной дуге Γ_0,

$$\Gamma_0 = \left\{z \in \partial B_1 : \arg z_2 \leq \arg z \leq \arg z_1\right\},\ \arg z_1 - \arg z_2 \leq 2\pi. \tag{17}$$

В главе 2 нами доказана теорема существования и единственности решений системы (3) при $q(z) \equiv 0$, вырождающейся на граничной дуге Γ_0.

Теорема 4. *Пусть в системе* (3) *функция* $p(z)$ *удовлетворяет условию* D*, в котором* $0 < \alpha < 1$, Γ_0 *— граничная дуга* (17)*,* $q(z) \equiv 0$. *Тогда существует последовательность* K_n *- квазиконформных отображений* $\{w_n\}$,

$$w_n(z) = u_n(z) + iv_n(z),\ K_n = \sup_{z\in B_1} \frac{1}{p_n(z)},\ p_n(z) := p\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)z\right),$$

сходящаяся равномерно внутри B_1 вместе со своими производными первого порядка к единственному квазиконформными отображению $w(z)$ круга B_1 на себя, непрерывному вплоть до границы, являющемуся решением системы (3), *удовлетворяющему нормировке* (16). *При этом для функции $\omega = pu + iv$ и её производной ω_z имеют место интегральные представления J. J. Gergen, F. G. Dressel* (6), (7) *в круге B_1, а в случае, когда $1/2 < \alpha < 1$, имеют место также интегральные представления И. Н. Векуа* (15).

С помощью интегральных представлений (14), (15), а также теоремы 2, доказанной нами и для случая, когда Γ_0 - граничная дуга (17), получен один из основных результатов главы 2 об улучшенных свойствах производных функций $v(z)$, $u(z)$, являющихся решениями системы (3).

Теорема 5. *Пусть функция $p(z)$ из системы* (3) *удовлетворяет условию D, в котором $0 < \alpha < 1$, Γ_0 - граничная дуга* (17), *$q(z) \equiv 0$. Пусть $w = u + iv$ - квазиконформное отображение круга B_1 на себя, являющееся решением системы* (3) *в круге B_1, нормированное условием* (16). *Тогда производные координатных функций $u(z)$, $v(z)$ принадлежат семействам пространств:*

$$v(z) \in W^{1,t_1}\left(dist^{\alpha_1}(z,\Gamma_0), B_1\right),\ t_1 = \frac{4(1-\delta)(2+\alpha_1)}{5-3\alpha+\alpha\delta-2\delta+\delta^2}, \qquad (18)$$

$$\alpha_1 \in \left[\frac{1+\alpha-\alpha\delta-\delta^2}{\alpha+\delta-3}; 0\right];$$

$$v(z) \in W^{1,t_2}(B_1),\ t_2 = \frac{1-\delta}{(1-\alpha)(1+\delta)}; \qquad (19)$$

$$u(z) \in W^{1,s}\left(dist^k(z,\Gamma_0), B_1\right),\ \delta - 1 < k < \frac{4\alpha(1-\delta)(2+\alpha_1)}{5-3\alpha+\alpha\delta-2\delta+\delta^2} + \alpha_1, \quad (20)$$

$$s = \frac{4(1-\delta)(2+\alpha_1)(1-\delta+k)}{4(1-\delta)(2+\alpha_1)\alpha + (5-3\alpha+\alpha\delta-2\delta+\delta^2)(1-\delta+\alpha_1)};$$

где δ, $0 < \delta < 1$ - фиксированная константа.

Ясно, что при скорости вырождения α, достаточно близкой к нулю, и малом δ, производные v_x, v_y суммируемы со степенью t_1 (18). Если же скорость α близка к единице и константа δ — мала, более высокую степень интегрируемости производных v_x, v_y дает показатель t_2 (19). Заметим также, что пространства (18) и (19) совпадают лишь при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha = \frac{3+10\delta-\delta^2}{5+9\delta}$.

Глава 3 посвящена изучению (p,q) - аналитических функций, являющихся решениями систем вида (3), осуществляющих топологические отображения круга B_1 на себя, удовлетворяющих нормировке (16) в случае вырождения на граничной дуге Γ_0 (17).

Запишем систему (3) в комплексной форме:

$$w_{\bar{z}} = \nu(z)\,\overline{w_z}, \tag{21}$$

$$\nu(z) := \frac{1 - p^2(z) - q^2(z) + 2iq(z)}{q^2(z) + (1 + p(z))^2},$$

при этом характеристика $K(z)$ отображения $w(z)$ имеет вид:

$$K(z) = \frac{\sqrt{(1 + p(z))^2 + q^2(z)} + \sqrt{(1 - p(z))^2 + q^2(z)}}{\sqrt{(1 + p(z))^2 + q^2(z)} - \sqrt{(1 - p(z))^2 + q^2(z)}}.$$

Так как функции $p(z)$ и $q(z)$ удовлетворяют условию D, то в точках дуги Γ_0 характеристика $K(z)$ не ограничена. Поэтому система (3) вырождается в точках Γ_0. Для таких отображений нами была доказана

Теорема 6. *Пусть в уравнении* (21) *функции* $p,\ q : \bar{B}_1 \to \mathbb{R}$ *удовлетворяют условию D, в котором* $0 < \alpha < 1$. *Тогда существует последовательность* K_n *- квазиконформных отображений* $\{w_n\}$, $w_n = u_n + iv_n$,

$$K_n := \sup_{z \in B_1} \frac{1 + |\nu_n(z)|}{1 - |\nu_n(z)|},\ p_n(z) := p\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)z\right),\ q_n(z) := q\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)z\right),$$

сходящаяся равномерно внутри B_1 *вместе со своими производными первого порядка к единственному квазиконформному отображению* $w(z) = u(z) + iv(z)$ *круга* B_1 *на себя, непрерывному вплоть до границы* B_1*, являющемуся решением системы* (3) *и нормированному условием* (16). *При этом в круге* B_1 *для функции* $W(z) = U(z) + iV(z)$,

$$W := \frac{p^2 + q^2}{p}u - \frac{q}{p}v + iv,$$

и её производной $W_z(z)$ *имеют место интегральные представления* (6), (7) *типа J. J. Gergen, F. G. Dressel, при* $1/2 < \alpha < 1$ *имеют место также представления типа И. Н. Векуа* (15), *в которых*

$$W_{\bar{z}}(z) = \left(\frac{p^2(z) + q^2(z)}{p(z)}\right)_{\bar{z}} u(z) - \left(\frac{q(z)}{p(z)}\right)_{\bar{z}} v(z).$$

Для доказательства теоремы 6 был использован критерий Винера при исследовании регулярности граничных точек функций $u\,(z)$, $v\,(z)$ в задачах Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений:

$$\left(\frac{pv_x - qv_y}{p^2+q^2}\right)_x + \left(\frac{qv_x + pv_y}{p^2+q^2}\right)_y = 0, \qquad v\,(z)|_{\partial B_1} = Im\;\Phi\,(z)|_{\partial B_1}\,,$$

$$(pu_x + qu_y)_x + (-qu_x + pu_y)_y = 0,\; u\,(z)|_{\partial B_1} = \begin{cases} \sqrt{1-v^2\,(z)},\; z \in \Gamma_0, \\ -\sqrt{1-v^2\,(z)},\; z \in \partial B_1 \backslash \Gamma_0, \end{cases}$$

которые являются следствиями системы (3).

Основным результатом главы 3 является теорема об интегрируемости производных v_z, u_z решений вырождающейся на дуге Γ_0 системы (3).

Теорема 7. *Пусть функции* p, q : $\bar{B}_1 \to \mathbb{R}$ *из системы* (3) *удовлетворяет условию D*, *в котором* $0 < \alpha < 1$. *Пусть также* $w\,(z)$ *есть квазиконформное отображение, являющееся решением уравнения* (21) *в круге* B_1, *нормированное условием* (16). *Тогда функции* $v\,(z)$, $u\,(z)$ *принадлежат следующим функциональным пространствам С. Л. Соболева:*

$$v\,(z) \in W^{1,p_1}\left(dist^{\alpha_1}\,(z, \Gamma_0)\,, B_1\right),\; p_1 = \frac{2\,(2-\varepsilon)\,(2+\alpha_1)}{5 - 3\alpha - \varepsilon + \alpha\varepsilon}, \tag{22}$$

$$\alpha_1 \in \left[\frac{1+\alpha-\alpha\varepsilon+\varepsilon}{\alpha-3}; 0\right];$$

$$v\,(z) \in W^{1,p_2}\,(B_1)\,,\; p_2 = \frac{1-\varepsilon}{(1-\alpha)\,(1+\varepsilon)}; \tag{23}$$

$$u \in W^{1,l}\left(dist^k\,(z, \Gamma_0)\,, B_1\right), \tag{24}$$

$$l = \frac{4\,(1-\delta)\,(2+\alpha_1)\,(1-\delta+k)}{4\,(1-\delta)\,(2+\alpha_1)\,\alpha + (5-3\alpha+\alpha\delta-2\delta+\delta^2)\,(1-\delta+\alpha_1)},$$

$$\delta - 1 < k < \frac{4\alpha\,(1-\delta)\,(2+\alpha_1)}{5-3\alpha+\alpha\delta-2\delta+\delta^2} + \alpha_1;$$

где δ, $0 < \delta < 1$, - *фиксированная константа.*

Заметим, что при доказательстве этого результата, нами было получено интегральное представление (14) для производной $v_{zz}\,(z)$, в котором

$$f(z) := v_x(z)\frac{q_y^*(z) - p_x^*(z)}{p^*(z)} - v_y(z)\frac{q_x^*(z) + p_y^*(z)}{p^*(z)},$$

$$p^*\,(z) := -\frac{p\,(z)}{p^2\,(z) + q^2\,(z)},\; q^*\,(z) := \frac{q\,(z)}{p^2\,(z) + q^2\,(z)},$$

и $G(z)$ - аналитическая в круге B_1 функция.

Заметим также, что пространства (22) и (23) совпадают при $\alpha_1 = 0$ и

$$\alpha = \frac{3+10\varepsilon}{5+8\varepsilon+5\varepsilon^2}.$$

Также в главе 3 исследуются квазиконформные в среднем отображения $w(z)$ колец C_{r1}. Рассмотрим классическое уравнение Бельтрами:

$$w_{\bar{z}} = -qe^{2i\varphi}w_z,\ 0 < q_0 \leq q < 1. \tag{25}$$

Используя известную теорему П. П. Белинского о квазиконформных в среднем отображениях колец, нами была получена

Теорема 8. *В классе отображений* $w : C_{r1} \to C_{\rho 1}$*, удовлетворяющих уравнению Бельтрами* (25)*, квазиконформные в среднем отображения с характеристикой* $q(r) \equiv const$*, они и только они, переводят в экстремальном смысле кольцо* C_{r1} *в кольцо* $C_{\rho 1}$*, при этом любое кольцо* C_{t1}*,* $r < t < 1$*, переводится в соответствующее ему кольцо также экстремальным образом.*

В **заключении** перечисляются **основные результаты диссертации:**

1. Доказаны теоремы существования и единственности решений вырождающихся эллиптических систем, осуществляющих топологические отображения круга B_1 на себя, которые вместе со своими производными вплоть до второго порядка обладают интегральными представлениями типа И. Н. Векуа и J. J. Gergen, F. G. Dressel.
2. Обобщен результат И. Н. Векуа о поведении интегралов типа $I_{\alpha\beta}$ на случай сингулярных интегралов с плотностью, неограниченной в граничной точке z_0 и на граничной дуге Γ_0 круга B_1.
3. Показано, что решения вырождающихся эллиптических систем, осуществляющие топологическое отображение круга B_1 на себя, принадлежат классическим и весовым семействам пространств С. Л. Соболева.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК РФ

1. Терентьева Ю. В. Исследование свойств интегрируемости производных решения сопряженного (нелинейного) уравнения Бельтрами в случае вырождения в граничных точках / Е. А. Щербаков, Ю. В. Терентьева // Экологический вестник научных центров ЧЭС. — 2012. — №3. — С. 78-84.

2. Терентьева Ю. В. О свойствах сингулярного интеграла с неограниченной весовой плотностью / Ю. В. Терентьева // Изв. ВУЗов, Северо - Кавказский регион. Серия: Естественные науки. — 2013. — №1. — С. 23-25.

3. Терентьева Ю. В. Исследование свойств интегрируемости производных решения сопряженного (нелинейного) уравнения Бельтрами в случае вырождения на граничной дуге / Ю. В. Терентьева // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. — 2013. — №1. — С. 5-18.

Публикации в других изданиях

4. Терентьева Ю. В. Теорема искажения и экстремальные функции для класса общих квазиконформных отображений / Ю. В. Терентьева // Вестник студенческого научного общества, Краснодар. — 2009. — Выпуск 11. — С. 117-123.

5. Терентьева Ю. В. Теорема Белинского и экстремальные функции для класса квазиконформных в среднем отображений / Ю. В. Терентьева // Материалы международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспектива 2009», Нальчик. Сер. Физика. Математика. — 2009. — Том 8. — С. 111-115.

6. Terentieva Yu. V. On the integral properties of the derivatives of the solutions of the boundary degenerate (p, q) analytic systems representing topological mapping of the unit disk / E. A. Shcherbakov, Yu. V. Terentieva // Нелинейные граничные задачи, Донецк. — 2012. — Т 21. — С. 153-164.

7. Терентьева Ю. В. Квазиконформные отображения с неограниченными характеристиками и вырождающиеся эллиптические системы / Ю. В. Терентьева // Материалы VIII Международной научно-практической интернет-конференции «Проблемы и перспективы развития науки в начале третьего тысячелетия в странах СНГ», 26-28 февраля 2013 г., г. Переяслав-Хмельницкий. — С. 87-90.

8. Терентьева, Ю. В. О суммируемости обобщенных решений (p, q) - аналитических систем, осуществляющих топологическое отображение единичного круга на себя, в случае вырождения на граничной дуге [Тезисы] / Щербаков Е. А., Терентьева Ю. В. // Материалы 4-й международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», 25-29 марта 2013 г., г. Москва. — С. 358-359.