На правах рукописи

Миронов Алексей Николаевич

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань — 2013

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" и кафедре математического анализа, алгебры и геометрии Елабужского института ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Жегалов Валентин Иванович.
Официальные оппоненты:	Зарубин Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО "Орловский государственный университет", Логинов Борис Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО "Ульяновский государственный технический университет", Репин Олег Александрович, доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО "Самарский государственный экономический университет".
Ведущая организация:	ФГОУ ВПО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова".

Защита состоится 26 декабря 2013 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35.

Автореферат разослан ____ октября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В данной диссертации изучается уравнение

$$(D_1 + D_2)u = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

где

$$D_1 \equiv \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}},$$

а D_2 — линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий производные функции $u(x_1, \ldots, x_n)$, получаемые из D_1 отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования. Данное уравнение можно записать в виде

$$L(u) \equiv \sum_{\substack{0 \leqslant q_i \leqslant m_i,\\ i=\overline{1,n}}} a_{q_1 q_2 \ldots q_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) u_{x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $a_{q_1 q_2 \ldots q_n}$, f — заданные функции, $a_{m_1 m_2 \ldots m_n} \equiv 1$, u — искомая функция. Далее такие уравнения мы называем уравнениями с доминирующей частной производной.

К данному классу принадлежит уравнение Бианки [1], для которого

$$D_1 \equiv \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}.$$

К уравнениям Бианки специальными подстановками приводятся уравнения

$$\frac{\partial^n F(\omega, x)}{\partial \omega^n} - \frac{\partial^n F(\omega, x)}{\partial x^n} - \sum_{i+k<n} P_{ik}(\omega, x) \frac{\partial^{i+k} F(\omega, x)}{\partial \omega^i \partial x^k} = H(\omega, x) \tag{2}$$

в смешанных переменных: комплексной по ω и действительной по x [1]. В свою очередь, к задаче Коши для частных форм (2) сводится задача интегрального представления преобразований одних обыкновенных линейных дифференциальных операторов в другие [2], [3, с. 5–13]. Задача Гурса для уравнений с итерациями операторов

$$D \equiv \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$$

тесно связана с задачей Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [4, п. 7.4 главы 7].

Интерес к уравнениям (1) объясняется также их приложениями в теориях фильтрации жидкости в трещиноватых средах, переноса почвенной влаги, колебаний стержней с учетом эффектов поперечной инерции, распространения волн в диспергирующих средах (см., например, библиографические ссылки к статьям [5], [6]). Частными случаями уравнения (1) являются предложенное И.Н. Векуа уравнение изгиба тонкой сферической оболочки, уравнение Аллера, уравнение Буссинеска-Лява с двумя независимыми переменными, поливибрационные уравнения Манжерона.

Степень разработанности проблемы. Имеется модификация классического метода Римана [7, §§ 4–6], [8, с. 62–66], которая заключается в том, что исходное тождество, использованное Риманом, берется в иной форме, а функция Римана определяется как решение интегрального уравнения.

В 1990 г. в работе [9] было рассмотрено уравнение

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \tag{3}$$

Отправным пунктом являлся результат И.Н. Векуа из [7], где было показано, что функция Римана для уравнения

$$L_1(u) \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(x,y) - \int\limits_{\tau}^{y} a(x,\eta)v(x,\eta)\,d\eta - \int\limits_{t}^{x} b(\xi,y)v(\xi,y)\,d\xi + \\ + \int\limits_{t}^{x}\int\limits_{\tau}^{y} c(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi = 1 \tag{4}$$

и имеет место тождество

$$\frac{\partial^2(uR)}{\partial x\partial y} - RL_1(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial y} - aR\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial x} - bR\right)\right],$$

отличающееся от тождества, использованного Б. Риманом. Данная модификация метода Римана допускала возможность распространения на случай уравнения (3), что и было реализовано в [9].

Позднее, в ряде работ В.И. Жегалова, В.А. Севастьянова и Е.А. Уткиной этот модифицированный метод был распространен на класс уравнений вида (1). Отметим, что этими авторами для уравнений с кратным дифференцированием изучалась задача Гурса, а задача Коши исследовалась лишь для уравнения Бианки. При этом существенное значение имело то, что функция Римана в указанных работах определяется не как решение сопряженного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, число которых очень быстро увеличивается с ростом n, а как решение интегрального уравнения, являющегося обобщением (4). Отметим еще, что при построении решений задач Коши В.А. Севастьянов использовал аппарат дифференциальных форм. Оба указанных изменения привели к существенному уменьшению сложности выкладок, и вывод окончательных формул решения стал более компактным. К тому же появились дополнительные возможности получения функции Римана в явном виде путем непосредственного решения соответствующего интегрального уравнения.

Почти одновременно (с 1993 г.) другой вариант метода Римана для уравнений Бианки стал разрабатываться в Самаре (например [10], [11]).

Отметим еще вариант метода Римана, предложенный А.П. Солдатовым и М.Х. Шхануковым для уравнений вида (1) с двумя независимыми переменными [5].

Некоторые частные случаи уравнения (1) при $n = 2$, 3 исследовали с разных точек зрения многие авторы, в частности В.А. Водахова, О.М. Джохадзе, Р.С. Жамалов, И.Г. Мамедов, М.Х. Шхануков, D. Colton, S. Easvaran, D. Mangeron, M.N. Oguztoreli, V. Radochova и др.

В цикле работ Е.А. Уткиной (см. [12]) для уравнения (1) исследована разрешимость характеристических задач с нормальными производными в краевых условиях, выведены достаточные условия существования и единственности решения задачи Дирихле для уравнений четвертого и шестого порядков в двух- и трехмерном пространствах, изучены задачи со смещением, построены некоторые аналоги уравнения Эйлера-Пуассона.

Отметим еще одно направление в теории уравнений с доминирующей частной производной. Хорошо известна роль инвариантов Лапласа в теории уравнения

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0. \tag{5}$$

В частности, они играют определяющую роль в классификации уравнений вида (5) с точки зрения группового анализа. Напомним основной классификационный результат для уравнений (5) [13, с. 116–125].

Совокупность преобразований эквивалентности для (5)

$$\overline{x} = \alpha(x), \quad \overline{y} = \beta(y), \quad u = \omega(x,y)\overline{u}. \tag{6}$$

Два уравнения вида (5) называются эквивалентными по функции [13, с. 117], если они переходят друг в друга при преобразованиях (6), в которых

$$\alpha(x) = x, \quad \beta(y) = y.$$

Два уравнения (5) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа

$$h = a_x + ab - c, \quad k = b_y + ab - c$$

имеют для обоих уравнений одинаковые значения. Алгебра Ли уравнения (5) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где L^r образована операторами вида

$$X = \xi^1(x,y)\partial_x + \xi^2(x,y)\partial_y + \sigma(x,y)u\partial_u, \tag{7}$$

а L^∞ — подалгебра с оператором $\omega(x,y)\partial_u$, ω — решение (5). Оператор $u\partial_u$ допускается любым уравнением (5), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и считать, что $\sigma(x,y)$ определяется в (7) с точностью до постоянного слагаемого.

Если $h = k \equiv 0$, то уравнение (5) эквивалентно уравнению $u_{xy} = 0$ и допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов $X = \xi^1(x)\partial_x + \xi^2(y)\partial_y$ с произвольными функциями $\xi^1(x)$, $\xi^2(y)$. Если $h \neq 0$, то справедлива следующая

Теорема Ли-Овсянникова. *Уравнение* (5) *допускает более чем одномерную алгебру Ли операторов* (7) *тогда и только тогда, когда функции*

$$p = \frac{k}{h}, \quad q = \frac{(\ln h)_{xy}}{h}$$

тождественно постоянны. Если p и q постоянны, то уравнение (5) *равносильно либо уравнению Эйлера-Пуассона* ($q \neq 0$)

$$u_{xy} - \frac{2/q}{x+y}u_x - \frac{2p/q}{x+y}u_y + \frac{4p/q^2}{(x+y)^2}u = 0,$$

либо уравнению $(q = 0)$

$$u_{xy} + xu_x + pyu_y + pxyu = 0,$$

причем его алгебра Ли операторов (7) *трехмерна.*

Построению инвариантов Лапласа для уравнений с доминирующей частной производной третьего порядка посвящена работа [6].

Цели диссертационной работы.

1. Доказательство дифференциального тождества и построение формулы решения задачи Коши для уравнения (1) путем интегрирования указанного тождества.
2. Вывод более простых интегральных уравнений для функции Римана для частных случаев уравнения (1). Построение функции Римана в явном виде для указанных частных случаев уравнения (1).
3. Исследование разрешимости задач типа Гурса с нормальными производными первого порядка на характеристиках для уравнений Бианки.
4. Постановка ряда задач для факторизованных гиперболических уравнений и доказательство их корректности.
5. Изучение групповых свойств уравнений Бианки.

Методы исследования. Центральным моментом является разработка метода Римана для уравнения (1). Для обоснования полученных результатов и при исследовании задач для уравнений вида (1) применяются методы и результаты теории интегральных уравнений, группового анализа дифференциальных уравнений с частными производными, используется аппарат дифференциальных форм.

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми. В главе 1 основную роль играет новое дифференциальное тождество, интегрированием которого получена формула решения задачи Коши. Новыми являются выделенные в главе 2 случаи построения функции Римана в явном виде, постановки задач в главе 3 и главе 4, полученные в главе 5 результаты (инварианты Лапласа для уравнений с доминирующей частной производной, определяющие уравнения в инвариантной форме, классы уравнений, допускающих алгебры Ли наибольшей размерности). Элементы новизны содержатся в методах доказательства корректности рассматриваемых в диссертации задач.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Каждая из глав содержит результаты, которые могут служить основой для дальнейших исследований. Возможны приложения, связанные с математическим моделированием в указанных выше областях применения рассматриваемых в диссертации уравнений.

Апробация работы. По мере получения результаты работы докладывались на семинарах кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета (2006–2010, 2013 г.г.).

Обзорные доклады по всей диссертации были сделаны на семинаре профессора А.И. Кожанова (Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, 2011 г.), на международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Белгород, 2013 г.) и на семинаре академика Е.И. Моисеева (Москва, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 2013 г.).

Значительная часть результатов диссертации докладывалась на различных конференциях, в частности, на регулярно проходящих конференциях "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара), "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань), "Лобачевские чтения" (Казань).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 16 публикациях автора, список которых приведен в конце автореферата. Из них 13 публикаций — в журналах, определенных Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов докторских диссертаций. Четыре публикации выполнены в соавторстве с научным консультантом, которому принадлежат определенные предложения по постановкам задач и рекомендации общего характера, связанные с применяемыми методами исследования. В диссертации указаны также менее значительные публикации в материалах различных конференций.

Структура и объем работы. Диссертация содержит 260 страниц и состоит из введения, пяти глав, разбитых на 10 параграфов, и списка литературы из 189 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, дается обзор литературы по вопросам, связанным указанной темой, и характеризуются результаты автора, изложенные в последующих главах.

Глава 1 настоящей диссертации посвящена разработке метода Римана для уравнения (1).

В § 1 рассмотрена задача Коши в n-мерном пространстве. В ориентированном системой координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространстве R^n рассмотрим свободную (нехарактеристическую) поверхность S класса C^{m-1}. Выберем точку $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ так, чтобы плоскости $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ вырезали из поверхности S ограниченный участок S^0. Обозначим через D^0 конечную область пространства R^n, ограниченную плоскостями $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ и поверхностью S^0. Считаем ориентацию области D^0 положительной.

Регулярным в области D решением уравнения (1) назовем решение, непрерывное в D вместе со всеми входящими в это уравнение производными.

Задача Коши: найти регулярное в области D^0 решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \mathtt{l}^k}\right|_{S^0} = \psi_k, \quad k = \overline{0, m-1},$$

$\psi_k \in C^{m-k}(\overline{S^0})$, а $\vec{\mathtt{l}}$ — заданное на S некасательное к этой поверхности поле направлений.

Считаем, что коэффициенты (1) удовлетворяют включениям $a_{q_1 q_2 \ldots q_n} \in C^{(q_1, q_2, \ldots, q_n)}$, $f \in C$ в замыкании рассматриваемой области G (областью всюду будем называть открытое связное множество). Класс $C^{(q_1, q_2, \ldots, q_n)}(\overline{G})$ означает существование и непрерывность всех производных $\partial^{l_1 + l_2 + \cdots + l_n} / \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_n^{l_n}$, $l_i = \overline{0, q_i}$, $i = \overline{1, n}$, на множестве $\overline{G}$. Функция Римана $R = R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для уравнения (1) определяется как решение интегрального уравнения

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{Q_{k,n}} \int_{\xi_{q_1}}^{x_{q_1}} \int_{\xi_{q_2}}^{x_{q_2}} \cdots \int_{\xi_{q_k}}^{x_{q_k}} F_{q_1 q_2 \ldots q_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \ldots, \alpha_{q_k}) R(x_1, x_2, \ldots, x_{q_1 - 1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \ldots, x_{q_k - 1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k + 1}, \ldots, x_n) d\alpha_{q_k} \ldots d\alpha_{q_2} d\alpha_{q_1} = 1, \quad (8)$$

где вторая сумма берется по множеству всех упорядоченных наборов индексов $Q_{k,n} = \{(q_1, q_2, \ldots, q_k) \,|\, 1 \leqslant q_1 < q_2 < \cdots < q_k \leqslant n\}$,

$$F_{q_1 q_2 \ldots q_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \ldots, \alpha_{q_k}) =$$

$$= \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{q_1}-1} \sum_{p_{q_2}=0}^{m_{q_2}-1} \cdots \sum_{p_{q_k}=0}^{m_{q_k}-1} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k}(m_{q_i}-p_{q_i})} a_{p_1 p_2 \ldots p_n}(x_1, x_2, \ldots,$$

$$x_{q_1-1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \ldots, x_{q_k-1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{k} \frac{(x_{q_j} - \alpha_{q_j})^{m_{q_j}-p_j-1}}{(m_{q_j} - p_j - 1)!},$$

причем если $i \neq q_j$, то $p_i = 0$. Здесь x_i, $\alpha_i \in [\xi_i, \eta_i]$, $i = \overline{1, n}$. Пусть $\Omega = [\xi_1, \eta_1] \times [\xi_2, \eta_2] \times \cdots \times [\xi_n, \eta_n] \subset \overline{G}$. Решение (8) существует и единственно в классе $C(\Omega)$. Как обычно (например [8, с. 63]), считаем R функцией как переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, так и параметров $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, то есть $R = R(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Из (8) следует, что $R(x_1, \ldots, x_n; x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$.

Центральную роль в рассуждениях играет тождество

$$RL(u) \equiv \sum_{\substack{p_i \leqslant m_i, \\ \sum p_i < \sum m_i, \\ 0 \leqslant l_i \leqslant 1, \\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \left(A_{p_1 p_2 \ldots p_n} u_{x_1^{m_1-l_1-p_1} x_2^{m_2-l_2-p_2} \ldots x_n^{m_n-l_n-p_n}}\right)_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}}, \tag{9}$$

где p_i, m_i, l_i — целые неотрицательные числа, справедливое для любой вектор-функции класса $C^{(m_1, \ldots, m_n)}$. В сумме (9) каждое слагаемое встречается лишь один раз и определяется конструкцией $A_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ (точнее, набором $(p_1, p_2, \ldots p_n)$). Формула (9) строится по следующему правилу. Берется набор $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, затем определяем набор $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ так, чтобы $p_1 + l_1 \leqslant m_1$, $p_2 + l_2 \leqslant m_2$, $\ldots$, $p_n + l_n \leqslant m_n$, при этом берутся наибольшие значения l_1, l_2, $\ldots$, l_n (т. е. $l_i = 1$, если $p_i < m_i$, $l_i = 0$, если $p_i = m_i$). Эти наборы $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ однозначно определяют слагаемое из (9).

Чтобы доказать справедливость (9), используется следующее предложение, доказанное методом математической индукции.

Теорема 1.1. *Имеет место тождество*

$$\sum_{\substack{m_i-r_i\leqslant p_i,\\ 0\leqslant l_i\leqslant 1,\\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i+p_i)} \big(v_{x_1^{p_1+r_1-m_1}x_2^{p_2+r_2-m_2}\ldots x_n^{p_n+r_n-m_n}} \times$$

$$\times\, u_{x_1^{m_1-l_1-p_1}x_2^{m_2-l_2-p_2}\ldots x_n^{m_n-l_n-p_n}}\big)_{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}} =$$

$$= vu_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}} + (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(2m_i-r_i)+1} v_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}}u, \quad (10)$$

где сумма в левой части (10) *строится по тому же правилу, что и сумма* (9)*,* n*,* r_i*,* m_i *— фиксированные целые неотрицательные числа,* u*,* v *— функции класса* $C^{(r_1,r_2,\ldots,r_n)}$*.*

В терминах функции Римана построена формула решения задачи Коши, методом интегральных уравнений доказаны существование и единственность решения.

В § 2 для ряда уравнений в дву-, трех- и четырехмерном пространствах построены решения задачи Коши в терминах функции Римана. Ясно, что реализация схемы решения задачи Коши из § 1 в частных случаях требует определенной вычислительной работы. Вместе с тем, возможные приложения метода Римана должны быть связаны именно с конкретными уравнениями в пространствах невысокой размерности. Именно такие уравнения здесь и рассмотрены. Кроме того, разбор конкретных частных случаев уравнения (1) позволяет быстрее понять суть метода.

Ясно, что при исследовании уравнения (1) важным является вопрос построения функции Римана в явном виде. **В главе 2** этот вопрос решается с помощью некоторых видоизменений интегральных уравнений для функции Римана. В § 3 прежде всего изучается возможность построения более простых уравнений для функции Римана, чем (8), для уравнения Бианки. Получены достаточные условия, позволяющие записать интегральное уравнение для функции Римана с одним кратным интегралом. Ясно, что исходя из такого уравнения значительно проще построить функцию Римана, чем из уравнения общего вида (8). Затем, исходя из полученного более простого интегрального уравнения, получены достаточные условия, позволяющие построить для уравнения Бианки функцию Римана в явном виде.

Запишем уравнение Бианки произвольного порядка в виде

$$u_{x_1x_2\dots x_n} + L(u) = 0, \tag{11}$$

$$L(u) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{Q_n^k} a_{q_1\dots q_k} u_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_n}},$$

$$Q_n^k = \{(q_1, \dots, q_n) \mid \{q_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} = \{p \mid 1 \leqslant p \leqslant n\},$$
$$q_1 < \dots < q_k,\, q_{k+1} < \dots < q_n\}.$$

Введем конструкции

$$h_{q_1\dots q_{k-1},q_k} = (a_{q_1\dots q_{k-1}})_{x_{q_k}} + a_{q_1\dots q_{k-1}} a_{q_k} - a_{q_1\dots q_k},$$

взятые по всем упорядоченным наборам $(q_1, \dots, q_k)$, причем считаем, что $a_{q_1\dots q_k} = a_{p_1\dots p_k}$, если $\{q_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\} = \{p_j \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$.

Теорема 3.1. *Пусть* $(r_1, \dots, r_n)$ *— некоторая перестановка* $(1, \dots, n)$ *и*

$$h_{r_{q_1}\dots r_{q_{k-1}},r_{q_k}} \equiv 0, \quad k = \overline{2, n-1}, \quad (q_1, \dots, q_k) \in Q_{k,n}. \tag{12}$$

Тогда интегральное уравнение для функции Римана имеет вид

$$v(x_1, \dots, x_n, x_1^0, \dots, x_n^0) = R_{r_1\dots r_n}(x_1^0, \dots, x_n^0, x_1, \dots, x_n) +$$
$$+ (-1)^n \int_{x_1^0}^{x_1} \dots \int_{x_n^0}^{x_n} R_{r_1\dots r_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1, \dots, x_n) \times$$
$$\times h_{r_1\dots r_{n-1},r_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) v(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1^0, \dots, x_n^0) d\alpha_n \dots d\alpha_1,$$

$$R_{r_1\dots r_n}(x_1, \dots, x_n, x_1^0, \dots, x_n^0) = \exp\Bigg(\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{r_i}}^{x_{r_i}^0} a_{r_i}(x_1, \dots,$$
$$x_{r_i-1}, \alpha_{r_i}, x_{r_i+1}, \dots, x_n) \mid_{x_{r_{i+1}} = x_{r_{i+1}}^0} \dots \mid_{x_{r_n} = x_{r_n}^0} d\alpha_{r_i} \Bigg).$$

На основании этого результата доказано следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Если выполняются условия* (12)*, коэффициенты* a_i *имеют структуру*

$$a_i = a_i^0(x_i) + \omega \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n, \\ j \neq i}} x_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad \omega = const,$$

и $h_{r_1\dots r_{n-1},r_n} = (-1)^n \prod\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \theta_j(x_j)$*, то функция Римана для* (11) *имеет вид*

$$v(x_1,\dots,x_n,x_1^0,\dots,x_n^0) =$$

$$= {}_0F_{n-1}\left(1,\dots,1;(-1)^n \prod_{1\leqslant j\leqslant n} \int_{x_j^0}^{x_j} \theta_j(\alpha_j)d\alpha_j\right) \times$$

$$\times \exp\left(\sum_{i=1}^n \int_{x_i^0}^{x_i} a_i^0(\alpha_i)d\alpha_i + \omega\Big(\prod_{1\leqslant j\leqslant n} x_j - \prod_{1\leqslant j\leqslant n} x_j^0\Big)\right),$$

где ${}_0F_{n-1}(1,\dots,1;\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(1)_k^{n-1}\,k!}\,\sigma^k$ *— обобщенная гипергеометрическая функция,* $(\alpha)_k$ *— символ Похгаммера.*

В работе [14] данное исследование получило дальнейшее развитие: в ней получено обобщение теоремы 3.2.

В § 4 аналогичные результаты получены для уравнений с кратным дифференцированием по одной из переменных. В частности, доказана **теорема 4.1**, согласно которой функция Римана для уравнения

$$\begin{aligned} & u_{x_1x_1x_2\dots x_n} + A_n(x_n)u_{x_1x_1x_2\dots x_{n-1}} + \dots + \\ & \quad + A_2(x_2)u_{x_1x_1x_3\dots x_n} + A_{n-1}(x_{n-1})A_n(x_n)u_{x_1x_1x_2\dots x_{n-2}} + \dots + \\ & \quad + A_2(x_2)A_3(x_3)u_{x_1x_1x_4\dots x_n} + \dots + A_2(x_2)\dots A_n(x_n)u_{x_1x_1} + \\ & \qquad\qquad + \varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n)u = f(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{aligned}$$

с непрерывными коэффициентами имеет вид

$$R(x_1,\dots,x_n;\xi_1,\dots,\xi_n) = \exp\left(\sum_{i=2}^n \int_{\xi_i}^{x_i} A_i(\alpha_i)d\alpha_i\right) \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{x_i}^{\xi_i} \varphi_i(\alpha_i)d\alpha_i\right)^k \frac{(x_1-\xi_1)^{2k}}{(2k)!}.$$

Отметим, что при получении результатов главы 2 существенно использовалось определение функции Римана через интегральное уравнение (8).

В главе 3 рассматриваются задачи с нормальными производными на характеристиках для уравнения Бианки.

Первой известной автору публикацией, где встречаются подобные граничные условия, является работа Л.М. Невоструева [15]. Однако речь там идет о задаче для уравнения смешанного типа, а ситуация с нормальной производной на характеристике носит вспомогательный характер и исследуется лишь в той мере, в которой это необходимо для основной задачи из [15]. Имеется также цикл работ С.С. Харибегашвили, в которых для уравнения Бианки с двумя независимыми переменными, в том числе матричного, изучаются задачи в характеристических и нехарактеристических областях с граничными условиями вида

$$\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = f. \tag{13}$$

Очевидно, если (13) задано на характеристике $x = const$, и (например) $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0$, то это есть граничное условие обсуждаемого вида, представляющее собой как бы предельный случай общей постановки задачи. С.С. Харибегашвили применяет к исследованию задач методы функционального анализа, выделяя лишь случаи однозначной разрешимости (существование единственного решения в определенном функциональном классе).

Таким образом указанные граничные условия в упомянутых работах играют эпизодическую или вспомогательную роль. Предметом специального изучения эта задача стала в работе [16], в которой для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными предложен метод редукции рассматриваемых задач к задаче Гурса. Этот метод позволяет более полно исследовать задачи: не только доказать существование решения, но и записать его либо с помощью резольвент интегральных уравнений Вольтерра (в общем случае), либо в явном виде (в ряде частных случаев). При этом устанавливаются условия не только однозначной разрешимости, но и разрешимости с точностью до определенного количества произвольных констант.

Отметим, что такие задачи не всегда содержательны. В качестве примера рассмотрим трехмерное уравнение

$$u_{xyz} = 0. \tag{14}$$

Поставим для него задачу Гурса следующим образом: найти в параллелепипеде $D = \{0 < x < x_1,\ 0 < y < y_1,\ 0 < z < z_1\}$ непрерывно продолжимое на границу D решение, удовлетворяющее условиям

$$u\big|_X = \varphi_1(y,z), \quad u\big|_Y = \varphi_2(x,z), \quad u\big|_Z = \varphi_3(x,y)\,, \tag{15}$$

где X, Y, Z — грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ соответственно. Проинтегрировав (14) с учетом (15), получим

$$u = \varphi_1(y,z) + \varphi_2(x,z) + \varphi_3(x,y) - \\ - \varphi_1(y,0) - \varphi_2(0,z) - \varphi_3(x,0) + \varphi_1(0,0). \quad (16)$$

При произвольных φ_k можно рассматривать здесь правую часть в качестве структурной формулы решений нашего уравнения подобно тому, как это делается в [8, с. 66] для уравнения $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$. Теперь поставим для (14) задачу с краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_X = \psi_1(y,z), \quad u\big|_Y = 0, \quad u\big|_Z = 0. \quad (17)$$

Если, пользуясь (16), попытаться добиться для u выполнения (17), то придем к требованию $\psi_1(y,z) \equiv 0$, делающему задачу обсуждаемого типа тривиальной. Подобные случаи из рассмотрения исключаются.

Заметим, что появление только что указанных случаев зависит от характера коэффициентов рассматриваемого уравнения. Таким образом, речь идет о выявлении условий на эти коэффициенты, которые обеспечивали бы определенный уровень содержательности рассматриваемых задач.

Перечисленные результаты опубликованы в [24] и [36]. В настоящей диссертации они используются при доказательстве теорем главы 4. Впоследствии указанные результаты были распространены Е.А. Уткиной [12] на случай общего уравнения вида (1).

В работах Т.Д. Джураева, С.Е. Елубаева, Ni Xingtang [17], [18], [19], [20], [21] исследован ряд задач в треугольных областях для уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xy} + au_x + bu_y + cu) = 0, \quad (18)$$

относящегося к одному из канонических видов, указанных в [22].

В 2003 г. В.И. Жегалов впервые рассмотрел для (18) задачу в прямоугольнике, образованном отрезками характеристик $x = const$, $y = const$.

В главе 4 для многомерных аналогов (18) рассмотрены задачи в характеристических параллелотопах.

В § 8 получены достаточные условия, обеспечивающие разрешимость задач в пространствах размерности три и четыре, при этом в формулировках теорем используются результаты главы 3, а также представление решения задачи Гурса для уравнения Бианки в терминах функции Римана. Целью § 9 является распространение результатов § 8 на уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\right)Lu=0, \tag{19}$$

$$Lu\equiv D^\gamma u+\sum_{\alpha<\gamma}a_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)D^\alpha u,$$

где мультииндексы имеют n компонент, $\gamma=(1,1,\ldots,1)$, отношение подчиненности $\alpha<\gamma$ означает, что α получен из γ уменьшением по меньшей мере одной компоненты.

При этом необходима формализация всех рассуждений из § 8, позволяющая получить и сформулировать результаты в пространстве произвольного числа переменных. Сформулируем полученный итоговый результат главы 4.

Пусть $G=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):\ 0<x_i<x_i^1,\, i=\overline{1,n}\}$, $G_i=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):\ 0<x_j<x_j^1,\, j\neq i,\, x_i=0\}$ — части границы G, являющиеся частями плоскостей $x_i=0$. Расположенные внутри G части плоскостей $x_1=x_2,\ \ldots,\ x_1=x_n,\ x_2=x_3,\ \ldots,\ x_{n-1}=x_n$ обозначим соответственно через $M_{12},\ \ldots,\ M_{1n},\ M_{23},\ \ldots,\ M_{(n-1)n}$. Обозначим через e_i единичный мультииндекс, $e_i=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, $\varepsilon_i=1$, $\varepsilon_j=0$, $j\neq i$.

Задача Z_n. Найти в G функцию $u\in C(\overline{G})\bigcap(\bigcap\limits_{i=1}^{n}C^{e_i}(G\bigcup G_i))$, являющуюся в $G\setminus(\bigcup\limits_{i,j}M_{ij})$ регулярным решением уравнения (19) и удовлетворяющую условиям

$$u\Big|_{\overline{G}_i}=\varphi_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n),\quad i=\overline{1,n},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\overline{G}_i}=\psi_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n),\quad i=\overline{1,n}.$$

При этом предполагаем, что выполняются включения

$$a_\alpha\in C^\alpha(\overline{G}),\quad \varphi_i,\,\psi_i\in C^{2\gamma}(\overline{G}_i). \tag{20}$$

Справедлива

Теорема 8.1. *При условиях гладкости* (20) *и*

$$a_\alpha \in C^\beta(\overline{G}_i),\ \alpha_i = 1,\ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}),\ \beta_j = 1,\\ j = \overline{1, n-1},\ i = \overline{1, n},$$

и выполнении равенств

$$\left[\sum_{\alpha_i=1} a_\alpha D^{\alpha - e_i}\psi_i + \sum_{\alpha_i=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_i\right]_{M_{ij}} =$$

$$= \left[\sum_{\alpha_j=1} a_\alpha D^{\alpha - e_j}\psi_j + \sum_{\alpha_j=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_j\right]_{M_{ij}}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n},$$

задача Z_n однозначно разрешима.

В главе 5 изложены результаты, полученные применением методов группового анализа к уравнениям Бианки.

А именно, в § 9 рассмотрено однородное уравнение Бианки третьего порядка

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \tag{21}$$

Известно [13, с. 99–100], что в таком случае алгебра Ли уравнения (21) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где алгебра L^r размерности r образована операторами вида

$$X = \xi^1(x, y, z)\partial_x + \xi^2(x, y, z)\partial_y + \xi^3(x, y, z)\partial_z + \sigma(x, y, z)u\partial_u, \tag{22}$$

а L^∞ — типичная для линейных уравнений абелева подалгебра с оператором $\mu(x, y, z)\partial_u$, где μ — решение уравнения (21). Ясно, что оператор $u\partial_u$ допускается любым уравнением (21), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и считать, что $\sigma(x, y, z)$ определяется в (22) с точностью до постоянного слагаемого.

Из результатов работы [6] следует, что два уравнения вида (21) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа

$$\begin{gathered} H_1 = a_y + ac - d,\ H_2 = a_x + ab - e,\ H_3 = c_x + bc - f,\\ H_4 = b_z + ab - e,\ H_5 = b_y + bc - f,\ H_6 = c_z + ac - d,\\ H_7 = a_{xy} + bd + ce + af - 2abc - g,\\ H_8 = b_{yz} + bd + ce + af - 2abc - g,\\ H_9 = c_{xz} + bd + ce + af - 2abc - g \end{gathered} \tag{23}$$

совпадают для обоих уравнений.

В данном параграфе выведены определяющие уравнения для (21), которые затем записаны в терминах инвариантов Лапласа (то есть в инвариантной форме). Затем вводятся конструкции

$$p_{12} = \frac{H_3}{H_5}, \quad p_{13} = \frac{H_2}{H_4}, \quad p_{23} = \frac{H_1}{H_6}, \tag{24}$$

и

$$\begin{gathered} q_1 = \tfrac{(\ln H_1)_{yz}}{H_1}, \quad q_2 = \tfrac{(\ln H_2)_{xz}}{H_2}, \quad q_3 = \tfrac{(\ln H_3)_{xy}}{H_3}, \\ q_4 = \tfrac{(\ln H_4)_{xz}}{H_4}, \quad q_5 = \tfrac{(\ln H_5)_{xy}}{H_5}, \quad q_6 = \tfrac{(\ln H_6)_{yz}}{H_6}, \\ q_i = \tfrac{(\ln H_i)_{xyz}}{H_i}, \quad i = 7,\, 8,\, 9, \end{gathered} \tag{25}$$

являющиеся аналогами p и q из теоремы Ли-Овсянникова.

Далее выделено восемь классов уравнений вида (21), аналогичных указанным в теореме Ли-Овсянникова, для которых p_{12}, p_{13}, p_{23} и q_4, q_5, q_6 постоянны. При этом рассмотрены только случаи с H_7, H_8, H_9 тождественно равными нулю. Ясно, что переход от уравнений с конструкциями H_7, H_8, H_9 тождественно равными нулю, к уравнениям с ненулевыми H_7, H_8, H_9, приводит, вообще говоря, к уменьшению размерности r допускаемой уравнением алгебры Ли L^r (соответствующие примеры легко построить). Так что с точки зрения отыскания уравнений, допускающих алгебры Ли L^r наиболее высокой размерности, достаточно ограничиться случаями, когда H_7, H_8, H_9 тождественно равны нулю.

Перечислим варианты условий, определяющие указанные классы. Для каждого из перечисленных вариантов уравнения (26) указываются лишь значения инвариантов Лапласа и базисные операторы, определяющие допускаемую уравнением алгебру L^r.

1. $H_2 = H_3 = H_4 = H_5 = 0$, $H_1 = p_{23}$, $H_6 = 1$. Постоянная p_{23} может быть равна нулю. Соответствующее уравнение (представитель класса) допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi^1(x)\partial_x + (Cy + C_1)\partial_y - (Cz - C_2)\partial_z - (C_2 y + C_1 p_{23} z)u\partial_u,$$

где коэффициент $\xi^1(x)$ произволен. Таким образом, допускаемая данным уравнением алгебра L^r бесконечномерна, $r = \infty$.

2. $H_3 = H_5 = 0$, $H_1 = p_{23}$, $H_2 = p_{13}$, $H_4 = H_6 = 1$;

$$\begin{gathered} X_1 = x\partial_x + y\partial_y - z\partial_z, \quad X_2 = \partial_x - p_{13} z u\partial_u, \\ X_3 = \partial_y - p_{23} z u\partial_u, \quad X_4 = \partial_z - (x+y)u\partial_u. \end{gathered}$$

3. $H_1 = p_{23}$, $H_2 = p_{13}$, $H_3 = p_{12}$, $H_4 = H_5 = H_6 = 1$;

$$X_1 = \partial_x - (p_{12}y + p_{13}z)u\partial_u, \quad X_2 = \partial_y - (x + p_{23}z)u\partial_u,$$
$$X_3 = \partial_z - (x + y)u\partial_u.$$

4. $H_2 = H_3 = H_4 = H_5 = 0$, $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$;

$$X = \xi^1(x)\partial_x + (Cy^2 + C_1 y + C_2)\partial_y - (Cz^2 - C_1 z + C_2)\partial_z + \frac{2C}{q_6}(y - p_{23}z)u\partial_u,$$

где коэффициент $\xi^1(x)$ произволен. Допускаемая данным уравнением алгебра L^r бесконечномерна, $r = \infty$.

5. $H_3 = H_5 = 0$, $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2 = \frac{2p_{13}/q_4}{(x+z)^2}$, $H_4 = \frac{2/q_4}{(x+z)^2}$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$;

$$X_1 = x^2\partial_x + y^2\partial_y - z^2\partial_z + 2\left(\tfrac{x}{q_4} + \tfrac{y}{q_6} - \left(\tfrac{p_{23}}{q_6} + \tfrac{p_{13}}{q_4}\right)z\right)u\partial_u,$$
$$X_2 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad X_3 = \partial_x + \partial_y - \partial_z.$$

6. $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2 = \frac{2p_{13}/q_4}{(x+z)^2}$, $H_3 = \frac{2p_{12}/q_5}{(x+y)^2}$, $H_4 = \frac{2/q_4}{(x+z)^2}$, $H_5 = \frac{2/q_5}{(x+y)^2}$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$;

$$X_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z.$$

7. $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2 = p_{13}$, $H_3 = p_{12}$, $H_4 = s_1 = const$, $H_5 = s_2 = const$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$. Здесь постоянные p_{12}, p_{13}, p_{23}, s_1, s_2 могут равняться нулю, но при этом либо одна из постоянных s_1, s_2 равна 1, либо обе. Уравнение допускает алгебру L^3, образованную операторами

$$X_1 = x\partial_x - y\partial_y - z\partial_z, \quad X_2 = \partial_y - \partial_z + (s_1 - s_2)xu\partial_u,$$
$$X_3 = \partial_x - (p_{12}y + p_{13}z)u\partial_u.$$

8. $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2 = p_{13}$, $H_3 = \frac{2p_{12}/q_5}{(x+y)^2}$, $H_4 = 1$, $H_5 = \frac{2/q_5}{(x+y)^2}$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$. Снова постоянные p_{12}, p_{13}, p_{23} могут равняться нулю. Уравнение допускает алгебру L^1, образованную оператором

$$X_1 = \partial_x - \partial_y + \partial_z - (x + p_{13}z)u\partial_u.$$

В процессе исследования возникает вопрос: какое уравнение вида (21) может рассматриваться в качестве трехмерного аналога уравнения Эйлера-Пуассона (то есть имеет близкие групповые свойства)?

Уравнение Эйлера-Пуассона согласно теореме Ли-Овсянникова характеризуется условиями: p и q постоянны, $q \neq 0$. В качестве критерия отбора следует принять, что трехмерный аналог

1) должен допускать алгебру L^r наибольшей конечной размерности,
2) имеет конструкции q_i, $i = 7, 8, 9$, отличные от нуля,
3) коэффициенты уравнения должны иметь достаточно простую структуру, сходную со структурой коэффициентов уравнения Эйлера-Пуассона.

Уравнение, являющееся, в соответствии с требованиями 1)–3), трехмерным аналогом уравнения Эйлера-Пуассона, имеет вид

$$u_{xyz} - \frac{2p_{23}}{q_6(y+z)}u_{xy} - \frac{2}{q_6(y+z)}u_{xz} + \frac{4p_{23}}{q_6^2(y+z)^2}u_x + \frac{6}{q_7(x+y+z)^3}u = 0.$$

Это уравнение допускает алгебру L^2, образованную операторами

$$X_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad X_2 = \partial_y - \partial_z.$$

В § 10 построены инварианты Лапласа для уравнения Бианки четвертого порядка

$$\begin{aligned} &u_{x_1x_2x_3x_4} + a_1u_{x_2x_3x_4} + a_2u_{x_1x_3x_4} + a_3u_{x_1x_2x_4} + a_4u_{x_1x_2x_3} + \\ &\quad + a_{12}u_{x_3x_4} + a_{13}u_{x_2x_4} + a_{14}u_{x_2x_3} + a_{23}u_{x_1x_4} + a_{24}u_{x_1x_3} + a_{34}u_{x_1x_2} + \\ &\qquad + a_{123}u_{x_4} + a_{124}u_{x_3} + a_{134}u_{x_2} + a_{234}u_{x_1} + a_{1234}u = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

Уравнение (26) имеет 28 инвариантов Лапласа, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{gathered} h_{i,j} = a_{ix_j} + a_ia_j - a_{ij}, \\ h_{i,jk} = a_{ix_jx_k} + a_ia_{jk} + a_ja_{ik} + a_ka_{ij} - 2a_ia_ja_k - a_{ijk}, \\ h_{i,jkl} = a_{ix_jx_kx_l} + a_ia_{jkl} + a_ja_{ikl} + a_ka_{ijl} + a_la_{ijk} + \\ + a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk} - 2a_ia_ja_{kl} - 2a_ia_ka_{jl} - \\ -2a_ia_la_{jk} - 2a_ja_ka_{il} - 2a_ja_la_{ik} - 2a_ka_la_{ij} + \\ +6a_ia_ja_ka_l - a_{ijkl}, \quad \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}, \quad j < k < l. \end{gathered}$$

Здесь коэффициенты, различающиеся порядком следования индексов, считаем равными (например, $a_{123} = a_{231}$). Два уравнения вида (26) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда у них равны все соответствующие инварианты Лапласа. Далее получены определяющие уравнения, записанные в терминах указанных инвариантов, а также построены классы уравнений Бианки четвертого порядка, аналогичные рассмотренным в § 9.

Материал главы 5 можно использовать вместе с результатами главы 2 для отыскания случаев построения функции Римана в явном виде.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Разработан метод Римана решения задачи Коши для уравнений вида (1) в общем случае.

2. Выделены уравнения, допускающие построение функции Римана в явном виде.

3. Для уравнений Бианки получены интегральные уравнения, связывающие граничные значения искомой функции и ее нормальных производных первого порядка на характеристиках.

4. Выведены условия однозначной разрешимости граничных задач для факторизованных гиперболических уравнений.

5. Построены инварианты Лапласа уравнения Бианки четвертого порядка. На основе определяющих уравнений, записанных в терминах инвариантов Лапласа, выделены некоторые классы уравнений Бианки третьего и четвертого порядков, аналогичные известным классам гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными, допускающих алгебры Ли наибольшей размерности.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному консультанту профессору Валентину Ивановичу Жегалову за внимание к работе и ценные советы.

Литература

1. Фаге, М.К. Задача Коши для уравнения Бианки / М.К. Фаге // Матем. сб. — 1958. — Т. 45, № 3. — С. 281–322.

2. Фаге, М.К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной / М.К. Фаге // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1958. — Т. 7. — С. 227–268.

3. Фаге, М.К. Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов / М.К. Фаге, Н.И. Нагнибида. — Новосибирск: Наука, 1987. — 290 с.

4. Бондаренко, Б.А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных / Б.А. Бондаренко. — Ташкент: Фан, 1987. — 146 с.

5. Солдатов, А.П. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка / А.П. Солдатов, М.Х. Шхануков // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 297, № 3. — С. 547–552.

6. Джохадзе, О.М. Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных / О.М. Джохадзе // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 1. — С. 58–68.

7. Векуа, И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И.Н. Векуа. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948. — 296 с.

8. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

9. Жегалов, В.И. Трехмерный аналог задачи Гурса / В.И. Жегалов // Неклассические задачи и уравнения смешанного типа. — Новосибирск, 1990. — С. 94–98.

10. Волкодавов, В.Ф. Задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка / В.Ф. Волкодавов, А.В. Дорофеев // Изв. вузов. Математика. — 1993. — № 11. — С. 6–8.

11. Волкодавов, В.Ф. Основные краевые задачи для одного уравнения третьего порядка в трехмерной области специального вида / В.Ф. Волкодавов, И.Н. Родионова // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 8. — С. 1459–1461.

12. Уткина, Е.А. Характеристические граничные задачи для линейных уравнений высокого порядка со старшими частными производными: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / Е.А. Уткина. — Казань, 2011. — 26 с.

13. Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

14. Кощеева, О.А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве / О.А. Кощеева // Изв. вузов. Математика. — 2008. — № 9. — С. 40–46.

15. Невоструев, Л.М. Задача Неймана для общего уравнения Лаврентьева–Бицадзе / Л.М. Невоструев // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9, № 2. — С. 320–324.

16. Zhegalov, V.I. Relation between the Boundary Values of Goursat Problem and the Normal Derivatives / V.I. Zhegalov // Conditionally Well-Posed Problems. — Moscow: TVP Sc. Publ. — 1994. — P. 346–349.

17. Елубаев, С.Е. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа / С.Е. Елубаев // Сибирский матем. журнал. — 1961. — Т. 2, № 4. — С. 510–519.

18. Елубаев, С.Е. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка с двумя независимыми переменными / С.Е. Елубаев // Вестник АН Казахской ССР. — 1962. — № 6. — С. 54–62.

19. Джураев, Т.Д. Об уравнениях смешанно-составного типа / Т.Д. Джураев // Изв. АН Узбекской ССР. Серия физ.-мат. науки. — 1961. — № 6. — С. 3–14.

20. Джураев, Т.Д. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанно-составного типа / Т.Д. Джураев // Сибирский матем. журнал. — 1963. — Т. 4, № 4. — С. 775–787.

21. Ni Xingtang. Boundary value problem with three characteristic supports for linear totally hiperbolic equation of the third order / Ni Xingtang // Kexue tongbao. — 1980. — V. 25, № 5. — P. 361–369.

22. Джураев, Т.Д. О канонических видах уравнений с частными производными третьего порядка / Т.Д. Джураев, Я. Попёлек // Успехи матем. наук. — 1989. — Т. 44, вып. 4. — С. 237–238.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК РФ для публикации результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

23. Миронов, А.Н. О построении функции Римана для одного уравнения в n-мерном пространстве / А.Н. Миронов // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 7. — С. 78–80.

24. Жегалов, В.И. Трехмерные характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 6. — С. 833–836.

25. Миронов, А.Н. О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка / А.Н. Миронов // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 12. — С. 1698–1701.

26. Жегалов, В.И. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов // Изв. вузов. Математика. — 2002. — № 5. — С. 23–30.

27. Миронов, А.Н. К задаче Коши в четырехмерном пространстве / А.Н. Миронов // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 6. — С. 844–847.

28. Миронов, А.Н. О методе Римана решения задачи Коши / А.Н. Миронов // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 2. — С. 34–44.

29. Миронов, А.Н. Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в R^n / А.Н. Миронов // Сибирский матем. журнал. — 2006. — Т. 47, № 3. — С. 584–594.

30. Миронов, А.Н. Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка / А.Н. Миронов // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 8. — С. 1144–1149.

31. Миронов, А.Н. О построении функции Римана для одного уравнения со старшей частной производной пятого порядка / А.Н. Миронов // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 2. — С. 266–272.

32. Жегалов, В.И. К пространственным граничным задачам для гиперболических уравнений / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 364–371.

33. Миронов, А.Н. О функции Римана для одного уравнения в n-мерном пространстве / А.Н. Миронов // Изв. вузов. Математика. — 2010. — № 3. — С. 23–27.

34. Миронов, А.Н. Применение метода Римана к факторизованному уравнению в n-мерном пространстве / А.Н. Миронов // Изв. вузов. Математика. — 2012. — № 1. — С. 54–60.

35. Миронов, А.Н. Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка / А.Н. Миронов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, вып. 3. — С. 389–400.

Публикации в других изданиях.

36. Жегалов, В.И. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов. — Казань: Изд. Казанского математического общества, 2001. — 226 с.

37. Миронов, А.Н. О методе Римана для одного уравнения четвертого порядка со старшей частной производной / А.Н. Миронов // Вестник СамГТУ. Сер. “Математическая”. — 2003. — Вып. 22. — С. 190–194.

38. Миронов, А.Н. О построении функций Римана для двух уравнений со старшими частными производными / А.Н. Миронов // Вестник СамГТУ. Сер. “Физ.-мат. науки”. — 2008. — № 2. — С. 49–59.