На правах рукописи

Кусова Елена Валерьевна

О ГЕОМЕТРИИ СЛАБО КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2013

Работа выполнена на кафедре геометрии ФГБОУВПО «Московский педагогический государственный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрия Московского Педагогического Государственного Университета Кириченко Вадим Федорович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией Института проблем управления им. В.А. Трапездникова РАН Кушнер Алексей Гурьевич кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Высшей и прикладной математики Смоленского филиала МИИТ Банару Михаил Борисович
Ведущая организация:	Тверской Государственный Университет

Защита состоится 21 марта 2013 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 в ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «31» января 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,

кандидат физико-математических наук Липачев Е. К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Данная работа посвящена исследованию почти контактных метрических структур. Это специальные метрические дифференциально-геометрические структуры обобщающие контактные структуры, порождаемые дифференциальными 1-формами максимального ранга.

Изучение контактных структур и их обобщения – почти контактных структур началось в 50-х годах прошлого века. В 1953 году С. Черн [1] показал, что многообразие M^{2n+1} с фиксированной контактной формой $\eta : \eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ в каждой точке многообразия допускает G-структуру со структурной группой $U(n) \times \{e\}$.

В 1960 году С. Сасаки в работе [2] показал, что многообразие, допускающее G-структуру со структурной группой $U(n) \times \{e\}$, внутренним образом определяет тройку тензоров (Φ, ξ, η), названную Дж. Греем [3] почти контактной структурой, тензоры которой обладают свойствами $\eta(\xi) = 1, \Phi(\xi) = 0, \eta \circ \Phi = 0, \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$. Более того, С. Сасаки показал, что на таком многообразии M всегда существует положительно определенная метрика $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, такая что $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y); \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $\eta(X) = \langle X, \xi \rangle$, дополняющая почти контактную структуру (Φ, ξ, η) до метрической почти контактной структуры. Здесь векторное поле ξ называется характеристическим вектором, Φ – эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$ называемый структурным эндоморфизмом, а 1-форма η – контактной формой структуры.

Почти контактные и почти контактные метрические многообразия исследовались не только зарубежными авторами, такими как Д. Блэр [4], С. Танно [5], И. Исихара [6], но и отечественными, например Л. Е. Евтушик [7], В. Ф. Кириченко [8].

Классификация почти контактных метрических структур была проведена

[1]Chern S. Pseudo-groups continus infinis/ S.Chern //Strasbourg. Colloq. Ihternat. Centre nat. rech. scient. 52.- 1953.- P. 119-136.

[2]Sasaki S. On the integrability of almost contact structures / S. Sasaki, G.J. Hsu// Tôhoku Math. J.14.- 1962.- P.167-176.

[3]Gray J. W. Some global properties of contact structures /Gray J. W.// Ann. Math.- 1959.- Vol. 69.- N. 2.- P. 421-450.

[4]Blair D. E. Two remarks on contact metric structures/ D. E. Blair // Thoku Math. J., 1977.- є 3.- P. 319-324.

[5]Tanno S. Quasi-Sasakian structures of rank 2p+l/ S. Tanno// J.Differential Geom.- 1971.- V. 5. P.317-324.

[6]Ichihara I. Anti-invariant submanifolds of a Sasaki space form/ I. Ichihara // Kodai Match. J.- 1979.- V. 2.- P 171-186.

[7]Евтушик Л. Е. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях./ Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков.// Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.- М.: ВИНИТИ, 1979.- Т. 9.- С. 5-246.

[8]Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В. Ф. Кириченко.// Москва, МПГУ 2003.

впервые в работах Д. Чинья и Дж. Марреро [9], Д. Чинья и С. Гонзалес [10], В. Ф. Кириченко [11]. Были определены 2048 различных классов почти контактных метрических структур. На сегодняшний день изучается небольшое число этих классов, вызывающих интерес по тем или иным соображениям.

Почти контактные метрические структуры, кроме того, являются f-структурами [12] и тесно связаны с почти эрмитовыми структурами [13]. Важным примером почти контактных метрических структур, в значительной мере определяющим их роль в дифференциальной геометрии, служит структура, индуцируемая на ориентированной гиперповерхности N многообразия M, снабженного почти эрмитовой структурой (J, g). В частности, такая структура индуцируется на нечетномерной сфере S^{2n-1}, рассматриваемой как гиперповерхность в овеществлении пространства $\mathbb{C}^n$. Это один из самых интересных примеров и, более того, он является исторически важным, так как был первым конкретным примером такой структуры. Другой интересный тип примеров почти контактных (метрических) структур дают главные расслоения со структурной группой $T^1 = SO(2, \mathbb{R})$ (главные T^1-расслоения) с фиксированной линейной связностью над почти комплексным (соответственно, почти эрмитовым) многообразием [14], [15].

В дальнейшем исследования почти контактных метрических многообразий были представлены многочисленными работами разными по методам и подходам. Несмотря на полную классификацию почти контактных метрических многообразий, исследованию подвергались лишь некоторые из них. Так, наиболее интересными для нас являются такие подклассы почти контактных метрических многообразий, как слабо косимплектические структуры, точнейше косимплектические структуры и другие.

Кроме изучения самих классов почти контактных метрических структур современная геометрия занимается и изучением преобразований этих

[9] Chinea D., Marrero J. C. Classifications of almost contact metric structures./ D. Chinea, J. C. Marrero.// Rev. Roumaine Math. Pures Appl.- 1992.- V. 37.- P. 199-212.

[10] Chinea D. Classification of almost contact metric structures/D. Chinea, C. Gonzalez.// Annali di Matematica pura ed applicata (IV).V. CLVI.- 1990.- P.15-36.

[11] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В. Ф. Кириченко.// Москва, МПГУ 2003.

[12] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В. Ф. Кириченко.// Москва, МПГУ 2003.

[13] Ogiue K. On fibering of almost contact manifolds/ K.Ogiue.// Kodai Math. Semin Repts. 17. - No 1. - 1965. - P. 53-62.

[14] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В. Ф. Кириченко // Москва, МПГУ 2003.

[15] Кобаяши Ш., Номидзу К. Основания дифференциальной геометрии./ Ш. Кобаяши, К. Номидзу.// Москва, Наука. 1981. Т 1.

структур. Так, большой интерес вызывают конформные преобразования почти контактных метрических структур. Исследованием этих преобразований занимались Д. Чиней и Дж. Марреро [16], [17]. Под конформным преобразованием почти контактной метрической структуры (Φ, ξ, η, g) они понимали преобразование вида: $\widetilde{\Phi} = \Phi$; $\widetilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta$; $\widetilde{\xi} = e^{\sigma}\xi$; $\widetilde{g} = e^{-2\sigma}g$, где σ – гладкая функция на многообразии.

Таким образом, приведенный обзор исследований показывает насколько эти вопросы интересны для современной геометрии.

Отправной точкой к активному развитию теории контактных структур и их естественного обобщения - почти контактных структур - послужили появившиеся в 50-х годах XX века работы С. Чженя [18], Дж. Грея [19], [20], [21] В. Бутби и Х. Вана [22]. С тех пор уже практически полвека эта теория является предметом пристального внимания геометров. Наиболее полная картина диапазона исследований контактных и почти контактных многообразий с точки зрения дифференциально-геометрических структур представлена в работах [23], [24], [25]. Такая заинтересованность данной темой среди современных исследований в дифференциальной геометрии обусловлена ее богатым внутренним содержанием, а также многочисленными приложениями в современной математической физике, в частности, в классической и квантовой механике. Есть еще одно важное обстоятельство изучения почти контактных метрических структур: они являются нечетномерными аналогами почти эрмитовых структур в эрмитовой геометрии, которая традиционно

[16] Chinea D. Conformal changes of almost contact metric structures./ D. Chinea, J. C. Morrero.// Riv. mat. Univ. Parma.- 1992.- 1.- P.19-31.

[17] Chinea D. Conformal changes of almost cosymplectic manifolds./ D. Chinea, J. C. Morrero.// Rend. mat. appl. - 1992. - 12, - є4, - P. 849-867.

[18] Chern S. S. Pseudo-groupes continus infinis/ S. S. Chern.// Colloqe de Geometrie Differentielle.- Strasbourg, 1953.- P. 119-136.

[19] Gray J. W. A theory of pseudo groups with applications to contact structures: Thesis./ J. W. Gray.// Stanford Univ.- 1957. Tech. Rep. ONR.

[20] Gray J. W. Contact structures./J. W. Gray.// Abst. short com. Int. Congress Math. in Edinburgh. - Edinburgh: Univ. Edinburgh, 1958.- P. 113.

[21] Gray J. W. Some global properties of contact structures./J. W. Gray.// Ann. Math.- 1959.- Vol. 69.- N. 2.- P. 421-450.

[22] Boothby W. , Wang H. C. On contact manifolds./ W. Boothby, H. C. Wang. // Ann. of Math.- 1958.- 2nd Ser.- Vol. 68.- N. 3.- P. 721-734.

[23] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях./ В. Ф. Кириченко.// Москва, МПГУ 2003.

[24] Широков А. П. Структуры на дифференцируемых многообразиях./ А. П. Широков.// Итоги науки и техники. Серия Алгебра. Топология. Геометрия. Фундаментальные направления. Т.6. Алгебра. Топология. Геометрия.- М.: ВИНИТИ, 1969.- С. 127-188.

[25] Широков А. П. Структуры на дифференцируемых многообразиях./ А. П. Широков.// Итоги науки и техники. Серия Алгебра. Топология. Геометрия. Фундаментальные направления. Т.11. Алгебра. Топология. Геометрия.- М.: ВИНИТИ, 1974.- С. 153-208.

является предметом интенсивного изучения в дифференциальной геометрии.

После того, как в 1980 году вышла работа А. Грея и Л. Хервеллы [26] о классификации почти эрмитовых структур, перед геометрами возникла естественная задача о систематизации классов почти контактных метрических структур. По этой проблеме вышло несколько работ разных авторов, но наиболее интересной оказалась совместная работа Д. Чинеи и Х. Марреро [27]. Для классификации указанных структур они изучили представление группы $G = U(n) \times \{1\}$ на некотором специальном пространстве тензоров с определенными свойствами симметрии. Но геометрами с течением времени выделялись новые классы почти контактных метрических структур, поэтому более прозрачным решением проблемы их систематизации стала вышедшая в 2003 году работа В. Ф. Кириченко [28]. В этой работе автор предложил "контактный"аналог классификации Грея-Херveллы для почти контактных метрических структур и получил удобный аналитический критерий принадлежности структуры соответствующему классу. В. Ф. Кириченко определил число таких классов, которое оказалось практически необозримым ($2^{11} = 2048$; внутри классов естественным образом можно определять подклассы).

Слабо косимплектические структуры впервые, по-видимому, были рассмотрены Проппе [29], а затем систематически изучались сначала Блэром [30], а затем Блэром и Шоуерсом [31], которые впервые ввели также понятие точнейше косимплектической структуры. Понятие слабо косимплектической структуры является одним из наиболее интересных обобщений понятия косимплектической структуры и является контактным аналогом понятия приближенно келеровой структуры в эрмитовой геометрии. Многие современные геометры изучают слабо косимплектические структуры, а

---

[26] Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants./ A. Gray, L. M. Hervella.// Ann. Math. Pure end Appl.- 1980.- Vol. 123.- N. 4.- P. 35-58.

[27] Chinea D., Marrero J. C. Classifications of almost contact metric structures./ D. Chinea, J. C. Marrero.// Rev. Roumaine Math. Pures Appl. - 1992.- V. 37.- P. 199-212.

[28] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях./ В. Ф. Кириченко.// Москва, МПГУ 2003.

[29] Proppe H. Thesis, — Mc Gill University, 1969.

[30] Blair D. E. Almost contact manifolds with Killing structure tensors./ D. E. Blair.// Pacific J. Math 39, $N^{\underline{o}}$ 2 (1971), 285-292.

[31] Blair D. E., Showders D. K. Almost contact manifolds with Killing structure tensors./ D. E. Blair, D. K. Showders // J.Different Geom. - 1974 - V.9.-P.577-582.

именно М. Б. Банару [32], [33], [34], [35] и Эндо Х.[36], [37], [38].

Объект исследования — слабо косимплектические многообразия.

Выделим цели диссертационного исследования.

1. Получить структурные уравнения слабо косимплектических многообразий, изучить строение спектра тензора Римана — Кристоффеля в терминах структурных тензоров на пространстве присоединенной G-структуры.

2. Получить тождества в терминах структурных тензоров, которым удовлетворяет тензор Римана — Кристоффеля на их основе выделить и изучить наиболее интересные классы таких многообразий.

3. Изучить основные конформные инварианты слабо косимплектических многообразий.

4. Исследовать вопрос об интегрируемости слабо косимплектических структур.

В соответствии с целью диссертационного исследования поставлены следующие основные задачи:

1. Получить полную группу структурных уравнений слабо косимплектических структур и на их основе изучить строение компонент тензоров Римана — Кристоффеля, Риччи и скалярной кривизны.

2. Получить новые тождества в терминах структурных тензоров, которым удовлетворяет тензор Римана — Кристоффеля. На их основе выделить и изучить наиболее интересные классы слабо косимплектических многообразий.

---

[32] Banaru M. On nearly-cosymplectic hypersurfaces in nearly-Kahlerian manifolds./ M. Banaru.// Studia Univ."Babes-Bolyai". Math. Cluj-Napoca. V.47.3. 2002.

[33] Банару М. Б. О типовом числе слабо косимплектических гиперповерхностей приближенно келеровых многообразий./ М. Б. Банару. // Фундаментальная и прикладная математика. Т.8 Вып.2.2002. С.357-364.

[34] Банару М. Б. О геометрии слабо косимплектических гиперповерхностей NK-многообразий./ М. Б. Банару. // Труды Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Ростов-на-Дону. 2002. С.18-19.

[35] Banaru M. On some almost contact metric hypersurfaces of nearly Kaehlerian manifolds./ M. Banaru.// Communications of the 20th Conferens on Applied and Industrial Mathematics Dedicated to Academician Mitrofan M Ciobanu. Chisinau, August 22-25, 2012. P.16-17

[36] Endo H. On the curvature tensor of nearly cosymplectic manifolds of constant Φ-section curvature./ H. Endo.// An. Stin. Univ. "Al. I. Cuza". Iasi. T. LI. є2.2005. P.439-454

[37] Endo H. Remarks on nearly cosymplectic manifolds of constant Φ-section curvature with a submersion of geodesic fibres./ H. Endo.// Tensor. N.S.V.66.2005. P.26-39

[38] Fueki S., Endo H. On conformally flat nearly cosymplectic manifolds./ S. Fueki, H. Endo.// Tensor. N.S.V.66.2005. P.305-316.

3. Получить и изучить, на основе полученных компонент тензора Римана — Кристофеля, компоненты тензора Вейля. На их основе изучить конформно инвариантные свойства слабо косимплектических многообразий.
4. Получить условия интегрируемости слабо косимплектических структур.
5. Получить основные конформные инварианты слабо косимплектических структур.

Новизна результатов. Основные результаты данной диссертационной работы являются новыми. Эти результаты решают поставленные в исследовании основные задачи, а именно:

1. На пространстве присоединенной G-структуры получена полная группа структурных уравнений слабо косимплектических структур и изучено строение компонент тензоров Римана — Кристоффеля, Риччи и скалярной кривизны.
2. Рассмотрены классы кривизны CR_1, CR_2 и CR_3. Найдены условия, при выполнении которых изучаемые структуры будут принадлежать этим классам.
3. Найдены специальные дополнительные свойства симметрии тензора Римана — Кристоффеля.
4. На основе специальных дополнительных свойств симметрии тензора Римана — Кристоффеля введены классы слабо косимплектических структур.
5. Изучен геометрический смысл обращения в нуль структурных тензоров слабо косимплектических структур.
6. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых слабо косимплектическая структура является интегрируемой.
7. Найдены конформно инвариантные свойства слабо косимплектических многообразий.
8. Доказано, что если при конформном преобразовании структуры слабо косимплектическая структура остается слабо косимплектической, то свойство слабо косимплектического многообразия быть точнейше косимплектическим является конформно инвариантным.

Методы исследования.

Результаты диссертационного исследования получены систематическим использованием современной версии метода подвижного репера, а именно метода присоединенных G-структур. Суть метода заключается в изучении дифференциально-геометрических свойств структур на естественным образом присоединенной к многообразию с изучаемой структурой главного расслоения, которое рассматривается как подрасслоение расслоения всех комплексных реперов со структурной группой G над этим многообразием. Это подрасслоение называется G-структурой. В изучении отдельных вопросов использовался метод инвариантного исчисления Кошуля и аппарат классического тензорного анализа.

Теоретическое и прикладное значение работы. Диссертационная работа носит теоретический характер. Все полученные в ней результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения слабо косимплектических структур, в соответствующих разделах дифференциальной геометрии и в направлении ее естественных контактов с математической физикой. Так же теоретический материал, который был получен при изучении слабо косимплектических структур, имеет прикладной характер для решения дифференциальных уравнений Монжа-Ампера [39], [40]. Кроме того, данная работа может быть использована при чтении спецкурсов по близкой тематике, для написания дипломных и курсовых работ.

Апробация работы. Основные результаты настоящего исследования докладывались и обсуждались:

- научно-исследовательский семинар по дифференциальной геометрии математического факультета МПГУ (руководитель семинара - доктор физико-математических наук, профессор В. Ф. Кириченко);
- VII молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения – 2008"(г. Казань, 30 ноября - 3 декабря 2008 г);
- VI молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения – 2007"(с 16 декабря по 19 декабря 2007 г);
- 40 Всероссийская молодежная школа-конференция "Проблемы

[39]Kushner A.G. Almost product structures and Monge-Ampere equations./ A.G.Kushner.// Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 23 (2006) 151-181

[40]Чиж О.П. Контактная геометрия гиперболических уравнений Монжа-Ампера. О.П.Чиж.// Весцi Ан. Беларусi, Сер.физ-мат. н.- $N^{\underline{0}}$ 4 (1998), с.52-56

теоретической и прикладной математики"(Екатеринбург, 26 января—30 января 2009 года);

- международная конференция "Международные Колмогоровские чтения – VII "(г. Ярославль, май 2009 г.);

- международная конференция "Геометрия в Одессе – 2008"(г. Одесса, май 2008 г.);

- конференция "Геометрия в Астрахани – 2008"(август, 2008 г.),

- научный семинар кафедры геометрии под руководством доктора физико-математических наук, профессора В.В. Шурыгина в Казанском государственном университете (Казань, октябрь 2012 г.)

- научно-практическая конференция "Женщины – математики"на математическом факультете МПГУ (Москва, март 2012 г.),

- геометрический семинар кафедры функционального анализа и геометрии Тверского Государственного Университета, руководитель семинара - доктор физико-математических наук, профессор А. М. Шелехов (декабрь 2011 г.);

- международная молодежная школа-конференция "Геометрия. Инварианты. Управление"(г. Москва, 17 - 21 декабря 2012 г.).

Публикации. Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 10 работах, в том числе 2 из них опубликованы в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований. 1 работа принята в печать в журнале, рекомендованном Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований. В работах, написанных в соавторстве с научным руководителем, В. Ф. Кириченко принадлежат постановка задачи и историческая часть введения. Е. В. Кусовой принадлежит доказательство основных и вспомогательных утверждений.

Структура диссертации. Основное содержание диссертации изложено на 100 страницах. Диссертация состоит из введения, четырех глав, состоящих из 15 параграфов, заключения и списка литературы содержащего 73 наименований работ отечественных и зарубежных авторов. Нумерация параграфов производится двумя символами, а нумерация результатов производится тремя символами. Например, теорема 1.2.3 означает теорему 3 из второго параграфа главы 1.

Краткое содержание основного текста диссертации.

Во Введении обосновывается актуальность темы, представляется исторический обзор по развитию тематики, формулируются основные цели и задачи диссертационного исследования, излагаются основные результаты, полученные в работе. Дается реферативный обзор диссертационной работы.

В главе первой даны предварительные сведения, носящие в основном реферативный характер.

В первом параграфе дается определение почти контактной метрической структуры; задается пара взаимно дополнительных фундаментальных распределений $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ и пара проекторов на эти распределения, l и m соответственно; описывется построение $G-$структуры (со структурной группой $U(n)$, состоящая из адаптированных почти эрмитовой структуре реперов, то есть А-реперов). Вычислены компоненты оператора структуры и метрического тензора в А-репере. Дается определение слабо косимплектической (nearly cosymplectic) структуры.

Выводится первая группа структурных уравнений слабо косимплектических структур.

Теорема 1.1.1 Первая группа структурных уравнений слабо косимплектических структур имееет вид:

$$
\begin{aligned}
d\omega^a &= -\omega^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \frac{3}{2}C^{ab}\omega_b \wedge \omega;\\
d\omega_a &= \omega^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{3}{2}C_{ab}\omega^b \wedge \omega;\\
d\omega &= C^{bc}\omega_b \wedge \omega_c + C_{bc}\omega^b \wedge \omega^c.
\end{aligned}
$$

Замечание 1.1.2 Эти системы функций определяют тензоры B и C, называемые *первым и вторым структурным тензором Кириченко* соответственно. Из определения слабо косимплектических структур следует, что $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$, $\{C^{ab}\}$, $\{C_{ab}\}$ кососимметричны.

Во втором параграфе находится вторая группа структурных уравений слабо косимплектических структур и дополнительные тождества. Доказываются соответственные теоремы.

Теорема 1.2.1 На пространстве присоединненой G-структуры выполняется соотношение:

$$C^{c[b}A^{a]g}_{cd} = \frac{3}{2}C_{dc}C^{c[b}C^{a]g}.$$

В этом параграфе дается определение тензора голоморфной секционной кривизны слабо косимплектического многообразия.

Теорема 1.2.2 На пространстве присоединенной G-структуры слабо косимплектического многообразия выполняются следующие тождества:

1. $B^{abcd}B_{dft} = 0$ - *первое фундаментальное тождество*;
2. $A^{ac}_{b[d}B_{gh]c} = 2B^{atc}B_{tb[d}B_{gh]c}$ - *второе фундаментальное тождество.*

Теорема 1.2.3 Структурные уравнения слабо косимплектических структур на пространстве присоединенной G-структуре имеют вид:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \frac{3}{2}C^{ab}\omega_b \wedge \omega;$$
$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^c \wedge \omega^b + \frac{3}{2}C_{ab}\omega^b \wedge \omega;$$
$$d\omega = C^{bc}\omega_b \wedge \omega_c + C_{bc}\omega^b \wedge \omega^c;$$
$$d\omega^a_b = -\omega^a_c \wedge \omega^c_b + [2B^{ahc}B_{hbd} - A^{ac}_{bd} + \frac{3}{2}C^{ac}C_{db}]\omega^d \wedge \omega_c,$$

где $\{A^{ad}_{bc}\}$ — система функций на пространстве присоединенной G-структуры, задающая на тензор, называемый *структурным тензором третьего рода* или *тензором голоморфной секционной кривизны* (короче, HS-кривизны).

В третьем параграфе дается определение первой канонической связности.

Теорема 1.3.1 В первой канонической связности ковариантные производные тензорных полей Φ, ξ, η, B, C слабо косимплектической структуры равны нулю.

Во второй главе находятся основные тензоры на слабо косимплектическом многообразии.

В первом параграфе дается определение тензора кривизны римановой связности, а именно тензора Римана — Кристоффеля. На пространстве расслоения реперов найдены компоненты этого тензора. Достаточно вычислить несколько компонент, а именно:

$$R_{abcd} = -2B_{ab[cd]} + C_{a[d}C_{c]b} + C_{ab}C_{cd};$$
$$R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 2B^{abg}B_{gcd} + C^{ab}C_{cd};$$
$$R_{\hat{a}0b0} = -2C^{ac}C_{cb};$$
$$R_{\hat{a}bc\hat{d}} = B^{agd}B_{gbc} - A^{ad}_{bc} + \frac{1}{2}C^{ad}C_{cb}$$

Замечание 2.1.1 Остальные компоненты тензора Римана — Кристоффеля получаются с учетом стандартных свойств симметрии и вещественности этого тензора либо равны нулю.

Во втором параграфе описаны классические свойства симметрии тензора Римана — Кристоффеля, которые были даны А.Грейем для почти эрмитовой структуры. Им введена классификация на основе этих свойств. По аналогии рассмотрены их контактные аналоги для почти контактных метрических многообразий.

В третьем параграфе исследована принадлежность слабо косимплектических многообразий тому или иному классу CR_1, CR_2, CR_3:

Теорема 2.3.1 Всякое слабо косимплектическое многообразие является многообразием класса CR_3

Теорема 2.3.2 $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ — слабо косимплектическая структура класса CR_2 тогда и только тогда, когда

$$B_{ab[dc]} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} C_{ab} & -C_{c]b} \\ C_{a[d} & C_{cd} \end{vmatrix}$$

Даетя определение косимплектической, точнейше косимплектической, собственной слабо косимплектической структуры.

Теорема 2.3.3 Пусть $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ — слабо косимплектическая структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) S — структура класса CR_1;

2) Многообразие M локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

3) Многообразие M косимплектическое.

В четвертом параграфе найдены дополнительные свойства симметрии тензора кривизны слабо косимплектического многообразия, которые назовем первым и вторым специальным свойством кривизны.

Теорема 2.4.2 Тензор Римана — Кристоффеля на слабо косимплектическом многообразии обладает первым специальным свойством симметрии:

$$\eta \circ R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)(\Phi^2 Z) = \eta \circ R(\Phi X, \Phi Y)(\Phi^2 Z) - \eta \circ R(\Phi^2 X, \Phi Y)(\Phi Z) - \\ - \eta \circ R(\Phi X, \Phi^2 Y)(\Phi Z);$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.□

На основе этих специальных свойств предложена классификация слабо косимплектических многообразий, обладающих тем или иным свойством, а именно $Y_1 - Y_3$.

Теорема 2.4.3 Всякая слабо косимплектическая структура является структурой класса Y_3.

Теорема 2.4.4 S — слабо косимплектическая структура класса Y_2, тогда и только тогда, когда S — косимплектическая структура.

Теорема 2.4.5 S — слабо косимплектическая структура класса Y_1, тогда и только тогда, когда многообразие M локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.

Пятый параграф посвящен нахождению тензора Риччи и скалярной кривизны слабо косимплектического многообразия. На пространстве присоединенно G-структуры найдены компоненты этого тензора и вычислена скалярная кривизна.

Лемма 2.5.1 Пусть $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$—слабо косимплектическая структура. Тогда $C = C^{ab}C_{ab}$—неотрицательная константа. При этом $C = 0$ тогда, когда S—точнейше косимплектическая структура.

Теорема 2.5.1 Если М — слабо косимплектическое многообразие Эйштейна, то оно является точнейше косимплектическим многообразием.

Замечание 2.5.1 Заметим, что если многообразие имеет $\varepsilon = 0$, то оно будет скалярно-плоским [67].

Теорема 2.5.3 Собственное полное Эйнштейново слабо косимплектическое многообразие М с положительной космологической константой компактно и имеет конечную фундаментальную группу.

В третьей главе рассмотрена классификация слабо косимплектических многообразий, обладающих конформно-инвариантыми свойствами.

В певром параграфе дается определение тензора Вейля, находятся его компоненты в А-репере.

Теорема 3.1.1 Всякое слабо косимплектическое многообразие является многообразием класса C_1.

Теорема 3.1.2 Слабо косимплектическое многообразие является многообразием класса C_2 тогда и только тогда, когда

$$B_{ab[dc]} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} C_{ab} & -C_{c]b} \\ C_{a[d} & C_{cd} \end{vmatrix}$$

Предложение 3.1.1 Слабо косимплектическое многообразие является многообразием класса C_3, если

$$B^{abg}B_{gcd} = -\frac{1}{2}C^{ab}C_{cd} + \frac{1}{2(2n-1)}(r_{\hat{a}c}\delta^b_d + r_{\hat{b}d}\delta^a_c - r_{\hat{a}d}\delta^b_c - r_{\hat{b}c}\delta^a_d) +$$
$$+ \frac{\kappa}{4n(2n-1)}(\delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c)$$

Во втором параграфе дается определение Ф-квази-инвариантого тензора Вейля.

Теорема 3.2.1 Тензор Вейля на слабо косимплектических многообразиях Ф-квази-инвариантен, то есть удовлетворяет равенству:

$$\langle W(\Phi X, \Phi Y)\Phi X, \Phi Y\rangle - \langle W(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 X, \Phi^2 Y\rangle =$$
$$= \langle W(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi X^2, \Phi Y\rangle - \langle W(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi X, \Phi^2 Y\rangle.$$

В третьем параграфе дается определение конформно-Ф-параконтактного слабо косимплектического многообразия.

В четвертом параграфе показано, что на слабо косимплектических структурах можно определить еще один конформно-инвариантный класс

$$C_0 \Leftrightarrow W_{\hat{a}0b0} = 0.$$

И тем самым справедлива теорема.

Теорема 3.4.1 Слабо косимплектическое многообразие принадлежит конформно-инвариантному классу C_0 тогда и только тогда, когда оно точнейше косимплектическое.

Следствие 3.4.1 Пусть M—многообразие, на котором определена слабо косимплектическая структура $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$. Тензор Вейля на M обладает свойством $W(X, \xi)\xi = 0$ тогда и только тогда, когда M точнейше косимплектическое многообразие.

В четвертой главе рассмотрены конформно-плоские и конформно-Ф-параконтактные слабо косимплектические многообразия и исследован вопрос интегрируемости.

В первом параграфе доказано

Теорема 4.1.1 Слабо косимплектическое многообразие M класса C_3 является римановым многообразием постоянной неотрицательной скалярной кривизны. При этом его скалярная кривизна равна нулю тогда и только тогда, когда M — точнейше косимплектическое многообразие.

Во втором параграфе дается определение интегрируемости тензорной структуры, тензора Нейенхейса. Исследуется вопрос разбиения компонент тензора на четыре группы в работе [41] и. Вычисляются компоненты тензора на пространстве присоединенной G-структуры.

Теорема 4.2.1 На слабо косимплектическом многообразии всегда выполняется соотношение:

$$N^{(4)}(X) = 0,$$

где $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Следствие 4.2.1 На слабо косимплектическом многообразии верно:

$$\nabla_\xi(\eta)X = 0.$$

В §4 исследуется геометрический смысл тензоров $N^{(1)} = 0$, $N^{(2)} = 0$, $N^{(3)} = 0$ и $N^{(4)} = 0$.

Теорема 4.3.1 На всяком слабо косимплектическом многообразии тензор $N^{(4)} = 0$.

Теорема 4.3.2 На слабо косимплектическом многообразии M тензор $N^{(3)} = N^{(2)} = 0$ тогда и только тогда, когда M — точнейше косимплектическое многообразие.

Теорема 4.3.3 На слабо косимплектическом многообразии M тензор $N^{(1)} = 0$ тогда и только тогда, когда M — косимплектическое многообразие.

Теорема 4.3.4 На слабо косимплектическом многообразии M тензор $N^{(1)} \neq 0, N^2 = 0$ тогда и только тогда, когда M — собственное точнейше косимплектическое многообразие.

Теорема 4.3.5 На слабо косимплектическом многообразии эквивалентны следующие утверждения:

1) Слабо косимплектическая структура является собственной слабо косимплектической;

2) Тензор Нейенхейса обладает свойством:

$$N(\Phi^2 X, \Phi^2 Y, \Phi^2 Z) = N(\Phi^2 X, \Phi Y, \Phi Z) + N(\Phi X, \Phi Y, \Phi^2 Z) + N(\Phi X, \Phi^2 Y, \Phi Z).$$

[41] Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry./ D. E. Blair // Lect. Notes Math. 509. 1976. 1-146.

Теорема 4.3.6 На слабо косимплектическом многообразии эквивалентны следующие утверждения:

1) Слабо косимплектическая структура является точнейше косимплектической;

2) Тензор Нейенхейса обладает свойством:

$$N(\xi, \Phi^2 X, \Phi^2 Y) = N(\xi, \Phi X, \Phi Y)$$

Теорема 4.3.7 Если класс точнейше косимплектических структур не является конформно-инвариантным, то и класс слабо косимплектических структур не является конформно-инвариантным.

Теорема 4.3.8 Слабо косимплектическая структура интегрируема тогда и только тогда, когда она является косимплектической.

Следствие. Точнейше косимплектическая структура интегрируема тогда и только тогда, когда она косимплектическая.

Публикации автора по теме диссертационной работы

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК РФ:

1. *Кусова Е.В.* Некоторые свойства тензора Нейенхейса на слабо косимплектическом многообразии / Е.В. Кусова // Вестник КузГТУ.- 2012. N 2. С. 88-90 (0,2 п.л.)

2. *Кусова Е.В.* Слабо косимплектические многообразия точечно постоянной голоморфной секционной кривизны / Е.В. Кусова // Известия Института инженерной физики. - Межрегиональное общественное учреждение "Институт инженерной физики". - 2011. - Т.1 - С.- 13-16. (0,3 п.л.)

3. *Кусова Е.В.* Конформно-Ф-параконтактные слабо косимплектические многообразия / Е.В. Кусова // Вестник КузГТУ.- 2013. N 2.(принята в печать) (0,3 п.л.)

Публикации в других изданиях:

4. *Кусова Е.В.* Тензор Вейля на слабо косимплектических структурах / Е.В. Кусова // Труды 40-й Всероссийской молодежной конференции "Проблемы теоретический и прикладной математики". - Екатеринбург. - 2009. - С.- 39-42. (0,3 п.л.)

5. *Кусова Е.В.* Классы CR_1, CR_2 и CR_3 слабо косимплектических многообразий / Е.В. Кусова // Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского. Материалы Шестой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения — 2007". - Казань: Издательство Казанского математического общества. - 2007. - Т. 36. - С. 136. (0,1 п.л.)

6. *Кусова Е.В.* Дополнительное свойства симметрии тензора кривизны тензора Римана—Кристоффеля для слабо косимплектических структур / Е.В. Кусова // Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе-2008". - Одесса: Благодійний фонд наукових досліждень "Наука 2008. - С. 93. (0,1 п.л.)

7. *Кусова Е.В.* Дополнительное свойство тензора Вейля на слабо косимплектическом многообразии. Конформно-инвариантное свойство слабо косимплектического многообразия / Е.В. Кусова // "Колмогоровские чтения-2009".-Ярославль: 2009. (0,2 п.л.)

8. *Кусова Е.В.* Свойства симметрии тензора Римана — Кристоффеля на слабо косимплектическом многообразии / Е.В. Кусова // Вестник РФФИ: Номер 2, апрель-июнь 2010г.(0,2 п.л.)

9. *Kirichenko V.F., Kusova E.* On geometry of weakly cosymplectic manifolds / V.F. Kirichenko, E. Kusova //Journal of Mathematical Sciences (New York), 2011, 668 — 674 (0,3 п.л. диссертанта)

10. *Кириченко В.Ф., Кусова Е.В.* О геометрии слабо косимплектических многообразий / В.Ф. Кириченко, Е.В. Кусова //Фундамент. и прикл. матем., 2010, том 16, выпуск 2, страницы 33 — 42 (0,3 п.л. диссертанта)