На правах рукописи

ТЮРИКОВ Евгений Владимирович

РАЗРЫВНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ростов-на-Дону
2013

Работа выполнена на кафедре геометрии ФГАОУ ВПО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону

Научный консультант:	**Климентов Сергей Борисович** доктор физико-математических наук, профессор ФГАОУ ВПО ЮФУ
Официальные оппоненты:	**Бикчантаев Ильдар Ахмедович** доктор физико-математических наук, профессор ФГАОУ ВПО КФУ, Заслуженный работник высшей школы РФ
	Гликлих Юрий Евгеньевич доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО ВГУ
	Кокарев Виктор Николаевич доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО СГУ
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет»

Защита состоится «26» декабря 2013 г. в 17 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008 г. Казань, ул. Кремлёвская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлёвская, д. 35, НБ КФУ).

Автореферат разослан «__» _________ 2013 г. и размещён на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф. м. н., доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Основы безмоментной (мембранной) теории тонких упругих оболочек были заложены в первой половине прошлого столетия в классическом сочинении А. Лява[1], где наряду с вопросами безмоментной теории рассмотрены также вопросы бесконечно малых изгибаний поверхностей. В дальнейшем общие и специальные задачи мембранной теории оболочек, а также ее связи с бесконечно малыми изгибаниями поверхностей рассматривались в работах В. З. Власова, А. Л. Гольденвейзера, В. В. Новожилова, Ю. Н. Работнова. Общие методы теории функций комплексной переменной, развитые главным образом в работах Н. И. Мусхелишвили, начали применяться в теории оболочек во второй половине прошлого века. В работах И. Н. Векуа эти методы были использованы для исследования основных задач общей теории тонких пологих оболочек. В работе А. Л. Гольденвейзера[2] рассмотрены задачи безмоментного напряженного равновесия сферических оболочек с краем, где под краем оболочки понимается граница ее срединной поверхности. При этом на разных участках края задаются различные статические условия (впоследствии названные И. Н. Векуа смешанными граничными условиями), а пограничные точки таких участков полагаются угловыми точками границы. Такое предположение является вполне естественным с точки зрения теории стержневых систем, используемых для реализации статических граничных условий. Дальнейшее продвижение в построении мембранной теории связано с основополагающей работой И. Н. Векуа[3], в которой создан общий метод изучения основных задач безмоментной теории выпуклых оболочек. Основу этого метода составляют разработанная в указанной работе теория граничной задачи Римана–Гильберта для эллиптических систем линейных уравнений первого порядка на плоскости (обобщенных аналитических функций) с последующим анализом уравнений равновесия мембранной теории и статических граничных условий. Определяющим здесь является то обстоятельство, что безмоментное напряженное состояние равновесия выпуклой оболочки при тех или иных статических граничных условиях вполне определяется решением соответствующей граничной задачи Римана–Гильберта для некоторой обобщенной аналитической функции (комплексной функции напряжения). Этот метод

[1] Ляв А. Математическая теория упругости. — М.: ОНТИ, 1935.

[2] Гольденвейзер А. Л. О применении решений задачи Римана–Гильберта к расчету безмоментных оболочек // Прикл. матем. и мех. — 1951. — Т. XV, № 2. — С. 149–166.

[3] Векуа И. Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек // Матем. сб. — 1952. — Т. 31, № 2. — С. 217–314.

нашел свое дальнейшее развитие в известной монографии И. Н. Векуа «Обобщенные аналитические функции», в которой аппарат теории обобщенных аналитических функций применен прежде всего для постановки и решения ряда специальных граничных задач теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной гауссовой кривизны и заданного класса регулярности. К таким задачам относятся следующие:

(а) задача об отыскании бесконечно малых изгибаний поверхности с заданной вариацией нормальной кривизны либо геодезического кручения в направлении края;

(б) задача об отыскании бесконечно малых изгибания, совместимых с условием ортогональной втулочной связи.

Постановка этих задач непосредственно связана с задачами мебранной теории, так как в случае выпуклой оболочки физическая краевая задача определения тангенциального поля напряжений есть статический аналог задачи (а), а кинематическая задача об отыскании поля смещения (или задача о деформационном состоянии оболочки) и задача (б) сводятся соответственно к неоднородной и однородной задачам Римана–Гильберта для обобщенной аналитической функции. При этом задачи (а) и (б), а также соответствующие им физическая и кинематическая задачи мембранной теории приводят к взаимно сопряженным краевым задачам теории обобщенных аналитических функций, что существенно облегчает исследование вопросов разрешимости этих задач. Важно также отметить, что на основе анализа решений задач (а) и (б) дано описание механизма реализации статических граничных условий при помощи ортогональной втулочной связи. Разработанная И. Н. Векуа теория задачи Римана–Гильберта для обобщенных аналитических функций с гельдеровым коэффициентом граничного условия, а также результаты о разрешимости задач (а) и (б) для поверхностей класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$, с $C^{1,\lambda}$-гладкой $(0 < \lambda < 1)$ границей составляют математическую часть мембранной теории выпуклых оболочек. Создание этой теории было завершено И. Н. Векуа в монографии «Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек»[4] (гл. III–V), в которой основные граничные задачи мембранной теории выпуклых оболочек с серединной поверхностью указанного класса регулярности и положительной гауссовой кривизны редуцируются к той или иной задаче Римана–Гильберта для обобщенных аналитических функций. При этом каждому из основных статических условий, заданному на гладкой боковой поверхности оболочки (или на гладкой границе ее сере-

[4]Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. — М., 1982. — 288 с.

динной поверхности) соответствует задача Римана–Гильберта с гельдеровым коэффициентом граничного условия. Однако поставленная ранее И. Н. Векуа задача о реализации безмоментного напряженного состояния равновесия выпуклой оболочки при заданном смешанном граничном условии уже не укладывается в рамки теории задачи Римана–Гильберта с гельдеровым коэффициентом. Это обстоятельство никак не отмечено в указанной работе, хотя из полученных там же граничных условий с очевидностью следует, что в математической постановке мы имеем задачу Римана–Гильберта с разрывным коэффициентом граничного условия даже в случае гладкости границы серединной поверхности. Более того, если граница серединной поверхности — кусочно-гладкая кривая (т. е. боковые поверхности оболочек — кусочно-гладкие поверхности с ребрами), а вид статического граничного условия при переходе через угловые точки не меняется, то мы также имеем дело с разрывной граничной задачей Римана–Гильберта. Следует отметить, что описание граничного условия Римана-Гильберта, данное А. Л. Гольденвейзером[5], не позволяет в полной мере использовать результаты Н. И. Мусхелишвили и дать точные математические формулировки о разрешимости поставленных задач. Однако это не умаляет значение ранее упомянутой работы А. Л. Гольденвейзера, в которой впервые установлена связь между задачами безмоментной теории сферических куполов и задачей Римана–Гильберта для аналитических функций с разрывным коэффициентом граничного условия, а также введен термин «концентрация напряжений» для механической интерпретации решений, неограниченных в точках разрыва граничного условия.

Методы И. Н. Векуа[6] получили дальнейшее развитие в работах С. Б. Климентова[7], В. Т. Фоменко[8] по теории непрерывных изгибаний поверхностей положительной гауссовой кривизны с гладким краем класса регулярности $C^{1,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, однако здесь уже приходится иметь дело с нелинейной задачей Римана–Гильберта с гельдеровым коэффициентом граничного условия для эллиптических систем квазилинейных уравнений на плоскости.

Разработанные И. Н. Векуа методы не позволяют дать решение смешанной граничной задачи, поставленной для оболочки с гладкой боковой поверхностью. В случае же оболочек с кусочно-гладкими боковыми

[5] Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976. С. 257.

[6] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959. — 512 с.

[7] Климентов С. Б. Изгибания локально-выпуклых поверхностей положительной кривизны: дис. … докт. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1987. — 285 с.

[8] Фоменко В. Т. Об изгибании и однозначной определенности поверхностей положительной кривизны с краем // Матем. сб. — 1965. — Т. 66 (108). — С. 127–144.

поверхностями решение как основных граничных задач, так и задач со смешанными граничными условиями также невозможно без дальнейшего развития этих методов. То же самое можно сказать о задачах (а) и (б) теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной гауссовой кривизны с кусочно-гладким краем (которые мы называем геометрическими аналогами основных граничных задач мембранной теории), а также нелинейных граничных задачах теории изгибаний поверхностей.

Все это делает актуальными следующие задачи.

1) Развитие методов И. Н. Векуа, позволяющее получить полную картину разрешимости задачи Римана–Гильберта с разрывным коэффициентом граничного условия для обобщенных аналитических функций в областях с кусочно-гладкой границей.

2) Использование их для построения мембранной теории выпуклых оболочек с кусочно-гладкими боковыми поверхностями, а также решение геометрических аналогов основных граничных задач этой теории, к которым следует отнести прежде всего задачи (а) и (б) для поверхностей указанного класса регулярности с кусочно-гладким краем.

3) Отыскание методов исследования нелинейной задачи типа Римана–Гильберта с разрывным граничным условием для эллиптических систем квазилинейных уравнений первого порядка на плоскости, а также сходных с ней задач для аналитических функций.

Цель работы. Цель работы — изучить разрешимость задачи 1) для односвязной области, а также разрешимость связанных с ней задач (а) и (б) для односвязных поверхностей заданного класса регулярности; на основе полученных результатов в рамках решения задачи 2) исследовать основные граничные задачи мембранной теории выпуклых оболочек, серединная поверхность которых является односвязной поверхностью указанного класса регулярности с кусочно-гладким краем; изучить смешанные граничные задачи для таких оболочек, поставленные И. Н. Векуа и А. Л. Гольденвейзером, а также дать решение более общей граничной задачи, постановка которой учитывает специфику состояния напряженного равновесия оболочки с ребристой боковой поверхностью; получить содержательные результаты в решении задач вида 3).

Методы исследования. Исследование рассматриваемых в диссертации вопросов проводится методами теории обобщенных аналитических функций, при систематическом использовании методов граничных задач для аналитических функций, сингулярных интегральных уравнений, функционального анализа.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту. В диссертации дано полное решение задачи Римана–Гильберта для обобщенной аналитической в единичном круге функции с кусочно-гельдеровым коэффициентом граничного условия, допускающим конечное число точек разрыва первого рода, причем в случае безусловной разрешимости решение найдено в резольвентной форме. Полученные результаты используются для исследования задач вида (а) и (б) теории бесконечно малых изгибаний односвязных поверхностей положительной гауссовой кривизны. При этом предлагается естественное расширение класса непрерывных бесконечно малых изгибаний в рамках задачи об отыскании всех б.м. изгибаний поверхности класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$, с кусочно-гладким краем, совместимых с одним из граничных условий вида (а), а также со смешанным граничным условием. Установлено, что картина разрешимости рассматриваемых задач вполне определяется направлением дуг границы в угловых точках. Выделен класс задач теории б.м. изгибаний со смешанными граничными условиями вида (а) и (б), картина разрешимости которых определяется как направлением дуг границы в угловых точках, так и кофигурацией тех дуг, вдоль которых задано кинематическое условие ортогональной втулочной связи для вектора смещения. Задачу указанного вида можно рассматривать в определенном смысле как геометрический аналог граничных задач мембранной теории, отнесенных И. Н.Векуа к задачам с граничным условием Синьорини.

Разработан метод исследования основных граничных задач мембранной теории оболочек со срединной поверхностью положительной гауссовой кривизны класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$, и кусочно-гладким краем, состоящим из дуг класса регулярности $C^{1,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, а также дано решение смешанной граничной задачи в расширенной постановке. Полученный результат содержит как частный случай решение смешанной граничной задачи И. Н. Векуа для оболочки, срединная поверхность которой есть односвязная поверхность указанного класса с гладким краем класса регулярности $C^{1,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$. Найдены геометрические критерии безусловной разрешимости таких задач в ограниченных классах решений, а также в подходящих классах, допускающих концентрацию напряжений в угловых точках.

Установлено, что в случае безусловной разрешимости каждой из таких задач число вещественных параметров, входящих в решение, зависит только от направления дуг границы, сходящихся в угловых точках, и не зависит от конфигурации этих дуг.

В диссертации дается решение новой по своей постановке задачи о реализации безмоментного напряженного состояния оболочки при выполнении граничного условия общего вида, включающего в себя все рассмотренные до этого статические граничные условия. Ее постановка позволяет в случае безусловной разрешимости дать прозрачную геометрическую интерпретацию решений, неограниченных в угловых точках границы, а также «сравнивать» различные состояния напряженного равновесия по числу параметров, входящих в соответствующие решения.

Разработан подход к исследованию разрешимости ряда нелинейных задач типа Римана–Гильберта с разрывным коэффициентом граничного условия для квазилинейных эллиптических систем уравнений на плоскости. Такие задачи возникают при изучении изометрических преобразований и непрерывных изгибаний поверхностей положительной гауссовой кривизны с кусочно-гладким краем. Предложен новый метод исследования сходных граничных задач для аналитических функций, а именно: нелинейной задачи сопряжения с недифференцируемым сдвигом и нелинейной задачи сопряжения с разрывным граничным условием.

Степень достоверности. Все результаты диссертации достоверны, что подтверждается строгими математическими доказательствами.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Разработанные в ней методы и полученные результаты создают основу для их систематического применения в задачах дифференциальной геометрии и механики, имеющих отношений к теории изгибаний и теории тонких упругих оболочек.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на

Седьмой Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии (Минск, 1979);

Украинской конференции по геометрии «в целом» (Симферополь, 1980);

Всесоюзной школе «Оптимальное управление. Геометрия и анализ» (Кемерово, 1986);

Всесоюзном совещании молодых ученых по дифференциальной геометрии, посвященном 80-летию Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 1990);

Международной конференции по геометрии «в целом» (Черкассы, Украина, 1995);

Международной школе–семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 1998);

Четвертой международной конференции по геометрии и топологии (Черкассы, Украина, 2001);

Международной школе–семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2002);

Пятой международной конференции по геометрии и топологии памяти А. В. Погорелова (Черкассы, Украина, 2003);

Международной школе–семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2004);

Международной школе–семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2006);

Седьмой международной конференции по геометрии и топологии (Черкассы, Украина, 2007);

Международной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (Волгодонск, 2007);

Международной школе–семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2008);

Международной конференции «Векуа-100» (Новосибирск, 2008);

Седьмой международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Владикавказ, 2010);

Четырнадцатой международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, Азов, 2010);

Девятой международной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (Волгодонск, 2011);

Международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харьков, Украина, 2011);

Двадцатой международной научно-технической конференции «Прикладные задачи математики и механики» (Севастополь, Украина, 2012);

Международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа-II» (Ростов-на-Дону,2013);

Международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-III» (Ростов-на-Дону, 2013);

а также на следующих научных семинарах:

научный семинар МГУ по геометрии в целом (1976, рук. проф. Н. В. Ефимов, проф. Э. Г. Позняк);

научный семинар кафедры дифференциальных уравнений РГУ (1976, рук. проф. В. С. Рогожин);

научный семинар кафедры геометрии Южного федерального университета (1990–2012, рук. проф. С. Б. Климентов);

научный семинар кафедры теории упругости Южного федерального университета (2008, рук. проф. А. О. Ватульян);

научный семинар по нелинейной теории оболочек Южного федерального университета (2010, рук. проф. Л. М. Зубов).

Публикации. По результатам диссертации автором опубликовано 29 работ, из них 15 работ ([1]–[15]) в изданиях, входящих в перечень ведущих научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, утвержденный ВАК.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав (16 параграфов, каждый из которых разбит на пункты и имеет сквозную нумерацию). Объем диссертации — 240 страниц, включая список литературы из 90 наименований.

Краткое содержание. Введение содержит общую характеристику работы и описание основных результатов.

Нумерация теорем и лемм, формулируемых в реферате, не зависит от принятой в диссертации.

В первой главе (§§ 1–3) дано решение важных с точки зрения приложений краевых задач Римана–Гильберта для обобщенных аналитических в односвязной области функций с разрывным коэффициентом в граничном условии. Классическая теория граничных задач для аналитических функций зарождалась в трудах Б. Римана, Д. Гильберта. В отдельную теорию она оформилась в 20-м веке в трудах И. И. Привалова, Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, Ф. Д. Гахова и др. С исчерпывающей полнотой изложение теории появилось в 1946 г. в монографии Н. И. Мусхелишвили «Сингулярные интегральные уравнения», в которой впервые было дано решение задачи Римана–Гильберта для аналитических функций с гельдеровым коэффициентом граничного условия, допускающим конечное число точек разрыва на границе односвязной области, путем сведения к соответствующей задаче сопряжения для кусочно-аналитической в комплексной плоскости функции. Там же ссылкой на указанную выше работу А. Л. Гольденвейзера отмечена важность этой задачи с точки зрения приложений к безмоментной теории сферических оболочек. Впоследствии в работе Л. Г. Михайлова[9] результаты Н. И. Мусхелишвили по теории задачи линейного сопряжения с разрывным коэффициентом граничного условия были перенесены на случай эллиптической во всей плоскости системы уравнений первого порядка (обобщенной аналитической по И. Н. Векуа в комплексной плоскости функции). Здесь следует отметить, что вопрос о том, возможно ли получить картину разрешимости разрывной задачи Римана–Гильберта для обобщенной аналитической в односвязной области функции, переходя к задаче сопряжения для некоторой обобщенной аналитической во всей плоскости функции, в работе Л. Г. Михайлова не ставился. Этот вопрос поставлен автором в работе [1], в которой дано полное решение задачи Римана–

[9] Михайлов Л. Г. Краевая задача типа задачи Римана для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и некоторые интегральные уравнения // Ученые записки. Тр. физ.-мат. ф-та Тадж. гос. ун-та. — 1957. — Т. 10. — С. 32–79.

Гильберта с разрывным коэффициентом граничного условия для обобщенной аналитической в единичном круге функции. Изложение результатов этой работы приводится в § 1 первой главы.

В п. 1.1 рассматривается задача Римана–Гильберта для обобщенных аналитических функций в следующей постановке: в единичном круге D комплексной z-плоскости E найти комплекснозначное решение $w(z)$ уравнения

$$\partial_{\overline{z}} w = B(z)\overline{w(z)}, \tag{1}$$

удовлетворяющее на $\partial D = L$ граничному условию

$$\mathrm{Re}\{\overline{\lambda}(t)w(t)\} = \gamma(t), \tag{2}$$

где $B(z) \in L_p(\bar{D})$, $p > 2$, $\lambda(t)$, $\gamma(t)$ — заданные на L функции класса H_0 (см. [2]) при узлах $c_1, \ldots, c_n$, причем $|\lambda(t)| \neq 0$ на L, включая и предельные значения $\lambda(c_i \pm 0)$ в точках разрыва $c_1, \ldots, c_n$. Отыскиваются $W^{1,p}$-регулярные в области D решения $w(z)$, непрерывно-продолжимые на границу L, за исключением точек разрыва $c_1, \ldots, c_n$, в окрестности которых имеют место оценки

$$|w(z)| < \frac{\mathrm{const}}{|z - c_j|^{\alpha_j}}, \quad 0 \leqslant \alpha_j < 1. \tag{3}$$

В п. 1.2 поставленная задача сводится к отысканию на всей z-плоскости решения уравнения

$$\partial_{\overline{z}} w = \widehat{B}(z)\overline{w}, \tag{4}$$

удовлетворяющего условию сопряжения

$$w^+(t) = \Lambda(t)w^-(t) + \omega(t), \quad t \in L, \tag{5}$$

$$\widehat{B}(z) = \begin{cases} B(z), & |z| < 1, \\ -\dfrac{1}{\overline{z}^2}\overline{B\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)}, & |z| > 1. \end{cases}$$

$$\Lambda(t) = -\frac{\lambda(t)}{\overline{\lambda}(t)}, \quad \omega(t) = \frac{2\gamma(t)}{\lambda(t)}.$$

Особенный (по Н. И. Мусхелишвили) узел c_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ граничного условия (5) есть особенный узел граничного условия (2), а решение класса $h(c_{i_1}, \ldots, c_{i_q})$ задачи (4), (5) задает решение того же класса задачи (1), (2). Индекс $\varkappa$ в классе $h(c_{i_1}, \ldots, c_{i_q})$ граничного условия (5) мы называем индексом граничного условия (2). Доказывается

Теорема 1. *При $\varkappa \geqslant 0$ однородная ($\gamma(t) \equiv 0$) задача (1)–(2) имеет ровно $\varkappa + 1$ линейно независимых решений данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$; совокупность всех решений дается формулой*

$$W(z) = X(z) \sum_{k=0}^{2\varkappa+1} A_k S_k(z),$$

где $X(z)$ — каноническая функция задачи (4), (5); $S_k(z)$ — обобщенные аналоги степеней уравнения (4); A_0, A_1, $\ldots$, $A_{2\varkappa+1}$ — вещественные постоянные, подчиненные условиям

$$A_{2k} a_k - A_{2k+1} b_k^{(i)} = A_{2\varkappa-2k}, \quad A_{2k} b_k + A_{2k+1} a_k^{(i)} = -A_{2\varkappa-2k+1},$$
$$k = 0, 1, \ldots, \varkappa,$$

в которых пары (a_k, b_k) и $(a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$ $(i^2 = -1)$ вещественных констант вполне определяются обобщенными константами уравнений $\partial_{\bar z} w = F_k(z)\overline{w}$ и $\partial_{\bar z} w = -F_k(z)\overline{w}$ соответственно, где

$$F_k(z) = \widehat{B}(z) \frac{\bar z^k \bar X(z)}{z^k X(z)} \quad (k = 0, 1, \ldots, \varkappa), \quad F_k \in L_{p,2}(E),$$

при $\varkappa < 0$ однородная задача (1), (2) не имеет решений данного класса, отличных от нуля. При $\varkappa \geqslant -1$ неоднородная задача разрешима в данном классе $h(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_q})$ при любой правой части γ; в частности, при $\varkappa = -1$ она разрешима однозначно; при $\varkappa \leqslant -2$ задача имеет (единственное) решение данного класса тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия разрешимости:

$$\int\limits_L \frac{t^k \gamma(t)}{\overline{\lambda(t)} X^+(t)}\, e^{-\omega(t)}\, dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1,$$

где функция $\omega(t)$ строится по уравнению (4).

В п. 1.2 поставлена задача Римана–Гильберта с разрывным граничным условием для обобщенной аналитической функции в односвязной области с кусочно-гладкой границей, дано понятие индекса граничного условия в классах $h(c_{i_1}, \ldots, c_{i_m})$ Н. И. Мусхелишвили ($1 \leqslant i_k \leqslant n$; $c_1, \ldots, c_n$ — угловые точки границы), а затем указанная задача с помощью конформного отображения на единичный круг сводится к рассмотренной ранее. Полученные ранее С. Н. Антонцевым и В. Н. Монаховым[10] результаты о разрешимости разрывной граничной задачи

[10] Антонцев С. Н., Монахов В. Н. Краевая задача Римана–Гильберта с разрывными граничными условиями для квазилинейных эллиптических систем уравнений // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 175, № 3. — С. 511–513.

Римана–Гильберта для квазилинейной эллиптической системы на плоскости в силу специфики рассматриваемых уравнений не могут быть использованы при исследовании разрывных граничных задач мембранной теории и их геометрических аналогов. Обзор дальнейших результатов по теории разрывной задачи Римана–Гильберта с кусочно-гельдеровым коэффициентом для систем уравнений эллиптического и смешанного типов в односвязной области на плоскости и их приложений дается в монографии Guo-Chun Wen[11], в которой содержится достаточно полная библиография. Однако следует отметить, что в указанной монографии автор (Guo-Chun Wen) использует результаты о разрешимости разрывной задачи Римана–Гильберта для обобщенных аналитических в односвязной области комплексной плоскости функций со ссылкой на свои работы, опубликованные в 1980–1985 г.г., т. е. через шесть лет после публикации работ автора [1], [2].

В последующих параграфах (§§ 2, 3) главы 1 построена специальная техника нахождения индекса граничных условий Римана–Гильберта, возникающих при постановке основных граничных задач мембранной теории. С этой целью коэффициент $\lambda(\zeta)$ задачи Римана–Гильберта для односвязной области G с кусочно-гладкой границей Γ задается в виде $\lambda(\zeta) = \alpha(\zeta)\beta(\zeta)$ $(\zeta \in \Gamma)$, где $\alpha(\zeta) = \alpha_1(\zeta) + i\alpha_2(\zeta)$, $\beta(\zeta) = \beta_1(\zeta) + i\beta_2(\zeta)$, $\alpha_k(\zeta)$, $\beta_k(\zeta)$ $(k = 1, 2)$ — вещественнозначные функции аргумента ζ, имеющие разрывы первого рода в точках ζ_j $(j = 1, \ldots, n)$ контура Γ. При этом предполагается, что односторонние пределы функций $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ в каждой из точек ζ_j связаны некоторыми соотношениями. Интерес к данному граничному условию вызван следующими причинами:

большинство рассматриваемых в рамках мембранной теории граничных задач для оболочки с кусочно-гладкой границей ее серединной поверхности сводится к задаче Римана–Гильберта с коэффициентом указанного вида;

выбор специальных соотношений между односторонними пределами функций $\alpha_k(\zeta)$, $\beta_k(\zeta)$ $(k = 1, 2)$ в точках разрыва позволяет, с одной стороны, «приспособить» граничное условие к рассматриваемой задаче, а с другой — получать эффективные формулы для вычисления индекса и, как следствие теоремы 1, законченные результаты о разрешимости соответствующих граничных задач мембранной теории оболочек и их геометрических аналогов.

Для описания вводимых ниже соотношений между односторонними пределами функций $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ в точках разрыва удобно исполь-

[11] Guo-Chun Wen. Elliptic, hyperbolic and mixed complex equations with parabolic degeneracy // Peking Univ. — Series in Math. — 2008. — Vol. 4. — 427 p.

зовать кусочно-непрерывные векторные поля $\vec{s}(\zeta) = \{\alpha_1(\zeta), \alpha_2(\zeta)\}$, $\vec{t}(\zeta) = \{\beta_1(\zeta), \beta_2(\zeta)\}$, заданные на Γ коэффициентом $\lambda(\zeta) = \alpha(\zeta)\beta(\zeta)$. Такой подход позволяет заменить описание труднообозримых соотношений формулировкой геометрических свойств этих полей. Отметим также, что все необходимые свойства полей $\vec{s}(\zeta)$, $\vec{t}(\zeta)$ на Γ вполне определяются свойствами векторных полей на границе некоторой поверхности, порожденных соответствующей граничной задачей мембранной теории. Описание свойств этих полей дается в п. 2.1. С этой целью вводится в рассмотрение множество кусочно-непрерывных векторных полей $\mathcal{L}(\Gamma)$, содержащее указанные векторные поля $\vec{s}(\zeta)$, $\vec{t}(\zeta)$ для любой из задач мембранной теории. Множество $\mathcal{L}(\Gamma)$ разбивается на непересекающиеся классы $\mathcal{L}^{r,q}_{\alpha,\beta}(\Gamma)$, где $\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_r}$ — произвольно отмеченные точки ($1 \leqslant i_s \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant n$), $\zeta_{k_1}, \ldots, \zeta_{k_q}$ — оставшиеся точки из числа $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ ($r + q = n$), $\alpha = (i_1, \ldots, i_r)$, $\beta = (k_1, \ldots, k_q)$ — *выборки* соответствующих индексов. Далее для любых двух комплекснозначных функций $\mu(\zeta)$, $\tau(\zeta)$ ($\zeta \in \Gamma$), таких, что $\vec{\mu}(\zeta) = \{\operatorname{Re}\mu, \operatorname{Im}\mu\}$, $\vec{\tau}(\zeta) = \{\operatorname{Re}\tau, \operatorname{Im}\tau\} \in \mathcal{L}(\Gamma)$, вводится понятие нормальной пары $(\mu(\zeta), \tau(\zeta))$ и рассматривается граничная задача вида (1), (2) с коэффициентом $\lambda(\zeta)$, определенным на Γ парой $(\mu(\zeta), \tau(\zeta))$ и условием (задача R): на каждой из дуг Γ выполняется одно из равенств: $\lambda(\zeta) = \mu(\zeta)\tau(\zeta)$, $\lambda(\zeta) = [\mu(\zeta)]^2$ ($\zeta \in \Gamma$). Выбор одного из равенств для каждой из дуг Γ_j разбивает множество всех узлов $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ на три класса, а именно: если на сходящихся в точке ζ_j дугах выполняется первое (второе) равенство, то узел ζ_j назовем $R^{(1)}$-точкой ($R^{(2)}$-точкой). В противном случае узел ζ_j есть $R^{(3)}$-точка (или смешанная точка). Для каждого $k = 1, 2, 3$ дается геометрическое описание (в терминах векторных полей $\vec{\mu}$, $\vec{\tau}$) особенных $R^{(k)}$-точек, а на его основе — классификация всех (особенных и неособенных) $R^{(k)}$-точек, по которой каждую $R^{(k)}$-точку можно отнести к одному из четырех типов для $k = 1, 2$, и одному из пяти типов для $k = 3$. Основным результатом § 2 является

Теорема 2. *Если нормальная пара* $(\mu(\zeta), \tau(\zeta))$ *задает векторные поля* $\vec{s}(\zeta) = \{\operatorname{Re}\mu(\zeta), \operatorname{Im}\mu(\zeta)\}$, $\vec{\tau}(\zeta) = \{\operatorname{Re}\tau(\zeta), \operatorname{Im}\tau(\zeta)\}$ *одного и того же класса* $\mathcal{L}^{r,q}_{\alpha,\beta}(\Gamma)$, $N^{(s)}_k$ *— число* $R^{(s)}$*-точек* k*-го типа задачи* R ($1 \leqslant k \leqslant 4$ *для* $s = 1, 2$; $1 \leqslant k \leqslant 5$ *для* $s = 3$), *то индекс* $\varkappa(R)$ *граничного условия в классе ограниченных решений вычисляется по формуле*

$$\varkappa(R) = -4 + \sum_{k=1}^{4}(2-k)(N^{(1)}_k + N^{(2)}_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}(5-2k)N^{(3)}_k. \qquad (6)$$

Следствие. *Если* $\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_\ell}$ — *произвольно отмеченные узлы, включающие в себя все особенные узлы граничного условия, то индекс* $\varkappa^{(\ell)}(\mathrm{R})$ *в классе* $h(\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_\ell})$ *вычисляется по формуле*

$$\varkappa^{(\ell)}(\mathrm{R}) = n - \ell + \varkappa(\mathrm{R}). \tag{7}$$

В § 3 главы 1 вычисляется индекс граничного условия

$$\mathrm{Re}\{\rho(\zeta)\ell(\zeta)w(\zeta)\} = \gamma(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \tag{8}$$

в котором $\rho(\zeta) = \rho_1(\zeta) + i\rho_2(\zeta)$, $\ell(\zeta) = \ell_1(\zeta) + i\ell_2(\zeta)$ — комплекснозначные функции на Γ, гельдеровы на каждой из дуг Γ_j, допускающие разрывы 1-го рода в угловых точка ζ_j контура Γ, $|\rho(\zeta)| = |\ell(\zeta)| = 1$, а векторные поля $\vec{\rho}(\zeta) = \{\rho_1(\zeta), \rho_2(\zeta)\}$, $\vec{\ell}(\zeta) = \{\ell_1(\zeta), \ell_2(\zeta)\}$ принадлежат классу $\mathcal{L}(\Gamma)$ без дополнительных условий нормальности пары $(\rho(\zeta), \ell(\zeta))$ и принадлежности полей $\vec{\rho}(\zeta)$, $\vec{\ell}(\zeta)$ одному и тому же классу $\mathcal{L}^{r,q}_{\alpha,\beta}(\Gamma)$. Не нарушая общности можно считать, что односторонние пределы в точке ζ_j одного из указанных векторных полей, например, $\vec{\ell}(\zeta)$, совпадают с односторонними пределами касательного к Γ вектора $\vec{s}(\zeta)$.

Условие (8) назовем *каноническим*, если $\ell(\zeta) \equiv s(\zeta) = s_1(\zeta) + is_2(\zeta)$, где $\vec{s}(\zeta) = \{s_1(\zeta), s_2(\zeta)\}$ — единичный касательный к Γ в точке ζ вектор, направление которого совпадает с положительным направлением кривой Γ. В этом случае задачу (8) назовем канонической задачей T.

Для описания точек разрыва канонической задачи T рассматривается пара векторов $\vec{\nu}_j^{(1)}$, $\vec{\nu}_j^{(2)}$, задающих внутренний угол ν_j $(0 < \nu_j < 2)$ в угловой точке ζ_j границы Γ, и вводится *вспомогательная* классификация угловых точек ζ_j границы области D, а именно: угловая точка ζ_j есть точка k-типа $(k = 1, \ldots, 4)$, если

$$\frac{k-1}{2}\,\pi < \nu_j < \frac{k}{2}\,\pi.$$

Точку ζ_j, для которой $\nu_j = \pi/2$ $(\nu_j = 3\pi/2)$ будем относить к 1-типу (3-типу) соответственно.

Для каждого $k = 1, 2, 3, 4$ дано геометрическое описание особенных точек ζ_j k-типа задачи T, а затем все точки k-типа разбиваются на 3 класса $T_k^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$, и доказывается следующая формула для вычисления индекса $\varkappa$ в классе $h(\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_m})$:

$$\varkappa = n - m - \ell - 4 + N, \tag{9}$$

где

$$N = \sum_{i=1}^{3} \Bigl[\sum_{k=1}^{4} (4 - (i + k)) N_k^{(i)}\Bigr], \tag{10}$$

$N_k^{(i)}$ — число узлов $\zeta_j(T)$, принадлежащих классу $T_k^{(i)}$, ℓ — число *особенных* узлов. В п. 2 § 3 главы 1 изучается важное с точки зрения приложений обобщенное условие Римана–Гильберта (задача T_*) с главным коэффициентом специальной структуры, содержащее как частные случаи граничные условия из § 2, так и другие важные частные случаи. Эта структура вводится заданием вдоль границы дополнительного векторного поля, допускающего конечное число точек разрыва первого рода, и позволяет с помощью только геометрических характеристик подходящих векторных полей дать описание точек разрыва граничного условия. Остановимся на этом подробнее.

Пусть в каждой точке ζ дуги Γ_j $(j = 1, \ldots, n)$ вектор $\vec{r}(\zeta)$ задан своими проекциями $\alpha(\zeta)$ и $\beta(\zeta)$ на направление векторов $\vec{s}(\zeta)$ и $\vec{t}(\zeta)$ соответственно $(\alpha^2+\beta^2 = 1)$, функции $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ гельдеровы на каждой из дуг Γ_j, вектор-функция $\vec{r}(\zeta)$ имеет разрывы 1-го рода в угловых точках ζ_j. Если при этом функция $\beta(\zeta)$ знакопостоянна на Γ, то векторное поле $\vec{r}(\zeta)$ принадлежит классу $\mathcal{L}(\Gamma)$. Не нарушая общности, будем считать, что $\beta(\zeta) \geqslant 0$ на Γ, а соответствующее поле $\vec{r}$ называть *допустимым.*

Модификацией канонического условия (8) является граничное условие (задача M)

$$\operatorname{Re}\{s(\zeta)[\beta(\zeta)t(\zeta) - \alpha(\zeta)s(\zeta)]w(\zeta)\} = \gamma(\zeta) \tag{11}$$

в котором функции $s(\zeta) = s_1(\zeta)+is_2(\zeta)$, $t(\zeta) = t_1(\zeta)+it_2(\zeta)$ заданы векторными полями касательного и нормального к Γ векторов $\vec{s}(\zeta)$ и $\vec{t}(\zeta)$ соответственно. С помощью введенного понятия «индикатор векторного поля $\vec{r}(\zeta)$ в точке ζ_j» дается геометрическое описание особенных узлов задачи M. Отдельно рассматривается важный с точки зрения дальнейших приложений случай (задача M^*), когда векторное поле $\vec{r}(\zeta) \in \mathcal{L}(\Gamma)$ задает непрерывное поле направлений $\mathbf{r}(\zeta)$. В этом случае описание особенных узлов задачи M^* принимает наиболее простой вид: узел ζ_j есть особенный узел задачи M^* тогда и только тогда, когда $\nu_j = \dfrac{\pi}{3}k$ $(1 \leqslant k \leqslant 5)$. В соответствии с этим вводится классификация, по которой каждая угловая точка ζ_j границы Γ есть неособенный узел k-типа $(k = 1, \ldots, 6)$, если $\dfrac{k-1}{3}\pi < \nu_j < \dfrac{k}{3}\pi$. Для каждого непрерывного поля направлений $\mathbf{r}(\zeta)$ задачи M^* вводятся понятия входящего и выходящего поля (класса P_{ent} и класса P_{ex} соответственно) в точке ζ_i. Получена формула для вычисления индекса задачи T^* в классе $h(c_{i_1}, \ldots, c_{i_m})$, имеющая вид (9), в которой следует положить

$$N = \sum_{k=1}^{6}(3-k)n_k^{(ex)} + \sum_{k=1}^{3}(2-k)n_k^{(ent)} + \sum_{k=4}^{6}(4-k)n_k^{(ent)},$$

где $n_k^{(ex)}$ ($n_k^{(ent)}$) — число угловых точек k-типа ($1 \leqslant k \leqslant 6$) границы Γ, для которых непрерывное поле направлений $\mathbf{r}(\zeta)$ является выходящим (выходящим) соответственно.

В п. 3.4 рассматривается граничное условие (11), в котором векторные поля $\vec{s}(\zeta)$, $\vec{t}(\zeta)$ и $\vec{r}(\zeta)$ принадлежат классу $\mathcal{L}(\Gamma)$ без каких-либо дополнительных ограничений (задача T_*). В этом случае с помощью понятия «индикатор узла $\zeta_j(T_*)$» дается геометрическое описание особенных узлов задачи T^* и разработан алгоритм вычисление«вклада» каждого узла в индекс $\varkappa$ граничного условия, позволяющий получить формулу вида (9)–(10).

В заключение главы 1 приводится пример граничного условия Римана–Гильберта с главным коэффициентом видоизмененной структуры, индекс которого в заданном классе решений может зависеть от конфигурации той или иной части границы. Подробное исследование этого примера дается в главе 3.

Во второй главе (§§ 4–6) приводятся некоторые новые методы построения решений нелинейной задачи типа Римана–Гильберта с разрывным коэффициентом граничного условия для квазилинейных эллиптических систем уравнений первого порядка, а также сходных с ней нелинейных граничных задач для аналитических функций. Начало систематическому изучению нелинейных задач теории аналитических функций было положено в работах А. Н. Гусейнова и В. К. Наталевича, в которых рассмотрены некоторые нелинейные граничные задачи типа Римана–Гильберта (подробный обзор и библиография приводятся в монографии А. Н. Гусейнова[12]. Дальнейшее развитие теории нелинейных граничных задач Римана–Гильберта и задач сопряжения для аналитических функций, а также нелинейной разрывной задачи Римана–Гильберта для обобщенных аналитических функций связано с именем польского математика Погоржельского и его учеников. Следует отметить, что в ходе развития этой теории переход от гельдеровых коэффициентов граничного условия к кусочно-гельдеровым, а также переход от аналитических

[12]Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. — М.: Наука, 1980. — 416 с.

функций к обобщенным аналитическим по И. Н. Векуа функциям диктовался внутренней логикой развития теории и возможностями используемых методов, и не был обусловлен постановкой каких-либо новых содержательных задач теории оболочек и геометрии. Постановка некоторых задач газовой динамики со свободными границами приводит к задаче с разрывным линейным граничным условием для квазилинейной эллиптической системы уравнений на плоскости, теория которой была изложены в монографии В. Н. Монахова[13]. В это же время В. Т. Фоменко была предпринята попытка использовать методы И. Н. Векуа для решения ряда задач теории непрерывных изгибаний регулярных выпуклых поверхностей с гладким краем. Было установлено, что поставленные задачи сводятся к нелинейной граничной задаче Римана–Гильберта для квазилинейной эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости. Как было указано автором в [16], постановка этих же задач для поверхностей с кусочно-гладким краем приводит к появлению точек разрыва первого рода у главного коэффициента граничного условия Римана–Гильберта. В такой постановке задача изучена в § 4 главы 2 путем комбинации метода Шаудера с техникой интегралов типа Коши. При этом удается сохранить «минимальные» требования к дифференциальным свойствам коэффициентов системы, что приводит к достаточно обременительным для этих коэффициентов условиям «малости» по норме используемых функциональных пространств. В дальнейшем для решения нелинейных граничных задач регулярных выпуклых поверхностей с гладким краем С. Б. Климентовым был использован метод, в основе которого лежит применение теоремы о неявной функции. При этом для равномерно эллиптических квазилинейных систем с линейным краевым условием были получены законченные результаты, а для нелинейного краевого условия (но без точек разрыва) — разрешимость в окрестности нуля. Однако применению этого метода для исследования разрывной нелинейной задачи Римана–Гильберта для квазилинейных эллиптических систем общего вида препятствует ряд непреодолимых до сих пор трудностей, связанных с изучением свойств соответствующих интегро-дифференциальных операторов, действующих в подходящих весовых пространствах.

В § 4 главы 2 изучена нелинейная краевая задача типа Римана–Гильберта в следующей постановке.

Рассмотрим в единичном круге K комплексной плоскости z квази-

[13]Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. — Новосибирск: Наука, 1977. — 420 с.

линейную эллиптическую систему уравнений в комплексной форме

$$\partial_{\bar z}w-\mu_1(w,z)\partial_z w-\mu_2(w,z)\partial_{\bar z}\bar w = A_0(w,z)+A_1(w,z)w+A_2(w,z)\bar w, \quad (12)$$

где $w(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ — искомая комплексная функция, $z = x+iy$, операции $\partial/\partial z$, $\partial/\partial\bar z$ понимаются в обобщенном по Соболеву смысле, функции A_i и μ_i ($i = 0,1,2$; $j = 1,2$) измеримы по z при фиксированных w и непрерывны по w для почти всех z в $\bar K$, причем для $z \in \bar K$ и любого фиксированного w выполнено условие эллиптичности $|\mu_1(w,z)|+|\mu_2(w,z)| \leqslant \mu_0 < 1$, $\mu_0 = \mathrm{const}$, $A_j(w,z) \in L_{p_0}(\bar K)$, $p_0 > 2$, для любого фиксированного w.

Нелинейная краевая задача Римана–Гильберта (задача A_1) сформулируется так: найти в K решение уравнения (12), принадлежащее классу $W^1_p(\bar D)$, $p > 2$, $\bar D \subset K$, непрерывно продолжимое на границу ∂K, за исключением конечного числа точек разрыва $c_i \in \partial K$, $i = 1,2,\ldots,n$, в окрестности которых имеет место оценка $|w(z)| < \mathrm{const}|z-c_j|^{-\alpha_j}$, $0 \leqslant \alpha_j < 1$, $j = 1,2,\ldots,n$, и удовлетворяющее на $\partial K \setminus \bigcup\limits_i \{c_i\}$ граничному условию

$$\mathrm{Re}\{\overline{\lambda(t)}w(t)\} = g(t) + b(t)F[t,w(t)], \quad t = e^{i\gamma}, \quad \gamma \in [0,2\pi]. \quad (13)$$

Для коэффициентов λ, g, b и нелинейной части $F[t,w]$ будем требовать выполнения следующего предположения:

$$g(t) = g_*(t)\prod_{k=1}^{n}|t-c_k|^{-\alpha^*_k}, \quad 0 \leqslant \alpha^*_k < 1, \quad (\mathrm{a}_1)$$

$$\lambda, g_*, b \in C^\beta[\gamma_k,\gamma_{k+1}], \quad 0 < \beta < 1,$$

где $c_k = \exp(i\gamma_k)$ — точки разрыва первого рода функций λ, g_*, b, $|\lambda(t)| = 1$;

$$F[t,w] \in \mathfrak{H}^\beta_{\alpha^*}(c_1,c_2,\ldots,c_n),\ 0 \leqslant \alpha^* < 1,\ 0 < \beta < 1,\ 0 < \alpha^*+\beta < 1, \quad (\mathrm{a}_2)$$

где $\mathfrak{H}^\beta_{\alpha^*}(c_1,\ldots,c_n)$ — класс Погоржельского[14].

Определим индекс $\varkappa$ задачи A_1 в классе решений $h(c_{i_1},\ldots,c_{i_q})$ так же, как и для задачи (1), (2).

Пусть нелинейная часть $F[t,w]$ удовлетворяет следующим предположениям:

$$F[t,\omega(t)]\cdot|\Omega(t)| = \widehat{F}[t,\widehat{\omega}(t)], \quad t \in \partial K, \quad (\mathrm{a}_3)$$

[14]Pogorzelski W. Problems aux limites descountinus dans la theorie des fonctions analytiques // Bulletin de L'Academie Polonaise des science. Série des sci math. astr. et phys. — 1959. — Vol. VII, № 6. — P. 311–317; ou: J. of Math. and Mech. Indiana Univ. — 1960.

где $\widehat{F}[t,\widehat{\omega}(t)] \in C^{\nu}$, $0 < \nu \leqslant \min\{\beta,\beta^*\}$, если $\widehat{\omega}(t) \in C^{\beta^*}$, $0 < \beta^* < 1$, и выполняется неравенство

$$\|\widehat{F}[t,\widehat{\omega}(t)\|_{C^{\nu}} \leqslant M_0 + L_0 \cdot \|\widehat{\omega}(t)\|_{C^{\sigma}}, \quad 0 < \sigma < \beta^*,$$

где $\Omega(z)$ — весовая функция, вполне определяемая классом $h(c_{i_1},\ldots,c_{i_q})$ в случае $\varkappa \geqslant 0$, M_0, L_0 — константы.

Будем полагать, что функция $\widehat{F}[t,\widehat{\omega}]$ удовлетворяет условиям:

$$\left\|\widehat{F}[t,\widehat{\omega}^1(t)] - \widehat{F}(t,\widehat{\omega}^2(t))\right\|_{C^{\nu}} \leqslant \alpha(\rho) \cdot \left\|\widehat{\omega}^1(t) - \widehat{\omega}^2(t)\right\|_{C^{\beta_1}}, \qquad (a_4)$$

$0 < \nu \leqslant \min\{\beta,\beta_1\}$, $|t| = 1$, где $\|\widehat{\omega}^i(t)\|_{C^{\beta_1}} < \rho$, $\lim\limits_{\rho\to 0} \alpha(\rho) = 0$; если $z^1(\tau)$, $z^2(\tau)$ — гомеоморфизмы класса $C^{1,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, единичной окружности $|\tau| = 1$ на себя и $\widehat{\omega}(t) \in C^{\beta_1}$, то

$$\left\|\widehat{F}[z^1(\tau),\widehat{\omega}(\tau)] - \widehat{F}[z^2(\tau),\widehat{\omega}(\tau)]\right\|_{C^{\nu_0}} \leqslant K_1 \|z^1(\tau) - z^2(\tau)\|_{C^{\lambda}},$$

$|\tau| = 1$, $0 < \nu_0 < \nu$, $K_0 = \mathrm{const}$.

Обозначим через $W_p^1(K) \cap C_*^{\beta}(\bar{K})$, $p > 2$, $0 < \beta < 1$, множество функций $w(z)$, принадлежащих $W_p^1(\overline{D})$ в любой замкнутой подобласти $\overline{D} \subset K$, и таких, что $\left\{\prod\limits_{k=1}^{n} (z - c_k^*)^{\alpha_k^*} w(z)\right\} \in C^{\beta}(\bar{K})$, где c_k^* — точка неограниченности $w(z)$.

Теорема 3. *Пусть для коэффициентов и нелинейной части $F[t,w]$ краевого условия (13) выполнены предположения (a_1)–(a_4), и пусть коэффициенты $A_i(w,z)$, $i = 0,1,2$, уравнения (12) непрерывны по w при почти всех z, $|z| \leqslant 1$, $A_i(w,z) \in L_{p_0}(\bar{K})$, $p_0 > 2$, для любого фиксированного w, причем $|\mu_1(w,z)| + |\mu_2(w,z)| \leqslant \mu_0 < 1$ равномерно по w, а в случае неограниченности $w(z)$ удовлетворяется неравенство*

$$0 < \alpha_k^* < (p-2)/p,$$

p — некоторое число, $p = p(p_0,\mu_0) > 2$.

Тогда существуют такие константы ε_i, β_i, γ_i, $i = 0,1,2$, $\varepsilon_i, \gamma_i > 0$, $0 < \beta_j < \beta < 1$, $j = 0,1,2$, что как только для коэффициентов задачи A выполняются неравенства

$$\|b(t)\|_{C^{\beta_0}} < \varepsilon_0, \quad \|g_*(t)\|_{C^{\beta_1}} < \varepsilon_1, \quad \|A_j(w,z)\|_{L_{p_0}(\bar{K})} < \gamma_j, \quad j = 0,1,2,$$

равномерно по $w \in W_p^1(\bar{K})$, $p = p(p_0,\mu_0) > 2$, при $\varkappa \geqslant 0$ задача A_1 имеет семейство решений данного класса $h(c_{q_1},\ldots,c_{q_k})$, зависящее от $\varkappa + 1$ вещественных параметров D_i, $|D_i| < \varepsilon_2$, $i = 1,2,\ldots,\varkappa+1$, и принадлежащее классу $W_p^1(K) \cap C_*^{\beta_2}(\bar{K})$, $0 < \beta_2 < \beta$.

В § 5 главы 2 теорема о неявной функции используется для изучения сходной нелинейной задачи сопряжения с недифференцируемым сдвигом в следующей постановке.

Пусть D — единичный круг с границей L, D^- — дополнение к $D \cup L$ до полной комплексной плоскости E, $SW_p^1(L)$, $p > 2$, — банахово пространство функций, заданных на единичной окружности L, таких, что для любой функции $f(t)$ найдется функция $F(z) \in W_p^1(\overline{D})$, $p > 2$, совпадающая на L с $f(t)$, с нормой $\|f\|_{SW_p^1} = \|F(z)\|_{W_p^1(\overline{D})}$, где $F(z)$ — интеграл Пуассона с плотностью $f(t)$. Краевую задачу сопряжения со сдвигом сформулируем следующим образом: найти кусочно-аналитическую и ограниченную на бесконечности функцию $\omega(z)$ с линией скачков L, удовлетворяющую граничному условию

$$\omega^+[\alpha(t)] = G(t)\omega^-(t) + g(t) + \lambda F\{t, \omega^+[\alpha(t)], \omega^-(t)\}, \quad t \in L. \qquad (14)$$

Здесь $G(t)$, $g(t) \in SW_p^1(L)$, $p > 2$, λ — вещественный параметр, гомеоморфизм $\alpha(t)$ контура L на себя сохраняет направление обхода и продолжается до полного гомеоморфизма $\alpha(z)$ всей плоскости E на себя, удовлетворяющего уравнению Бельтрами $\partial_{\bar z}\alpha = q(z)\partial_z\alpha$, где $q(z)$ — измеримая и ограниченная в области D функция, $|q(z)| \leqslant q_0 < 1$, операции дифференцирования ∂_z и $\partial_{\bar z}$ понимаются в обобщенном по Соболеву смысле, $\alpha(z) \in W_p^{1,\mathrm{loc}}$, $p > 2$. На необходимость изучения задач сопряжения с недифференцируемым сдвигом описанного выше класса (класс SQ) впервые указано С. Н. Антонцевым и В. Н. Монаховым[15]. Там же изучена линейная ($F(t,u,v) \equiv 0$) задача сопряжения со сдвигом класса SQ для квазилинейных эллиптических систем.

Опишем условия, налагаемые на нелинейную часть $F(t, u_1, u_2)$. Всюду ниже мы полагаем, что $F(t, u_1, u_2)$ как функция аргумента t есть граничное значение некоторой функции $F(\zeta, u_1, u_2)$, аналитической по каждой из переменных u_i, $i = 1, 2$, в любой ограниченной области $E \times E$ и принадлежащей классу $W_p^1(\bar D)$, $p > 2$, по переменной ζ для любых фиксированных $u_i \in E$ $(i = 1, 2)$. Для удобства записи введем следующую систему обозначений:

$$\frac{\partial^{i+j} F(\zeta, u_1, u_2)}{\partial u_1^i \partial u_2^j} = F^{(ij)}(\zeta, u_1, u_2), \quad \frac{\partial F^{ij}(\zeta, u_1, u_2)}{\partial \zeta} = F_\zeta^{(ij)}(\zeta, u_1, u_2),$$

$i, j = 0, 1, \ldots;$

От функции $F(\zeta, u_1, u_2)$ потребуем выполнения следующих условий:

[15] Антонцев С. Н., Монахов В. Н. О разрешимости одного класса задач сопряжения со сдвигом // Докл. АН СССР. — 1972. — Т. 205, № 2. — С. 263–266.

1°. $F^{(ij)}(\zeta,u_1,u_2)\in W_p^1(\bar D)\ \forall\, u_1,u_2\in W_p^1(\bar D)$, $p>2$, $0\leqslant i+j\leqslant 3$;

2°. $F_{\bar\zeta}^{(ij)}(\zeta,u_1,u_2)\in L_p(\bar D)\ \forall\, u_1,u_2\in W_p^1(\bar D)$, $p>2$, $0\leqslant i+j\leqslant 2$ (то же относительно $F_{\zeta}^{(ij)}$);

3°. функции $F^{(ij)}(\zeta,u_1,u_2)$, $0\leqslant i+j\leqslant 2$, допускают представление $F^{(ij)}(\zeta,u_1,u_2)=d_{ij}(\zeta)\cdot F_{ij}(\zeta,u_1,u_2)$, где $d_{ij}\in W_p^1(\bar D)$, $p>2$, $F_{ij}(\zeta,u_1,u_2)\in C^1(\bar D)$ по ζ и аналитичны по u_1, u_2; при этом $|F^{(ij)}(\zeta,u_1,u_2)|\leqslant K+|\varphi(u_1,u_2)|$, где $\varphi(u_1,u_2)$ — некоторая функция, аналитическая по u_1, u_2, K — константа;

4°. существуют такие функции a_{ij}, $b_{ij}\in L_p(\bar D)$, $p>2$, что в любой точке ζ ограниченности функции $F^{(ij)}$ выполняются неравенства

$$|F_{\zeta}^{(ij)}(\zeta,u_1,u_2)|\leqslant|a_{ij}(\zeta)|+|b_{ij}(\zeta)|\cdot|\varphi_{ij}(u_1,u_2)|,\quad 0\leqslant i+j\leqslant 2,$$

где φ_{ij} аналитичны по u_1, u_2 (то же относительно $F_{\bar\zeta}^{(ij)}$).

Рассмотрим сначала задачу о скачке (задача A_2), являющуюся частным случаем ($G(t)\equiv 1$) задачи (1). Будем отыскивать решения задачи A_2, имеющие заданное разложение $\sum\limits_{k=0}^{n}c_kz^k$ на бесконечности. Основным результатом § 3 является

Теорема 4. *Для любого набора комплексных постоянных $c_0^{(0)},c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}$ существуют такие положительные числа λ_0 и ε_0 (зависящие от $c_i^{(0)}$), что, как только $\lambda\in(-\lambda_0,\lambda_0)$, задача A_2 имеет решение с разложением $\sum\limits_{k=0}^{n}c_kz^k$ на бесконечности, причем c_k — произвольно фиксированные числа из области $|c_k^{(0)}-c_k|<\varepsilon_0$, $k=0,1,\ldots,n$. При этом решение непрерывно зависит от λ и c_k, $k=0,1,\ldots,n$.*

Следствием теоремы 4 является

Теорема 5. *Пусть индекс $\varkappa=\operatorname{ind}_L G(t)\geqslant 0$. Тогда для любого набора $2\varkappa+1$ вещественных постоянных $c_k^{(0)}$ ($k=1,2,\ldots,2\varkappa+1$) существуют такие положительные числа λ_0 и ε_0 (зависящие от $c_k^{(0)}$), что, как только $\lambda\in(-\lambda_0,\lambda_0)$, задача (14) имеет решение, ограниченное на бесконечности и непрерывно зависящее от вещественных параметров c_k в области $|c_k^{(0)}-c_k|<\varepsilon_0$, $k=1,2,\ldots,2\varkappa+1$, и параметра λ.*

В § 6 главы 2 рассматривается задача сопряжения типа задачи Римана в следующей постановке: найти в комплексной плоскости E исчезающую на бесконечности кусочно-аналитическую с линией скачков Γ

функцию $\varphi(z)$ по граничному условию

$$\varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t) + g(t) + \lambda F(t, \varphi^+(t), \varphi^-(t)), \quad t \in \Gamma, \tag{15}$$

где $G(t)$, $g(t)$ — кусочно-гельдеровы функции, имеющие разрывы первого рода в точках c_i, $i = 1, \ldots, n$ контура Γ; λ — вещественный параметр. В дальнейшем считаем, что Γ — единичная окружность, а функции $G(t)$, $g(t)$ непрерывны слева. Задача вида (15) впервые была сформулирована в цитированной ранее работе Погоржельского, определившей направление и метод дальнейших исследований по нелинейным задачам с разрывными коэффициентами в граничном условии. Особо следует отметить здесь работы W. Zakowski (достаточно подробная библиография содержится указанной выше монографии А. Н. Гусейнова). Общим для всех работ по этой тематике является применение принципа Шаудера в сочетании с техникой интегралов типа Коши в классах Погоржельского. Этот метод позволяет при неотрицательном индексе $\varkappa$ коэффициента $G(t)$ и дополнительном требовании малости по модулю параметра λ (либо малости по норме некоторого пространства оператора суперпозиции $F(t, u, v)$) доказать существование решения задачи (15), зависящего от конечного числа вещественных параметров.

В § 6 главы задача (15) исследуется методом линеаризации. Такой подход позволяет получить достаточные условия разрешимости, не содержащие требования малости параметра λ, а также при необходимости выяснить характер зависимости решения от произвольных вещественных параметров. При этом в силу нетёровости производной Фреше от соответствующего нелинейного оператора, порожденного задачей (15), мы можем говорить об условной разрешимости при отрицательном индексе граничного условия. Разумеется, на нелинейную часть налагаются условия, обеспечивающие применение одного из вариантов теоремы о неявной функции. Заметим, что достаточные условия разрешимости, сформулированные в § 5 главы 2, содержат требование малости параметра λ, однако это обусловлено спецификой рассматриваемой задачи.

Для описания условий, налагаемых на нелинейную часть $F(t, u, v)$, введем следующие обозначения. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — мультииндекс, где α_i — вещественные числа, c_i — фиксированные точки контура Γ; $H_\mu(\Gamma; c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — банахово пространство непрерывных слева на Γ функций $\varphi(t)$ таких, что $\varphi \in H_\mu(\gamma_k)$; γ_k — гладкие разомкнутые дуги; c_i — концы разомкнутых дуг, причем $\overline{\bigcup_k \gamma_k} = \Gamma$; $H_\mu(\gamma_k)$ — класс гельдеровых с показателем μ $(0 < \mu < 1)$ функций на γ_k с нормой $H_{\mu;k}$ $(k = 1, \ldots, n)$; $\|\cdot\|_{H_\mu} = \max_k H_{\mu;k}$ — норма в пространстве

$H_\mu(\Gamma; c_1, \dots, c_n)$;

$H_\mu^{(\alpha)}(\Gamma;\rho)$ — множество функций $\varphi(t)$, непрерывных всюду на Γ, за исключением, быть может, точек c_i, таких, что $\rho(t)\varphi(t) \in H_\mu(\Gamma; c_1, c_2, \dots, c_n)$, где весовая функция ρ определяется равенством $\rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - c_k|^{\alpha_k}$.

Множество $H_\mu^{(\alpha)}(\Gamma;\rho)$ с нормой $\|\varphi\|_{H_\mu^{(\alpha)}} = \|\rho\varphi\|_{H_\mu}$ — банахово пространство. Введем в рассмотрение функциональные пространства $Y_\mu = H_\mu(\Gamma; c_1, c_2, \dots, c_n) \times H_\mu(\Gamma; c_1, c_2, \dots, c_n)$ и $Y_\mu^{(\alpha)} = H_\mu^{(\alpha)}(\Gamma;\rho) \times H_\mu^{(\alpha)}(\Gamma;\rho)$ элементов $y = (y_1, y_2)$ с нормой $\|y\|_{Y_\mu} = \max\limits_i \|y_i\|_{H_\mu}$ и $\|y\|_{Y_\mu^{(\alpha)}} = \max\limits_i \|y_i\|_{H_\mu^{(\alpha)}}$ соответственно, а также пространство $Z = Y_\mu^{(\alpha)} \times R$ элементов $z = (y, \lambda)$ с нормой $\|z\|_Z = \|y\|_Y + |\lambda|$. Будем полагать, что комплекснозначная функция $F(t, u, v)$ трех комплексных аргументов удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(t, u, v)$ как функция аргумента t (при $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$) — функция класса $H_\mu(\Gamma; c_1, c_2, \dots, c_n)$;

2) $F(t, u, v)$ — оператор суперпозиции из $Y_\mu^{(\alpha)}$ в $H_\mu^{(\alpha)}(\Gamma;\rho)$;

3) F дважды дифференцируема по u, v, причем $F_u(t, u, v) = F^{(1)}(t, u, v)$, $F_v(t, u, v) = F^{(2)}(t, u, v)$ — операторы суперпозиции из $Y_\mu^{(\alpha)}$ в $H_\mu(\Gamma; c_1, c_2, \dots, c_n)$;

4) для значений $F_{k\pm 0}^{(i)} \equiv \lim\limits_{t \to c_k \pm 0} F_i[t, u(t), v(t)]$ $(i = 1, 2;\ k = 1, 2, \dots, n)$ величина $\ln\left(F_{k+0}^{(i)}(u, v)/F_{k-0}^{(i)}(u, v)\right)$ не зависит от выбора $(u, v) \in Y_\mu^{(\alpha)}$;

5) для функций $F^{(ij)}(t, u, v) \equiv \partial^{i+j} F(t, u, v)/\partial u^i \partial v^j$ выполняются условия $F^{(ij)}(t, u, v) = \frac{1}{\rho}\tilde{F}^{(ij)}(t, u, v)$, где $\tilde{F}^{(ij)}(t, u, v)$ $(i + j = 2)$ — некоторые операторы суперпозиции из Y_μ в $H_\mu(\Gamma; c_1, c_2, \dots, c_n)$, ρ — весовая функция.

Пример оператора суперпозиции, удовлетворяющего свойствам 1–5, приведен автором в [5] как пример нелинейного оператора, используемого в теории непрерывных изгибаний локально выпуклых поверхностей с краем.

Для формулировки основного результата к условиям 1)–5) добавим условия

$$F^{(1)}(t, y) \neq -\lambda^{-1}, \quad F^{(2)}(t, y) G(t) \neq \lambda^{-1}, \tag{16}$$

$$\varkappa = \operatorname{ind}_\Gamma \Phi(t) = \operatorname{ind}_\Gamma \frac{1 - \lambda F^{(1)}(t, y)}{1 + \lambda G(t) F^{(2)}(t, y)} = 0 \quad \forall\, y \in Y_\mu^{(\alpha)}, \tag{17}$$

$\varkappa$ — индекс функции $\Phi(t)$, вычисленный в классе $h(c_1, \dots, c_q)$.

Теорема 6. *Если для всех λ, таких, что $|\lambda| < \lambda_0$, где число λ_0 вполне определенное положительное число, выполнены условия* (16), (17), *то задача имеет единственное решение класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, непрерывно зависящее от параметра λ.*

В главе 3 (§§ 7–12) развитый в гл. 1 аппарат применяется к исследованию разрешимости задач вида (а) и (б) теории бесконечно малых изгибаний поверхностей в новой (расширенной) постановке. Ее отличие от постановки И. Н. Векуа состоит в том, что граница поверхности содержит конечное число угловых точек, а на различных частях границы задается любое из условий вида (а), а также любое из условий вида (а) или (б). Как было сказано выше, постановка этих задач восходит к упомянутой ранее работе И. Н. Векуа по теории обобщенных аналитических функций и ее приложению к безмоментной теории тонких упругих оболочек, в которой рассмотрены граничные задачи безмоментного напряженного состояния равновесия выпуклой оболочки с гладкими боковыми поверхностями и заданными на границе ее серединной поверхности либо нормальной составляющей N, либо касательной составляющей T вектора усилий. Там же поставлена смешанная краевая задача, когда на одной части гладкой границы задана составляющая N, а на остальной — составляющая T. Постановка граничных задач вида (а) теории бесконечно-малых изгибаний для поверхностей с кусочно-гладким краем дается в § 7 гл. 3. Остановимся на этом подробнее.

Пусть S^* — строго внутренняя часть замкнутой выпуклой поверхности S^0 класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$, с кусочно-гладким краем L, состоящим из конечного числа дуг класса регулярности $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Рассмотрим на L множество точек $c_1, \ldots, c_n$, содержащее все угловые точки, а также произвольно отмеченные точки гладкости, полагая при этом, что точки c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ следуют друг за другом при обходе границы L в заданном направлении. Тогда $L = \bigcup\limits_{j=1}^{n} L_j$, где началом и концом дуги L_j $(j = 1, \ldots, n-1)$ являются точки c_j и c_{j+1}, а началом и концом дуги L_n являются точки c_n и c_1 соответственно. Рассматривается следующая

Задача А. Существуют ли бесконечно малые (б. м.) изгибания поверхности S^*, для которых на каждой из дуг L_j выполняется одно из условий:

$$\delta\tau_g = \sigma^{(1)}(s) \quad \text{на } L_j, \tag{18}$$

$$\delta k_n = \sigma^{(2)}(s) \quad \text{на } L_j, \tag{19}$$

где $\sigma^{(k)}(s)$ $(k = 1, 2)$ — наперед заданные на L функции, гельдеровы на каждой из дуг L_j, s — натуральный параметр, δk_n и $\delta\tau_g$ — вариации соответственно нормальной кривизны и геодезического кручения поверхности в направлении края.

Уточним постановку задачи А. Для этого точки c_j с учетом заданных на сходящихся в точке c_j дугах граничных условий обозначим через $c_j(A)$ и назовем *угловой точкой* задачи А, или $c_j(A)$-точкой. Если на сходящихся в точке c_j дугах заданы условия (18) (условия (19)), то точку $c_j(A)$ назовем $A^{(1)}$-точкой ($A^{(2)}$-точкой) задачи А. Если же на одной из *соответствующих* дуг задано условие (18), а на другой — (19), то точку $c_j(A)$ назовем *смешанной угловой точкой* задачи А или $A^{(3)}$-точкой.

Граничное условие на L, заданной выбором на каждой из дуг L_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ одного из условий (18)–(19), обозначим через $A(L)$.

Если c_j $(j = 1, \ldots, n)$ — точки гладкости кривой L (т. е. граница поверхности S^0 — гладкая кривая), $\sigma^{(k)}(s)$ $(k = 1, 2)$ — гельдеровы на L функции, то задачи об отысканиии б. м. изгибаний поверхности S^0, совместимых с одним из условий (18), (19), были поставлены и изучены И. Н. Векуа. Если c_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — точка гладкости кривой L, то постановка задачи A будет содержательной лишь в том случае, если $c_j(A)$ — *смешанная точка*. Очевидно также, что число всех *смешанных точек* задачи А — четное. Если среди *угловых точек* $c_j(A)$ граничного условия $A(L)$ содержится $A^{(3)}$-точки, то задачу А назовем *смешанной* задачей. Если же все *угловые* точки $c_j(A)$ $(j = 1, \ldots, 2s)$ условия $A(L)$ есть $A^{(3)}$-точки, то соответствующую задачу А назовем *канонической смешанной* задачей.

Отметим следующие частные случаи:

1°. Точки c_j $(j = 1, \ldots, 2s)$ — точки гладкости границы L, причем $c_j(A)$ — *смешанные* угловые точки. Задача А есть геометрический аналог *канонической смешанной* граничной задачи безмоментного напряженного состояния выпуклой упругой оболочки, поставленной И. Н. Векуа в 1952 году.

2°. Точки c_j $(j = 1, \ldots, n)$ — угловые точки границы, причем все угловые точки $c_j(A)$ условия $A(L)$ — либо $A^{(1)}$-точки, либо $A^{(2)}$-точки. В этом случае задача А есть задача, поставленная В. Т. Фоменко в 1972 году и изученная автором в работах [2], [6], [7].

3°. Точки c_j $(j = 1, \ldots, 2s)$ — угловые точки границы, причем $c_j(A)$ — *смешанные* угловые точки граничного условия $A(L)$. Задача А есть обобщение геометрического аналога *смешанной* граничной задачи о реализации напряженного состояния равновесия *безмоментного сфериче-*

ского купола, поставленной А. Л. Гольденвейзером. Некоторые частные случаи этой задачи рассмотрены автором в работах [8], [10].

Для исследования разрешимости поставленных задач существенным образом используются результаты главы 1. Рассмотрение общего случая потребовало специальной техники вычисления индекса граничного условия, в построении которой важную роль играет § 8 главы 3. В этом параграфе установлено новое свойство сопряженно изометрической системы координат на регулярной выпуклой поверхности, необходимое для определения особенных $A^{(s)}$-точек (для каждого $s = 1, 2, 3$) граничного условия $A(L)$ с последующей классификацией всех $A^{(s)}$-точек. В § 9 задача A приводятся к вспомогательной задаче R, изученной в главе 1. В § 10 с помощью построений из § 2 и конструкции из § 8 даны геометрические классификации точек разрыва граничных условий Римана–Гильберта, соответствующих задачам из § 7, а также получены эффективные формулы для вычисления индексов граничных условий. Формулировки основных геометрических результатов приведены в § 11 главы 3 и используют понятие бесконечно малого изгибания *расширенного класса*, впервые введенное автором в [6]. Переход к расширенным классам обусловлен тем обстоятельством, что решения соответствующей «разрывной» задачи Римана–Гильберта для комплексной функции изгибаний отыскиваются в весовых классах Гельдера с весом, заданным канонической функцией соответствующей задачи сопряжения.

Ниже для обозначения $W^{1,r}$-регулярных решений класса $h(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ используются обозначения $h^{1,r}_{i_1,\dots,i_m}$, $h^{1,r}_n$, $h^{1,r}_0$, введенные в гл. 1. Обозначим через $H^{1,r}_{i_1,\dots,i_m}$, $H^{1,r}_0$, $H^{1,r}_n$ $(r > 2)$ — классы б. м. изгибаний, заданных решениями класса $h^{1,r}_{j_1,\dots,j_m}$, $h^{1,r}_n$, $h^{1,r}_0$ $(j_\ell \neq i_k;\ 1 \leqslant \ell \leqslant n - m;\ 1 \leqslant k \leqslant m)$ соответствующей задачи Римана–Гильберта.

Введем следующие обозначения: S_ν — введенная выше поверхность S^* с внутренними углами $\nu_j\pi$ $(1 < \nu_j < 2)$ в угловых точках c_j, $\theta_0 = \max\{1, \omega(\nu)\}$, где набор $\omega(\nu) \equiv (\theta_1, \dots, \theta_n)$ вполне определен набором $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ и направлениями дуг, сходящихся в точках c_j; $N^{(s)}_k$ — число $A^{(s)}$-точек k-типа граничного условия $A(L)$, где $\sum\limits_{k=1}^{4}(N^{(1)}_k + N^{(2)}_k) + \sum\limits_{k=1}^{5} N^{(3)}_k = n$, $\sum\limits_{k=1}^{5} N^{(3)}_k$ — четное число; $P \equiv \sum\limits_{k=1}^{4}(2-k)(N^{(1)}_k + N^{(2)}_k)$, $Q \equiv \sum\limits_{k=1}^{5}(5-2k)N^{(3)}_k$, где Q — четное число.

Справедлива

Теорема 7. *Пусть S_ν — заданная выше поверхность класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2\theta_0$, $c_{i_1}(A), \dots, c_{i_m}(A)$ — произвольно отмеченные* неособенные *точки граничного условия $A(L)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Если $Q+2P \geqslant 6-2m$, то поверхность S_ν допускает $(Q/2+P-3+m)$ — параметрическое семейство нетривиальных б. м. изгибаний класса $H^{1,q}_{i_1,\dots,i_m}$, $2 < q < \dfrac{2p}{2+p(1-1/\theta_0)}$, совместных с неоднородным условием $A(L)$. При $Q+2P \leqslant 4-2m$ задача A однозначно разрешима в указанном классе тогда и только тогда, когда для функций $\sigma^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ выполнены $m - 4 - P - Q/2$ условий разрешимости интегрального типа.*

Теорема 8. *Если $Q + 2P \geqslant 6$, то поверхность S_ν допускает $(Q/2 + P - 3)$ — параметрическое семейство б. м. изгибаний класса $H^{1,q}_n$, совместимых с неоднородным условием $A(L)$. Если при этом все угловые точки $c_j(A)$ — неособенные точки граничного условия $A(L)$, а функция σ, заданная на L функциями $\sigma^{(k)}$ $(k = 1, 2)$, удовлетворяет дополнительным условиям точечного типа $\sigma(c_j) = 0$ $(j = 1, \dots, n)$, то б. м. изгибания непрерывны в $S_\nu \cup L$.*

Теорема 9. *Если $Q + 2P \geqslant 8$, то поверхность S_ν допускает $Q/2 + P - 3$ линейно-независимых б. м. изгибаний класса $H^{1,q}_n$, совместимых с однородным условием $A(L)$, и является жесткой в том же классе, если $Q + 2P < 6$. Если при этом все точки $c_j(A)$ — неособенные точки граничного условия $A(L)$, то б. м. изгибания непрерывны в $S_\nu \cup L$.*

Наряду с задачей $A(L)$ дается постановка так называемой смещенной задачи $\widetilde{A}(L)$. С помощью введенного понятия «m-симметрическая угловая точка c_j» $(m = 1, 2)$ приводится описание достаточно широкого класса поверхностей, для которых картины разрешимости задач $A(L)$ и $\widetilde{A}(L)$ совпадают.

Рассматривается *каноническая смешанная* задача $A(L)$, все угловые точки $c_j(A)$ $(j = 1, \dots, 2s)$ которой есть $A^{(3)}$-точки. В общем случае вопрос о разрешимости указанной задачи дает теорема 7, в которой следует положить $N_k^{(1)} = N_k^{(2)} = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant 4)$, $\sum\limits_{k=1}^{s} N_k^{(3)} = 2s$. Отметим частный случай *канонической смешанной* задачи A (геометрический аналог задачи И. Н. Векуа). Пусть S^* — заданная выше односвязная поверхность с гладким краем L, $c_1, \dots, c_{2s}$ — произвольно отмеченные на L точки. Имеет место

Теорема 10. *Если $m - s \geqslant 3$, то каноническая задача $A(L)$, а также* смещенная *задача $\tilde{A}(L)$ для поверхности S^* безусловно разрешимы* *в любом из классов $H^{1,p_0}_{i_1,\ldots,i_m}$, $2 < p_0 < p$, где $c_{i_1},\ldots,c_{i_m}$ — произвольно отмеченные точки из числа $c_1,\ldots,c_{2s}$. При этом поверхность S^* допускает $(m-s-3)$ — параметрическое семейство б. м. изгибаний указанного класса. В частности, для $2s = 6$ задачи $A(L)$ и $\tilde{A}(L)$ являются безусловно разрешимыми только в классе H^{1,p_0}_0. Если же $m - s < 3$, то задачи A и $\tilde{A}$ разрешимы в любом из классов $H^{1,p_0}_{i_1,\ldots,i_m}$ только при выполнении $3 + s - m$ условий разрешимости на правые части условий $A(L)$ и $\tilde{A}(L)$ соответственно.*

Теоремы 7–9 в первой своей части являются геометрическими критериями безусловной разрешимости соответствующих задач вида $A(L)$. В каждом из рассмотренных случаев картина разрешимости задачи вполне определяется величинами внутренних углов и направлением дуг в угловых точках.

При доказательстве указанных теорем используются результаты §§ 1–2 главы 1, а также § 8.

В § 12 главы 3 рассмотрена новая по своей постановке задача Римана–Гильберта со смешанным граничным условием для аналитических функций, к которой сводится задача об отыскании бесконечно малых изгибаний поверхности второго порядка с кусочно-гладким краем, совместимых на какой-либо части границы с одним из условий (а), а на другой — с условием (б). Установлено, что картина разрешимости такой задачи может зависеть от конфигурации той части границы, вдоль которой задано кинематическое условие ортогональной втулочной связи для вектора смещения.

Приведен пример сферического купола (теорема 12.1), для которого соответствующая смешанная задача является безусловной разрешимой.

В главе 4 разработанный в главах 1, 3 аппарат, используется для постановки и решения основных граничных задач мембранной теории выпуклых оболочек с кусочно-гладкими боковыми поверхностями при условии, что серединная поверхность оболочки — односвязная поверхность класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$.

В § 13 дается постановка обобщенной граничной задачи (задача R) о реализации безмоментного напряженного состояния равновесия тонкой упругой оболочки, серединная поверхность которой есть односвязная поверхность S_ν положительной гауссовой кривизны указанного класса регулярности с кусочно-гладким краем $L = \bigcup\limits_{j=1}^{n} L_j$, состоящим из конечного числа дуг L_j класса регулярности $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Предполагается, что в каждой точке дуги L_j $(j = 1,\ldots,n)$ задана проекция вектора усилий на направление принадлежащего поверхности вектора $\vec{r}(s) = \{\alpha(s), \beta(s)\}$ с касательной и нормальной составляющими α, β, соответственно, где s — натуральный параметр, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha(s)$, $\beta(s)$ гельдеровы на каждой из дуг L_j, $\beta(s)$ — знакопостоянная функция, векторное поле $\vec{r}$ как вектор-функция $\vec{r}(c)$ контура L имеет разрывы 1-го рода в угловых точках. Как уже было сказано, задача R для срединной поверхности S_ν с гладким краем L в случаях $\alpha \equiv 0$ или $\beta \equiv 0$ на L, а также в случае непрерывного на L векторного поля $\vec{r}$ была поставлена и изучена И. Н. Векуа в цитированных выше работах. Там же установлено, что в каждом из этих случаев задача R не является безусловно разрешимой, причем случаи безусловной разрешимости (наиболее содержательные с точки зрения возможных приложений) реализуются в теории И. Н. Векуа лишь для неодносвязных поверхностей. Здесь же дается математическая постановка задачи R.

Пусть $S_\nu \subset S_0$, $\mathfrak{J}$ — отображение поверхности S_0 на комплексную плоскость $\zeta = u^1 + iu^2$, заданное выбором сопряженно изометрической параметризации (u^1, u^2) на S_0; $D = \mathfrak{J}(S_\nu) - \Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Gamma_j$, $\Gamma_j = \mathfrak{J}(L_j)$, $\zeta_j = \mathfrak{J}(c_j)$. Задача R сводится к отысканию в области D комплекснозначного решения $w(\zeta)$ уравнения

$$\frac{\partial w(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} - B(\zeta)\overline{w}(\zeta) = F(\zeta), \quad \zeta \in D, \tag{20}$$

$\partial_{\bar{\zeta}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial u^1} + i\dfrac{\partial}{\partial u^2}\right)$ — оператор комплексного дифференцирования, $w(\zeta)$ — комплексная функция напряжений, выражаемая через компоненты контрвариантного *тензора усилий* и коэффициенты метрической формы поверхности, $B(\zeta)$ — заданная поверхностью функция класса $L_p(\overline{D})$, $p > 2$, $F(\zeta)$ — *комплексная функция внешней нагрузки* оболочки, по заданному граничному условию

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{d\zeta}{ds}\left(\beta(\zeta)\frac{d\zeta}{d\ell} - \alpha(\zeta)\frac{d\zeta}{ds}\right)w(\zeta)\right\} = \gamma(u, K, k_s, \tau_g, X), \quad \zeta \in \Gamma, \tag{21}$$

в котором $d\zeta/ds = s^1 + is^2$, s^i $(i = 1, 2)$ — координаты касательного к Γ орта, $d\zeta/d\ell = \ell^1 + i\ell^2$, ℓ^i $(i = 1, 2)$ — координаты орта направления на плоскости ζ, являющегося $\mathfrak{J}$-образом направления на поверхности S^0, ортогонального направлению кривой L, где значения функций $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ совпадают со значением функций α, β в соответствующей точке $c = \mathfrak{J}^{-1}(\zeta)$, γ — вполне определенная функция своих аргументов, K, k_s,

τ_g — соответственно гауссова кривизна поверхности, нормальная кривизна и геодезическое кручение поверхности в направлении края в точке $c = \mathfrak{J}^{-1}(\zeta)$, X — *нормальная компонента вектора поверхностных и объемных сил на единицу площади*, $F(\zeta) \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$. Классы регулярности решений задачи (20), (21) введены ранее в главе 1.

Остановимся подробнее на общем случае смешанного граничного условия.

Рассматривается *задача* A о реализации безмоментного напряженного состояния равновесия тонкой упругой оболочки со срединной поверхностью S_ν в предположении, что на каждой из дуг L_j $(j = 1, \ldots, n)$ выполняется одно из следующих условий:

$$T(s) = \sigma^{(1)}(s) \text{ на } L_j, \tag{22}$$

$$N(s) = \sigma^{(2)}(s) \text{ на } L_j, \tag{23}$$

где $T(s)$ и $N(s)$ — касательная и нормальная составляющие вектора усилий, $\sigma^{(k)}(s)$ $(k = 1, 2)$ — наперед заданные на L функции, гельдеровы на каждой из дуг L_j, s — натуральный параметр.

Задача (22), (23) есть статический аналог смешанной задачи $A(L)$, изученной в главе 3. Для описания точек разрыва соответствующего граничного условия (21) используются понятия $A^{(s)}$-точек $(s = 1, 2, 3)$ задачи $A(L)$, введенные в главе 3.

Решением задачи A будем называть решение задачи R в любом из классов $h^{1,q}_{i_1,\ldots,i_m}$, и наоборот.

Справедлива

Теорема 11. *Пусть S — заданная выше односвязная поверхность класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2\theta_0$, $c_{i_1}(A)$, $\ldots$, $c_{i_m}(A)$ — произвольно отмеченные неособенные* угловые точки *задачи A, ℓ — число всех* особенных точек *$(2 \leqslant \ell + m \leqslant 2n)$. Если $2P + Q \geqslant 6 + 2(m + \ell - 2n)$, то задача A безусловно разрешима в классе $h^{1,q}_{i_1,\ldots,i_m}$, $2 < q < \frac{2p}{2+p(1-1/\theta_0)}$, а ее решение зависит от $P + \frac{1}{2}Q + n - m - \ell - 3$ вещественных параметров. Если же $2P + Q < 6 + 2(m + \ell - n)$, то задача A имеет решение (единственное) в указанном классе тогда и только тогда, когда для правой части равенства (21) выполнены $m + \ell + 3 - \left(n + \frac{1}{2}Q + P\right)$ условий разрешимости интегрального типа.*

Здесь величины P, Q совпадают с величинами, входящими в формулировку теоремы 11.

В § 14 дается решение задачи R для случая, когда $\alpha \equiv 0$ на одной части границы, и $\beta \equiv 0$ — на другой. Очевидно, этот случай включает в себя смешанную граничную задачу И. Н. Векуа для поверхности с гладким краем, а также задачу А. Л. Гольденвейзера для сферического купола, т. е. для односвязной сферической поверхности с кусочно-гладким краем. Рассмотрены случай простейшего (канонического), а также общий случай смешанного граничного условия. Отдельно рассматривается смешанная граничная задача И. Н. Векуа для поверхности с гладким краем. В каждом из этих случаев найден геометрический критерий безусловной разрешимости. При этом состояние безмоментного напряженного равновесия, заданное решением соответствующей задачи Римана–Гильберта с весом, рассматривается как состояние равновесия при условии *концентрации напряжений* (по терминологии А. Л. Гольденвейзера) в отмеченной угловой точке.

Рассмотрим подробнее важный частный случай теоремы 11, дающий решение смешанной граничной задачи И. Н. Векуа для поверхности с гладким краем в следующей (уточненной) постановке.

Пусть c_j ($\nu_j = 1$; $j = 1, \ldots, 2n$) — точки гладкой границы L, $c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}$ — произвольно отмеченные точки из числа $c_1, \ldots, c_{2n}$. Наряду с каноническим условием естественно также рассмотреть *смещенное* условие и соответствующую *смещенную* задачу $\widetilde{R}$. Имеет место

Теорема 12. *Если $n \geqslant 4$, $1 \leqslant m \leqslant n-3$, то задача R, а также задача $\widetilde{R}$* безусловно разрешимы *в классе $h^{1,q}_{i_1,\ldots,i_m}$, $2 < q < p$. Если $n = 3$, то задачи R и $\widetilde{R}$ безусловно разрешимы только в классе $h^{1,q}_0$. В случаях $n = 1, 2$ задача R имеет единственное решение в любом из классов $h^{1,q}_{i_1,\ldots,i_m}$, ($1 \leqslant m \leqslant 2n$), $h^{1,q}_0$, тогда и только тогда, когда для правой части равенства (21) выполнены $m - n + 3$ условий разрешимости интегрального типа.*

В случае гладкой границы L ($\nu_j = 1$) и выполнении одного из условий $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 0$ (на L) из теоремы 12 следует известный результат И. Н. Векуа о существовании единственного решения для основных граничных задач мембранной теории для односвязной поверхности (при выполнении трех независимых условий интегрального типа). Теорема 11 дает также полное решение этих задач в расширенной автором постановке, т. е. для поверхности с кусочно-гладким краем.

В § 15 главы 4 дается решение задачи R для сферических куполов. Термин «сферический купол» использовался А. Л. Гольденвейзером. Обобщенным сферическим куполом мы называем односвязную часть поверхности S_0, ограниченную кусочно-гладкой кривой, все угловые точки которой — омбилические. С помощью введенного понятия «индикатор векторного поля $\vec{r}$» и конструкций, используемых в гл. 1

(§ 3, п. 2) при исследовании канонической граничной задачи T и ее модификации M, дано описание *неособенных узлов* задачи R. Основным результатом § 15 является найденный в геометрической форме критерий безусловной разрешимости задачи R в классе решений, задающих концентрацию напряжений в заданных неособенных узлах. Отдельно рассмотрен случай кусочно-непрерывного векторного поля $\vec{r}(c)$, задающего вдоль L непрерывное поле направлений $\boldsymbol{r}$. Для таких полей мы имеем наиболее простой механизм описания граничного условий в угловой точке при условии концентрации напряжений, а именно: конец условного вектора усилий, приложенного к угловой точке, принадлежит прямой, заданной в проективной плоскости парой параллельных плоскостей, ортогональных направлению поля $\vec{r}$ в этой точке. Далее на множестве непрерывных вдоль L полей $\boldsymbol{r}$ выделяются два класса полей (входящих P_{ent} и выходящих P_{ex}), а затем для каждого из классов находятся критерии безусловной разрешимости, формулировка которых содержит лишь величины внутренних углов в угловых точках границы. Приводится один простой способ построения границ сферических куполов, для которых задача R является безусловно разрешимой при любом поле направлений $\boldsymbol{r}$ одного из классов P_{ent}, P_{ex}.

Приведем основной результат § 15. Пусть S_ν — сферический купол, $\vec{r}$ — векторное поле на L, задающее непрерывное поле направлений $\boldsymbol{r}$ одного из классов P_{ent}, P_{ex}.

Узел $c_i(R)$ есть особенный узел задачи R тогда и только тогда, когда $\nu_j = \dfrac{\pi}{3}k$ $(1 \leqslant k \leqslant 5)$.

Любой неособенный узел $c_i(R)$ отнесем к одному из шести типов (k-типу) согласно неравенству $\dfrac{k-1}{3}\pi < \nu_i < \dfrac{k}{3}\pi$ $(k = 1, \ldots, 6)$, а *особенный* узел есть узел k-типа, если $\nu_i = \dfrac{\pi}{3}k$ $(k = 1, \ldots, 5)$.

Обозначим через $N_k^{(0)}$ $(N_k^{(1)})$ число узлов $c_i(R)$ k-типа задачи R при условии принадлежности поля направлений $\boldsymbol{r}$ классу P_{ex} (классу P_{ent}).

Теорема 13. *Критерий безусловной разрешимости задачи R в классе $h^{1,q}_{i_1,\ldots,i_m}$ для сферических куполов имеет вид*

$$N \geqslant 3 + m + \ell - n,$$

где ℓ — число особенных узлов, $N \equiv \sum\limits_{k=1}^{6}(3-k)N_k^{(0)}$ для $\boldsymbol{r} \in P_{ex}$, и

$$N = \sum_{k=1}^{3}(2-k)N_k^{(1)} + \sum_{k=4}^{6}(4-k)N_k^{(1)} \quad \text{для } \boldsymbol{r} \in P_{ent}.$$

В § 16 главы 4 задача R рассматривается для поверхностей общего вида (т. е. без условия омбиличности угловых точек) и векторных полей, допускающих разрывы первого рода в этих точках. В этом случае с использованием понятия «индикатор узла задачи T^*», введенного в гл. 1 (§ 3), дана классификация особенных узлов соответствующей задачи Римана–Гильберта и сформулирован критерий безусловной разрешимости (теорема 16.2). Однако приведенный алгоритм нахождения «вклада» каждого узла граничного условия в индекс приводит к решению труднообозримых тригонометрических уравнений [27], что не позволяет получить эффективную формулу для вычисления индекса и сформулировать критерий безусловной разрешимости в геометрической форме. Исключением здесь является лишь случай смешанной граничной задачи. Тем не менее и в самом общем случае можно сформулировать утверждение, устанавливающее связь между «геометрией» границы в угловых точках и картиной разрешимости задачи R.

Теорема 14. *Пусть $\vec{\nu}_j^{(1)}$ — произвольно заданные векторы в точках c_j $(j = 1, \ldots, n)$ соответственно, m — произвольно фиксированное целое число, $0 \leqslant m \leqslant 3n - 3$. Тогда в каждой точке c_j можно указать вектор $\vec{\nu}_j^{(2)}$ и соответствующее набору пар $(\vec{\nu}_j^{(1)}, \vec{\nu}_j^{(2)})$ семейство S_ν поверхностей, для которых задача R безусловно разрешима при любом непрерывном допустимом поле $\vec{r}$, а ее решение зависит точно от m вещественных параметров.*

Замечание. *В формулировке теоремы направление $\vec{\nu}_j^{(2)}$ можно заменить некоторым связным семейством направлений $\vec{\nu}_j^{(2)}(\varepsilon)$, непрерывно зависящим от вещественного параметра ε и включающим в себя направление $\vec{\nu}_j^{(2)}$.*

Отметим также, что в случае неомбилических угловых точек разбиение непрерывных полей направлений $\boldsymbol{r}$ на классы P_{ex} и P_{ent} не позволяет получить эффективные формулы для вычисления индекса граничного условия. Однако если угловые точки удовлетворяют некоторым дополнительным условиям симметрии (например, сходящиеся в угловой точке дуги образуют равные углы с главными направлениями на поверхности в этой точке), то для непрерывных полей $\boldsymbol{r}$ класса P_{ex} или P_{ent} существует алгоритм нахождения эффективных формул для индекса граничного условия соответствующей задачи Римана–Гильберта. Это показано в п. 16.2 на примере угловых точек первого типа (по вспомогательной классификации) и полей направлений $\boldsymbol{r}$ класса P_{ex}.

Предполагается, что все угловые точки c_i являются симметрическими точками (в указанном выше смысле), вводится понятие m-симметрической точки ($m = 1, 2$) и доказывается

Теорема 15. *Если все угловые точки c_i ($i = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 2$) поверхности S есть 2-симметрические точки с внутренними углами $2\nu_i \leqslant 2\omega_i$, где ω_i — величина, вполне определенная главными кривизнами поверхности в точке c_i ($0 < \omega_i < \pi/2$), то задача R безусловно разрешима в классе ограниченных решений для любого* выходящего *поля направлений, а ее решение зависит от $2n - 3$ вещественных параметров. В частности, если $k_i^{(2)} = k_i^{(1)}$, то $\omega_i = \pi/6$.*

Список публикаций автора по теме диссертации

I. Издания, рекомендованные ВАК РФ для публикации материалов докторских диссертаций:

1. Тюриков Е. В. Краевая задача Гильберта для обобщенных аналитических функций с разрывными коэффициентами в граничном условии // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. — 1975. — № 4. — С. 104–105.
2. Тюриков Е. В. Краевые задачи теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и положительной кривизны с кусочно-гладким краем // Матем. сб. — 1977. — Т. 103 (145), № 3 (7). — С. 445–462.
3. Тюриков Е. В. Нелинейная краевая задача Римана–Гильберта для квазилинейных эллиптических систем // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 247, № 5. — С. 1068–1072.
4. Тюриков Е. В. Об одном классе нелинейных задач сопряжения со сдвигом для аналитических функций // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 290, № 4. — С. 796–800.
5. Тюриков Е. В. Метод линеаризации в теории нелинейных задач сопряжения аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. — 2002. — № 1. — С. 34–39.
6. Тюриков Е. В. Об одном расширенном классе бесконечно малых изгибаний регулярных выпуклых поверхностей // Владикавк. мат. ж. — 2005. — Т. 7, № 1. — С. 61–66.
7. Тюриков Е. В. Об одной граничной задаче теории бесконечно малых изгибаний поверхностей // Владик. матем. ж. — 2007. — Т. 9, № 1. — С. 62–68.

8. Тюриков Е. В. Смешанная граничная задача теории бесконечно малых изгибаний выпуклых поверхностей // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. — 2008. — № 6. — С. 17–22.
9. Тюриков Е. В. Геометрический аналог задачи Векуа–Гольденвейзера // Докл. РАН. — 2009. — Т. 424, № 4. — С. 455–458.
10. Тюриков Е. В. Некоторые достаточные условия разрешимости смешанной граничной задачи И. Н. Векуа // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. — 2009. — № 1. — С. 21–26.
11. Тюриков Е. В. Решение смешанной граничной задачи мембранной теории выпуклых оболочек // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. — 2011. — № 6. — С. 13–18.
12. Тюриков Е. В. Общий случай смешанной граничной задачи мембранной теории выпуклых оболочек // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. — 2012. — № 2. — С. 30–35.
13. Тюриков Е. В. Об одном классе граничных задач мембранной теории выпуклых оболочек // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. — 2012. — № 3. — С. 18–24.
14. Тюриков Е. В. Об одной граничной задаче мембранной теории выпуклых оболочек // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. — 2012. — № 6. — С. 38–41.
15. Тюриков Е. В. Некорректная граничная задача теории бесконечно малых изгибаний поверхностей // Изв. Вузов Сев.Кавк. регион. Серия естеств. науки. — 2013. — № 3. — С. 12–15.

II. Остальные публикации:

16. Тюриков Е. В. Об одной нелинейной краевой задачи теории изгибаний поверхностей // Седьмая Всесоюзная конференция по современным проблемам геометрии (Минск, 3–5 октября, 1979). Тезисы докладов. — БГУ. — 1979. — С. 205.
17. Тюриков Е. В. Нелинейные граничные задачи для квазилинейных эллиптических систем // Всесоюзная школа-семинар «Оптимальное управление. Геометрия и анализ» (Кемерово, 29 сентября–8 октября 1986). Тезисы докладов. — Кемерово, 1986. — С. 125.
18. Тюриков Е. В. О жесткости двусвязного куска овалоида с кусочно гладким краем при втулочной связи // Межд. конф. по геометрии «в целом» (Черкассы, Украина, 12–15 сентября 1995). Тезисы докладов. — ЧИТИ. — 1995. — С. 88–89.
19. Тюриков Е. В. К вопросу о распределении нежестких втулочных

связей для выпуклых поверхностей // Межд. школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 1998). Тезисы докладов. — Ростов-на-Дону, 1998. — С. 76–77.

20. Тюриков Е. В. Расширение класса бесконечно малых изгибаний регулярных локально выпуклых поверхностей // Труды участников межд. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. — Ростов-на-Дону, 2002. — С. 82–83.
21. Тюриков Е. В. Об одной смешанной граничной задаче И. Н. Векуа мембранной теории выпуклых оболочек // Межд. конф. «Векуа-100» (Новосибирск, 28 мая–2 июня 2008). Тезисы докл. — Новосибирск: Новосибирск. гос. ун-т. — 2007. — С. 478–479.
22. Тюриков Е. В. Смешанная граничная задача И. Н. Векуа теории б. м. изгибаний поверхностей // Тезисы докладов 7-й Межд. конф. по геометрии и топологиии. — Черкассы (Украина): ЧГТУ, 2007. — С. 81–82.
23. Тюриков Е. В. Решение задачи Векуа–Гольденвейзера–Фоменко в общем случае // Труды участников межд. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. — Ростов-на-Дону, 2008. — С. 74–76.
24. Тюриков Е. В. Об одном случае смешанной граничной задачи И. Н. Векуа // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. — Владикавказский научный центр РАН. — 2008. — С. 67–74.
25. Тюриков Е. В. Обобщенная граничная задача Гольденвейзера для безмоментных сферических куполов // Труды XIV межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 19–24 июня 2010. — Ростов-на-Дону, 2010. — Т. II. — С. 290–293.
26. Тюриков Е. В. Граничная задача И. Н. Векуа для обобщенных сферических куполов // Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнения и их приложениям. — Владикавказский научный центр РАН. — 2010. — Т. 4. — С. 290–297.
27. Тюриков Е. В. Обобщенная граничная задача И. Н. Векуа мембранной теории выпуклых оболочек // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. — Владикавказский научный центр РАН. — 2011. — Т. 5. — С. 225–229.
28. Тюриков Е. В. О разрешимости обобщенной граничной задачи мем-

бранной теории выпуклых оболочек // Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа-II» (Ростов-на-Дону, 22–26 апреля 2012). Тезисы докладов. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2012. — С. 74.

29. Тюриков Е. В. Об одном геометрическом аналоге смешанной граничной задачи мембранной теории выпуклых оболочек // Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-III» (Ростов-на-Дону, 2–6 июня 2013). Тезисы докладов. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2013. — С. 85.