КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Насибуллин Рамиль Гайсаевич

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ С ВЕСАМИ, ИМЕЮЩИМИ СТЕПЕННЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2013

Работа выполнена на кафедре теории функций и приближений Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Авхадиев Фарит Габидинович.
Официальные оппоненты:	Лосев Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор ФГАОУ ВПО «Волгоградский государственный университет»,
	Тимербаев Марат Равилевич, доктор физико-математических наук, профессор ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Российский университет дружбы народов».

Защита состоится «19» декабря 2013 г. в 16 00 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань ул. Кремлевская, 35.

Автореферат разослан «__» ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена неравенствам типа Харди. Рассматриваемые неравенства связывают в одномерном случае функцию и ее производную, а в многомерном случае — функцию и модуль ее градиента.

Актуальность темы диссертации. Помимо самостоятельного интереса, неравенства типа Харди находят важные применения в разных областях математики и математической физики. Например, С.Л. Соболев[1] использовал неравенства типа Харди в теории вложений функциональных пространств, как с весом, так и без веса, и также применял их при оценке потенциала Рисса. Ф.Г. Авхадиев нашел применение неравенствам типа Харди при оценке жесткости кручения. Соответствующие результаты А. Лаптева и Т. Вейдла, А. Балинского, А. Лаптева и А.В. Соболева могут применяться при изучении отрицательности спектра двумерного оператора Шредингера и связаны с проблемой существования резонансных состояний.

Не останавливаясь на подробностях, отметим, что неравенства типа Харди используются в теории интегральных и дифференциальных уравнений, в нелинейном анализе, при изучении краевых задач с особенностями. Точные значения констант в неравенствах Харди или их оценки используются при получении оценок нижней границы спектра эллиптических дифференциальных операторов с вырождающимися коэффициентами.

Основное неравенство Харди для абсолютно непрерывной функции $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ такой, что $f(0) = 0$, $f' \in L^2(0,\infty)$, $f \not\equiv 0$, можно записать следующим образом:

$$\int\limits_0^\infty \frac{f^2}{x^2}dx < 4\int\limits_0^\infty f'^2 dx. \tag{1}$$

Константа 4 является точной, но не существует экстремальной функции, на которой достигается равенство.

Одномерные неравенства Харди вида (1) обобщались в различных направлениях такими авторами, как Дж. Таленти, Дж. Томаселли, Б. Макенхоупт, В.Г. Мазья, В.Д. Степанов, А. Куфнер и Л.Э. Перссон, В. Левин, Ф.Г. Авхадиев и К.-Й. Виртц, Д.В. Прохоров и ряд других математиков. Например, Дж. Таленти и Дж. Томаселли получили условия на весовые

[1]Соболев, Л.С.*Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных производных* / Л.С. Соболев. – М.: Наука, 1989. – 254 С.

функции в одномерных неравенствах типа Харди, которые необходимы и достаточны для выполнения соответствующего неравенства.

Широкое развитие получили неравенства типа Харди в многомерных областях следующего вида:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\delta^2} dx \leq c_n(\Omega) \int\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx, \qquad (2)$$

предполагающие, что область интегрирования Ω — собственное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $f \in C_0^1(\Omega)$, ∇f — градиент этой функции, $\delta = \delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ — функция расстояния до границы области.

Известно, что для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ константа $c_n(\Omega)$ в неравенстве (2) равна 4. В обосновании этого факта приняли участие ряд математиков: Е.Б. Дэвис, Т. Матскевич и П.Е. Соболевский, Х. Брезис и М. Маркус, М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптев и другие. Для области с локально липшицевой границей константа Харди существует и конечна. Однако, липшицевость границы не является необходимым условием конечности константы Харди. Доказаны неравенства типа Харди при более общих условиях на границу множества. В этом направлении работали А. Анкона, Х. Брезис и М. Маркус, Е.Б. Дэвис, П. Коскела и Х. Цонг, Й.Л. Льюис, В.Г. Мазья, В.М. Миклюков и М.К. Вуоринен, А. Ваннебо, Ф.Г. Авхадиев, А. Лаптев и А.В. Соболев, и другие математики.

При исследовании многомерных вариационных неравенств типа Харди константы являются специальными функционалами, зависящими от области Ω и числовых параметров задачи. Основной трудностью является оценка этих констант.

Пусть Ω — открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$. Запишем функционал следующего вида:

$$c_p(s, \Omega) = \sup \left\{ \left\| \frac{f}{\delta^{s/p}} \right\|_{L^p(\Omega)} : f \in C_0^\infty(\Omega), \left\| \frac{\nabla f}{\delta^{s/p-1}} \right\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\},$$

где $C_0^\infty(\Omega)$ — множество непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω.

Известно, что при $p \in [1, \infty)$ и $s \in \mathbb{R}$

$$c_p(s, \mathbb{R}^n \backslash \{0\}) = \frac{p}{|s-n|}, \; c_p(s, H) = \frac{p}{|s-1|},$$

где H — полупространство в $\mathbb{R}^n$ (см. К. Бэндл, М. Флечер, В.Г. Мазья, В. Опик, А. Куфнер). В работах Е.Б. Дэвиса, В.Г. Мазьи, М. Маркуса, В. Мичела, Й. Пинховира рассмотрен случай, когда Ω является выпуклой областью. Оказывается, что при $p > 1$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \neq \mathbb{R}^n$, верно равенство

$$c_p(p, \Omega) = \frac{p}{p-1}.$$

Получены также оценки $c_p(s, \Omega)$ для невыпуклых областей. А именно, если Ω — односвязная плоская область, то (А. Анкона)

$$c_2(2, \Omega) \leq 4.$$

В случае, когда Ω — область с гладкой границей, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, константа

$$c_p(p, \Omega) \geq p/(p-1)$$

(см. Е.Б. Дэвис, М. Маркус, В. Мичел, Й. Пинховир).

Й.Л. Льюис доказал, что *если $p > n$, то постоянная $c_p(p, \Omega)$ конечна для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, то есть никаких ограничений на границу области не требуется.* А. Ваннебо обобщил утверждение Й.Л. Льюиса, показав, что *существует число $\varepsilon > 0$, зависящее разве лишь от показателя p и от размерности пространства n и такое, что условия*

$$p > n, \qquad s > p - \varepsilon$$

гарантируют существование конечной постоянной $c_p(s, \Omega)$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Ф.Г. Авхадиев[2] получил более общий результат, а именно, *если $s > n$, то для любой открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, верна оценка*

$$c_p(s, \Omega) \leq \frac{p}{s-n}.$$

Причем, в общем случае константу $p/(s-n)$ нельзя улучшить.

Обсудим случай, когда $s = n$. Оказывается, что при $s = n$ существуют области, для которых соответствующая постоянная Харди равна бесконечности, например, при любом $p \geq 1$

$$c_p(n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \infty.$$

То есть при $s = n$ нужно накладывать некоторые дополнительные ограничения на границу множества. Из работ, относящихся к этой тематике, отметим

[2] Avkhadiev, F.G. *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* / F.G. Avkhadiev // Lobachevskii J. Math. – 2006. – V. 21. – P. 3–31.

статьи Ф.Г. Авхадиева, А. Анконы, Х. Поммеренке, Е.Б. Дэвиса, А. Лаптева и А.В. Соболева, П. Коскела и Х. Цонг, В.М. Миклюкова и М.Р. Вуоринена, В.Г. Мазьи. Например, Ф.Г. Авхадиев, используя веса с логарифмическими особенностями, для произвольной области Ω с конечным внутренним радиусом, при $p \geq 1, s = n$ и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ получил соответствующее неравенство типа Харди. То есть логарифмический вес помогает обойти особенности, возникающие при $s = n$. Можно сказать, что логарифмический вес компенсирует "плохое" поведение границы области.

Как было отмечено выше, константа $p^p(s-n)^{-p}$ является точной, то есть в общем случае константу $p^p(s-n)^{-p}$ нельзя улучшить. Но обнаружено интересное явление: возможно уточнение соответствующего неравенства Харди путем добавления дополнительного слагаемого в областях с конечным внутренним радиусом. Неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми посвящено множество работ. Отметим работы Х. Брезиса и М. Маркуса, М. Хоффман-Остенхоф, Т. Хоффман-Остенхофа и А. Лаптева, Ж. Тидблома, Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртца, Г. Барбатиса, С. Филиппаса и А. Тертикаса, В.Г. Мазьи и А. Тертикаса.

Цель работы. Целью работы является доказательство новых неравенств типа Харди. Исследование ведется в трех направлениях. Первое направление связано с неравенствами типа Харди в произвольных областях в терминах функции расстояния до границы области. Здесь рассматриваются два вопроса. Первый вопрос — существуют ли другие веса для которых будет выполнено соответствующее неравенство типа Харди при $s = n$ при наличии некоторых дополнительных геометрических ограничений на область? Второй естественный вопрос — существует ли аналог неравенства в случае, когда параметр $s \in (-\infty, n)$?

Второе направление наших исследований относится к неравенствам с дополнительными слагаемыми в областях, регулярных в смысле Е.Б. Дэвиса. Доказываются неравенства с весами, имеющими степенные и логарифмические особенности. Наши результаты обобщают соответствующие утверждения Ж. Тидблома[3] и результат М. Хоффман-Остенхоф, Т. Хоффман-Остенхофа, А. Лаптева[4].

[3] Tidblom, J. *A geometrical version of Hardy's inequality for* $W_0^{1,p}(\Omega)$ / J. Tidblom // Proc. Amer. Math. Soc. – 2004. – No 132. – P. 2265–2271.

[4] Hoffmann-Ostenhof, M. *A geometrical version of Hardy's inequality* / M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof , A. Laptev // J. Funct. Anal. – 2002. – V. 189. – No. 2. – P. 539–548.

Третье направление связанно с неравенствами типа Харди в форме Ю.А. Дубинского[5]. Рассматриваются новые неравенства типа Харди с весами, содержащими модули логарифма.

Научная новизна. В диссертационной работе доказаны новые неравенства типа Харди. Особенностью полученных неравенств является наличие в весах степенных и логарифмических особенностей. Сначала мы получаем новые одномерные неравенства и распространяем их каким-нибудь известным методом на случай многомерных областей. Рассматриваем соответствующие неравенства в произвольных и выпуклых областях, в областях регулярных по Е.Б. Дэвису, во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, могут послужить некоторым инструментом для дальнейших теоретических исследований в теории вложения функциональных пространств и в теории эллиптических дифференциальных операторов с вырождающимися коэффициентами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на итоговых научных конференциях Казанского университета (2010 — 2013 гг.), на молодежной научной школе–конференции "Лобачевские чтения — 2010" (Казань), на международных Казанских летних научных школах–конференциях "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2011, 2013 гг.), на всероссийском конкурсе научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук в рамках Всероссийского фестиваля науки (Москва, 2011 г.), на Открытом конкурсе научных работ студентов и аспирантов им. Н.И. Лобачевского (Казань, 2012 г.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 7 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 117 страницах машинописного текста и состоит из введения, трех глав и списка литературы из 96 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит обоснование актуальности темы исследования с некоторыми примерами, обзор литературы по теме диссертации и краткое изложение основных результатов.

[5] Дубинский, Ю.А. *Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях* / Ю.А. Дубинский // Тр. МИАН. – 2010. – Т. 269 – С. 112–132.

В первой главе получены неравенства типа Харди в произвольных пространственных областях из $\mathbb{R}^n$, но при наличии дополнительного условия:

$$\delta_0 = \delta_0(\Omega) = \sup\{\delta(x) : x \in \Omega\} < \infty.$$

Доказываются новые неравенства с весами, содержащими степени и логарифмы функции расстояния до границы области. Полученные неравенства являются аналогами неравенства из статьи Ф.Г. Авхадиева[2] в случае, когда параметр $s < n$ и $s = n$. При $s = n$ имеем неравенства с логарифмическими весами, а при $s < n$ — неравенства со степенной особенностью.

В пункте 1.1.1 доказаны новые одномерные "L^1-неравенства" с логарифмическими весами, частные случаи которых, будут использованы для получения основных результатов. L^p-версии неравенств получаем с помощью L^p-леммы:

Лемма 1.1.5. *Предположим, что Ω является открытым множеством $n \geq 1, w_1 = w_1(x) > 0, w_2 = w_2(x) \geq 0$ на Ω и $J : C_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ — некоторый функционал. Если для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$*

$$J(f) + \int_\Omega |f| w_1 dx \leq c \int_\Omega |\nabla f| w_2 dx, \quad c = const > 0,$$

то для любого $p \in (1, \infty)$, для любого $l \in [1, p]$ и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$

$$lJ(|f|^p) + \int_\Omega |f|^p w_1 dx \leq (cp)^l \int_\Omega |f|^{p-l} |\nabla f|^l w_1^{1-l} w_2^l dx.$$

Пункт 1.1.2 посвящен пространственным случаям неравенств.

Для целых $k \geq 0$ положим

$$e_0 = 1, \quad e_{k+1} = \exp e_k, \quad \ln_0 x = x, \quad \ln_{k+1}(x) = \ln \ln_k(x).$$

Отметим, что корректная определенность области определения функции $\ln_k$ при соответствующем k достигается за счет e_k.

Пусть Ω — открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$, $C_0^1(\Omega)$ — семейство непрерывно-дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω и $\delta = \delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ — функция расстояния до границы области.

Основные результаты параграфа §1.1 приведены в следующих четырех теоремах.

Теорема 1.1.5. *Пусть Ω — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, причем $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $\delta_0(\Omega) < \infty$, и пусть $k \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty)$. Если $l \in [1, p]$, то* *для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ верно следующее неравенство типа Харди*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^n}\mathcal{A}(\delta)dx \le A_{p,l}(\Omega) \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-l}|\nabla f|^l}{\delta^{n-l}}\mathcal{B}(\delta)dx, \qquad (3)$$

где

$$\mathcal{A}(\delta) = \frac{1}{\ln\dfrac{\delta_0 e_k}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_k \dfrac{\delta_0 e_k}{\delta}}$$

и

$$\mathcal{B}(\delta) = \left(\ln\frac{\delta_0 e_k}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_k \frac{\delta_0 e_k}{\delta}\right)^{l-1} \left(\ln_{k+1} \frac{\delta_0 e_k}{\delta}\right)^l,$$

причем точная, т.е наименьшая из возможных постоянных $A_{p,l}(\Omega)$ в этом неравенстве допускает оценку

$$A_{p,l}(\Omega) \le p^l.$$

Теорема 1.1.6. *Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty)$. Если $l \in [1, p]$ и $\beta \in (1, \infty)$, то для произвольного открытого множества Ω из $\mathbb{R}^n$ $(\Omega \neq \mathbb{R}^n, \delta_0(\Omega) < \infty)$ и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ верно неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^n}\mathcal{C}(\delta)dx \le D_{p,l}(\beta, \Omega) \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-l}|\nabla f|^l}{\delta^{n-l}}\mathcal{D}(\delta)dx,$$

где

$$\mathcal{C}(\delta) = \frac{1}{\ln\dfrac{\delta_0 e_{k+1}}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_k \dfrac{\delta_0 e_{k+1}}{\delta} \left(\ln_{k+1} \dfrac{\delta_0 e_{k+1}}{\delta}\right)^{\beta}}$$

и

$$\mathcal{D}(\delta) = \left(\ln\frac{\delta_0 e_{k+1}}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_k \frac{\delta_0 e_{k+1}}{\delta}\right)^{l-1} \left(\ln_{k+1} \frac{\delta_0 e_{k+1}}{\delta}\right)^{\beta(l-1)},$$

причем наименьшая из возможных констант в этом неравенстве $D_{p,l}(\beta, \Omega)$ допускает оценку

$$D_{p,l}(\beta, \Omega) \le \left(\frac{p}{\beta - 1}\right)^l.$$

Теорема 1.1.7. *Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty)$. Если $l \in [1, p]$ и $\beta \in (0, 1)$, то для произвольного открытого множества Ω из $\mathbb{R}^n$ $(\Omega \neq \mathbb{R}^n, \delta_0(\Omega) < \infty)$ и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ верна оценка*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^n}\mathcal{E}(\delta)dx \le H_{p,l}(\beta, \Omega) \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-l}|\nabla f|^l}{\delta^{n-l}}\mathcal{F}(\delta)dx,$$

где

$$\mathcal{E}(\delta) = \frac{1}{\ln \frac{\delta_0 e_k}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_k \frac{\delta_0 e_k}{\delta} \left(\ln_{k+1} \frac{\delta_0 e_k}{\delta} \right)^{\beta}}$$

и

$$\mathcal{F}(\delta) = \left(\ln \frac{\delta_0 e_k}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_k \frac{\delta_0 e_k}{\delta} \right)^{l-1} \left(\ln_{k+1} \frac{\delta_0 e_k}{\delta} \right)^{l-\beta},$$

причем для точной константы $H_{p,l}(\beta, \Omega)$ верно следующее неравенство

$$H_{p,l}(\beta, \Omega) \leq \left(\frac{p}{1-\beta} \right)^{l}.$$

Теорема 1.1.8. *Пусть $p \in [1, \infty)$ и $l \in [1, p]$. Если $r \in (1, \infty)$ и $q \in (0, 1)$, то для произвольного открытого множества Ω из $\mathbb{R}^n$ $(\Omega \neq \mathbb{R}^n, \delta_0(\Omega) < \infty)$ и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^n} \mathcal{G}(\delta) dx \leq \frac{p^l \left(\Gamma(1-q)\right)^l}{(r-1)^{l(1-q)}} \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-l} |\nabla f|^l}{\delta^{n-l}} \mathcal{H}(\delta) dx,$$

где

$$\mathcal{G}(\delta) = \frac{1}{\left(\ln \frac{\delta_0 e_2}{\delta} \right)^{r} \left(\ln \ln \frac{\delta_0 e_2}{\delta} \right)^{q}}$$

и

$$\mathcal{H}(\delta) = \left(\ln \frac{\delta_0 e_2}{\delta} \right)^{r(l-1)} \left(\ln \ln \frac{\delta_0 e_2}{\delta} \right)^{q(l-1)}.$$

Цель параграфа §1.2 — показать, что константы в теоремах 1.1.5, 1.1.6 при $l = 1$ и 1.1.7 в общем случае нельзя заменить меньшими постоянными, то есть существуют экстремальные области Ω_0, Ω_1 и Ω_2 для которых соответственно выполнены равенства

$$A_{p,l}(\Omega_0) = p^l, \; D_{p,1}(\beta, \Omega_1) = \frac{p}{\beta - 1}, \; H_{p,l}(\beta, \Omega_2) = \left(\frac{p}{1-\beta} \right)^{l}.$$

А именно, доказывается, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ существуют область Ω_0 и функция из пространства $C_0^1(\Omega_0)$ такие, что соответствующее неравенство (3) не будет выполнено при замене p^l на $p^l - \varepsilon_0$. Аналогичное утверждение покажем для константы $D_{p,1}(\beta, \Omega)$ и константы $H_{p,l}(\beta, \Omega)$. Отметим, что неравенство теоремы 1.1.6 при $l = 1$ является точным для шара с проколотым центром.

В параграфе §1.3 рассматриваются новые весовые неравенства в произвольных открытых множествах, содержащие степенные особенности, и приводятся аналоги этих неравенств для выпуклых областей. Отметим, что степенные "L^1-неравенства" в выпуклых областях являются точными.

Для произвольной открытой области имеет место

Теорема 1.3.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное открытое множество с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, причем $n \geq 1$, $\delta := dist(x, \partial\Omega)$. Если $1 \leq p < \infty$, $l \in [1,p]$ и $-\infty < s < n$, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p\delta_0^{n-s}}{n-s}\right)^l \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-l}|\nabla f|^l}{\delta^{s+l(n-1-s)}} dx.$$

В случае выпуклых областей справедлива

Теорема 1.3.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, компоненты которого являются выпуклыми множествами, с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, и пусть $\delta := dist(x, \partial\Omega)$. Если $1 \leq p < \infty$ и $-\infty < s < 1$, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{1-s}\right)^p \delta_0(\Omega)^{p(1-s)} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-sp}} dx \quad \forall f \in C_0^1(\Omega).$$

Во второй главе получены новые весовые неравенства типа Харди в областях регулярных по Е.Б. Дэвису. Сначала доказываются неравенства в произвольных областях, далее показывается, что неравенства принимают существенно простой вид в выпуклых областях и в областях с регулярной границей.

Доказанные в этой главе неравенства со степенными весами являются аналогами соответствующих результатов М. Хоффман-Остенхоф, Т. Хоффман-Остенхофа и А. Лаптева, Ж. Тидблома.

В параграфе §2.1 рассматриваются неравенства для функций, заданных на отрезке числовой прямой, приводятся вспомогательные утверждения и необходимые определения. Одномерные неравенства используются нами для доказательства многомерных аналогов неравенств.

Верна следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *Пусть $u \in C_0^\infty(a,b)$. Тогда при $p \geq s > 1$ имеем*

$$\int\limits_a^b \frac{|u'(t)|^p}{\rho(t)^{s-p}} dt \geq \left(\frac{s-1}{p}\right)^p \left(\int\limits_a^b \frac{|u(t)|^p}{\rho^s(t)} dt - \frac{p-1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^s} \int\limits_a^b |u(t)|^p dt\right),$$

где

$$\rho(t) = dist(t, \mathbb{R} \setminus [a,b]) = \min(t-a, b-t).$$

В параграфе §2.2 получен аналог неравенства теоремы 2.1.1 в многомерном случае. В доказанных неравенствах используются весовые функции, зависящие от расстояния по направлению.

Пусть Ω — открытая область в $\mathbb{R}^n$. Следуя Е.Б. Дэвису, обозначим через $\tau_\nu(x)$ — расстояние между точкой $x \in \Omega$ и ближайшей точкой, принадлежащей границе $\partial\Omega$ по направлению вектора $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$:

$$\tau_\nu(x) = \min\{s > 0 : x + s\nu \in \Omega\}.$$

Определим также расстояние до границы множества ρ_ν и диаметр множества D_ν вдоль направления ν следующим образом:

$$\rho_\nu(x) = \min\{\tau_{-\nu}(x), \tau_\nu(x)\},\ \ D_\nu(x) = \tau_\nu(x) + \tau_{-\nu}(x).$$

Пусть

$$\delta(x) = \inf_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \tau_\nu(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega),$$
$$\Omega_x = \{y \in \Omega : x + t(y - x) \in \Omega, \forall t \in [0,1]\}.$$

При вышеприведенных обозначениях верна следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *Для произвольной открытой области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *и произвольной функции* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *при* $p \geq s > 1$ *верно следующее неравенство типа Харди:*

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, \nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)} d\omega(\nu) dx \geq$$

$$\geq a(p,s) \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)} dx + (p-1) \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{s/n}} dx \right).$$

где

$$a(p,s) = \left(\frac{s-1}{p} \right)^p.$$

В §2.3 показывается, что в случае выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ неравенство теоремы 2.2.1 может быть существенно упрощено. В параграфе §2.4 представлен специальный класс невыпуклых областей, для которых существуют аналоги неравенства теоремы 2.2.1.

Следуя Е.Б. Дэвису определим псевдодистанцию $m(x)$ от точки x до границы области Ω:

$$\frac{1}{m^2(x)} := \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)}\ .$$

Введем понятие регулярной области в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — регулярная область, если существует конечная константа $c > 0$ такая, что

$$\delta(x) \leq m(x) \leq c\delta(x) \qquad \forall x \in \Omega.$$

Константу c назовем константой регулярности области Ω.

Теорема 2.4.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная регулярная область с константой регулярности c, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ — произвольная функция. Тогда при $p \geq s > 1$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p}{\delta^s(x)} dx \geq K_2 \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\delta^s(x)} dx + K_3 \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx,$$

где

$$K_3 = \frac{a(p,s)2^{s/2}}{c^s} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{D_p(\Omega)\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

$$K_4 = a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s}{n}} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{D_p(\Omega)\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

и

$$D_p(\Omega) := \sup_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \rho_\nu^p(x),\ x \in \Omega,$$

$\Gamma(x)$ *— гамма функция Эйлера.*

Параграф §2.5 посвящен неравенствам в регулярных областях с весами, имеющими логарифмические множители. Сначала доказываются вспомогательные утверждения и вводятся необходимые обозначения.

Для целых $i \geq 0$ положим

$$e_0 = 0, \quad e_1 = 1, \quad e_{i+1} = \exp e_i, \quad \ln_0 x = x, \quad \ln_{i+1} x = \ln(\ln_i x).$$

Определим функции φ_i при целых $k \geq 0$ следующим образом

$$\varphi_i(x, e_k) = \frac{1}{(e_k - \ln x)\ln(e_k - \ln x) \cdot \ldots \cdot \ln_i(e_k - \ln x)},\ i \leq k.$$

Отметим, что корректная определенность областей определения функций $\ln_i$ и φ_i при соответствующих i и k достигается за счет e_k.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.5.1. *Для произвольной открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и произвольной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ при целом $k \geq 0$ верно следующее неравенство типа Харди:*

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx - K_5 \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|\Omega_x|^{2/n}} dx \geq$$

$$\geq \frac{n}{4} \int\limits_\Omega \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{1}{\rho_\nu^2(x)} + \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi_i^2(\frac{\alpha \rho_\nu(x)}{D}, e_k)}{\rho_\nu^2(x)} \right) d\omega(\nu) |u(x)|^2 dx +$$

где

$$K_5 = \left(1 - \sum_{i=0}^{k} \varphi_i^2\left(\frac{\alpha}{2}, e_k\right)\right)^2 \frac{n^{(n-2)/2}}{4} s_{n-1}^{2/n}.$$

Теорема 2.5.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — регулярная область с константой регулярности c и $0 < \alpha \leq 2$. Тогда для произвольной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ при целом $k \geq 0$ верно неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx - K_6 \int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx \geq$$

$$\geq \frac{n}{2c^2} \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} \left(1 + \sum_{i=0}^{k} \varphi_0^2\left(\frac{\alpha\delta}{D}, e_k\right) \cdot \ldots \cdot \varphi_i^2\left(\frac{\alpha\delta}{D}, e_k\right)\right) dx,$$

где

$$K_6 = \left(1 - \sum_{i=0}^{k} \varphi_0\left(\frac{\alpha}{2}, e_k\right) \cdot \ldots \cdot \varphi_i\left(\frac{\alpha}{2}, e_k\right)\right)^2 \frac{n^{(n-2)/2}}{4} s_{n-1}^{2/n} \frac{1}{|\Omega|^{2/n}}.$$

Третья глава посвящена аналогам неравенств, полученных Ю.А. Дубинским. Особенностью результатов является наличие модуля логарифма в весовых функциях.

В параграфе §3.1 первой главы приводятся вспомогательные результаты и доказываются одномерные неравенства. Отметим, что мы используем подход Ю.А. Дубинского при доказательстве соответствующих утверждений.

Пусть R произвольное положительное число и положим, что

$$F(r) = \begin{cases} \int\limits_r^R f(t)dt \text{ при } & r \in (0, R), \\ \int\limits_R^r f(t)dt \text{ при } & r \in (R, \infty). \end{cases}$$

Тогда верна следующая

Теорема 3.1.1. *Пусть* $p \in [1,\infty),\ l \in [1,p],\ 1 < s < p+1$ *и* $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *— локально интегрируемая функция такая, что интеграл*

$$\int\limits_0^\infty |F(r)|^{p-l}\,|f(r)|^l\, r^{l-1}\left|\ln\frac{r}{R}\right|^{l-s} dr$$

сходится. Тогда для любого $R > 0$ *верно следующее неравенство*

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{r\left|\ln\frac{r}{R}\right|^s}\,|F(r)|^p\,dr \le \left(\frac{p}{s-1}\right)^l \int\limits_0^\infty |F(r)|^{p-l}|f(r)|^l r^{l-1}\left|\ln\frac{r}{R}\right|^{l-s} dr.$$

Оказывается неравенство теоремы 3.1.1 будет верным не только в интервале $(0,\infty)$, но и также в интервале $(r_0, R_0) \subset (0,\infty)$. Этот результат приведен в **теореме 3.1.2.**

В **теореме 3.2.1** получен аналог неравенства теоремы 3.1.1 с другим ядром интеграла и при определении подинтегральной функции F использован весовой множитель.

В параграфе §3.2 доказываются неравенства, веса которых содержат вложенные логарифмы и экспоненты.

Параграф §3.3 посвящен неравенствам в многомерном случае. В последнем параграфе §3.4 третьей главы устанавливается точность констант в неравенствах теорем 3.1.1 и 3.2.1.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

[1] Авхадиев, Ф.Г. *Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Известия вузов. Матем. – 2011. – № 9. – С. 90–94.

[2] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства типа Харди с логарифмическими и степенными весами для специального семейства невыпуклых областей* / Р.Г. Насибуллин, А.М. Тухватуллина // Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5. – №2. – С. 43–55.

Статьи в сборниках научных трудов и тезисов докладов на научно - практических конференциях

[3] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства типа Харди, включающие повторные логарифмы* / Р.Г. Насибуллин // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2011. – Т. 43. – С. 262–263.

[4] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства типа Харди с логарифмическими особенностями в ядре* / Р.Г. Насибуллин // Сборник научных трудов победителей всероссийского конкурса научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук в рамках Всероссийского фестиваля науки. – М.: Изд-во РГСУ. – 2011. – С. 199–209.

[5] Авхадиев, Ф.Г. *Неравенства типа Харди в областях с ограниченным внутренним радиусом* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2012. – Т. 45. – С. 3–4.

[6] Насибуллин, Р.Г. *О точности двух констант в неравенствах типа Харди* / Р.Г. Насибуллин // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2013. – Т. 46. – С. 331–333.

[7] Насибуллин, Р.Г. *Логарифмические особенности в неравенствах типа Харди* / Р.Г. Насибуллин // Сборник материалов Открытого конкурса научных работ студентов и аспирантов им. Н.И. Лобачевского – Казань: Изд-во: Научный Издательский Дом. – 2012. – С. 78–79.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В диссертационной работе получены новые неравенства типа Харди с весами, имеющими степенные и логарифмические особенности. Доказаны неравенства в одномерном случае и получены их многомерные аналоги. Рассмотрены соответствующие неравенства в произвольных и выпуклых областях, в областях регулярных по Е.Б. Дэвису, во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Показана точность некоторых констант. Соответствующие результаты обобщают утверждения Ф.Г. Авхадиева, М. Хоффман-Остенхоф, Т. Хоффман-Остенхофа и А. Лаптева, Дж. Тидблома и Ю.А. Дубинского. Полученные неравенства могут послужить некоторым инструментом для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Авхадиеву Фариту Габидиновичу за всяческую поддержку, за ценные советы, критические замечания и постоянное внимание к работе.