

УДК 517.544

ЗАДАЧА РИМАНА НА ДВУЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КЛАССА O_{A^0B}

Н.А. Бариева, И.А. Бикчантаев

Аннотация

В статье И.А. Бикчантаева (Задача Римана на ультрагиперэллиптической поверхности // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 2. – С. 19–31) были получены условия разрешимости и дано явное решение краевой задачи Римана на ультрагиперэллиптической поверхности. В настоящей работе этот результат обобщается на случай двулистной римановой поверхности класса O_{A^0B} .

Ключевые слова: краевые задачи, римановы поверхности.

1. Предварительные сведения и результаты. Постановка задачи

1.1. Введем следующие термины и обозначения (см. [1]). Множество M на римановой поверхности или на плоскости называется AB -устранимым, если для некоторой окрестности U множества M любая аналитическая и ограниченная в $U \setminus M$ функция аналитически продолжима в U . Пусть $AB(R)$ – семейство аналитических и ограниченных функций на римановой поверхности R ; O_{AB} – класс римановых поверхностей, на которых не существует непостоянных AB -функций; SO_{AB} – семейство римановых поверхностей с краем $\{\bar{R}\}$ такое, что каждая AB -функция f на $\bar{R}$ с $\Re f = 0$ на ∂R сводится к постоянной; как известно (см. [1, гл. II, § 1, п. 2C]), $\bar{R}$ принадлежит SO_{AB} тогда и только тогда, когда ее дубль относительно края ∂R принадлежит O_{AB} . Областью с краем $\bar{D} = D \cup \partial D$ будем называть объединение области D на R с аналитической жордановой относительной границей ∂D . Через O_{A^0B} обозначим класс римановых поверхностей R таких, что каждая подобласть с краем $\bar{R}'$ на R принадлежит SO_{AB} . Имеет место строгое включение $O_{A^0B} \subset O_{AB}$ (см. [1, гл. II, § 1, п. 2C]).

1.2. В настоящей статье мы будем считать, что рассматриваемая риманова поверхность R принадлежит классу O_{A^0B} и ее род равен бесконечности.

Предложение 1. Пусть $\bar{D}$ – область с компактным краем на римановой поверхности R класса O_{A^0B} . Тогда $\bar{D}$ может быть вложена в риманову поверхность с краем $\bar{V}$ такую, что $\partial V = \partial D$, множество $V \setminus D$ AB -устранимо и любая ее подобласть конечного рода с компактной относительной границей относительно компактна. Если род области D конечен, то $\bar{V}$ компактна.

Доказательство. Если род области D конечен, то требуемый результат вытекает из того, что $R \in O_{A^0B}$, и теоремы из [1, гл. II, § 3, п. 15A], примененной к дублю $\bar{D}$ относительно края ∂D . Пусть теперь род области D бесконечен. Пусть $\{\bar{D}_n\}$ – исчерпание $\bar{D}$ областями с краем такими, что край ∂D_n компактен и содержит ∂D , $\bar{D}_n \subset D_{n+1} \cup \partial D$, род поверхности D_n конечен и все компоненты $D \setminus \bar{D}_n$ – области рода бесконечность. Каждая $\bar{D}_n$ вложима в компактную риманову поверхность с краем $\bar{V}_n$, причем ее род равен роду $\bar{D}_n$, $\partial V_n = \partial D_n$ и множество $V_n \setminus D_n$

является AB -устранимым. Тогда область $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ удовлетворяет условиям предложения. Действительно, то, что $V \setminus D$ AB -устранимо, следует из определения поверхности V . Пусть V' – область на V , род которой конечен и относительная граница $\partial V'$ компактна. При достаточно большом n справедливо вложение $V_n \supset \supset \partial V'$. Покажем, что $V' \subset V_n$. Если допустить противное, то найдется точка $q \in V' \setminus V_n$. Так как множество $V \setminus V_n$ не содержит точек относительной границы области V' , то V' должна включать в себя компоненту множества $V \setminus V_n$, содержащую точку q . Но род последней, а, следовательно, и род V' , равен бесконечности. Полученное противоречие показывает, что $V' \subset V_n$ и $\overline{V'}$ как замкнутое подмножество компактного множества $\overline{V_n}$ компактно. Предложение доказано. $\square$

Доказанное утверждение справедливо также и в том случае, когда относительная граница области D является пустым множеством, то есть $D = R$. Соответствующую этому случаю область V обозначим через R^* .

1.3. Если f – мероморфная функция на D , ограниченная вблизи идеальной границы, то она аналитически продолжима в V ; это продолжение условимся обозначать той же буквой.

Предположим теперь, что на R существует мероморфная функция z , принимающая каждое значение $z = a \in \overline{\mathbb{C}}$ не более двух раз с учетом кратности. Тогда R может быть реализована в виде накрывающей (R, z) расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Продолженная аналитически на R^* функция z определяет безграничную накрывающую (R^*, z) для области $z(R^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$, на которой существует отличное от тождественного преобразование наложения j_{R^*} , то есть конформный автоморфизм поверхности R^* , удовлетворяющий соотношению $z(j_{R^*}(q)) = z(q)$ для всех $q \in R^*$.

Род поверхности V , очевидно, равен роду D и является конечным в том и только в том случае, если накрывающая (V, z) имеет конечное число точек ветвления.

Предложение 2. Пусть U – область на R^* рода бесконечность с компактной относительной границей ∂U , f – мероморфная функция в U , ограниченная вблизи идеальной границы области U . Тогда f принимает одно и то же значение в точках области U , имеющих одинаковые проекции при отображении $z : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Пусть $U_0 \subset U$ – область с теми же свойствами, что и U , кроме того, $j_{R^*}(U_0) = U_0$ и функция f голоморфна в $\overline{U_0}$. Множество M проекций точек ветвления накрывающей (U_0, z) на $\overline{\mathbb{C}}$ бесконечно и множество μ его предельных точек совпадает с множеством $\partial(z(U_0)) \setminus z(\partial U_0)$. Пусть W – область на $\overline{\mathbb{C}}$, содержащая $z(U_0)$ и такая, что $\partial W = z(\partial U_0)$. Так как относительная граница ∂U_0 области U_0 компактна, то $\partial W = z(\partial U_0)$ не содержит точек множества μ . Поэтому $\overline{M} = M \cup \mu \subset W$. Положим $f_0(z) := (f(j_{R^*}(q(z))) - f(q(z)))^2$, где $q(z)$ – точка области U_0 такая, что $z(q(z)) = z$. Функция f_0 есть AB -функция в $z(U_0)$, исчезающая в точках множества M . Множество $W \setminus z(U_0)$ не имеет внутренних точек. Действительно, если точка a вместе со своей окрестностью принадлежит $W \setminus z(U_0)$, то непостоянная функция $1/(z - a)$ есть AB -функция на R , что невозможно. Поэтому $W \setminus z(U_0) = \mu$. Следовательно, f_0 голоморфно продолжима в область W и обращается в нуль на множестве $\overline{M} = M \cup \mu \subset W$. По внутренней теореме единственности $f_0 = 0$. Предложение доказано. $\square$

1.4. Пусть Γ – кусочно-гладкий контур на R , T – множество узлов контура Γ . Будем предполагать, что $z(\Gamma)$ также есть кусочно-гладкий контур на $\mathbb{C}$, причем Γ и $z(\Gamma)$ не имеют точек возврата. Ориентацию на Γ выберем так, чтобы

на линейных участках контура, имеющих одинаковые проекции на z -плоскость $\mathbb{C}$, ориентация контура была согласована. Тогда ориентацию $z(\Gamma)$ можно определить как индуцированную отображением $z : \Gamma \rightarrow z(\Gamma)$.

Зададим дивизор D , носитель которого лежит в $R \setminus \Gamma$, и функции $G \in H_{\mu,(\mu)}(\Gamma, T)$ и $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, причем $G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ (мы используем функциональные пространства $H_{\mu,(\nu)}(\Gamma, T)$ и $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, введенные на плоских контурах А.П. Солдатовым [2] и распространенные в [3] на контуры, расположенные на римановой поверхности). К множеству T отнесем все узлы контура Γ , все точки ветвления накрывающей (R, z) , лежащие на Γ , все точки разрыва коэффициентов G и g , все точки $t \in \Gamma$ такие, что $z(t)$ есть узловая точка контура $z(\Gamma)$; в него можно включить также любое конечное число других точек контура Γ . Не умаляя общности, будем считать, что бесконечно удаленная точка не лежит на $z(\Gamma) \cup z(\text{supp } D)$.

Рассмотрим краевую задачу Римана в следующей постановке.

Найти кусочно-мероморфную функцию F на R с линией скачков Γ , кратную дивизору $1/D$ и ограниченную в окрестности идеальной границы поверхности R , предельные значения которой на Γ принадлежат классу $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, и удовлетворяют соотношению

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma. \quad (1)$$

2. Случай, когда задача Римана сводится к плоской

Пусть Γ – контур на R такой, что каждая компонента множества $R \setminus \Gamma$ имеет род, равный бесконечности.

2.1. Через $q(z)$ будем обозначать поднятие точки $z \in \overline{\mathbb{C}}$ на накрывающую (R^*, z) . Из [3] и предложений 1 и 2 следует, что если F – решение задачи (1), то функция F аналитически продолжима на $R^* \setminus \Gamma$, принимает одинаковые значения в точках накрывающей (R, z) , принадлежащих одной компоненте $R \setminus \Gamma$ и имеющих одинаковую проекцию на z -плоскость; при этом функция $f(z) = F(q(z))$ однозначна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(\Gamma)$ и аналитически продолжима в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$, где γ – множество точек на $z(\Gamma)$, имеющих два прообраза при отображении $z : \Gamma \rightarrow z(\Gamma)$ (точки ветвления накрывающей (R, z) при этом считаются дважды).

Определим в $\overline{\mathbb{C}}$ дивизор Δ , полагая $\text{ord}_{z(q)} \Delta = \min \{ \text{ord}_q D, \text{ord}_{j_{R^*}(q)} D \}$ при $j_{R^*}(q) \neq q$ и $\text{ord}_{z(q)} \Delta = \left\lfloor \frac{1}{2} \text{ord}_q D \right\rfloor$ при $j_{R^*}(q) = q$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ означает целую часть числа.

2.2. Если множество γ является AB -устранимым, то функция f аналитически продолжима на всю комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ и является рациональной функцией, кратной дивизору $1/\Delta$. Из условия (1) вытекает, что в случае разрешимости задачи Римана функции G и g удовлетворяют соотношению $g(t) = (1 - G(t)) f(z(t))$, $t \in \Gamma$, где f – рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. Если это соотношение выполняется, то функция $F(q) = f(z(q))$ является решением краевой задачи Римана (1). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть γ является AB -устранимым множеством. Тогда для разрешимости краевой задачи Римана (1) необходимо и достаточно, чтобы функции G и g были связаны соотношением $g(t) = (1 - G(t)) f(z(t))$, $t \in \Gamma$, где f – рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. При этом любое решение задачи (1) имеет вид $F = f \circ z$.*

Из этой теоремы вытекает, что:

- 1) при $\text{ord } \Delta < 0$ задача (1) имеет решение (равное нулю) только при $g = 0$;
- 2) если $G = 1$, то для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно, чтобы $g = 0$; при этом число линейно независимых решений задачи (1) равно $\max\{0, \text{ord } \Delta + 1\}$;
- 3) если $G(t) \neq 1$, то задача (1) не может иметь более одного решения.

2.3. Предположим теперь, что множество γ не является AB -устранимым; при этом его линейная мера будет положительной. Обозначим через Γ_1 кривую на $R^* \supset R$, гомеоморфную $z(\Gamma)$ относительно отображения $z : \Gamma_1 \rightarrow z(\Gamma)$. Тогда $\Gamma_2 := j_{R^*}(\Gamma_1)$ тоже гомеоморфна $z(\Gamma)$ относительно отображения z и $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = z^{-1}(z(\Gamma))$. Через $\rho_k : z(\Gamma) \rightarrow \Gamma_k$, $k = 1, 2$, обозначим гомеоморфизм $z(\Gamma)$ на Γ_k такой, что $z(\rho_k(\xi)) = \xi$ при $\xi \in z(\Gamma)$. Ориентацию на Γ_k выберем таким образом, чтобы индуцированная ею при проектировании $z : R^* \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ориентация на $z(\Gamma)$ совпадала с уже выбранной в п. 1.4.

Доопределим G и g на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, полагая $G(t) = 1$, $g(t) = 0$ в точках t , не принадлежащих Γ . Тогда функция f на $z(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$f^+(\xi) = G(\rho_k(\xi))f^-(\xi) + g(\rho_k(\xi)), \quad \xi \in z(\Gamma), \quad \Delta^{-1}|(f), \quad k = 1, 2. \quad (2_k)$$

Здесь функции $G(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,(\mu')}(z(\Gamma), z(T))$, где

$$\mu'(z(\tau)) = \begin{cases} \mu, & \tau \in T, \quad j(\tau) \neq \tau \\ \frac{1}{2}\mu, & \tau \in T, \quad j(\tau) = \tau. \end{cases}$$

Функции $g(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$, где

$$\nu(z(\tau)) = \begin{cases} \min\{\lambda(\tau), \lambda(j(\tau))\}, & \tau, j(\tau) \in T, \quad j(\tau) \neq \tau, \\ \lambda(\tau), & \tau \in T, \quad j(\tau) \notin T, \\ \frac{1}{2}\lambda(\tau), & j(\tau) = \tau \in T. \end{cases}$$

Решение задачи (2_k) будем отыскивать в классе функций, предельные значения которых на $z(\Gamma)$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$.

Таким образом, функция f является одновременно решением двух краевых задач Римана на контуре $z(\Gamma)$. Из предположения о том, что каждая компонента множества $R \setminus \Gamma$ имеет род, равный бесконечности, следует, что каждая компонента множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$ содержит бесконечное число проекций точек ветвления накрывающей (R^*, z) . На множество $z(\Gamma) \setminus \gamma$ функция f аналитически продолжима и, следовательно, является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \gamma$, за исключением, возможно, конечного числа полюсов. Поэтому для совпадения решений краевых задач (2_1) и (2_2) достаточно потребовать их совпадения в окрестности некоторых точек $z_k \in \mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$, выбранных по одной в каждой компоненте множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

2.4. Если $G \circ j_{R^*} = G$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то, поскольку $F \circ j_{R^*} = F$, для разрешимости задачи (1) необходимо, чтобы $g \circ j_{R^*} = g$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тогда задачи (2_1) и (2_2) совпадают. Если f – решение задачи (2_k) , то $F = f \circ z$ будет решением задачи (1).

Обозначим через $X(z)$ каноническую функцию задачи (2_k) , предельные значения которой на $z(\Gamma)$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$ и имеющую максимально возможный порядок $\varkappa$ на бесконечности. Тогда при $\varkappa + \text{ord } \Delta \geq -1$ задача

(2_k) разрешима для любой функции $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, и ее общее решение имеет вид

$$f(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi)) d\xi}{X^+(\xi)(\xi - z)} + X(z)\delta(z), \quad (3)$$

где δ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa}$.

При $\varkappa + \text{ord } \Delta < -1$ необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (2_k), а, следовательно, и задачи (1), имеют вид

$$\int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))\omega_j(\xi) d\xi}{X^+(\xi)} = 0, \quad j = 1, \dots, -\varkappa - \text{ord } \Delta - 1, \quad (4)$$

где ω_j – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta\infty^{\varkappa+2}$. При выполнении условий (4) задача (2_k) имеет единственное решение вида (3) с $\delta = 0$.

Условия (4) можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma \cap \Gamma_k} g\theta_j = 0, \quad j = 1, \dots, -\varkappa - \text{ord } \Delta - 1, \quad (5)$$

где $\theta_j(t) = (X^+(z(t)))^{-1}\omega_j(z(t))dz(t)$. Общее решение задачи (1) имеет вид

$$F(q) = \frac{X(z(q))}{2\pi i} \int_{\Gamma \cap \Gamma_k} \frac{g(t) dz(t)}{X^+(z(t))(z(t) - z(q))} + X(z(q))\delta(z(q)). \quad (6)$$

В формулах (5) и (6) k может принимать любое из значений 1 или 2.

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть γ имеет положительную линейную меру и коэффициент G задачи (1) удовлетворяет соотношению $G \circ j_{R^*} = G$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тогда для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы функция g удовлетворяла условиям $g \circ j_{R^*} = g$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и (5). При выполнении этих условий общее решение задачи (1) имеет вид (6), где δ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa}$. Однородная задача (1) имеет $l = \max\{0, \text{ord } \Delta + \varkappa + 1\}$ линейно независимых решений.

2.5. Пусть γ – такое же, как в предыдущем пункте. Будем предполагать, что $G \circ j_{R^*} \neq G$. Ясно, что при этом однородная задача Римана (1) имеет лишь нулевое решение, а неоднородная может иметь не более одного решения. В рассматриваемом случае функция f является решением одновременно двух различных краевых задач Римана (2₁) и (2₂). Обозначим через $X_k(z)$ каноническую функцию (того же класса, что и в п. 2.4) задачи (2_k), $\varkappa_k = \text{ord}_\infty X_k(z)$. При $\varkappa_k + \text{ord } \Delta \geq -1$ задача (2_k) безусловно разрешима и ее общее решение имеет вид

$$f_k(z) = \frac{X_k(z)}{2\pi i} \int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi)) d\xi}{X_k^+(\xi)(\xi - z)} + X_k(z)\delta_k(z), \quad (7)$$

где $\delta_k(z)$ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa_k}$.

При $\varkappa_k + \text{ord } \Delta < -1$ для разрешимости задачи (2_k) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))}{X_k^+(\xi)} \omega_{kj}(\xi) d\xi = 0, \quad j = 1, 2, \dots, -\varkappa_k - \text{ord } \Delta - 1, \quad (8)$$

где ω_{kj} , $j = 1, 2, \dots, -\varkappa_k - \text{ord } \Delta - 1$, – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta \infty^{\varkappa_k+2}$. Полагая $\theta_{kj}(t) = \omega_{kj}(z(t)) [X_k^+(z(t))]^{-1} dz(t)$, условия (8) перепишем в виде

$$\int_{\Gamma \cap \Gamma_k} g \theta_{kj} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, -\varkappa_k - \text{ord } \Delta - 1, \quad k = 1, 2. \quad (9)$$

При выполнении условий (9) задача (2_k) имеет единственное решение вида (7) с $\delta_k = 0$. Для того чтобы функции f_k определяли решение исходной задачи (1), должно выполняться равенство $f_1 = f_2$. В силу сказанного в п. 2.3 для этого достаточно потребовать выполнения этого равенства в окрестности некоторых точек $z_m \in \mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$, $m = 1, 2, \dots, l$, принадлежащих различным компонентам множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$, где l – число компонент множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Пусть z_m – точка из $\mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$, в которой функции X_k и f_k голоморфны. Функцию $X_k(z)/2\pi i X_k^+(\eta)(\eta - z)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки z_m :

$$\frac{X_k(z)}{2\pi i X_k^+(\eta)(\eta - z)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kjm}(\eta)(z - z_m)^j.$$

Пусть δ_{kj} , $j = 1, 2, \dots, \varkappa_k + \text{ord } \Delta + 1$, – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta^{-1} \infty^{-\varkappa_k}$, $k = 1, 2$. Тогда

$$X_k(z) \delta_k(z) = \sum_{n=1}^{\varkappa_k + \text{ord } \Delta + 1} a_{kn} X_k(z) \delta_{kn}(z),$$

где a_{kn} – комплексные числа. Разлагая функции $X_k \delta_{kn}$ в ряд Тейлора, имеем:

$$X_k(z) \delta_{kn}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{knjm}(z - z_m)^j.$$

Сравнивая коэффициенты тейлоровских разложений функций f_1 и f_2 , получим соотношения, эквивалентные равенству $f_1 = f_2$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\varkappa_1 + \text{ord } \Delta + 1} a_{1n} a_{1njm} - \sum_{n=1}^{\varkappa_2 + \text{ord } \Delta + 1} a_{2n} a_{2njm} = \\ = - \int_{z(\Gamma)} (g(\rho_1(\eta)) c_{1jm}(\eta) - g(\rho_2(\eta)) c_{2jm}(\eta)) d\eta, \\ j = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (10)$$

Положим $l_1 = \max\{0, \varkappa_1 + \text{ord } \Delta + 1\}$, $l_2 = \max\{0, \varkappa_2 + \text{ord } \Delta + 1\}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1101} & a_{1201} & \dots & a_{1l_1 01} & -a_{2101} & -a_{2201} & \dots & -a_{2l_2 01} \\ a_{1102} & a_{1202} & \dots & a_{1l_1 02} & -a_{2102} & -a_{2202} & \dots & -a_{2l_2 02} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{110l} & a_{120l} & \dots & a_{1l_1 0l} & -a_{210l} & -a_{220l} & \dots & -a_{2l_2 0l} \\ a_{1111} & a_{1211} & \dots & a_{1l_1 11} & -a_{2111} & -a_{2211} & \dots & -a_{2l_2 11} \\ a_{1112} & a_{1212} & \dots & a_{1l_1 12} & -a_{2112} & -a_{2212} & \dots & -a_{2l_2 12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{111l} & a_{121l} & \dots & a_{1l_1 1l} & -a_{211l} & -a_{221l} & \dots & -a_{2l_2 1l} \\ a_{1121} & a_{1221} & \dots & a_{1l_1 21} & -a_{2121} & -a_{2221} & \dots & -a_{2l_2 21} \\ a_{1122} & a_{1222} & \dots & a_{1l_1 22} & -a_{2122} & -a_{2222} & \dots & -a_{2l_2 22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{112l} & a_{122l} & \dots & a_{1l_1 2l} & -a_{212l} & -a_{222l} & \dots & -a_{2l_2 2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{jm}(t) = \begin{cases} -c_{1jm}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_1, \\ c_{2jm}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_2, \end{cases}$$

$$\alpha(t) = (\alpha_{01}(t), \dots, \alpha_{0l}(t), \alpha_{11}(t), \dots, \alpha_{1l}(t), \alpha_{21}(t), \dots, \alpha_{2l}(t), \dots)^t =: (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots)^t, \\ a = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l_1}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2l_2})^t.$$

Тогда система (10) запишется в виде

$$Aa = \int_{\Gamma} g\alpha. \quad (11)$$

В силу единственности решения задачи Римана (1) ранг r матрицы A должен быть равен числу неизвестных a_{kn} , то есть $r = \max\{0, \varkappa_1 + \text{ord } \Delta + 1\} + \max\{0, \varkappa_2 + \text{ord } \Delta + 1\}$.

Пусть B – невырожденная квадратная матрица порядка r , составленная из строк матрицы A с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$ ($j_1 < j_2 < \dots < j_r$), B_j – квадратная матрица порядка $r+1$, составленная из $r+1$ строк расширенной матрицы $\left(A, \int_{\Gamma} g\alpha\right)$ с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r, j$. Тогда

$$\det B_j = \int_{\Gamma} g\beta_j,$$

где

$$\beta_j = \sum_{n=1}^r B_{j,j_n} \alpha_{j_n} + B_{j,j} \alpha_j,$$

$B_{j,k}$ – алгебраическое дополнение элемента $\int_{\Gamma} g\alpha_k$ матрицы B_j ; очевидно, $B_{j,j} = \det B \neq 0$. Если j принимает одно из значений $j_1, j_2, \dots, j_r$, то $\beta_j = 0$. Условия разрешимости системы (10) (или (11)) имеют вид

$$\int_{\Gamma} g\beta_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \neq j_1, j_2, \dots, j_r. \quad (12)$$

Совокупность условий (9) и (12) необходима и достаточна для разрешимости задачи (1). При их выполнении единственное решение задачи (1) определяется равенством $F(q) = f_k(z(q))$, где функция $f_1 = f_2$ определена формулой (7). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть γ имеет положительную линейную меру и коэффициент G задачи (1) удовлетворяет неравенству $G(j_{R^*}(t)) \neq G(t)$, $t \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тогда для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно выполнения условий (9) и (12). При их выполнении задача (1) имеет единственное решение, определяемое равенством $F = f_k \circ z$, где совпадающие между собой функции f_k , $k = 1, 2$, определяются равенством (7).

3. Случай произвольного кусочно-гладкого контура

Пусть теперь Γ – произвольный кусочно-гладкий контур на R , определенный в п. 1.4.

3.1. Обозначим через E область на R , обладающую следующими свойствами:

- 1) род области E конечен;
- 2) все компоненты множества $R \setminus E$ имеют род, равный бесконечности;
- 3) $E \supset \Gamma$;
- 4) относительная граница ∂E множества E состоит из конечного и четного числа компонент, каждая из которых есть аналитическая дуга, гомеоморфная окружности и отображающаяся взаимнооднозначно в $\mathbb{C}$ функцией $z : R \rightarrow \mathbb{C}$;
- 5) ∂E не содержит точек ветвления накрывающей (R, z) ;
- 6) над каждой компонентой множества $z(\partial E)$ лежат две компоненты ∂E .

Пусть $E^* = E^* \cup \partial E^*$ ($\subset R^*$) – компактная риманова поверхность с краем такая, что E конформно эквивалентна области (которую мы отождествим с E) на E^* , причем $\partial E^* = \partial E$ и множество $E^* \setminus E$ является AB -устраимым. Для римановой поверхности $R \in O_{A^0B}$ такая поверхность E^* существует согласно предложению 1.

В силу AB -устраимости множества $E^* \setminus E$ функцию z можно аналитически продолжить в E^* . Таким образом, (E^*, z) становится безграничной двулистной накрывающей для области $z(E^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$. Множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(E^*)$ состоит из конечного числа $m \geq 1$ односвязных областей, число которых совпадает с числом компонент множества $R \setminus E$. Образует гиперэллиптическую поверхность $S \supset \overline{E^*}$, которая получается приклеиванием к каждой компоненте ∂E^* соответствующей компоненты множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(E^*)$; при этом каждая компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(E^*)$ берется в двух экземплярах и приклеивается к двум компонентам ∂E^* , имеющим одинаковую проекцию, причем точка $p \in \partial E^*$ отождествляется с соответствующей точкой $z(p) \in \partial(z(E^*))$.

Обозначим через α_k , $k = 1, 2, \dots, 2h + 2$, $0 \leq h < \infty$, точки ветвления накрывающей (E^*, z) , где h – род области E^* . Тогда (S, z) есть гиперэллиптическая поверхность рода h , определяемая уравнением

$$w^2 = \prod_{k=1}^{2h+2} (z - r_k), \quad (13)$$

где $r_k = z(\alpha_k)$. Через E_0 обозначим область на S , являющуюся полным прообразом области $z(E^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно отображения $z : S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Ясно, что E_0 содержит все точки ветвления накрывающей (S, z) и существует конформный гомеоморфизм $\alpha : E_0 \rightarrow E^*$ такой, что $z \circ \alpha = z$ и $\alpha \circ j_S = j_{R^*} \circ \alpha$. Множество $S \setminus E_0$

состоит из $2m$ односвязных компонент E_1^i и E_2^i , $i = 1, 2, \dots, m$, причем $j_S(E_1^i) = E_2^i$, $j_S(E_2^i) = E_1^i$. Отображение $z : E_k^i \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, однолистно и конформно; обратное к нему отображение обозначим через $\rho_k^i : z(E_k^i) \rightarrow E_k^i$. Очевидно, $\rho_2^i = j_S \circ \rho_1^i$, $\rho_1^i = j_S \circ \rho_2^i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Положим $\Gamma_0 = \alpha^{-1}(\Gamma)$ и определим на Γ_0 ориентацию, индуцированную отображением $\alpha^{-1} : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$. Пусть F – решение задачи Римана (1). Эта функция аналитически продолжима в $R^* \setminus \Gamma$. Легко видеть, что $F \circ j_{R^*} = F$ в $R^* \setminus E^*$. Поэтому на S определена однозначная кусочно-мероморфная функция

$$F_0(q) = \begin{cases} F(\alpha(q)), & q \in E_0, \\ F(p), \quad z(p) = z(q), & q \in S \setminus E_0, \quad p \in R^* \setminus E^*, \end{cases}$$

с линией скачков Γ_0 . Определим на S дивизор D_0 , полагая

$$\text{ord}_q D_0 = \begin{cases} \text{ord}_{\alpha(q)} D, & q \in E_0, \\ \min \{ \text{ord}_p D, \text{ord}_{j_{R^*}(p)} D \}, \quad z(p) = z(q), & q \in S \setminus E_0, \quad p \in R^* \setminus E^*, \quad j_{R^*}(p) \neq p, \\ \left[\frac{1}{2} \text{ord}_p D \right], \quad z(p) = z(q), & q \in S \setminus E_0, \quad p \in R^* \setminus E^*, \quad j_{R^*}(p) = p. \end{cases}$$

Положим $T_0 = \alpha^{-1}(T)$ и доопределим на T_0 функцию λ , полагая $\lambda|_{T_0} = \lambda \circ \alpha|_{T_0}$. Функция F_0 мероморфна в $S \setminus \Gamma_0$, кратна дивизору $1/D_0$, а ее предельные значения на Γ_0 принадлежат классу $H_{\mu, \lambda}(\Gamma_0, T_0)$ и удовлетворяют соотношению

$$F_0^+(t) = G(\alpha(t))F_0^-(t) + g(\alpha(t)), \quad t \in \Gamma_0. \quad (14)$$

Кроме того, в $S \setminus E_0$ она удовлетворяет соотношению

$$F_0 \circ j_S = F_0. \quad (15)$$

Функции $G \circ \alpha$ и $g \circ \alpha$ принадлежат классам $H_{\mu, (\mu)}(\Gamma_0, T_0)$ и $H_{\mu, \lambda}(\Gamma_0, T_0)$ соответственно.

Существует взаимнооднозначное соответствие между точками q поверхности S и парами чисел $(z, w) = (z(q), w(z(q)))$, связанными соотношением (13). Точку q обычно отождествляют с парой (z, w) . Тогда точке $j_S(q)$ соответствует пара $(z, -w)$. Точке ветвления α_k соответствует пара $(r_k, 0)$.

Выберем на S канонические циклы $\{a_k, b_k\}$, $k = 1, 2, \dots, h$, как в статье [4]. Обозначим через φ_j , $j = 1, 2, \dots, h$, комплексно нормированный (относительно выбранных циклов) базис пространства абелевых дифференциалов первого рода на S и через ω_{qq_0} – нормированный абелев интеграл третьего рода, служащий разрывным аналогом ядра Коши (см. [3, 4]).

Положим

$$X(q) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \omega_{qq_0}(t) \right), \quad q \in S.$$

Нули и бесконечности функции $X(q)$ образуют квазидивизор $(X) = \tau_1^{\varkappa_1} \tau_2^{\varkappa_2} \dots \tau_r^{\varkappa_r}$, где $\tau_k = \alpha^{-1}(t_k)$, $t_k \in T$, – узлы линии Γ_0 , $\varkappa_k$ – числа, определяемые коэффициентом G и выбором ветви функции $\ln G(\alpha(t))$ (см. [4]). Положим $\varkappa = \sum_{k=1}^r [\varkappa_k - \lambda(\tau_k)]$,

где $[\]$ означает целую часть числа. Число $\varkappa$, не зависящее от выбора ветви $\ln G \circ \alpha$, назовем индексом коэффициента задачи (14) в классе $H_{\mu, \lambda}(\Gamma_0, T_0)$. Положим $A = t_1^{[\varkappa_1 - \lambda(\tau_1)]} t_2^{[\varkappa_2 - \lambda(\tau_2)]} \dots t_r^{[\varkappa_r - \lambda(\tau_r)]}$, $B = (q')^h q_1^{-1} \dots q_h^{-1}$, где $q' \in S$ – произвольно

фиксированная точка, не совпадающая с q_0 , точки $q_1, q_2, \dots, q_h$ образуют решение проблемы обращения Якоби вида:

$$\sum_{j=1}^h \int_{q'}^{q_j} \varphi_\nu \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \varphi_\nu(t) \text{ (по модулю периодов), } \nu = 1, 2, \dots, h.$$

Тогда общее решение однородной задачи Римана (14) имеет вид

$$f(q) \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \omega_{qq_0}(t) - \sum_{j=1}^h \left(\int_{q'}^{q_j} \omega_{qq_0} - 2\pi i m_j \int_{q'}^q \varphi_j \right) \right), \quad (16)$$

где в последних двух интегралах путь интегрирования не пересекает канонических сечений $a_1, a_2, \dots, a_h$, m_j – вполне определенные целые числа, f – произвольная мероморфная функция, кратная дивизору $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$. У функции ω_{qq_0} (по перемещению q) выбрана фиксированная в $S \setminus \bigcup_{k=1}^h a_k$ ветвь, исчезающая в точке q_0 .

Обозначим через l_0 и l'_0 число линейно независимых мероморфных функций и дифференциалов на S , кратных соответственно дивизорам $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$ и D_0AB . Через P обозначим целый дивизор порядка l'_0 с носителем в $S \setminus \Gamma_0$ такой, что не существует абелевых дифференциалов на S , кратных дивизору D_0ABP и отличных от тождественного нуля. Для построения решения неоднородной задачи (14) найдем сначала частное решение этой задачи в классе функций, кратных дивизору $D_0^{-1}P^{-1}$. Такая задача безусловно разрешима в силу выбора дивизора P . Ее частным решением является функция вида (см. [4])

$$\frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t, q), \quad (17)$$

где X_0 – функция вида (16) при $f = 1$, $A_1(t, q)$ – мероморфный аналог ядра Коши на S с характеристическим дивизором Δ_1 , который получается делением дивизора D_0ABP на некоторый целый дивизор. Функция (17) будет решением задачи (14) в том и только в том случае, если g удовлетворяет l'_0 условиям, обеспечивающим кратность функции (17) дивизору D^{-1} . Эти условия равносильны условиям разрешимости задачи (14) и имеют вид

$$\int_{\Gamma_0} g \circ \alpha \frac{\psi_j}{X_0} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l'_0, \quad (18)$$

где ψ_j , $j = 1, 2, \dots, l'_0$, – базис пространства абелевых дифференциалов на S , кратных дивизору D_0AB .

При выполнении условия (18) общее решение задачи (14) имеет вид

$$F_0(q) = f(q) \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \omega_{qq_0}(t) - \sum_{j=1}^h \left(\int_{q'}^{q_j} \omega_{qq_0} - 2\pi i m_j \int_{q'}^q \varphi_j \right) \right) + \\ + \frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t, q), \quad q \in S. \quad (19)$$

Для того чтобы эта функция определяла решение задачи (14), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию (15).

Обозначим через $f_1, f_2, \dots, f_{l_0}$ базис пространства мероморфных функций на S , кратных дивизору $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$. Тогда функция F_0 может быть записана в виде

$$F_0(q) = X_0(q) \sum_{k=1}^{l_0} c_k f_k(q) + \frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t, q), \quad (20)$$

где c_k — произвольные комплексные числа.

В каждой компоненте множества $S \setminus \overline{E_0}$ выберем точку s_j , $j = 1, 2, \dots, m$, такую, что $z(s_j) \neq \infty$ и функции $X_0(q)$, $f_k(q)$, $A_1(t, q)$ голоморфны по q в точках s_j и $j_S(s_j)$. Разложим функции $X_0 f_k$ и $(X_0 f_k) \circ j_S$ в ряд Тейлора по степеням $z(q) - z(s_j)$:

$$X_0(q) f_k(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{jik} (z(q) - z(s_j))^i, \quad X_0(j_S(q)) f_k(j_S(q)) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{jik} (z(q) - z(s_j))^i.$$

Аналогично в окрестности точки $q = s_j$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{X_0(q) A_1(t, q)}{2\pi i X_0^+(t)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{ji}(t) (z(q) - z(s_j))^i, \\ \frac{X_0(j_S(q)) A_1(t, j_S(q))}{2\pi i X_0^+(t)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{ji}(t) (z(q) - z(s_j))^i. \end{aligned}$$

В силу этих разложений равенство (15) равносильно следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{l_0} (a_{jik} - b_{jik}) c_k = - \int_{\Gamma_0} g(\alpha(t)) (\gamma_{ji}(t) - \delta_{ji}(t)), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Полагая

$$U = \begin{pmatrix} a_{101} - b_{101} & a_{102} - b_{102} & \dots & a_{10l_0} - b_{10l_0} \\ a_{201} - b_{201} & a_{202} - b_{202} & \dots & a_{20l_0} - b_{20l_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m01} - b_{m01} & a_{m02} - b_{m02} & \dots & a_{m0l_0} - b_{m0l_0} \\ a_{111} - b_{111} & a_{112} - b_{112} & \dots & a_{11l_0} - b_{11l_0} \\ a_{211} - b_{211} & a_{212} - b_{212} & \dots & a_{21l_0} - b_{21l_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m11} - b_{m11} & a_{m12} - b_{m12} & \dots & a_{m1l_0} - b_{m1l_0} \\ a_{121} - b_{121} & a_{122} - b_{122} & \dots & a_{12l_0} - b_{12l_0} \\ a_{221} - b_{221} & a_{222} - b_{222} & \dots & a_{22l_0} - b_{22l_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m21} - b_{m21} & a_{m22} - b_{m22} & \dots & a_{m2l_0} - b_{m2l_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

$\beta_{ji} = -(\gamma_{ji} - \delta_{ji}) \circ \alpha^{-1}$, $\beta = (\beta_{10}, \beta_{20}, \dots, \beta_{m0}, \beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{m1}, \beta_{12}, \beta_{22}, \dots, \beta_{m2}, \dots)^t =$
 $=: (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots)^t$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_{l_0})^t$, перепишем систему (21) в виде

$$Uc = \int_{\Gamma} g\beta. \quad (22)$$

Обозначим через r ранг матрицы U . Пусть V – невырожденная квадратная матрица порядка r , составленная из элементов матрицы U , стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_r$), V_i – квадратная матрица порядка $r+1$, состоящая из элементов расширенной матрицы $\left(U, \int_{\Gamma} g\beta \right)$, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r, i$ и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r, l_0+1$. Тогда

$$\det V_i = \int_{\Gamma} g\lambda_i,$$

где

$$\lambda_i = \sum_{n=1}^r V_{i,i_n} \beta_{i_n} + V_{i,i} \beta_i,$$

$V_{i,j}$ – алгебраическое дополнение элемента $\int_{\Gamma} g\beta_j$ матрицы V_i , $V_{i,i} = \det V$, $\lambda_i = 0$ при $i = i_1, i_2, \dots, i_r$. Условия разрешимости системы (22) имеют вид

$$\int_{\Gamma} g\lambda_i = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i \neq i_1, i_2, \dots, i_r. \quad (23)$$

При выполнении условий (23) величины $c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_r}$ выражаются линейно через $\int_{\Gamma} g\beta_i$, $i = i_1, i_2, \dots, i_r$, то есть являются ограниченными линейными функционалами от функции g в пространстве $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, а остальные числа c_k остаются произвольными.

Условия (18) перепишем в виде

$$\int_{\Gamma} g \frac{\psi_j \circ \alpha^{-1}}{X_0 \circ \alpha^{-1}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l'_0. \quad (24)$$

Если функция g удовлетворяет условиям (23) и (24), то функция F_0 , задаваемая соотношением (20), определяет решение F задачи (1) по формуле

$$F(q) = \begin{cases} F_0(\alpha^{-1}(q)), & q \in E, \\ F_0(p), \quad z(p) = z(q), & q \in R \setminus E, \quad p \in S \setminus E_0. \end{cases} \quad (25)$$

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно выполнения условий (23) и (24). При их выполнении решение задачи определяется равенствами (20) и (25), причем в равенстве (20) r величины среди c_k являются линейными ограниченными функционалами от $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, а остальные – произвольными. Однородная задача Римана (1) имеет $l_0 - r$ линейно независимых решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-12188-офи_м).

Summary

N.A. Barieva, I.A. Bikchantaev. Riemann Problem on a Two-sheeted Surface of a Class O_{A^0B} .

Solvability conditions and explicit solution of the Riemann boundary value problem were derived by I.A. Bikchantaev on the case of ultrahyperelliptic surface (Riemann problem on ultrahyperelliptic surface // Russian Math. – 2000. – V. 44, No 2. – P. 17–29). The present paper generalizes the last result on the case of two-sheeted Riemann surface of the class O_{A^0B} .

Key words: boundary value problems, Riemann surfaces.

Литература

1. *Sario L., Nakai M.* Classification theory of open Riemann surfaces. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970. – 446 p.
2. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. – М.: Высш. шк., 1991. – 208 с.
3. *Бикчантаев И.А.* Задача Римана на ультрагиперэллиптической поверхности // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 2. – С. 19–31.
4. *Зверович Э.И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Усп. матем. наук. – 1971. Т. 26, № 1. – С. 113–179.

Поступила в редакцию
30.01.09

Бариева Наиля Ахмедовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

Бикчантаев Ильдар Ахмедович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: *ibikchan@ksu.ru*