УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 3 Физико-математические науки *2008*

УДК 517.958:52/59

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

К.Г. Гараев

Аннотация

В данной работе ставится задача минимизации интегрального сопротивления трения при заданном ограничении на мощность системы управления. В качестве управления используется удельный расход газа, подаваемого в основной поток через пористый или перфорированный участок обтекаемой поверхности. Данную задачу можно отнести к классу вариационных задач типа Майера с двумя независимыми переменными. Важно отметить, что соответствующий закон сохранения для сопряженной системы автоматически преобразуется в первый интеграл, справедливый при любой скорости на внешней границе пограничного слоя и любых числах Прандтля.

Ключевые слова: пограничный слой, оптимальное управление, теорема Нетер, теория групп Ли.

Введение

При обтекании тел потоком вязкой жидкости или газа большое практическое значение имеет сила лобового сопротивления, которая определяется для хорошо обтекаемых тел главным образом суммарной силой трения. Одним из способов уменьшения величины этой силы является управление локальными продольными градиентами скорости на обтекаемой поверхности путем вдува газа в пограничный слой. Поскольку источники энергии (суммарный расход, мощность системы управления) ограничены, то возникает проблема оптимального управления пограничным слоем, которая обсуждалась впервые в работе [1]. В работе [2] автор, используя теорию инвариантных вариационных задач Нетер и аппарат теории групп Ли, получил первый интеграл для системы уравнений относительно множителей Лагранжа [2]. Следует заметить, что вариационная задача рассматривалась в этих работах в исходных физических переменных. Но в случае использования конечно-разностных схем гораздо удобнее рассматривать уравнения пограничного слоя в переменных Фокнера – Скена [3].

В данной работе ставится задача минимизации интегрального сопротивления трения при заданном ограничении на мощность системы управления. Эта задача приобретает особое значение, именно сейчас, когда ведущие аэрокосмические фирмы США и Японии объявили об объединении усилий с целью создания нового сверхзвукового пассажирского самолета, превосходящего по своим аэродинамическим показателям своих предшественников: сверхзвуковых самолетов «Конкорд» (Англия – Франция) и ТУ-144 (СССР). В качестве управления, используется удельный расход газа, подаваемого в основной поток через пористый или перфорированный участок обтекаемой поверхности. Данную задачу можно отнести к классу вариационных задач типа Майера с двумя независимыми переменными [4, 5].

Важно отметить, что соответствующий закон сохранения для сопряженной системы автоматически преобразуется в первый интеграл, справедливый при любой скорости на внешней границе пограничного слоя и любых числах Прандтля.

1. Постановка задачи

Уравнение пограничного слоя в переменных Фокнера – Скена для плоского ламинарного потока имеет вид [3]:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + a(x) f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + b(x)\left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right) = x\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\frac{\partial f}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Здесь $\eta = y\left(\frac{U_e}{\nu x}\right)^{1/2}$; $\psi = (U_e \nu x)^{1/2} \cdot f(x,\eta)$ – функция тока; $a(x) = \frac{U_e'(x)x + U_e}{2U_e}$; $b(x) = \frac{x}{U_e}U_e'(x)$; $U = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ и $V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ – проекции вектора скорости на оси координат; $U_e(x)$ – скорость на внешней границе пограничного слоя; ν – кинематический коэффициент вязкости.

Граничные условия зададим в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad f = -\frac{1}{(U_e \nu x)^{\frac{1}{2}}}\int_0^x V_w\,dx, \quad (\eta = 0); \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} \to 1, \quad (\eta \to \infty). \tag{2}$$

Подстрочный индекс w соответствует параметрам газа на стенке.

Введем обозначения

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = R, \quad \frac{\partial R}{\partial \eta} = W, \tag{3}$$

тогда уравнение (1) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial \eta} + a(x) f W + b(x)\left(1 - R^2\right) - x\left(R\frac{\partial R}{\partial x} - W\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0,\\ &\frac{\partial f}{\partial \eta} - R = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \eta} - W = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Граничные условия имеют здесь следующую форму:

$$R = 0, \quad f = -\frac{1}{(U_e \nu x)^{\frac{1}{2}}}\int_0^x V_w\,dx \ \ (\eta = 0); \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} \to 1 \ \ (\eta \to \infty) \tag{5}$$

Сформулируем теперь следующую вариационную задачу: требуется найти среди непрерывных управлений $V_w(x)$ (скорость вдува газа в основной поток) такое управление, при котором достигается минимальное значение сопротивления трению X, испытуемого симметричным профилем, обтекаемым потоком несжимаемой жидкости под нулевым углом атаки:

$$X = \int_0^\ell \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0} dx = \int_0^\ell C(x) W(x,0)\,dx, \tag{6}$$

где $C(x) = \mu U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}$, ℓ – длина участка вдува при заданном ограничении на мощность системы управления

$$N = \int_0^l k V_w^2(x)\,dx. \tag{7}$$

Здесь k – это параметр, который зависит от теплофизических свойств материала оболочки; λ – коэффициент теплопроводности газа или жидкости [6].

Используя метод множителей Лагранжа, получаем следующие уравнения Эйлера – Остроградского [1, 5]:

$$
\begin{gathered}
\lambda_1 W a - D_x\left(\lambda_1 x W\right) - D_\eta\left(\lambda_3\right) = 0, \\
\lambda_1\left(-2bR - x\frac{\partial R}{\partial x}\right) - \lambda_3 - D_x\left(-\lambda_1 x R\right) - D_\eta\left(\lambda_4\right) = 0, \\
\lambda_1\left(af + x\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \lambda_4 - D_\eta(\lambda_1) = 0.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Условия трансверсальности будут следующие

$$
\lambda_1 = 0 \quad (\eta = 0); \quad \lambda_1 \to 0, \ \ \lambda_3 \to 0 \ \ (\eta \to \infty); \quad \lambda_1 = 0 \ \ (x = l, \ \eta > 0). \tag{9}
$$

Оптимальное управление является решением дифференциального уравнения

$$
\begin{gathered}
V_0' - bV_0 + \lambda_3(x,0) = 0, \quad \text{где} \quad V_0 = 2k\ \alpha\ a\ V_w, \\
a = -\left(\nu x U_e\right)^{1/2}, \quad b = -\frac{1}{2}\left(\nu x U_e\right)^{-1/2}\left(U_e + xU_e'\right)
\end{gathered} \tag{10}
$$

с начальным условием $V_0(l) = 0$. Здесь α – постоянный множитель Лагранжа, определяемый из изопериметрического условия (7).

В системе уравнений (8) D_x и D_η – операторы полного дифференцирования соответственно по переменным x и η:

$$
D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial f} + \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial W} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \dots + \frac{\partial \lambda_5}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial \lambda_5};
$$

$$
D_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial f} + \frac{\partial R}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial W} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \dots + \frac{\partial \lambda_5}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial \lambda_5}.
$$

2. Первый интеграл для сопряженной системы уравнений

Для поставленной в данной работе вариационной задачи справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *Для любой непрерывно-дифференцируемой функции $U_e(x)$ и любого числа Прандтля P_r уравнения Эйлера – Лагранжа – Остроградского* (8) *допускают первый интеграл*

$$
\lambda_3\frac{\partial f}{\partial \eta} + \lambda_4\frac{\partial R}{\partial \eta} + \lambda_1\frac{\partial W}{\partial \eta} = g\left(x\right), \tag{11}
$$

где $g(x)$ – произвольная функция интегрирования, определяемая с учетом краевых условий (5) *и* (9).

Доказательство. Согласно [7, 8], если вариационный интеграл

$$
I = \iint\limits_S L\left(x, \eta, u^k\left(x,\eta\right), \frac{\partial u^k}{\partial x}, \frac{\partial u^k}{\partial \eta}\right) dx\, d\eta, \quad k = 1, 2, \dots, n,
$$

инвариантен по отношению к однопараметрической группе Ли с инфинитезимальным оператором

$$Y = \xi_x \frac{\partial}{\partial x} + \xi_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi_u^k \frac{\partial}{\partial u^k},$$

то уравнения Эйлера – Остроградского

$$L_u - D_x \left(\frac{\partial L}{\partial u_x^k} \right) - D_\eta \left(\frac{\partial L}{\partial u_\eta^k} \right) = 0$$

допускают закон сохранения

$$D_x \left[\left(\xi_u^k - u_x^k \cdot \xi_x - u_\eta^k \cdot \xi_\eta \right) \frac{\partial L}{\partial u_x^k} + L\xi_x \right] + \\ + D_\eta \left[\left(\xi_u^k - u_x^k \cdot \xi_x - u_\eta^k \cdot \xi_\eta \right) \frac{\partial L}{\partial u_\eta^k} + L\xi_\eta \right] = 0. \quad (12)$$

В нашей задаче имеем

$$L = \lambda_1 \left[\frac{\partial W}{\partial \eta} + a(x) \cdot fW + b(x) \left(1 - R^2 \right) - x \left(R \frac{\partial R}{\partial x} - W \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] + \\ + \lambda_3 \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} - R \right] + \lambda_4 \left[\frac{\partial R}{\partial \eta} - W \right]. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что функционал I является инвариантным по отношению к группе G_1 с оператором

$$Y = \frac{\partial}{\partial \eta}$$

при любых заданных Pr и $U_e(x)$, поэтому дивергентная форма уравнения (12) примет следующий вид

$$D_x \left[-\frac{\partial f}{\partial \eta} (\lambda_1 x W) - \frac{\partial R}{\partial \eta} (-\lambda_1 x R) \right] + \\ + D_\eta \left[-\frac{\partial f}{\partial \eta} (\lambda_3) - \frac{\partial R}{\partial \eta} \lambda_4 - \frac{\partial W}{\partial \eta} (\lambda_1) \right] = 0. \quad (14)$$

Неожиданным здесь является то, что выражение в первых квадратных скобках в силу (3) тождественно обращается в нуль, именно по этой причине первый интеграл (11) следует из уравнения (14).

□

Summary

K.G. Garayev. Existence of the First Integral in a Problem of Optimally-Controlled BL Theory.

The paper states the problem of minimizing the integral drag of friction in the presence of restrictions preset on the control system power. As the control, a specific flow rate of liquid is used here, injected into the basic flow through the porous or perforated section of the surface streamlined. This problem can be related to the class of Meyer's variation problems with two independent variables. It is significant here that the corresponding conservation law for conjugate system of equations transforms automatically into the first integral to be valid at any velocity on the outer BL border and at any Prandtl numbers chosen.

Key words: boundary layer, optimal control, Noether's theory, Lie group theory.

Литература

1. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимальные задачи газодинамики // Изв. вузов. Авиационная техника.– 1963.– № 2. – С. 11–21.
2. *Гараев К.Г.* Об инвариантных вариационных задачах // Тр. 1-й Поволжск. конф. «Автоматическое управление».– Казань: Таткнигоиздат, 1971. – С. 121–129.
3. *Себиси Т., Брэдшоу П.* Конвективный теплообмен.– М.: Мир, 1987. – 590 с.
4. *Гараев К.Г.* Об одном следствии из теоремы Нетер для двумерных вариационных задач типа Майера // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, № 3. – С. 448–453.
5. *Миеле А.* Обобщение вариационной задачи на несколько функций двух независимых переменных // Теория оптимальных аэродинамических форм. – М.: Мир, 1969.
6. *Белов С.В.* Пористые материалы в машиностроении. – М. : Машиностроение, 1981. – 247 с.
7. *Ибрагимов Н.Х.* Инвариантные вариационные задачи и их законы сохранения // Теорет. и матем. физика. – 1960. – Т. 1, № 3. – С. 350–359.
8. *Гараев К.Г.* Теория инвариантных вариационных задач в проблеме оптимального управления. – Казань: Изд-во Казан. техн. ун-та, 2005. – 150 с.

Поступила в редакцию
12.05.08

Гараев Кавас Гараевич – доктор физико-математических наук, профессор, декан физико-математического факультета, заведующий кафедрой специальной математики Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева.

E-mail: *sm@sm.kstu-kai.ru*