УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 3 Физико-математические науки *2008*

УДК 519.958

О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ КВАЗИВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ МЯГКИХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК

И.Б. Бадриев, В.В. Бандеров, О.А. Задворнов

Аннотация

Проведено исследование сходимости конечноэлементных схем для стационарных задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек при наличии массовых сил и следящей поверхностной нагрузки. Предполагается, что оболочка в перемещениях ограничена препятствием. Доказательство сходимости конечноэлементных схем основано на построении итерационного метода решения конечномерной аппроксимации квазивариационного неравенства, возникающего при математической формулировке рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: квазивариационные неравенства, мягкая сетчатая оболочка, метод конечных элементов, итерационные методы.

Введение

В настоящей работе проведено исследование сходимости конечноэлементных схем для стационарных задач об определении положения равновесия закрепленных по краям мягких бесконечно длинных цилиндрических оболочек, нагруженных массовыми силами и следящей поверхностной нагрузкой и при наличии вогнутого препятствия (см. [1, 2]). Сформулирована вариационная постановка задачи, на основе которой введена обобщенная постановка в виде квазивариационного неравенства в пространстве Соболева. Ранее в [3] было проведено исследование сходимости конечномерных аппроксимаций для абстрактных квазивариационных неравенств в банаховых пространствах при выполнении ряда условий на аппроксимацию множеств, участвующих в формулировке квазивариационного неравенства. В настоящей работе установлено, что для рассматриваемой задачи теории мягких сетчатых оболочек выполнены упомянутые условия на аппроксимацию множеств. Отметим, что доказательство сходимости конечномерных аппроксимаций в [3] основано на использовании итерационного метода (см. [4]) решения квазивариационного неравенства. Поэтому фактически предложены приближенные методы решения квазивариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек, основанные на конечноэлементной аппроксимации квазивариационного неравенства с последующим применением итерационного метода.

1. Конечномерные аппроксимации квазивариационных неравенств

Пусть V – рефлексивное банахово пространство с равномерно выпуклым сопряженным пространством V^*, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – отношение двойственности между V и V^*, $M \subset V$ – непустое, слабо замкнутое, вообще говоря, невыпуклое множество, оператор $A : V \to V^*$, является:

• псевдомонотонным, то есть (см. [5, с. 190]) A ограничен, и для любой последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$, сходящейся слабо к u в V, из неравенства

$$\limsup_{k\to+\infty} \langle Au_k, u_k - u\rangle \le 0$$

вытекает, что

$$\liminf_{k\to+\infty} \langle Au_k, u_k - \eta\rangle \ge \langle Au, u - \eta\rangle \quad \forall\, \eta \in V;$$

• потенциальным, причем имеет место соотношение

$$\int_0^1 \Big[\langle A(t\,\eta),\, \eta\rangle - \langle A(tu), u - \eta\rangle - \langle A(u + t\,(\eta - u)), \eta - u\rangle\Big]\, dt = 0 \quad \forall\, u, \eta \in V; \qquad (1)$$

• коэрцитивным, то есть

$$\langle A\eta, \eta\rangle \ge \rho(\|\eta\|_V)\|\eta\|_V \quad \forall\, \eta \in V, \qquad \text{где} \lim_{\xi\to+\infty} \rho(\xi) = +\infty\,; \qquad (2)$$

• ограниченно липшиц-непрерывным, то есть (сравни с [6, с. 79])

$$\|Au - A\eta\|_{V^*} \le \mu_A(R)\,\Psi\,(\|u - \eta\|_V) \qquad \forall\, u,\, \eta \in V, \qquad (3)$$

где $R = \max\{\|u\|_V, \|\eta\|_V\}$, μ – неубывающая на $[\,0, +\infty\,)$ функция, Ψ – непрерывная, строго возрастающая на $[\,0, +\infty\,)$ функция такая, что $\Psi(0) = 0$, $\Psi\,(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$.

Определим для каждого $u \in M$ выпуклое замкнутое множество $K(u) \subseteq M$, содержащее u.

Рассматривается задача поиска элемента $u \in M$, являющегося для заданного $f \in V^*$ решением квазивариационного неравенства

$$\langle Au, \eta - u\rangle \ge \langle f, \eta - u\rangle \quad \forall\, \eta \in K(u). \qquad (4)$$

Определим функционал $F : V \to R^1$ соотношением

$$F(\eta) = F_0(\eta) - \langle f, \eta\rangle, \quad F_0(\eta) = \int_0^1 \langle A(t\,\eta), \eta\rangle\, dt. \qquad (5)$$

При этом из (1) и (5) вытекает, что

$$F(\eta) - F(u) = \int_0^1 \langle A(u + t\,(\eta - u)),\, \eta - u\rangle\, dt - \langle f, \eta - u\rangle \quad \forall\, u,\, \eta \in V.$$

Отметим, что в силу условия (2) функционал F коэрцитивен:

$$\lim_{\|\,\eta\,\|_V\to+\infty} F(\eta) \ge \lim_{\|\,\eta\,\|_V\to+\infty} \int_0^{\|\,\eta\,\|_V} (\,\rho(\xi) - \|f\|_{V^*})\, d\,\xi = +\,\infty.$$

Перейдем к построению конечномерных аппроксимаций задачи (4).

Каждому параметру h из множества $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}$ поставим в соответствие конечномерное подпространство V_h пространства V и непустое, замкнутое множество

$M_h \subset V_h$, а каждому $u_h \in M_h$ – выпуклое, замкнутое множество $K_h(u_h) \subseteq M_h$, содержащее u_h.

Предполагаем, что V_h аппроксимируют V, то есть существуют такие операторы $r_h : V \to V_h$ (операторы сужения из V на V_h), что

$$\lim_{h\to 0} \|r_h\eta - \eta\|_V = 0 \qquad \forall\, \eta \in V. \tag{6}$$

Считаем также выполненными следующие условия:

(I) Для любого $\eta \in M$ существует такая последовательность $\{\eta_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} h_k = 0$, $\eta_{h_k} \in M_{h_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{k\to+\infty} \|\eta_{\,h_k} - \eta\|_V = 0;$$

(II) Если последовательность $\{\eta_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} h_k = 0$, $\eta_{h_k} \in M_{h_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, слабо сходится в V к η, то $\eta \in M$, и для любого $v \in K(\eta)$ существует последовательность $\{v_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} h_k = 0$, $v_{h_k} \in K_{h_k}(\eta_{h_k})$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\lim_{k\to+\infty} \|v_{h_k} - v\|_V = 0;$$

(III) Если последовательность $\left\{\eta_h^{(k)}\right\}_{k=1}^{+\infty} \subset M_h$ сходится к η, то для любого $v_h \in K_h(\eta_h)$ существует последовательность $\left\{v_h^{(k)}\right\}_{k=1}^{+\infty}$, $v_h^{(k)} \in K_h\big(\eta_h^{(k)}\big)$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|v_h^{(k)} - v_h\right\|_V = 0.$$

Задаче (4) поставим в соответствие семейство аппроксимирующих задач, заключающихся в нахождении элементов $u_h \in M_h$ таких, что

$$\langle Au_h, \eta_h - u_h\rangle \ge \langle f, \eta_h - u_h\rangle \qquad \forall\, \eta_h \in K_h(u_h). \tag{7}$$

Для решения квазивариационного неравенства (7) рассмотрим следующий итерационный процесс, позволяющий свести ее к вариационному неравенству с оператором двойственности, обладающим существенно более лучшими свойствами по сравнению с исходным псевдомонотонным оператором.

Пусть $u_h^{(0)}$ – произвольный элемент из M_h. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ определим вектор $u_h^{(k+1)} \in K_h(u_h^{(k)})$ как решение вариационного неравенства

$$\langle J(u_h^{(k+1)} - u_h^{(k)}), \eta_h - u_h^{(k+1)}\rangle \ge \tau\,\langle f - Au_h^{(k)}, \eta_h - u_h^{(k+1)}\rangle \quad \forall\, \eta_h \in K_h(u_h^{(k)}), \tag{8}$$

где $\tau > 0$ – итерационный параметр, $J : V \to V^*$ – оператор двойственности, порождаемый функцией Ψ из (3):

$$\langle J\eta, \eta\rangle = \|J\,\eta\,\|_{V^*}\,\|\eta\,\|_V = \Psi(\|\eta\,\|_V)\,\|\eta\,\|_V \quad \forall\, \eta \in V.$$

Существование единственного решения вариационного неравенства (8) следует из строгой монотонности и непрерывности оператора двойственности [5, с. 186–187].

Имеют место следующие результаты (см. [3]).

Теорема 1. *Пусть оператор* $A : V \to V^*$ *является псевдомонотонным, ограниченно липшиц-непрерывным, потенциальным и коэрцитивным, выполнены условия* (I), (III),

$$0 < \tau < \min\{1, 1/\mu_0\}, \quad \mu_0 = \mu\left(d_0^h + \Psi^{-1}(d_1^h)\right),$$

где

$$d_0^h = \sup_{u \in S_h^0} \|u_h\|_V, \quad d_1^h = \sup_{u \in S_h^0} \|Au - f\|_{V^*}, \quad S_0^h = \{u_h \in M_h : F(u_h) \le F(u_h^{(0)})\}.$$

Тогда итерационная последовательность $\left\{u_h^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$, *построенная согласно (8), ограничена в* V *:*

$$\{u_h^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty} \subset S_0^h, \quad \|u_h^{(k)}\| \le d_0^h, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

и все ее слабо предельные точки являются решениями квазивариационного неравенства (7).

Теорема 2. *Пусть оператор* $A : V \to V^*$ *является псевдомонотонным и коэрцитивным, выполнены условия* (I)–(III), u_h *– решения задач* (7)*. Тогда существует последовательность* $\{h_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $h_k \to 0$ *при* $k \to +\infty$ *такая, что* u_{h_k} *сходится слабо в* V *к некоторому решению* u *задачи* (4) *при* $k \to +\infty$.

Более того, любая слабо предельная точка u_* *семейства* $\{u_h\}$ *является решением задачи* (4)*, причем если* $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ *– подпоследовательность, сходящаяся слабо в* V *к* u_* *при* $k \to +\infty$*, то*

$$\lim_{k \to +\infty} \langle Au_{h_k} - Au_*, u_{h_k} - u_* \rangle = 0. \tag{10}$$

Замечание 1. Из теоремы 1 следует существование решения квазивариационного неравенства (7), а из соотношения (9) – равномерная ограниченность по h семейства $\{u_h\}$:

$$\|u_h\|_V \le d_0. \tag{11}$$

2. Построение и исследование схем МКЭ для задач теории мягких сетчатых оболочек

Рассмотрим теперь задачу об определении положения равновесия мягкой бесконечно длинной цилиндрической оболочки, закрепленной по краям и находящейся под воздействием массовых сил и следящей поверхностной нагрузки, описываемая следующей системой дифференциальных уравнений (см. [7]):

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{T(\lambda)}{\lambda}\frac{dw}{ds}\right) + q(s)Q\frac{dw}{ds} + \tilde{f}(s) = 0, \quad 0 < s < l, \tag{12}$$

где $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, s – дуговая координата точки оболочки, отсчитываемая по контуру сечения в недеформированном состоянии оболочки, $w = (w_1, w_2)$ – координаты точек в декартовой системе координат (x_1, x_2), введенной в поперечном сечении оболочки, $\lambda(u) = \left((w_1{}')^2 + (w_2{}')^2\right)^{1/2}$ – относительные удлинения точек оболочки, $T(\lambda)$ – касательные усилия в оболочке, $\tilde{f} = \left(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\right)$ и q – погонные плотности массовых сил и следящей поверхностной нагрузки соответственно.

Относительно функции T, характеризующей материал оболочки, предполагаем, что она что она является неотрицательной, непрерывной, неубывающей функцией, равной нулю при $\lambda \leq 1$ (то есть оболочка не воспринимает сжимающих усилий), и существуют $c_2 > c_1 > 0$, $p \geq 2$ такие, что

$$c_1(\lambda-1)^{p-1} \leq T(\lambda) \leq c_2(\lambda-1)^{p-1} \quad \text{при} \quad \lambda \geq 1. \tag{13}$$

Относительно функции q предполагаем, что

$$\begin{cases} q \in L_\infty(0,l) & \text{при } p > 2, \\ |q(s)| \leq c_3 < c_1, \quad s \in (0,l) & \text{при } p = 2. \end{cases} \tag{14}$$

Уравнения (12) дополняются граничными условиями

$$w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = 0, \quad w_1(l) = 0, \quad w_2(l) = l.$$

Для учета взаимодействия оболочки с препятствием добавим в (12) новое слагаемое λP_0, где P_0 – плотность силы реакции препятствия.

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{T(\lambda)}{\lambda}\frac{dw}{ds}\right) + q(s)Q\,\frac{dw}{ds} + \tilde{f}(s) + \lambda P_0 = 0, \quad 0 < s < l. \tag{15}$$

Отметим, что P_0 является, наряду с w, величиной неизвестной.

Полагаем, что поверхность препятствия во введенной системе координат задается в виде $x_2 = F(x_1)$ где F – непрерывно-дифференцируемая вогнутая функция такая, что $F(0) \leq 0, F(l) \leq 0$, то есть оболочка находится над препятствием.

Материал, из которого сделано препятствие, будем считать абсолютно твердым, а поверхность препятствия – абсолютно гладкой, то есть взаимодействие оболочки с препятствием порождает усилия, направленные только по внешней нормали к поверхности препятствия. Поэтому плотность силы реакции препятствия можно записать в виде:

$$P_0(s) = \beta\, N(w_1(s)),$$

где $n(\xi) = Q\,\dfrac{\tau(\xi)}{|\tau(\xi)|}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности препятствия, $\tau(\xi) = (1, F'(\xi))$, β – неизвестная функция, удовлетворяющая условиям

$$\beta \geq 0, \quad s \in I_w; \quad \beta = 0, \quad s \notin I_w, \tag{16}$$

$I_w = \{t \in (0,l) : w_2(t) = F(w_1(t))\}$ – коинцидентное множество, то есть множество тех точек, где оболочка контактирует с препятствием.

Введем теперь множество ограничений конфигураций оболочки препятствием, или множество допустимых конфигураций

$$M = \{\eta : \eta_2 \geq F(\eta_1),\ s \in (0,l); \quad \eta(0) = (0,0),\ \eta(l) = (l,0)\},$$

принадлежность которому означает, что оболочка не может находиться ниже препятствия. Отметим, что множество M слабо замкнуто, но, вообще говоря, невыпукло.

Под решением рассматриваемой задачи мы будем понимать функции $w \in M$ и β, удовлетворяющие уравнению (15) и условию (16).

Приведем вариационную постановку рассматриваемой задачи. Пусть

$$\Delta = \{x = (x_1, x_2) : \ x_2 \le F(x_1)\}.$$

Для $v \in M$ введем функцию $P^v = (P_1^v, P_2^v)$,

$$P^v(s) = \underset{x(s) \in \Delta}{\arg\min} \ \{ |x(s) - v(s)| \}.$$

Отметим, что $P^v(s)$ – оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество Δ, а значит, он определен для любого s и является липшиц-непрерывным.

Определим далее множество $K(v)$:

$$K(v) = \{\eta \in M : (\eta(s) - P^v(s), n(P_1^v(s))) \ge 0, \ 0 \le s \le l\}.$$

Вариационная постановка рассматриваемой задачи состоит в нахождении функции $w \in M$, являющейся решением квазивариационного неравенства

$$\int_0^l \frac{T(\lambda(w))}{\lambda(w)} (w', \eta' - w') \, ds - \int_0^l (\lambda \tilde{q} + \tilde{f}, \eta - w) \, ds \ge 0 \quad \forall \eta \in K(w). \tag{17}$$

Следуя [2], нетрудно установить, что справедлива

Теорема 3. *Пусть w, β – решение поточечной задачи* (15), (16). *Тогда w является решением задачи* (17). *Наоборот, если функция w – решение задачи* (17), *функции w и T достаточно гладкие, то w, β – решение поточечной задачи* (15), (16), *где β имеет следующий вид:*

$$\beta(s) = \frac{|D(w(s))|}{\lambda(s)}, \quad D(w(s)) = \left(\frac{T(\lambda) \, w'}{|w'|} \right)' + \lambda \tilde{q} + \tilde{f}.$$

Обобщенная постановка задачи (17) формулируется в перемещениях, при этом поскольку края оболочки закреплены, то перемещения на концах равны нулю. Связь между координатами точек оболочки w и перемещениями $\tilde{u}$ определяется соотношением $w = \mathring{w} + \tilde{u}$ ($\mathring{w}$ – функция, описывающая положение оболочки в недеформированном состоянии):

$$\mathring{w} = (\mathring{w}_1, \mathring{w}_2), \quad \mathring{w}_1(s) = s, \quad \mathring{w}_2(s) = 0, \qquad s \in [0, l]$$

Пусть $V = \left[\mathring{W}_p^{(1)}(0,1) \right]^2$ с нормой $\| \cdot \|$. Сопряженным к V будет пространство $V^* = \left[\mathring{W}_{p^*}^{(-1)}(0,l) \right]^2$, $p^* = p/(p-1)$, обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ отношение двойственности между V и V^*.

Обозначим $u(s) = (u_1, u_2)$, где $u_1(s) = \tilde{u}_1(s) + s$, $u_2(s) = \tilde{u}_2(s)$; при этом $\lambda(u) = |u'(s)|$.

Очевидно, что множество допустимых конфигураций оболочки в перемещениях есть

$$M = \{ u \in V : \ u_2 \ge F(u_1), \ \ s \in (0, l) \}. \tag{18}$$

Определим далее множество

$$K(u) = \{\eta \in M : \ (\eta(s) - P^u(s), \, n(P_1^u(s))) \ge 0, \ \ 0 \le s \le l\},$$

где n – вектор единичной внешней нормали к множеству Δ.

Под обобщенным решением описанной выше задачи понимается функция $u \in M$, являющаяся решением квазивариационного неравенства (см. [1]):

$$\langle A_0 u + Bu, \eta - u \rangle \geq \langle f, \eta - u \rangle \quad \forall \eta \in K(u), \tag{19}$$

где операторы $A_0, B : V \to V^*$ и элемент $f \in V^*$ порождаются формами

$$\langle A_0 u, \eta \rangle = \int\limits_0^l \frac{T(\lambda)}{\lambda} \left(\frac{du}{ds}, \frac{d\eta}{ds} \right) ds, \quad \langle Bu, \eta \rangle = \int\limits_0^l q(s) \left(Q \frac{du}{ds}, \eta \right) ds,$$

$$\langle f, \eta \rangle = \int\limits_0^l \left(\tilde{f}, \eta \right) ds.$$

В работе [8] доказано, что оператор $A = A_0 + B$ является псевдомонотонным, потенциальным и коэрцитивным. В [9] установлено, что оператор B липшиц-непрерывен, и для любой последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$, сходящейся слабо к u в V при $k \to +\infty$, имеет место соотношение

$$\lim_{k \to +\infty} \langle Bu_k, u_k \rangle = \langle Bu, u \rangle .$$

Построим конечномерные аппроксимации вариационного неравенства (19). Введем на отрезке $[0, l]$ сетку

$$\bar{\omega}_h = \{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = l\} ,$$

обозначим $h_i = s_{i+1} - s_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Предполагаем, что сетка $\bar{\omega}_h$ является регулярной, то есть существует постоянная $c_* > 0$.

$$\frac{h}{h_{\min}} \leq c_* \text{ при } \quad h \to 0,$$

где

$$h = \max\{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\}, \quad h_{\min} = \min\{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\}.$$

Определим теперь конечномерное пространство V_h, ассоциируемое с сеткой $\bar{\omega}_h$: $V_h = X_h \times X_h$, где X_h – пространство непрерывных на $[0, l]$ функций, линейных на каждом отрезке $[s_i, s_{i+1}]$, $\quad i = 0, 1, \ldots, N-1$, и обращающихся в нуль при $s = 0$ и $s = l$. В качестве базиса в V_h выберем функции $\varphi_k = (\varphi_{k,1}, \varphi_{k,2}) \in V_h$, $k = 1, \ldots, 2(N-1)$, определенные на $[0, l]$ по формуле

$$\varphi_{k,1}(s_i) = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}, \quad \varphi_{k,2}(s_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\varphi_{k,1}(s_i) = 0, \quad \varphi_{k,2}(s_i) = \begin{cases} 1, & , k - (N-1) = i \\ 0, & k - (N-1) \neq i \end{cases}, \quad k = N, N+1, \ldots, 2\,(N-1).$$

Любая функция $u_h \in V_h$ при этом может быть представлена в виде линейной комбинации

$$u_{h,j}(s) = \sum_{i=1}^{N-1} u_{h,j}(s_i) \big[\varphi_{i,j}(s) + \varphi_{(N-1)+i,j}(s) \big], \quad j = 1, 2.$$

Множеству $M \subset V$, определенному выше, поставим в соответствие множество $M_h \subset V_h$:

$$M_h = \Big\{\eta \in V_h : \ \eta_2(s_i) \geq F(\eta_1(s_i)), \ i = 0, 1, 2, \ldots, N\Big\}. \tag{20}$$

Множеству $K(u)$ поставим в соответствие множество

$$K_h(u_h) = \Big\{\eta \in M_h : \ \Big(\eta(s_i) - P^{u_h}(s_i), n(P_1^{u_h}(s_i))\Big) \geq 0, \ i = 0, 1, 2, \ldots, N\Big\}, \tag{21}$$

а задаче (19) поставим в соответствие аппроксимирующую конечномерную задачу, поиска функции $u_h \in M_h$, являющейся решением квазивариационного неравенства

$$\langle Au_h - f, \eta_h - u_h \rangle \geq 0 \qquad \forall \, \eta_h \in K_h(u_h), \tag{22}$$

Положим

$$(r_h \eta)_j(s) = \sum_{i=1}^{N-1} \eta_{h,j}(s_i) \big[\varphi_{i,j}(s) + \varphi_{(N-1)+i,j}(s)\big], \quad j = 1, 2.$$

Имеют место следующие результаты (из которых вытекает, что построенные нами сеточные схемы удовлетворяют условиям (6), (I), (III)).

Лемма 1. *Пусть* $\eta \in V$, *тогда* $r_h \eta \in V_h$, $\lim\limits_{h \to 0} \|r_h \eta - \eta\|_V = 0$.

Лемма 2. *Пусть* $\eta \in M$, *тогда* $r_h \eta \in M_h$ $\lim\limits_{h \to 0} \|r_h \eta - \eta\|_V = 0$, *и имеет место свойство* (I).

Справедливость леммы 1 непосредственно следует из результатов работы [10], а леммы 2 – из определения множеств M, M_h и леммы 1.

Проверим, что для множеств M_h, $K_h(u_h)$, задаваемых соотношениями (20), (21), выполняется условие (II).

Для $w \in K(u)$ и $\varepsilon > 0$ введем функцию $w^\varepsilon, w^\varepsilon(s) = w(s) + (0, \theta^\varepsilon(s))$, где

$$\theta^\varepsilon(s) = \begin{cases} s & \text{при} \quad 0 \leq s \leq \varepsilon, \\ \varepsilon & \text{при} \quad \varepsilon \leq s \leq l - \varepsilon, \\ l - s & \text{при} \quad l - \varepsilon \leq s \leq l. \end{cases} \tag{23}$$

Обозначим $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Из соотношений

$$(n, e_2) = \left(Q \, \frac{\tau\,(\xi\,)}{|\,\tau\,(\xi\,)|}, \, e_2\right) = \left(\frac{\tau\,(\xi\,)}{|\,\tau\,(\xi\,)|}, \, Q^{\mathrm{T}} e_2\right) =$$
$$= \left(\frac{\tau\,(\xi\,)}{|\,\tau\,(\xi\,)|}, \, e_1\right) = \frac{1}{\sqrt{(F'(\xi))^2 + 1}} > 0 \tag{24}$$

и определения множества $K(u)$ вытекает, что

$$\Big(w^\varepsilon(s) - P^u(s), n(P_1^u(s))\Big) = \Big(w(s) + (0, \theta^\varepsilon(s)) - P^u(s), n(P_1^u(s))\Big) =$$
$$= \Big(w(s) - P^u(s), n(P_1^u(s))) + (\theta^\varepsilon)(s)(e_2, n(P_1^k(s_i))\Big) > 0.$$

Поэтому $w^\varepsilon \in K(u)$.

Определим
$$w_k^\varepsilon = \Pi_{h_k} w^\varepsilon(s), \tag{25}$$
где $\Pi_h : V \to V_h$ – оператор интерполирования, задаваемый соотношением
$$\Pi_h w(s_i) = w(s_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad w \in V.$$
Очевидно, что $w_k^\varepsilon \in K_{h_k}(u)$.

В дальнейшем нам потребуется

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{+\infty}$ сходится к нулю, последовательность $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ из M_{h_k} слабо сходится к u в V при $k \to +\infty$. Тогда $u \in M$, и для произвольной функции $w \in K(u)$ найдется такое $\varepsilon_w > 0$, что для всякого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_w]$ найдется номер k_ε, начиная с которого выполнено включение $w_k^\varepsilon \in K_{h_k}(u_{h_k})$, где w_k^ε – функция, определенная соотношением* (25).

Доказательство. Установим принадлежность u множеству M. Из слабой сходимости в пространстве V последовательности $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ к u и компактного вложения V в $[C(0,l)]^2$ имеем равномерную сходимость последовательности $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$:
$$\forall\, \delta > 0 \quad \exists\, k_\delta : \ |\, u_{h_k}(\alpha) - u(\alpha)\,| < \delta \quad \forall\, \alpha \in \bar\omega_h, \quad k \ge k_\delta\,. \tag{26}$$
Функция F непрерывна, следовательно, учитывая (26) и определение (18) множества M, для произвольной точки $s \in \bar\omega_h$ получаем неравенство
$$F(u_1) = \lim_{k\to+\infty} F(u_1 + u_{h_k,1} - u_{h_k,1}) = \lim_{k\to+\infty} F(u_{h_k,1}) \le$$
$$\le \lim_{k\to+\infty} u_{h_k,2} = \lim_{k\to+\infty} u_{h_k,2} - u_2 + u_2 = u_2.$$
Это и означает принадлежность u множеству M.

Проверим, что $w_k^\varepsilon \in K_{h_k}(u_{h_k})$. Обозначим через $P_h^k = (P_{h,1}^k, P_{h,2}^k)$ вектор-функцию $P^{u_{h_k}}$, а через $P^k = (P_1^k, P_2^k)$ – вектор-функцию $P^{\Pi_{h_k} u}$. Установим справедливость неравенств
$$\Big(w_k^\varepsilon(s_i) - P_h^k(s_i), n(P_{h,1}^k(s_i))\Big) \ge 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N,$$
из которых и будет вытекать принадлежность функции w_k^ε множеству $K_{h_k}(u_{h_k})$.

Из определения множества $K_{h_k}(u_{h_k})$ следует, что
$$\Big(w_k^\varepsilon(s_i) - P_h^k(s_i), n(P_{h,1}^k(s_i))\Big) =$$
$$= \Big(w_k^\varepsilon(s_i) - P_h^k(s_i) - P^k(s_i) + P^k(s_i), n(P_{h,1}^k(s_i))\Big) =$$
$$= \Big(w_k^\varepsilon(s_i) - P^k(s_i), n(P_{h,1}^k(s_i))\Big) + \Big(P^k(s_i) - P_h^k(s_i), n(P_{h,1}^k(s_i))\Big) =$$
$$= \Big[\Big(w_k^\varepsilon(s_i) - P^k(s_i), n(P_1^k(s_i))\Big)\Big] + \Big[\Big(w_k^\varepsilon(s_i) - P^k(s_i), n(P_{h,1}^k(s_i)) - n(P_1^k(s_i))\Big)\Big] +$$
$$+ \Big[\Big(P^k(s_i) - P_h^k(s_i), n(P_{h,1}^k(s_i))\Big)\Big]. \tag{27}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (27) снизу, а два последующих – сверху. Для первого слагаемого имеем:

$$\Big(w_k^\varepsilon(s_i) - P^k(s_i), n(P_1^k(s_i))\Big) = \Big(w_k(s_i) + (0, \theta_k^\varepsilon) - P^k(s_i), n(P_1^k(s_i))\Big) =$$
$$= \Big(w_k(s_i) - P^k(s_i), n(P_1^k(s_i))\Big) + \theta_k^\varepsilon(s_i)\Big(e_2, n(P_1^k(s_i))\Big), \quad (28)$$

где $w_k(s_i) = \Pi_{h_k} w(s_i), \theta_k^\varepsilon(s_i) = \Pi_{h_k}\theta^\varepsilon(s_i)$.

Пусть d – минимальное из расстояний от точек $(0,0)$ и $(l,0)$ до множества Δ, $u_k(s_i) = \Pi_{h_k} u(s_i)$. Поскольку $u(0) = (0,0), u(l) = (l,0)$, то $d = \min\big\{P^u(0), P^u(l)\big\}$. Положим $r = d/4$.

Введем множество $B_r(x) = \{z \in R^2 : |z - x| \le r\}$. Выберем $\varepsilon_r > 0$ так, чтобы

$$\begin{cases} w(s) \in B_r\big((0,0)\big), u(s) \in B_r\big((0,0)\big), & 0 \le s \le \varepsilon_r, \\ w(s) \in B_r\big((l,0)\big), u(s) \in B_r\big((l,0)\big), & l - \varepsilon_r \le s \le l. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} w_k(s_i) \in B_r\big((0,0)\big), u_k(s_i) \in B_r\big((0,0)\big), & 0 \le s_i \le \varepsilon_r, \\ w_k(s_i) \in B_r\big((l,0)\big), u_k(s_i) \in B_r\big((l,0)\big), & l - \varepsilon_r \le s_i \le l. \end{cases}$$

Поэтому

$$\Big(w_k(s_i) - P^k(s_i), n(P_1^k(s_i))\Big) =$$
$$= \Big(w_k(s_i) - u_k(s_i),\, n(P_1^k(s_i))\Big) + \Big(u_k(s_i) - P^k(s_i),\, n(P_1^k(s_i))\Big) \ge$$
$$\ge -\|w_k(s_i) - u_k(s_i)\| + \|u_k(s_i) - P^k(s_i)\| \ge$$
$$\ge -2r + d - r \ge d - 3r = \frac{1}{4}\, d > 0 \quad \forall s_i \in [\,0, \varepsilon_r\,] \bigcup [\,l - \varepsilon_r, l\,]. \quad (29)$$

Из определения множества $K(u)$ вытекает, что

$$\Big(w_k(s_i) - P^k(s_i), n(P_1^k(s_i))\Big) \ge 0 \qquad \forall s_i \in [\,\varepsilon_r\,, l - \varepsilon_r\,]. \quad (30)$$

Поскольку функция $(e_2, n(P_1^k(\cdot)))$ является непрерывной, а в силу (24) – положительной, то она на компакте $[\,0, l\,]$ достигает минимума:

$$\delta_1 = \min_{0 \le s \le l} \big(e_2, n(P_1^k(s))\big).$$

Отсюда и из (23) следует, что

$$\theta_k^\varepsilon(s_i)\Big(e_2, n(P_1^k(s_i))\Big) \ge \delta_1\, \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_r) \quad \forall s_i \in [\,\varepsilon_r\,, l - \varepsilon_r\,]. \quad (31)$$

Кроме того, в силу (24)

$$\theta_k^\varepsilon(s_i)\Big(e_2, n(P_1^k(s_i))\Big) \ge 0 \quad \forall s_i \in [\,0, \varepsilon_r\,] \bigcup [\,l - \varepsilon_r, l\,]. \quad (32)$$

Используя (29)–(32), из (28) получаем:

$$\Big(w_k^\varepsilon(s_i) - P^k(s_i), n(P_1^k(s_i))\Big) \ge \delta_1\, \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_w), \quad \varepsilon_w = \min\left\{\varepsilon_r,\, \frac{d}{4\,\delta_1}\right\}.$$

Оценим второе слагаемое в (27). Поскольку $F \in C^1(R^1)$, то $\|n(s) - n(t)\| \to 0$ при $s \to t$. Далее, M_h – ограниченное множество, поэтому для любого $\delta_2 > 0$ существует i_{δ_2} такое, что для всех $k > i_{\delta_2}$ справедлива оценка

$$\Big(w_k^\varepsilon(s_i) - P^k(s_i), n(P_{h,1}^k(s_i)) - n(P_1^k(s_i))\Big) \leq$$

$$\leq \max_{i=0,1,\ldots,N} \|w_k^\varepsilon(s_i) - P^k(s_i)\| \, \|n(P_{h,1}^k(s_i)) - n(P_1^k(s_i))\| \leq \delta_2 \,. \quad (33)$$

Перейдем к оценке третьего слагаемого в (27). Поскольку функция P^u липшиц-непрерывна, то $\|P^k(s_i) - P_h^k(s_i)\| \leq \|\Pi_{h_k} u(s_i) - u_{h_k}(s_i)\|$. Учитывая (26), устанавливаем, что справедлива оценка

$$|(P^k(s_i) - P_h^k(s_i), n(P_{h,1}^k(s_i))| \leq \|u_k(s_i) - u_{h_k}(s_i)\| \leq \delta_3.$$

Итак, для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_w]$, выбрав $k_\varepsilon = k_\delta$, $\delta = \delta_1 \varepsilon$ такие, что при $k > k_\varepsilon$ выполнены неравенства $\delta_2 \leq \delta_1 \varepsilon/3, \delta_3 \leq \delta_1 \varepsilon/3$, получим, что справедливо неравенство

$$\Big(w_k^\varepsilon(s_i) - P_h^k(s_i), n(P_{h,1}^k(s_i))\Big) \geq \frac{\delta}{3} > 0,$$

и, следовательно, $w_k^\varepsilon \in K_{h_k}(u_{h_k})$. □

Имеет место

Теорема 4. *Пусть $u_h \in M_h, u_h \rightharpoonup u$ в V при $h \to 0$, тогда для любого $w \in K(u)$ найдутся w_h такие, что*

$$w_h \in K_h(u_h), \quad (34)$$

$$\lim_{h\to 0} \|w_h - w\| = 0.$$

Доказательство. Зададим убывающую последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{+\infty}$, сходящуюся к нулю и принадлежащую интервалу $[0, \varepsilon_w]$. Для каждого ε_k, согласно лемме 3, выберем h_k так, чтобы $w_k^\varepsilon \in K_h(u_h)$ для $h \leq h_k < h_{k-1}$. Положим $w_h = u_h$ при $h_1 > h > h_2$ и $w_h = w_k^\varepsilon$ при $h_{k+1} < h < h_k$. Тогда в силу леммы 3 для построенной последовательности выполнено условие (34).

Далее имеем

$$\|w - w_h\| = \|\Pi_{h_k} \theta^\varepsilon\| \to 0 \text{ при } \varepsilon_k \to 0,$$

то есть при $k \to \infty$, следовательно, при $h \to 0$. Таким образом, для множеств M_h и K_h, заданных соотношением (20), (21), выполнено условие (II). □

Нам потребуется теперь следующий результат (см. [11, 12]):

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (13), (14), *последовательность* $\left\{u^{(k)}\right\}_{k=1}^{+\infty}$ *из V слабо сходится в V при $k \to +\infty$ к u, оператор $A_0 : V \to V^*$, удовлетворяет соотношению* $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\langle A_0 u^{(k)} - A_0 u, u^{(k)} - u \right\rangle = 0$. *Тогда*

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{\Omega_u^+} \left| \frac{d\left(u^{(k)} - u\right)}{ds} \right|^p ds = 0,$$

где $\Omega_u^+ = \{s \in (0,1) : \lambda(u) > 1\}$.

Справедлива

Теорема 5. *Пусть* $q \equiv \mathrm{const}$. *Тогда:*

1) *задача* (22) *имеет, по крайней мере, одно решение;*

2) *существует положительная постоянная* c_4, *не зависящая от* h, *такая, что* $\|u_h\|_V \le c_4$;

3) *любая слабо предельная точка* u *семейства* $\{u_h\}$ *является решением задачи* (19), *причем, если* $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ – *подпоследовательность, слабо сходящаяся при* $k \to +\infty$ *в* V *к* u, *то*

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_{h_k} - u\|_Y = 0, \tag{35}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{\Omega_u^+} \left| \frac{d\,(u_{h_k} - u)}{ds} \right|^p ds = 0. \tag{36}$$

Если функция T *удовлетворяет также условию*

$$\frac{T(\xi) - T(\zeta)}{\xi - \zeta} \le c_5 (1 + \xi + \zeta)^{p-2} \quad \forall\, \xi, \zeta \in R^1 > 0, \quad c_5 > 0, \tag{37}$$

то

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| T\left(\frac{du_{h_k}}{ds}\right) - T\left(\frac{du}{ds}\right) \right\|_{L_\gamma} = 0, \quad \gamma = \min(2, p'), \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{38}$$

Доказательство. Существование решения задачи (22), а также то, что любая слабо предельная точка u семейства $\{u_h\}$ является решением задачи (19), вытекает из теоремы 2. Соотношение (35) следует из компактности вложения V в $Y = L_p(\Omega) \times L_p(\Omega)$, соотношение (36) – из (10) и леммы 4.

Далее, следуя [13], нетрудно проверить, что при выполнении условия (37) существует постоянная $c_6 > 0$ такая, что справедливо неравенство

$$\left\| T\left(\frac{d\eta}{ds}\right) - T\left(\frac{dw}{ds}\right) \right\|_{L_\gamma}^2 \le c_6 \left\langle A_0\eta - A_0 w, \eta - w \right\rangle \ \forall\, \eta, w \in V.$$

Из этого неравенства и соотношения (10) и вытекает (38). □

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 06-01-00633, 07-01-00674, 08-01-00676).

Summary

I.B. Badriev, V.V. Banderov, O.A. Zadvornov. On Approximative Methods for Solving Quasi-Variational Inequalities of the Soft Network Shells Theory.

The article investigates the convergence of the finite element schemes for the problem of finding an equilibrium position of a soft network shells subjected to mass forces and following surface load. The convergence proof is based on constructing an iterative method of solving the finite dimensional approximation of quasi-variational inequality arising by mathematical formulation of the problem considered.

Key words: quasi-variational inequalities, soft network shells, finite element method, iterative methods.

Литература

1. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Бандеров В.В.* Постановка и исследование стационарных задач теории мягких оболочек с невыпуклым достижимым множеством // Исслед. по прикладной матем. и информатике. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2001. – Вып. 23. – С. 3–7.

2. *Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А.* Исследование задачи о контакте нити с препятствием // Исслед. по прикладной матем. и информатике. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2003. – Вып. 24. – С. 3–11.

3. *Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А.* О конечномерных аппроксимациях квазивариационных неравенств // Исслед. по прикладной матем. и информатике. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2006. – Вып. 26. – С. 34–41.

4. *Задворнов О.А.* О сходимости итерационного метода решения квазивариационного неравенства // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Материалы Пятого Всерос. семинара. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2004. – С. 71–75.

5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

6. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

7. *Ридель В.В., Гулин Б.В.* Динамика мягких оболочек. – М.: Наука, 1990. – 206 с.

8. *Бадриев И.Б., Шагидуллин Р.Р.* Классические и обобщенные решения уравнений одноосного статического состояния мягкой оболочки // Сеточные методы решения дифференц. уравнений. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. – С. 14–28.

9. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование разрешимости стационарных задач для сетчатых оболочек // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 11. – С. 3–7.

10. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.

11. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование сходимости итерационного процесса для уравнений с вырождающимися операторами // Дифференц. уравнения. – 1996 – Т. 32, № 7. – С. 898–901.

12. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* О сильной сходимости итерационного метода для операторов с вырождением // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1997. – Т. 37, № 12. – С. 1424–1426.

13. *Ляшко А.Д., Карчевский М.М.* О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 73–81.

Поступила в редакцию
04.02.08

Бадриев Ильдар Бурханович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Ildar.Badriev@ksu.ru*

Бандеров Виктор Викторович – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры экономической кибернетики Казанского государственного университета.

E-mail: *Victor.Banderov@ksu.ru*

Задворнов Олег Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Oleg.Zadvornov@ksu.ru*