УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 1 Физико-математические науки *2008*

УДК 517.54

МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСПРЯМЛЯЕМЫХ ДУГ И ЗАДАЧА О СКАЧКЕ

Б.А. Кац

Аннотация

В статье исследуется краевая задача о восстановлении голоморфной функции по ее скачку на заданной неспрямляемой дуге. Для таких дуг введены новые метрические характеристики типа размерностей. Основным результатом статьи является новое условие разрешимости задачи о скачке в терминах указанных характеристик. Оно улучшает известные условия такого рода.

Ключевые слова: голоморфная функция, задача о скачке, неспрямляемая дуга, фрактальная размерность.

Введение

В теории функций комплексной переменной хорошо известна так называемая задача о скачке. Она ставится следующим образом. Пусть Γ есть дуга на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с началом в точке a_1 и концом в точке a_2, и на этой кривой задана функция $f(t)$. Требуется найти голоморфную в $\overline{\mathbf{C}}\setminus\Gamma$ функцию $\Phi(z)$, имеющую при приближении z из области $\overline{\mathbf{C}}\setminus\Gamma$ к любой точке $t\in\Gamma^\circ\equiv\Gamma\setminus\{a_1,a_2\}$ слева и справа предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ соответственно, связанные условием граничного сопряжения

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=f(t), t\in\Gamma^\circ; \tag{1}$$

кроме того, предполагается, что $\Phi(\infty)=0$.

Как правило, эту задачу решают в классе функций, ограниченных или интегрируемых вблизи концов дуги (см., например, [1, 2]), однако в данной работе (за исключением последнего пункта) мы не налагаем на искомую функцию таких ограничений

Мы считаем, что заданная на кривой Γ функция f удовлетворяет условию Гельдера

$$\sup\left\{\frac{|f(t')-f(t'')|}{|t'-t''|^\nu}: t',t''\in\Gamma, t'\neq t''\right\}\equiv h_\nu(f,\Gamma)<\infty \tag{2}$$

с каким-либо показателем $\nu\in(0,1]$. Ниже через $H_\nu(\Gamma)$ мы обозначаем пространство Гельдера, то есть множество всех заданных на Γ функций, удовлетворяющих условию (2).

Хорошо известно (см., например, [1, 2]), что в случае кусочно-гладкой дуги Γ решение этой задачи (в классе функций, имеющих интегрируемые особенности на концах дуги) единственно и дается интегралом типа Коши:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}. \tag{3}$$

Еще Гарнаку, Морера и Сохоцкому было в той или иной степени известно, что этот интеграл имеет непрерывные граничные значения на Γ° с обеих сторон если плотность $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с любым показателем ν из указанного выше промежутка, а контур интегрирования является кусочно-гладким (см. [2]). Разность этих граничных значений равна плотности интеграла; соответствующее равенство, называемое формулой Сохоцкого, лежит в основе приложений интеграла (3) в краевых задачах.

В дальнейшем ограничения на дугу Γ неоднократно ослаблялись. Одним из наиболее важных достижений в этой области является результат, полученный независимо друг от друга Е.М. Дынькиным [3] и Т. Салимовым [4]. Это оценка модуля непрерывности интеграла (3) по спрямляемой (вообще говоря, негладкой) замкнутой кривой Γ через модуль непрерывности его плотности f и некоторые величины, характеризующие метрические свойства Γ. В частности, выяснилось, что если $f \in H_\nu(\Gamma)$ при $\nu > 1/2$, то граничные значения $\Phi^\pm(t)$ существуют и непрерывны без каких-либо дополнительных ограничений на спрямляемую кривую Γ.

Е.М. Дынькин [3] установил также, что его результат неулучшаем в терминах использованных метрических характеристик кривой. В частности, для произвольно фиксированного $\nu \in (0, 1/2]$ он построил такую спрямляемую кривую Γ и такую заданную на ней функцию $f(t) \in H_\nu(\Gamma)$, что интеграл (3) теряет непрерывность в одной из точек контура интегрирования. Из этих результатов следует, что задача о скачке разрешима на произвольной спрямляемой кривой при условии $\nu > 1/2$, причем последнее условие неулучшаемо на всем классе спрямляемых кривых.

Затем нами была исследована разрешимость задачи о скачке на неспрямляемой кривой. Было доказано (см. [5]), что для любой простой замкнутой кривой Γ и любой заданной на ней функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ при условии

$$\nu > \frac{1}{2}\,\mathrm{Dm}\ \Gamma \tag{4}$$

существует голоморфная в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ функция $\Phi(z)$, граничные значения которой связаны равенством (1). Здесь $\mathrm{Dm}\ \Gamma$ – это хорошо известная в теории фракталов (см., например, [6]) верхняя метрическая размерность Γ, то есть

$$\mathrm{Dm}\ \Gamma = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\varepsilon;\Gamma)}{-\log\varepsilon},$$

где $N(\varepsilon;\Gamma)$ есть наименьшее число кругов диаметра ε, образующих покрытие Γ (по видимому, впервые определение этой размерности было дано в работе [7]). Если Γ есть спрямляемая кривая, то $\mathrm{Dm}\ \Gamma = 1$, так что этот результат содержит в себе условие $\nu > 1/2$ для спрямляемых кривых. В дальнейшем нами были получены его аналоги для разомкнутых дуг (см., например, [8]).

Условие (4) также неулучшаемо. Это означает, что для любой пары чисел d, ν, связанных неравенствами $0 < \nu \le d/2 < 1$, можно построить кривую Γ верхней метрической размерности d и функцию $f \in H_\nu(\Gamma)$, для которых задача о скачке (1) неразрешима. Конструкция таких кривой и функции приведена в [5]. Однако этот результат не исключает существования кривых Γ и заданных на них функций f, для которых условие (4) не выполнено, но задача (1) разрешима. В работе [9] построен класс кривых, на котором эта возможность реализуется.

Указанное обстоятельство можно трактовать как неполное соответствие такой метрической характеристики компактных множеств, как верхняя метрическая размерность, потребностям задачи о скачке. В связи с этим возникает задача построения иных характеристик типа размерности, более точно описывающих природу кривых, для которых задача о скачке разрешима. Для замкнутых кривых такая размерность предложена в работе [10] под названием уточненной метрической размерности, затем в несколько измененном виде эта характеристика изучалась в [11]. В обеих этих работах было показано, что условия разрешимости задачи о скачке можно улучшить путем замены в них верхней метрической размерности на уточненную метрическую размерность. Однако эта величина имеет иную природу, чем верхняя метрическая размерность. Так, во всех определениях уточненной метрической размерности какого-либо множества предполагается, что оно разделяет плоскость на две области. Поэтому при адаптации данной характеристики для незамкнутых кривых (то есть дуг) возникают определенные трудности.

В данной работе эти трудности в какой-то мере преодолеваются, что приводит к построению аналога уточненной метрической размерности для дуг, имеющего приложения в задаче о скачке. В первом параграфе обсуждаются определения уточненной метрической размерности для разомкнутых дуг, а во втором эта характеристика используется для решения задачи о скачке.

1. Определения уточненной метрической размерности

Сначала напомним определения из работ [10, 11].

В работе [10] интересующая нас величина определяется так.

Определение 1. Пусть Γ – неспрямляемая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область D. Рассмотрим всевозможные представления этой области в виде объединения конечных или бесконечных семейств диадических квадратов, не имеющих общих внутренних точек. Множество $e(\Gamma)$ состоит из всех чисел $p \geq 1$, обладающих следующим свойством:

область D допускает представление в виде объединения диадических квадратов со сторонами $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$, не имеющих общих внутренних точек и таких, что сумма $\sum\limits_{j\geq 1}^{\infty} a_j^p$ конечна.

Тогда величину $\inf e(\Gamma)$ мы будем обозначать $\mathrm{dm}^\diamond\,\Gamma$.

Отметим, что под диадическими квадратами понимаются, как обычно, квадраты с параллельными осям сторонами, длины которых имеют значения вида 2^{-k}, а вершины лежат в точках вида $2^{-m}n$, где $k,\ m,\ n$ – целые числа. Собственно в работе [10] квадраты не предполагались диадическими, но легко видеть, что это дополнительное требование не может изменить величину $\mathrm{dm}^\diamond\,\Gamma$. Наконец, для бесконечных семейств квадратов под конечностью суммы, входящей в это определение понимается сходимость соответствующего ряда. Величину $\mathrm{dm}^\diamond\,\Gamma$ можно назвать аппроксимационной размерностью кривой Γ.

Теперь перейдем к определениям из работы [11]. Оба содержащихся в ней определения основаны на специальных представлениях открытых множеств на плоскости, которые мы будем называть их разложениями.

Пусть D – конечная область на комплексной плоскости. Рассмотрим конечную или счетную последовательность Δ, состоящую из пар вида $\{\delta_j, s_j\},\ j = 0, 1, 2, \dots$, где δ_j при любом j есть конечная односвязная область, а величина s_j при каждом j принимает значение $+1$ или -1, причем $s_0 = +1$. С каждой последовательностью пар Δ свяжем последовательность множеств (ее частичных сумм) $\Delta_0,\ \Delta_1,\ \Delta_2, \dots$, определенную следующим образом: $\Delta_0 = \delta_0$; при $n > 0$ сумма $\Delta_n = \sum\limits_{j=0}^{n} s_j\delta_j$ есть внутренность объединения $\overline{\Delta_{n-1}} \cup \overline{\delta_n}$ при $s_n = +1$ и разности $\overline{\Delta_{n-1}} \setminus \delta_n$ при $s_n = -1$. Если последовательность Δ бесконечна, то Δ_∞ состоит из точек z, принадлежащих всем частичным суммам Δ_n, начиная с некоторого $n = n(z)$. Мы будем называть Δ разложением D, если выполнены следующие два условия: (а) $\delta_n \cap \Delta_{n-1} = \emptyset$ при $s_n = +1$ и $\delta_n \subset \Delta_{n-1}$ при $s_n = -1$ для $n = 1, 2, \dots$; (б) $D = \Delta_m$, где m – число пар в последовательности Δ (оно может быть как конечным числом, так и бесконечностью).

Далее, будем называть разложение Δ спрямляемым, если все входящие в него области δ_j имеют спрямляемые границы, и квадратным, если все эти области есть диадические квадраты.

Если Δ – спрямляемое разложение, то при конечном m граница Δ_m всегда спрямляема, так что спрямляемое или квадратное разложение области с неспрямляемой границей может быть бесконечным.

Далее, для любой области δ обозначим через $w(\delta)$ диаметр наибольшего из помещающихся внутри δ открытых кругов; если граница δ спрямляема, то $\lambda(\delta)$ означает длину этой границы.

Определение 2. Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая на комплексной плоскости, разбивающая некоторую содержащую ее односвязную область Q со спрямляемой границей на две односвязные области Q' и Q''. Обозначим через $e'(\Gamma)$ множество всех чисел $p \ge 1$, обладающих следующим свойством:

хотя бы одна из областей Q', Q'' допускает спрямляемое разложение $\Delta = \{\{\delta_j, s_j\},\ 0 \le j \le m\}$ такое, что сумма $\sigma(\Delta) \equiv \sum\limits_{j=0}^{m} \lambda(\delta_j) w^{p-1}(\delta_j)$ конечна.

Тогда величина $\mathrm{rdm}\ \Gamma \equiv \inf e'(\Gamma)$ называется уточненной метрической размерностью кривой Γ.

Если $\Delta = \{\{\delta_0, s_0\}, \{\delta_1, s_1\}, \{\delta_2, s_2\}, \dots\}$ – разложение одной из компонент Q', Q'', то $\Delta' = \{\{Q, +1\}, \{\delta_0, -s_0\}, \{\delta_1, -s_1\}, \{\delta_2, -s_2\}, \dots\}$ есть разложение второй, то есть уточненная размерность не зависит от выбора компоненты. Очевидно она не зависит и от выбора объемлющей области Q.

Определение 3. Пусть множество $e^{\diamond}(\Gamma)$ состоит из всех чисел $p \ge 1$, обладающих следующим свойством:

хотя бы одна из областей Q', Q'' допускает квадратное разложение $\Delta = \{\{\delta_j, s_j\}, 0 \le j \le m\}$ такое, что сумма $\sigma^{\diamond}(\Delta) \equiv \sum\limits_{j=0}^{m} \lambda(\delta_j) w^{p-1}(\delta_j)$ конечна.

Тогда величину $\inf e^{\diamond}(\Gamma)$ будем обозначать $\mathrm{rdm}^{\diamond}\,\Gamma$.

Перейдем к обсуждению этих трех характеристик кривой Γ. Отметим прежде всего следующие результаты из работы [10]:

(а1) для любой замкнутой жордановой кривой Γ на плоскости справедливы соотношения

$$1 \le \mathrm{dm}^{\diamond}\,\Gamma \le \mathrm{Dm}\ \Gamma \le 2;$$

(б1) для любого числа $d \in (1, 2]$ существует кривая Γ такая, что $\mathrm{dm}^{\diamond}\,\Gamma < d = \mathrm{Dm}\ \Gamma$;

и из работы [11]:

(а2) для любой замкнутой жордановой кривой Γ на плоскости справедливы соотношения

$$1 \le \mathrm{rdm}\ \Gamma = \mathrm{rdm}^{\diamond}\,\Gamma \le \mathrm{Dm}\ \Gamma \le 2; \tag{5}$$

(б2) для любого числа $d \in (1, 2]$ существует кривая Γ такая, что $\mathrm{rdm}\ \Gamma < d = \mathrm{Dm}\ \Gamma$.

Иными словами, ни одна из размерностей $\mathrm{dm}^{\diamond}\,\Gamma, \mathrm{rdm}\ \Gamma, \mathrm{rdm}^{\diamond}\,\Gamma$ не совпадает с $\mathrm{Dm}\ \Gamma$, а размерности $\mathrm{rdm}\ \Gamma$ и $\mathrm{rdm}^{\diamond}\,\Gamma$ совпадают между собой.

Теперь сравним определения 1 и 3. В первом из них идет речь о построении ограниченной кривой Γ области путем «сложения» диадических квадратов, а в последнем к «сложению» добавляется операция «вычитания». Поэтому $e(\Gamma) \subset \subset e^{\diamond}(\Gamma)$ и $\mathrm{dm}^{\diamond}\,\Gamma \geq \mathrm{rdm}\;\Gamma = \mathrm{rdm}^{\diamond}\,\Gamma$. Поскольку полученные в этих работах условия разрешимости задачи о скачке имеют вид (4) с заменой верхней метрической размерности $\mathrm{Dm}\;\Gamma$ на одну из введенных в этом параграфе уточненных размерностей $\mathrm{dm}^{\diamond}\,\Gamma$, $\mathrm{rdm}\;\Gamma$, $\mathrm{rdm}^{\diamond}\,\Gamma$, постольку меньшие размерности $\mathrm{rdm}\;\Gamma$ и $\mathrm{rdm}^{\diamond}\,\Gamma$ имеют здесь преимущество, оправдывающее их усложненное определение. Впрочем, нам неизвестны примеры кривых, для которых $\mathrm{dm}^{\diamond}\,\Gamma > \mathrm{rdm}\;\Gamma$.

Как уже отмечалось, компоненты Q' и Q'' играют совершенно симметричные роли в определениях уточненных размерностей. В определениях 2 и 3 фразу «хотя бы одна из областей Q', Q'' допускает...» можно заменить на «обе области Q', Q'' допускают...», что позволяет переформулировать эти определения так, чтобы они имели смысл не только для замкнутых кривых. Приведем оба варианта такого определения: «спрямляемый» и «квадратный».

Определение 4. Пусть Γ – компактное множество на комплексной плоскости, а Q – область со спрямляемой границей такая, что $\Gamma \subset Q$. Обозначим через Q_1, $Q_2, \ldots$ связные компоненты множества $Q \setminus \Gamma$. Обозначим через $e'(\Gamma)$ множество всех чисел $p \geq 1$, обладающих следующим свойством:

каждая из компонент Q_1, $Q_2, \ldots$ допускает спрямляемое разложение $\Delta = \{\{\delta_j, s_j\}, 0 \leq j \leq m\}$ такое, что сумма $\sigma(\Delta) \equiv \sum\limits_{j=0}^{m} \lambda(\delta_j) w^{p-1}(\delta_j)$ конечна.

Тогда величина $\mathrm{rdm}\;\Gamma \equiv \inf e'(\Gamma)$ называется уточненной метрической размерностью кривой Γ.

Определение 5. Пусть множество $e^{\diamond}(\Gamma)$ состоит из всех чисел $p \geq 1$, обладающих следующим свойством:

каждая из компонент Q_1, $Q_2, \ldots$ допускает квадратное разложение $\Delta = \{\{\delta_j, s_j\}, 0 \leq j \leq m\}$ такое, что сумма $\sigma^{\diamond}(\Delta) \equiv \sum\limits_{j=0}^{m} \lambda(\delta_j) w^{p-1}(\delta_j)$ конечна.

Тогда величину $\inf e^{\diamond}(\Gamma)$ будем обозначать $\mathrm{rdm}^{\diamond}\,\Gamma$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

(а3) *для любого компактного множества* Γ *на плоскости имеют место соотношения* (5)*;*

(б3) *для любого числа* $d \in (1, 2]$ *существует разомкнутая дуга* Γ *такая, что* $rdm\,\Gamma < d = Dm\,\Gamma$.

Доказательство первого из этих утверждений совпадает с доказательством утверждения (а2) из работы [11]. Утверждение (б3) также следует из оценок этой работы. В ней для любого $d \in (1, 2]$ построена замкнутая ломаная с бесконечным множеством звеньев, удовлетворяющая требуемому соотношению; если удалить из нее одно звено, то получится разомкнутая дуга, описанная в утверждении (б3). Отметим, что дуга Γ замыкаемая (см. ниже).

2. Разрешимость задачи о скачке

2.1. Замыкаемые дуги. Теперь вернемся к задаче (1). Сначала рассмотрим эту задачу на замыкаемой дуге. Здесь и ниже дуга Γ называется замыкаемой, если ее концы можно соединить в **C** кусочно-гладкой дугой γ, не имеющей с Γ других общих точек. Скачок f можно продолжить на γ с помощью оператора продолжения Уитни (см., например, [13]). В результате мы получаем задачу о скачке на замкнутой кривой $\Gamma \cup \gamma$. Как доказано в [11], эта задача при условии

$$\nu > \frac{1}{2} \operatorname{rdm} \Gamma \tag{6}$$

имеет решение $\Phi_0(z)$. Тогда разность

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

является решением исходной задачи. Поскольку дуга γ – кусочно-гладкая, то вблизи концов a_j, $j = 1, 2$, эта разность имеет особенности не выше логарифмического порядка, то есть $\Phi(z) = O(\log |z - a_j|)$, $j = 1, 2$. Итак, доказана

Теорема 2. *Если Γ – замыкаемая дуга и $f \in H_\nu(\Gamma)$, то при условии* (6) *задача о скачке* (1) *имеет решение, особенности которого на концах этой дуги имеют не более, чем логарифмический порядок.*

Замечание о логарифмическом характере особенностей построенного решения на концах дуги допускает уточнение, а именно: из наших построений следуют оценки $\Phi(z) = (-1)^j f(a_j) \log |z - a_j| + c_j + o(|z - a_j|)$ при $z \to a_j$, $j = 1, 2$. Здесь c_j – постоянные числа.

2.2. Незамыкаемые кривые. Теперь рассмотрим неспрямляемую дугу, которую нельзя замкнуть кусочно-гладкой дугой. Пусть $\Gamma_1 \subset \Gamma$ – дуга с началом и концом в точках b_1 и b_2, $b_1 \neq b_2$. Граница замкнутой выпуклой оболочки Γ_1 содержит хотя бы одну внутреннюю точку дуги Γ_1, к ней можно прикоснуться концом малого прямолинейного отрезка, не имеющего иных общих точек с Γ. Такие точки будем называть линейно достижимыми. Как мы только что видели, между любыми двумя различными точками дуги Γ лежит хотя бы одна линейно достижимая точка. Это означает, что множество линейно достижимых точек всюду плотно на Γ. Если концы дуги Γ_1 линейно достижимы, то эта дуга замыкаема. Поэтому Γ можно представить как объединение $\bigcup \Gamma_j$ счетного семейства замыкаемых дуг. Обозначим через $\Phi_j(z)$ построенное в п. 2.1 решение задачи о скачке на замыкаемой дуге Γ_j. Из оценок, приведенных в конце только что упомянутого пункта следует, что если Γ_m и Γ_n – две соседние дуги с общей концевой точкой, то особенности функций Φ_m и Φ_n в этой точке при суммировании сокращаются, то есть $\Phi_m + \Phi_n$ – решение задачи о скачке на объединенной дуге $\Gamma_m \bigcup \Gamma_n$. Поэтому, если бы ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \Phi_j(z)$ сходился, то его сумма давала бы решение задачи о скачке на всей дуге Γ. Вообще говоря, данный ряд расходится, но его можно регуляризовать: всегда существует такая последовательность рациональных функций $R_j(z)$ с полюсами в точках a_1, a_2, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (\Phi_j(z) - R_j(z))$ равномерно сходится в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$. Доказательство существования таких рациональных функций повторяет рассуждения из работы [12]. Тем самым установлена

Теорема 3. *На любой неспрямляемой дуге Γ задача о скачке разрешима при условии* (6).

В отличие от предыдущей теоремы здесь мы не получили никакой информации о поведении решения на концах дуги. Это поведение имеет важное значение при исследовании краевых задач (см., например, [1, 2]). В этой связи приведем некоторые оценки решения вблизи концевых точек.

2.3. Особенности на концах. Рассмотрим задачу о единичном скачке:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 1, \quad t \in \Gamma^\circ;$$

ее решением является функция

$$k_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z - a_2}{z - a_1},$$

где ветвь логарифма определяется разрезом вдоль Γ и условием $k_\Gamma(\infty) = 0$. На концах дуги Γ мнимая часть этой функции имеет логарифмические особенности; что же касается ее действительной части, то она может быть ограниченной (если дуга Γ – гладкая или хотя бы замыкаемая), но может и иметь особенности сколь угодно высокого порядка, если эта дуга скручивается на соответствующем конце в спираль. Любые ограничения этих особенностей соответствуют ограничениям на скорость такого скручивания. Покажем, что при определенных условиях общая задача о скачке (1) имеет решение с тем же порядком особенностей на концах, что и решение задачи о единичном скачке k_Γ.

Выберем число $r > 0$ так, чтобы дуга Γ полностью лежала внутри круга $|z| < r$ и обозначим через $\omega(z)$ гладкую функцию, равную единице при $|z| \le r$ и нулю при $|z| \ge 2r$. Пусть $f^w(z)$ – результат продолжения Уитни (см., например, [13]) на всю комплексную плоскость функции f, определенной на Γ. Тогда произведение $\psi(z) := k_\Gamma(z)\omega(z)f^w(z)$ непрерывно в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ и имеет там частные производные по $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ всех порядков. На дуге Γ функция ψ имеет скачок f. Кроме того, эта функция имеет компактный носитель. Будем искать решение задачи (1) в виде

$$\Psi(z) := \psi(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}. \tag{7}$$

Прежде всего выясним, когда входящий сюда интеграл существует. Как показано в [11], производная $\partial f^w / \partial \overline{\zeta}$ интегрируема в конечной части плоскости в любой степени, меньшей числа $(2 - \operatorname{rdm} \Gamma)/(1 - \nu)$, то есть при условии (6) она интегрируема в некоторой степени, большей 2. Поэтому при условии

$$k_\Gamma(z) = O(|z - a_j|^{-\alpha}), \quad \alpha < 1, \quad j = 1, 2, \tag{8}$$

функция с компактным носителем $\psi_{\overline{\zeta}} := \partial \psi / \partial \overline{\zeta}$ интегрируема, что делает определение $\Psi(z)$ корректным. Далее, при тех же условиях вне любых окрестностей концов дуги Γ функция $\psi_{\overline{\zeta}}$ интегрируема в некоторой степени, большей двух. Отсюда (см., например, [14]) следует, что интегральный член (7) непрерывен во всей плоскости за возможным исключением концов дуги Γ. Кроме того, из хорошо известных свойств интегрального оператора

$$\varphi(z) \mapsto \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}$$

(см., например, [14]) следует, что функция $\Psi(z)$ голоморфна в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ и исчезает на бесконечности. Итак, при условиях (6) и (8) функция (7) действительно является решением задачи о скачке (1). Нам осталось выяснить, какие особенности она имеет на концах дуги Γ.

Ее первое слагаемое $\psi(z)$ имеет в точках a_j, $j = 1, 2$ особенности того же или более низкого (если f обращается там в нуль) порядка, что и $k_\Gamma(z)$. В любом случае $\psi(z) = O(|z - a_j|^{-\alpha})$. Для оценки особенностей второго слагаемого обозначим через p степень, с которой производная $\partial f^w/\partial\overline{\zeta}$ интегрируема в конечной части плоскости; как и выше, $2 < p < (2 - \mathrm{rdm}\,\Gamma)/(1-\nu)$. Тогда вблизи точки a_j имеем:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right| < C\left(\iint\limits_{|z|<2r}\left|\frac{\partial f^w}{\partial\overline{\zeta}}\right|^p\right)^{1/p}\left(\iint\limits_{|z|<2r}\frac{dxdy}{|\zeta-a_j|^{q\alpha}|\zeta-z|^q}\right)^{1/q},$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$, $\zeta = x+iy$, а C – некоторая положительная постоянная. Оценки последнего интеграла хорошо известны (см., например, [14]): он ограничен при $q\alpha + q < 2$, имеет логарифмическую особенность в точке a_j при $q\alpha+q = 2$ и особенность порядка $O(|z-a_j|^{-(q\alpha+q-2)})$ при $q\alpha + q > 2$. Поскольку $q < 2$, то максимальный порядок особенности интегрального слагаемого в (7) есть $(q\alpha + q - - 2)/q = \alpha + 1 - 2/q < \alpha$. Итак, справедлива

Теорема 4. *Если дуга* Γ *удовлетворяет условию* (8) *и* $f \in H_\nu(\Gamma)$, *то при условии* (6) *задача о скачке* (1) *имеет решение, особенности которого на концах этой дуги допускают оценку* $\Phi(z) = O(|z-a_j|^{-\alpha}), j = 1, 2$.

Как уже отмечалось, эта теорема 4 описывает условия, при которых задача о скачке общего вида имеет на концах контура особенности не более высокого порядка, чем задача о единичном скачке на том же контуре.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-01-81019-Бел-а и 07-01-00166-а).

Summary

B.A. Kats. Metric Characteristics of Non-Rectifiable Arcs and the Jump Problem.

The paper is dealing with the boundary value problem on reconstruction of holomorphic function with known jump on a given non-rectifiable arc. There are introduced new metric characteristics of dimensional type for the non-rectifiable arcs. The main result of the paper is new condition for solvability of the jump problem in terms of the mentioned characteristics. It improves the known conditions of that kind.

Key words: holomorphic function, the jump problem, non-rectifiable arc, fractional dimension.

Литература

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 600 с.
3. *Дынькин Е.М.* Гладкость интеграла типа Коши // Зап. науч. сем. Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. – 1979. – Т. 92. – С. 115–133.
4. *Салимов Т.* Прямая оценка для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой // Науч. труды МВ и ССО Азерб. ССР. – 1979. – № 5. – С. 59–75.
5. *Кац Б.А.* Задача Римана на замкнутой жордановой кривой // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 7. – С. 68–80.
6. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 280 с.
7. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. – 1959. – Т. 14, Вып. 2. – С. 3–86.

8. *Кац Б.А.* Краевая задача Римана на негладких дугах и фрактальные размерности // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, Вып. 1. – С. 147–171

9. *Кац Б.А., Погодина А.Ю.* О граничных значениях интеграла типа Коши по негладкой кривой // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 3. – С. 15–21.

10. *Кац Б.А.* Об одной метрической характеристике замкнутых плоских кривых и ее приложении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 2. – С. 77–84.

11. *Kats B.A.* The refined metric dimension with applications // Computational Methods and Function Theory. – 2007. – V. 7, No 1. – P. 77–89.

12. *Кац Б.А.* О разрешимости краевой задачи Римана на фрактальной дуге // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, № 5. – С. 69–75.

13. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.

14. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Мир, 1988. – 509 с.

Поступила в редакцию
03.08.07

Кац Борис Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Казанского государственного архитектурно-строительного университета.

E-mail: *katsboris877@gmail.com*