МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГАОУ ВПО "КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ"

Р.М. ХУСНУТДИНОВ, А.В. МОКШИН

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ – 2015

Печатается по решению учебно-методического совета
Института Физики
Казанского (Приволжского) федерального университета

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73
Х98

Научный редактор
д-р физ.-мат. наук, проф. **Д.А. Таюрский**

Рецензенты:
д-р. физ.-мат. наук, проф. (КФУ) **Л.А. Нефедьев**
канд. физ.-мат. наук, доц. (КФУ) **Ф.М. Гафаров**

Хуснутдинов Р.М., Мокшин А.В. Классическая механика и специальная теория относительности. Учебно-методическое пособие. – Казань: К(П)ФУ, 2015. – 54 с.

ISBN 978-5-87730-488-8

В данном учебно-методическом пособии представлены задачи по курсу “Классическая механика и СТО”, основные положения и формулы, необходимые для решения задач, а также примеры с решениями типичных задач.

Учебное пособие предназначено для студентов физических специальностей высших учебных заведений.

ISBN 978-5-87730-488-8

Оглавление

Предисловие 4

§1. Кинематика материальной точки 5

§2. Динамика материальной точки 11

§3. Движение в полях 16

§4. Движение тел переменной массы 21

§5. Уравнения Лагранжа и Гамильтона. Скобки Пуассона 27

§6. Законы сохранения 35

§7. Релятивистская механика 38

Ответы и указания 45

Приложение 52

Литература 53

Предисловие

Решение физических задач является необходимой практической основой изучения дисциплины “Классическая механика и специальная теория относительности”. Основной целью практических занятий является выработка у студентов приемов и навыков решения задач из разных разделов классической механики. Практические занятия несут в себе функцию закрепления, развития и углубленного освоения основных положений теории. Решение задач способствует приобщению студентов к самостоятельной творческой работе. При решении задач студент должен самостоятельно осуществлять ряд мыслительных операций, опираясь на имеющиеся у него знания и умения. Практические занятия позволяют проверить степень усвоения студентами основных разделов теоретического курса.

В данном учебном пособии рассмотрены основные разделы курса “Классическая механика и специальная теория относительности”, такие как, кинематика материальной точки, динамика, движения в полях, функция и уравнение Лагранжа, уравнения Гамильтона, законы сохранения, релятивистская кинематика и динамика. Каждый раздел включает необходимые теоретические сведения, основные понятия и определения, представлены примеры решения типовых задач и задания для самостоятельной работы.

§1. Кинематика материальной точки

1. Положение материальной точки в пространстве задается ***радиус-вектором*** $\vec{r}$, который в каждый момент времени направлен из начала некоторой произвольной системы координат (СК) на данную материальную точку.

2. Зависимость от времени радиус-вектора $\vec{r}(t)$ (или координат) определяет ***закон движения*** материальной точки.

3. ***Траектория*** материальной точки – это геометрическое место точек концов радиус-вектора $\vec{r}(t)$.

4. ***Декартовая система координат*** (ДСК). Закон движения в ДСК определяется в трехмерном случае тремя скалярными функциями (координатами) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, зависящими от времени t, и выражается равенством:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z.$$

5. ***Цилиндрическая система координат*** (ЦСК). Переменные ДСК и ЦСК связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, & 0 \le \varrho < \infty, \\ y = \varrho\sin\varphi, & 0 \le \varphi < 2\pi, \\ z = z. \end{cases}$$

Связь между ортами имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{e}_\varrho = \vec{e}_x\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\varphi, \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x\sin\varphi + \vec{e}_y\cos\varphi, \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z. \end{cases}$$

Радиус-вектор будет иметь вид:

$$\vec{r}(t) = \varrho\vec{e}_\varrho + z\vec{e}_z.$$

6. ***Сферическая система координат*** (ССК). Переменные ДСК и ССК связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi\sin\theta, & 0 \le \rho < \infty, \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta, & 0 \le \phi < 2\pi, \\ z = \rho\cos\theta, & 0 \le \theta \le \pi. \end{cases}$$

Связь между ортами имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \vec{e}_x\cos\phi\sin\theta + \vec{e}_y\sin\phi\sin\theta + \vec{e}_z\cos\theta, \\ \vec{e}_\theta = \vec{e}_x\cos\phi\cos\theta + \vec{e}_y\sin\phi\cos\theta - \vec{e}_z\sin\theta, \\ \vec{e}_\phi = -\vec{e}_x\sin\phi + \vec{e}_y\cos\phi. \end{cases}$$

Радиус-вектор будет иметь вид:

$$\vec{r}(t) = \rho\vec{e}_\rho.$$

7. ***Перемещение*** материальной точки есть вектор между двумя точками траектории, т.е.

$$\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t).$$

8. ***Путь***, пройденный материальной точкой к моменту времени t, определяется как длина участка траектории и выражается через интеграл от модуля скорости ϑ,

$$s(t) = \int_0^t \vartheta(\tau)d\tau.$$

9. ***Мгновенная линейная скорость*** материальной точки в момент времени t

$$\vec{\vartheta}(t) = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

в криволинейных координатах определяется выражением:

$$\vec{\vartheta} = H_1\dot{q}_1\vec{e}_1 + H_2\dot{q}_2\vec{e}_2 + H_3\dot{q}_3\vec{e}_3.$$

Здесь H_j – коэффициенты Ламэ

$$H_j = \sqrt{\left(\frac{dx}{dq_j}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq_j}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq_j}\right)^2}.$$

10. ***Секторная скорость*** определяется соотношением:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{\vartheta}].$$

Пример 1. Движение материальной точки задано радиус-вектором $\vec{r} = \alpha\left(\vec{i}\sin(\omega t) + \vec{j}\cos(\omega t)\right)$, где α – постоянная. Найти модули векторов скорости и нормального ускорения.

Решение: Сравнивая выражение радиус-вектора, данное в условии задачи, с его координатным представлением, находим, что $x = \alpha\sin(\omega t)$, $y = \alpha\cos(\omega t)$. Компоненты скорости можно найти как:

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt} = \alpha\omega\cos(\omega t), \qquad \vartheta_y = \frac{dy}{dt} = -\alpha\omega\sin(\omega t).$$

Компоненты ускорения:

$$a_x = \frac{d\vartheta_x}{dt} = -\alpha\omega^2\sin(\omega t), \qquad a_y = \frac{d\vartheta_y}{dt} = -\alpha\omega^2\cos(\omega t).$$

Модуль мгновенной скорости:

$$|\vartheta| = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2} = \alpha\omega\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right) = \alpha\omega.$$

Отсюда следует, что тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

т.е. нормальное ускорение совпадает с полным ускорением. Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \alpha\omega^2$$

также постоянен. Постоянство скорости и нормального ускорения есть свидетельство постоянства радиуса кривизны R траектории движения. Движение по кривой с постоянным радиусом кривизны – это движение по окружности. Таким образом, участие точки в двух взаимно-перпендикулярных гармонических колебаниях приводит к движению по окружности.

Ответ: $\vartheta = \alpha\omega$, $a = \alpha\omega^2$.

Пример 2. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота по закону $\omega = \alpha\varphi$. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = \varphi_0$. Найти зависимость от времени угла поворота φ и угловой скорости ω.

Решение: Для угла φ можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \alpha\varphi.$$

Разделим переменные интегрирования и проинтегрируем уравнение

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi} = \alpha \int dt.$$

Результат интегрирования:

$$\varphi = C \exp(\alpha t),$$

где C – постоянная интегрирования. Используя начальные условия и выполняя дифференцирование по времени, получим:

$$\varphi = \varphi_0 \exp(\alpha t), \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \alpha\varphi_0 \exp(\alpha t).$$

Ответ: $\varphi = \varphi_0 \exp(\alpha t)$, $\omega = \alpha\varphi_0 \exp(\alpha t)$.

Пример 3. Частица движется в плоскостях x, y из точки с координатами $x = y = 0$ со скоростью $\vec{\vartheta} = a\vec{i} + bx\vec{j}$, где a и b – некоторые постоянные, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей x и y. Найти уравнение ее траектории $y(x)$.

Решение: Запишем приращения $y-$ и x-координат частицы за промежуток времени dt.

$$dy = \vartheta_y dt, \qquad dx = \vartheta_x dt,$$

где $\vartheta_y = bx$, $\vartheta_x = a$. Взяв их отношение, получим

$$dy = (b/a)xdx.$$

Интегрируем это уравнение:

$$y = \int_0^x (b/a)xdx = \frac{bx^2}{2a},$$

т.е. траекторией точки будет парабола.

Ответ: $y = (b/2a)x^2$.

Задачи

1. Вычислить скорость материальной точки в полярных координатах, если известна связь полярных и декартовых координат: $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$.

2. Определить ускорение пули перфоратора в глинистом растворе, если закон движения пули $x = \dfrac{1}{k}\ln\big(k\vartheta_0 t - 1\big)$, где k – постоянный коэффициент пропорциональности, ϑ_0 – начальная скорость пули.

3. Частица, несущая электрический заряд e, движется в однородном электрическом поле с переменной напряженностью $E = A\sin(kt)$, где A и k – постоянные коэффициенты. Уравнение движения частицы имеет вид $x = \dfrac{eA}{mk}\left(t - \dfrac{\sin(kt)}{k}\right)$, где m – постоянная величина. Определить величину скорости точки, ее начальное значение, а также наибольшее и наименьшее значения скорости.

4. Точка M, движущаяся с постоянной по величине скоростью ϑ, описывает цепную линию, уравнение которой имеет вид
$$y = \frac{\alpha}{2}\left(e^{x/\alpha} + e^{-x/\alpha}\right).$$
Определить проекции скорости и ускорения, а также полное ускорение точки как функции координат.

5. Даны уравнения движения снаряда
$$x = \vartheta_0 t\cos\alpha, \quad y = \vartheta_0 t\sin\alpha - \mathrm{g}t^2/2,$$
где ϑ_0 – начальная скорость снаряда, α – угол между ϑ_0 и горизонтальной осью x, g – ускорение силы тяжести. Определить траекторию движения снаряда, высоту H, дальность L и время T полета снаряда.

6. Точка движется по винтовой линии

$$x = \alpha\cos(kt), \quad y = \alpha\sin(kt), \quad z = \vartheta t.$$

Определить уравнения движения точки в цилиндрических координатах.

7. Даны уравнения движения точки:

$$x = 2\alpha\cos^2(kt/2), \quad y = \alpha\sin(kt),$$

где α и k – положительные постоянные. Определить траекторию и закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки

8. По заданным уравнениям движения точки в декартовых координатах

$$x = R\cos^2(kt/2), \quad y = (R/2)\sin(kt), \quad z = R\sin(kt/2),$$

найти ее траекторию и уравнения движения в сферических координатах.

9. Точка совершает гармонические колебания по закону $x = a\sin(kt)$. Определить амплитуду a и круговую частоту k, если при $x = x_1$ скорость $\vartheta = \vartheta_1$, а при $x = x_2$ скорость $\vartheta = \vartheta_2$.

10. Частица движется в положительном направлении вдоль оси Ox так, что ее скорость меняется по закону $\vartheta = \alpha x$, где α – размерная постоянная. Принимая во внимание начальные условия ($t = 0$, $x = x_0$), найти:
а. зависимость от времени мгновенной скорости и ускорения частицы;
б. среднюю величину скорости частицы за время, в течение которого она пройдет первые s метров пути.

11. Найти траекторию $y(x)$, мгновенную и среднюю скорость, мгновенное и среднее ускорение материальной точки массы m, если ее декартовые координаты меняются по закону:
1. $x = \alpha(1 - \lambda\cos(\omega t)),\ y = \beta(1 - \cos(\omega t), \quad 0 < \lambda < 1;$
2. $x = \alpha(1 - \lambda\cos(\omega t)),\ y = \beta(1 - \sin(\omega t), \quad 0 < \lambda < 1.$

§2. Динамика материальной точки

Механическое состояние свободно движущейся материальной точки характеризуется заданием 3 координат и их производных по времени. Закон изменения состояния материальной точки определяется *уравнениями Ньютона*:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{\mathcal{F}},$$

где $\vec{\mathcal{F}}$ – равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку. Эти уравнения позволяют решать два типа задач:

1. *Прямая задача динамики:* по заданным силам определить характер движения тела.

2. *Обратная задача динамики:* по заданному характеру движения определить действующие на тело силы.

Пример 1. Сила трения лодки массой m о воду прямо пропорциональна квадрату ее скорости (коэффициент пропорциональности k). Лодка двигалась со скоростью ϑ_0. Найти время, в течение которого скорость лодки уменьшится в два раза.

Решение: Для описания движения лодки воспользуемся вторым законом Ньютона в дифференциальной форме:

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = -k\vartheta^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение

$$\int \frac{d\vartheta}{\vartheta^2} = -\frac{k}{m}\int dt,$$

получим

$$-\frac{1}{\vartheta} = -\frac{k}{m}t + C,$$

где C – постоянная интегрирования. Она может быть вычислена из условия, что в момент времени $t = 0$ скорость лодки составляла ϑ_0. После подстановки находим $C = -1/\vartheta_0$, откуда $-\dfrac{1}{\vartheta} = -\dfrac{k}{m}t - \dfrac{1}{\vartheta_0}$. Для определения времени, за которое скорость лодки уменьшается в два раза, подставляя в полученное уравнение $\vartheta = \vartheta_0/2$, получим $t = \dfrac{m}{k\vartheta_0}$.

Ответ: $t = \dfrac{m}{k\vartheta_0}$.

Пример 2. На горизонтальном столе лежит брусок массой m. В момент времени $t = 0$ к нему под углом α к горизонту прикладывают силу $\mathcal{F}$, зависящую от времени $\mathcal{F} = kt$, где k – постоянная. Определить скорость бруска в момент отрыва, а также путь, который он пройдет к этому моменту.

Решение: Уравнение движения по горизонтали:

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = \mathcal{F}\cos\alpha.$$

Отрыв от стола свидетельствует о том, что между бруском и столом нет взаимодействия, и сила нормального давления бруска на стол составляет нуль. Тогда условие отрыва отвечает равенству двух сил – вертикальной проекции действующей силы и силы тяжести:

$$m\mathrm{g} = \mathcal{F}\sin\alpha.$$

Решая оба уравнения, находим ускорение:

$$a = \frac{kt\cos\alpha}{m}.$$

Момент t_0 отрыва от стола: $t_0 = \dfrac{m\mathrm{g}}{k\sin\alpha}$. С учетом формул кинематики можно записать выражения для скорости и пройденного расстояния как функции времени (подстановка в эти функции момента отрыва t_0 даст скорость в момент отрыва и пройденное до отрыва расстояние):

$$\vartheta = \int_0^{t_0} a dt = \frac{k\cos\alpha}{m}\int_0^{t_0} t dt = \frac{m\mathrm{g}^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha},$$

$$s = \int_0^{t_0} \vartheta dt = \frac{k\cos\alpha}{2m}\int_0^{t_0} t^2 dt = \frac{m^2\mathrm{g}^3\cos\alpha}{6k^2\sin^3\alpha},$$

Ответ: $\vartheta = \dfrac{m\mathrm{g}^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}$, $s = \dfrac{m^2\mathrm{g}^3\cos\alpha}{6k^2\sin^3\alpha}$.

Пример 3. Частица массой m движется под действием силы $\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}_0 \sin(\omega t)$. В момент времени $t = 0$ известны ее радиус-вектор $\vec{r} = 0$ и скорость $\vec{\vartheta} = 0$. Найти положение частицы, т.е. радиус-вектор $\vec{r}$ в зависимости от времени.

Решение: Согласно основному уравнению динамики, ускорение равняется

$$\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{\vec{\mathcal{F}}_0}{m}\sin(\omega t).$$

Отсюда находим элементарное приращение вектора скорости $d\vec{\vartheta}$ за время dt и затем приращение этого вектора за время от 0 до t:

$$\vec{\vartheta}(t) - \vec{\vartheta}(0) = \frac{\vec{\mathcal{F}}_0}{m}\int_0^t \sin(\omega t) dt.$$

Учитывая, что $\vartheta(0) = 0$, после интегрирования получим

$$\vec{\vartheta}(t) = \frac{\vec{\mathcal{F}}_0}{m\omega}\Big(1 - \cos(\omega t)\Big).$$

Теперь найдем $d\vec{r}$ – элементарное приращение, или приращение радиус-вектора $\vec{r}$ частицы за время dt:

$$d\vec{r} = \vec{\vartheta}(t)dt.$$

Приращение же радиус-вектора за время от 0 до t

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \frac{\vec{\mathcal{F}}_0}{m\omega}\int_0^t \Big(1 - \cos(\omega t)\Big)dt.$$

В результате интегрирования с учетом начального условия $\vec{r}(0) = 0$, находим

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{\mathcal{F}}_0}{m\omega^2}\Big(\omega t - \sin(\omega t)\Big).$$

Ответ: $\vec{r}(t) = \dfrac{\vec{\mathcal{F}}_0}{m\omega^2}\Big(\omega t - \sin(\omega t)\Big).$

Задачи

1. Тело брошено под углом α к горизонту. Определить наибольшую высоту и дальность полета, если начальная скорость тела ϑ_0.

2. Тяжелое тело брошено вверх с высоты 12 м под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 12 м/с. Определить максимальную высоту, которой достигнет тело и дальность полета. Сопротивление воздуха не учитывать.

3. Пуля массой 20 г в момент удара о стенку под углом 90° имела скорость 300 м/с. Углубившись в стенку на какое-то расстояние, она остановилась через время $5 \cdot 10^{-4}$ с. Определить:
а. среднюю силу сопротивления стенки F_c и расстояние l, на которое пуля проникла;
б. с какой скоростью ϑ_k пуля вылетит из стенки, если стенка будет иметь толщину 5 см.

4. Тело массой m начинает двигаться из начала координат в момент времени $t = 0$ под действием силы $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cos(\omega t)$, где $\mathcal{F}_0$ и ω – постоянные. Найти путь, пройденный телом до первой остановки.

5. Из спортивного арбалета вертикально вверх выпущена стрела массой m со скоростью ϑ_0. Сила трения стрелы о воздух прямо пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности k). Найти время подъема стрелы до верхней точки траектории.

6. Тело массой m начинает двигаться из начала координат в момент времени $t = 0$ со скоростью ϑ_0 под действием силы $\mathcal{F} = k\vartheta$, где k – постоянная, ϑ – скорость тела. Найти скорость тела и пройденный им путь в зависимости от времени.

7. Из пушки выпустили последовательно два снаряда со скоростью ϑ_0, первый под углом α, второй под углом β к горизонту (азимут один и тот же). Найти интервал времени между выстрелами, при котором снаряды столкнутся друг с другом.

8. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от ϑ_0 до ϑ. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной некоторой степени скорости ϑ^α $(\alpha > 1)$.

9. Материальная точка массы m движется согласно уравнениям $x = a\cos(kt)$, $y = b\sin(kt)$. Определить силу F, вызывающую это движение, если известно, что сила зависит только от положения точки.

10. Определить силу сопротивления воды движению лодки веса P, если ее движение происходит согласно уравнению
$$x = \frac{P}{a\mathrm{g}}\vartheta_0\left[1 - \exp\left(\frac{-a\mathrm{g}}{P}t\right)\right],$$
где ϑ_0 – начальная скорость движения, a – постоянный коэффициент. Сила сопротивления движению является функцией только скорости лодки.

11. Воздушный шар массой m падает вниз. На высоте H скорость шара равна ϑ_0, а ускорение a_0. Какой балласт необходимо сбросить, чтобы шар мягко $(\vartheta = 0)$ приземлился? Силу сопротивления воздуха считать постоянной.

12. Автомобиль массой m тормозит, двигаясь по горизонтальной прямой. Сила сопротивления воздуха зависит от скорости, $R_c = k\vartheta$, коэффициент трения f. За какое время скорость автомобиля уменьшится с ϑ_0 до ϑ_1?

13. Материальная точка массой m движется из состояния покоя по гладкой криволинейной направляющей, расположенной в горизонтальной плоскости, под действием силы $F = Q\sin(kt)$. Сила образует постоянный угол α с вектором скорости. Определить скорость точки в момент времени t.

14. Автомобиль массой m_1 без груза разгоняется с места до заданной скорости за время t_1. Сопротивление пропорционально скорости. За какое время разгоняется до той же скорости автомобиль с грузом m_2?

§3. Движение в полях

Потенциальная энергия в *центральном поле* $U(r)$ зависит только от расстояния её до центра поля, $r = |\vec{r}|$. Соответствующая сила

$$\vec{\mathcal{F}} = -\mathrm{grad}U(r) = -\frac{\vec{r}}{r}\frac{dU}{dr}$$

направлена по радиус-вектору $\vec{r}$ и имеет нулевой момент относительно центра поля,

$$\vec{\mathcal{K}} = \big[\vec{r}, \vec{\mathcal{F}}\big],$$

что приводит к сохранению момента импульса

$$\vec{\mathcal{M}} = \big[\vec{r}, \vec{p}\big] = \mathrm{const}.$$

Это означает, что частица движется в одной и той же плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{M}$. Вводя в этой плоскости полярные координаты (r, φ), получим выражение для функции Лагранжа в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\big) - U(r).$$

Цикличность координаты φ соответствует сохранению момента импульса

$$\mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}.$$

Уравнение движения и уравнение траектории частицы следует из закона сохранения энергии

$$\frac{m}{2}\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\big) + U(r) = E = \mathrm{const}.$$

Подставляя сюда $\dot{\varphi} = \mathcal{M}/(mr^2)$ и разрешая данное уравнение относительно $\dot{r}$, получаем:

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big[E - U(r)\big] - \frac{\mathcal{M}^2}{m^2r^2}}.$$

Выбор знака перед корнем определяется направлением движения частицы ($\dot{r} > 0$ соответствует удалению от центра, $\dot{r} < 0$ – приближению частицы к центру). Интеграл от этого уравнения определяет закон радиального движения частицы. Область доступных для движения значений координаты r ограничена условием положительности подкоренного выражения:

$$E \geq U_{eff},$$

где $U_{eff}(r) = U(r) + \dfrac{\mathcal{M}}{2mr^2}$ – эффективный потенциал для радиального движения.

Пример 1. Материальная точка M движется в вертикальной плоскости под действием центральной силы притяжения, пропорциональной ее расстоянию до неподвижного центра: $\vec{F} = -k^2 m\vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, m – ее масса, k^2 – постоянный коэффициент. Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент она занимала положение $M_0\left(a, -\dfrac{\mathrm{g}}{k^2}\right)$ и имела скорость $\vec{\vartheta}_0$, направленную по вертикали вверх.

Решение: Начало осей декартовых координат взято в неподвижном центре O, к которому притягивается точка M. Ось x проходит по горизонтали вправо, ось y – по вертикали вверх. Запишем начальные условия:

$$t = 0 \quad x = a, \quad y = -\frac{\mathrm{g}}{k^2}, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \vartheta_0.$$

К материальной точке приложены следующие силы: $\vec{P} = m\vec{\mathrm{g}}$ – ее вес, $\vec{F} = -k^2 m\vec{r}$ – сила притяжения, направленная к неподвижному центру O. Составим векторное дифференциальное уравнение движения материальной точки

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{\mathrm{g}} - k^2 m\vec{r}.$$

Проектируя на оси x и y, получим

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} + k^2 y = -\mathrm{g}. \tag{2}$$

Уравнение (1) является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его интегрирования составим характеристическое уравнение $\lambda^2 +$

$k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (1) запишется в виде:

$$x = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt), \tag{3}$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.Для определения C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -C_1 k \sin(kt) + C_2 k \cos(kt) \tag{4}$$

и затем подставим в уравнение (3) $t = 0$, $x = a$, а в уравнение (4) $t = 0$, $\dot{x} = 0$. Находим: $C_1 = a$, $C_2 = 0$. Внося эти значения C_1 и C_2 в уравнение (3), имеем:

$$x = a \cos(kt). \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение (2), в отличие от дифференциального уравнения (1), является неоднородным. Следовательно, его общее решение имеет вид

$$y = y_1 + y_2, \tag{6}$$

где y_2 – частное решение неоднородного уравнения, а y_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \tag{7}$$

Заметив, что дифференциальное уравнение (7) аналогично дифференциальному уравнению (1), запишем:

$$y = C_3 \cos(kt) + C_4 \sin(kt). \tag{8}$$

Правая часть дифференциального уравнения (2) постоянна. Поэтому ищем частное решение в виде $y_2 = A$, где $A = \mathrm{const}$. Положив в уравнении (2) $y = A$, находим:

$$y_2 = -\frac{\mathrm{g}}{k^2}. \tag{9}$$

Воспользовавшись формулами (8) и (9), запишем общее решение по формуле (6):

$$y = C_3 \cos(kt) + C_4 \sin(kt) - \frac{\mathrm{g}}{k^2}. \tag{10}$$

Для определения постоянных интегрирования C_3 и C_4 вычислим:

$$\dot{y} = -C_3 k \sin(kt) + C_4 k \cos(kt). \tag{11}$$

Затем подставим в уравнение (10) $t = 0$, $y = -\dfrac{g}{k^2}$, а в уравнение (11) $t = 0$, $\dot{y} = \vartheta_0$. Тогда $C_3 = 0$, $C_4 = \dfrac{\vartheta_0}{k}$. Подставив эти значения в уравнение (10), получим:

$$y = \frac{\vartheta_0}{k}\sin(kt) - \frac{g}{k^2}. \tag{12}$$

Замечая, что

$$\cos(kt) = \frac{x}{a}, \qquad \sin(kt) = \frac{k}{\vartheta_0}\left(y + \frac{g}{k^2}\right),$$

получим искомое уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y + \dfrac{g}{k^2}\right)^2}{\left(\dfrac{\vartheta_0}{k}\right)^2} = 1.$$

Ответ: Траектория движения частицы – эллипс с центром в точке $A\left(0, -\dfrac{g}{k^2}\right)$. Одна полуось эллипса равна a, а другая полуось равна $\dfrac{\vartheta_0}{k}$.

Задачи

1. Частица, имеющая массу m и заряд e, влетает в однородное стационарное электрическое поле $\vec{E}$ со скоростью ϑ_0, перпендикулярной к направлению поля. Определить траекторию движения частицы.

2. Частица с массой m и зарядом e попадает в однородное тормозящее электрическое поле $\vec{E}$ со скоростью ϑ_0, параллельной направлению поля. Определить время, через которое частица вернется в начальную точку.

3. Частица с массой m и зарядом e попадает в однородное стационарное магнитное поле $\vec{H}$ со скоростью ϑ_0, перпендикулярной к направлению магнитного поля. Определить траекторию движения частицы.

4. Частица с массой m и зарядом e попадает в однородное электрическое поле, меняющееся по закону $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ со скоростью ϑ_0, перпендикулярной к направлению электрического поля. Определить траекторию движения частицы.

5. Частица массы m, имеющая заряд e, движется между обкладками плоского конденсатора. Напряженность электрического поля в конденсаторе $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$, где $\vec{E}_0$ и ω – константы. В момент времени $t = 0$ радиус-вектор частицы и скорость имели значения $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ и $\vec{\vartheta}(0) = \vec{\vartheta}_0$. Найти $\vec{r}(t)$ и $\vec{\vartheta}(t)$.

6. Частица массы m движется под влиянием силы, пропорциональной расстоянию от некоторой неподвижной точки $\mathcal{O}$ и направленной всегда в эту точку: $\vec{F} = -k\vec{r}$. Найти радиус-вектор и скорость частицы как функции времени, если в начальный момент времени $t = 0$ она находилась в положении $\vec{r}_0$ и имела скорость $\vec{\vartheta}_0$ относительно системы отсчета, связанной с точкой $\mathcal{O}$. Получить уравнение траектории.

7. Частица массы m движется в однородном поле тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости: $\vec{F}_c = -k\vec{\vartheta}$. Найти радиус-вектор $\vec{r}(t)$ и скорость $\vec{\vartheta}(t)$ частицы как функции времени, если $\vec{r}_0 = \{0, 0, r_0\}$ и $\vec{\vartheta}_0 = \{\vartheta_0 \cos\alpha, 0, \vartheta_0 \sin\alpha\}$. Определить траекторию движения частицы.

8. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -Ax^4$, если полная энергия ее равна нулю.

9. Найти выражение для силы, под действием которой материальная точка массы m движется в плоскости $z = 0$ по закону $x = a\mathrm{ch}(kt)$, $y = b\mathrm{sh}(kt)$.

10. Частица движется в одномерной прямоугольной потенциальной “яме” с бесконечно высокими “стенками”. Ширина ямы a, полная энергия частиц E. Вычислить среднюю силу, с которой частица действует на стенку.

11. Найти закон движения заряда в магнитном поле $\vec{H} = \{0, 0, H_0 \times \cos(y/a)\}$, если $\vec{r}(0) = 0$, $\vec{\vartheta}(0) = \{0, a\omega, 0\}$, где $\omega = \dfrac{eH_0}{mc}$.

§4. Движение тел переменной массы

Уравнение Мещерского – основное уравнение в механике тел переменной массы, полученное И. Мещерским в 1904 году:

$$\frac{md\vec{\vartheta}}{dt} = \vec{\mathcal{F}}^{ex} + \frac{dm}{dt}\vec{u}.$$

Здесь m – переменная масса тела,
ϑ – скорость движения тела переменной массы,
$\mathcal{F}^{ex}$ – внешние силы (сопротивление среды, сила тяжести и т.п.),
u – относительная скорость отделяющихся частиц,
$\dfrac{dm}{dt}$ – расход массы.

Пример 1. Ракету массой M запускают вертикально. Скорость истечения газов из сопла двигателя равна u. При каком расходе топлива (массы в единицу времени) сила тяги двигателя будет достаточна, чтобы:

а. уравновесить действующую на ракету силу тяжести;

б. сообщить ракете ускорение a.

Решение:

а. Если расход топлива равен $\dfrac{dm}{dt} = \mu$, а скорость истечения газов из сопла u, то за единицу времени ракете сообщается импульс μu, который, согласно законам Ньютона, равен реактивной силе. Поэтому:

$$\frac{md\vartheta}{dt} = \mathcal{F}^{ex} - \mu u.$$

По условию задачи

$$\mathcal{F}^{ex} - \mu u = 0$$

и учитывая, что

$$\mathcal{F}^{ex} = m\mathrm{g},$$

найдем расходе топлива (массы в единицу времени):

$$\mu = \frac{dm}{dt} = \frac{m\mathrm{g}}{u}.$$

б. По условию задачи

$$ma = \mathcal{F}^{ex} - \mu u.$$

Откуда,

$$\mu = \frac{dm}{dt} = \frac{\mathcal{F}^{ex} - ma}{u}.$$

Ответ: $\mu = m\text{g}/u$, $\mu = \dfrac{\mathcal{F}^{ex} - ma}{u}$

Пример 2. Определите скорость ракеты в момент полного выгорания топлива, если начальная масса ракеты $m_0 = 100$ кг, масса заряда $m_f = 50$ кг, относительная скорость выхода продуктов сгорания $u = 800$ м/с. Сопротивление воздуха и ускорение силы тяжести не учитывать.

Решение: Запишем уравнение Мещерского

$$\frac{md\vartheta}{dt} = \mathcal{F}^{ex} - u\frac{dm}{dt},$$

где m – текущая масса ракеты, dm – изменение массы ракеты за бесконечно малое время dt, $d\vartheta$ – изменение скорости ракеты за время dt. По условию задачи величина $\mathcal{F}^{ex} = 0$. Далее, разделяя переменные и выполняя интегрирование

$$\frac{1}{u}\int_0^{\vartheta_T} d\vartheta = -\int_{m_0}^{m_0 - m_f} \frac{dm}{m},$$

получим

$$\vartheta_T = u \ln\left|\frac{m_0}{m_0 - m_f}\right|.$$

Ответ: $\vartheta_T = u \ln\left|\dfrac{m_0}{m_0 - m_f}\right| = 555$ м/с.

Пример 3. Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью u. Найти:

а. сколько времени ракета сможет оставаться на этой высоте, если начальная масса топлива составляет η-ю часть ее массы (без топлива);

б. какую массу $\mu(t)$ газов должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться на постоянной высоте, если начальная масса ракеты (с топливом) равна m_0.

Решение:

а. В данном случае $d\vartheta/dt = 0$ и уравнение движения примет вид:

$$m\mathrm{g} + \frac{dm}{dt}u = 0,$$

или после разделения переменных

$$\frac{dm}{m} = -\frac{\mathrm{g}}{u}dt. \qquad (1)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{\mathrm{g}}{u}t. \qquad (2)$$

Отсюда

$$t = \frac{u}{\mathrm{g}}\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) = \frac{u}{\mathrm{g}}\ln(1+\eta),$$

где учтено $\eta = (m_0 - m)/m$.

б. Из уравнения (1) предыдущего пункта следует, что

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{\mathrm{g}}{u}m,$$

где m находим из (2): $m = m_0 e^{-\mathrm{g}t/u}$. В результате

$$\mu = \frac{\mathrm{g}}{u}m_0 e^{-\mathrm{g}t/u}.$$

Ответ: **а.** $t = \dfrac{u}{\mathrm{g}}\ln(1+\eta)$; **б.** $\mu = \dfrac{\mathrm{g}}{u}m_0 e^{-\mathrm{g}t/u}$.

Пример 4. Космический корабль массы m_0 движется в отсутствии внешнего силового поля с постоянной скоростью ϑ_0. Для изменения направления движения был включен реактивный двигатель, который стал выбрасывать струю газа с постоянной относительно корабля скоростью u, причем вектор $\vec{u}$ все время перпендикулярен направлению движения корабля. В конце работы двигателя масса корабля стала равной m. На какой угол изменилось направление движения корабля за время работы двигателя?

Решение: Найдем приращение вектора скорости корабля за промежуток времени dt. Умножив обе части уравнения

$$\frac{md\vec{\vartheta}}{dt} = \vec{\mathcal{F}}^{ex} + \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

на dt и учитывая, что $\mathcal{F}^{ex} = 0$, получим

$$d\vartheta = \frac{dm}{m}u.$$

Здесь $dm < 0$. Так как вектор $\vec{u}$ все время перпендикулярен вектору $\vec{\vartheta}$, то модуль вектора ϑ не меняется и остается равным своему первоначальному значению: $\vartheta = \vartheta_0$. Отсюда следует, что угол поворота $d\alpha$ вектора $\vec{\vartheta}$ за время dt определяется как

$$d\alpha = \frac{|d\vartheta|}{\vartheta_0} = \frac{u}{\vartheta_0}\left|\frac{dm}{m}\right|.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$\alpha = \frac{u}{\vartheta_0}\ln(m_0/m).$$

Ответ: $\alpha = \dfrac{u}{\vartheta_0}\ln(m_0/m)$.

Задачи

1. Определить закон изменения массы ракеты при вертикальном подъеме в однородном поле тяжести:

   а. с постоянной скоростью;

   б. с постоянным ускорением.

   Скорость истечения газов постоянна.

2. Составить дифференциальное уравнение восходящего движения ракеты. Эффективную скорость истечения газов u считать

постоянной. Масса ракеты изменяется по закону $m = m_0 f(t)$ (закон сгорания). Сила сопротивления воздуха является заданной функцией скорости и положения ракеты: $\mathcal{R}(x, \dot{x})$.

3. Ракета начальной массы m_0 поднимается вертикально вверх в однородном поле тяжести с постоянным ускорением ng (g – ускорение земного тяготения). Пренебрегая сопротивлением атмосферы и считая эффективную скорость истечения газов u постоянной, определить:

   а. закон изменения массы ракеты;

   б. закон изменения массы ракеты при отсутствии поля тяготения.

4. Ракета движется в однородном поле силы тяжести вверх с постоянным ускорением a. Пренебрегая сопротивлением атмосферы и считая эффективную скорость истечения газов u постоянной, определить время T, за которое масса ракеты уменьшится в два раза.

5. Эффективная скорость истечения газов из ракеты $u = 2.4$ км/с. Какой процент должен составлять вес топлива от стартового веса ракеты, чтобы ракета, движущаяся вне поля тяготения и атмосферы, приобрела скорость 9 км/с?

6. Тело переменной массы, имея начальную скорость, равную нулю, движется с постоянным ускорением a по горизонтальным направляющим. Эффективная скорость истечения газов u постоянна. Определить, пренебрегая сопротивлением, путь, пройденный телом до того момента, когда его масса уменьшится в k раз.

7. Какой путь пройдет ракета на прямолинейном активном участке в пустоте и при отсутствии сил тяготения за время разгона от нулевой начальной скорости до скорости, равной эффективной скорости истечения продуктов сгорания u, если известна начальная масса ракеты m_0 и секундный расход β?

8. Ракета поднимается с нулевой начальной скоростью вертикально вверх в однородном поле тяжести. Первоначальная масса ракеты (с топливом) равна m_0. Скорость газовой струи постоянна и равна u относительно ракеты. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость ϑ ракеты в зависимости от ее массы m и времени подъема t.

9. Железнодорожная платформа в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием постоянной силы тяги $\vec{F}$. Пренебрегая трением в осях, найти зависимость от времени скорости платформы $\vartheta(t)$, если:

   а. платформа нагружена песком, который высыпается через отверстие в ее дне с постоянной скоростью μ, а в момент $t = 0$ масса платформы с песком равна m_0;

   б. на платформу, масса которой m_0, в момент $t = 0$ начинает высыпаться песок из неподвижного бункера так, что скорость погрузки постоянна и равна μ.

10. Ракета с запасом топлива имеет начальную массу m_0. Топливо сжигается с постоянным расходом, так что $dm/dt = -c$, где m – мгновенная масса ракеты. Продукты сгорания выбрасываются с постоянной относительно ракеты скоростью u. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость ϑ ракеты, движущейся вертикально вверх, в произвольный момент времени t. Ускорение силы тяжести g считать постоянным.

11. Ракета движется вертикально вверх в однородном поле тяжести. Найти скорость и положение ракеты после сгорания топлива массы M. Скорость истечения газов u постоянна и постоянен расход топлива $dm/dt = k = \text{const}$. Начальная масса ракеты вместе с топливом равна m_0.

§5. Уравнения Лагранжа и Гамильтона. Скобки Пуассона

1. Уравнения движения в переменных q_i называются ***уравнениями Лагранжа***

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0,$$

где $\mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = \mathcal{T}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha) - \mathcal{U}(q_\alpha, t)$ – *функция Лагранжа*, $\mathcal{T}$ и $\mathcal{U}$ – соответственно, кинетическая и потенциальная энергия материальной точки ($\alpha = 1, 2, ..., s$, где s – число степеней свободы).

2. В каноническом (гамильтоновом) формализме механическое состояние системы определяется заданием обобщенных координат q_α и обобщенных импульсов p_α ($\alpha = 1, 2, ..., s$, где s – число степеней свободы). По определению

$$p_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_\alpha}. \tag{1}$$

Переменные q_α и p_α называются канонически сопряженными переменными. Если ввести ***функцию Гамильтона*** $\mathcal{H}$, определяемую формулой

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{\beta=1}^{s} p_\beta \dot{q}_\beta - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t), \tag{2}$$

в правой части которой величины $\dot{q}$ выражены как функции p, q и t с помощью соотношения (1), то уравнения для $p_\alpha(t)$ и $q_\alpha(t)$ (*уравнения Гамильтона*) имеют вид:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_\alpha}, \qquad \frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\alpha}, \qquad \alpha = 1, ..., s. \tag{3}$$

Выражение (2) можно представить в виде:

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \mathcal{T}(p, q) + \mathcal{U}(q, t),$$

$\mathcal{T}$ и $\mathcal{U}$ – кинетическая и потенциальная энергии системы.

3. ***Скобкой Пуассона*** двух произвольных функций импульсов и координат, $\phi(p,q,t)$ и $\varphi(p,q,t)$, называется величина

$$\{\phi,\varphi\} = \sum_{\alpha}^{s}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial\phi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\right\}.$$

Основные свойства скобок Пуассона:

а. Антикоммутативность:

$$\Big\{\phi,\varphi\Big\} = -\Big\{\varphi,\phi\Big\}.$$

б. Для $c = \text{const}$:

$$\Big\{\phi,c\Big\} \equiv 0.$$

в. Дистрибутивность:

$$\Big\{c_1\phi + c_2\varphi,\psi\Big\} = c_1\Big\{\phi,\psi\Big\} + c_2\Big\{\varphi,\psi\Big\},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

г. Распределительное свойство:

$$\Big\{\phi\cdot\varphi,\psi\Big\} = \phi\Big\{\varphi,\psi\Big\} + \varphi\Big\{\phi,\psi\Big\}.$$

д. Дифференцирование:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\phi,\varphi\right\} = \left\{\frac{\partial\phi}{\partial t},\varphi\right\} + \left\{\phi,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}.$$

е. Для $\varphi = p_\alpha$:

$$\Big\{\phi,p_\alpha\Big\} = \frac{\partial\phi}{\partial q_\alpha}.$$

ж. Для $\varphi = q_\alpha$:

$$\Big\{\phi,q_\alpha\Big\} = \frac{\partial\phi}{\partial p_\alpha}.$$

з. Фундаментальные скобки Пуассона:

$$\Big\{p_\alpha,q_\beta\Big\} = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \Big\{p_\alpha,p_\beta\Big\} = \Big\{q_\alpha,q_\beta\Big\} = 0.$$

и. Тождество Якоби:

$$\Big\{\phi,\Big\{\varphi,\psi\Big\}\Big\} + \Big\{\varphi,\Big\{\psi,\phi\Big\}\Big\} + \Big\{\psi,\Big\{\phi,\varphi\Big\}\Big\} = 0.$$

Для произвольной функции $f(q, p, t)$ имеем:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{\mathcal{H}, f\}.$$

4. Преобразование от переменных p, q к новым переменным

$$\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha(q, p, t), \quad \mathcal{Q}_\alpha = \mathcal{Q}_\alpha(q, p, t)$$

называется *каноническим преобразованием*, если уравнения для $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ снова имеют вид уравнений Гамильтона

$$\frac{d\mathcal{P}_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathcal{Q}_\alpha}, \quad \frac{d\mathcal{Q}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathcal{P}_\alpha}, \quad \alpha = 1, ..., s.$$

$\mathcal{H}' \neq \mathcal{H}$, если $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ явно зависят от времени. Для всякого канонического преобразования существует *производящая функция*, из которого оно может быть получено. Производящие функции могут быть заданы как функции одного из четырех наборов независимых переменных:

$$q_\alpha, \mathcal{Q}_\beta; \quad q_\alpha, \mathcal{P}_\beta; \quad p_\alpha, \mathcal{Q}_\beta; \quad p_\alpha, \mathcal{P}_\beta.$$

Пусть, например, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(q_\alpha, \mathcal{Q}_\beta, t)$ – производящая функция в переменных $q_\alpha, \mathcal{Q}_\beta$. Тогда можно показать, что

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_\alpha}, \quad \mathcal{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{Q}_\alpha}, \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}.$$

Пример 1. Составить функцию Лагранжа и получить уравнения Лагранжа для следующих свободных систем:

а. Свободно двигающаяся частица;

б. Линейный гармонический осциллятор;

в. Частица, двигающаяся в центрально-симметричном поле под действием силы притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстояния до силового центра.

Решение:

а. Так как на свободную частицу не действуют никакие силы, то ее функция Лагранжа будет состоять только из кинетической энергии:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Составляя уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0,$$

найдем

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, используя начальные условия $\left(\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0, \vec{\vartheta}(t = 0) = \vec{\vartheta}_0\right)$, получим:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\vartheta}_0 t.$$

б. *Линейным гармоническим осциллятором* называют частицу массы m, двигающуюся по прямой под действием силы $F = -kx$ ($k = \text{const}$). Используя связь силы с потенциальной энергией

$$\vec{F} = -gradU(x),$$

получим

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

Так как кинетическая энергия осциллятора

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

то для функции Лагранжа найдем

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$$

Составляя уравнение Лагранжа, получим уравнение движения осциллятора в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где $\omega^2 = k/m$.

в. Запишем силу действующую на частицу, движущуюся в центрально-симметричном поле в полярной системе координат:

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{\rho^2}\vec{e}_\rho,$$

где α – константа взаимодействия. Полагая потенциал равным нулю в бесконечно удаленной точке от силового центра, для потенциальной энергии частицы найдем

$$U(\rho) = \frac{\alpha}{\rho}.$$

Так как квадрат скорости частицы в полярной системе координат имеет вид $\vartheta^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$, то для функции Лагранжа получаем выражение

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\big(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\big) - \frac{\alpha}{\rho}.$$

Составляя уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0,$$

найдем уравнения второго порядка

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{\rho^2} = 0, \qquad m\rho^2\ddot{\varphi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0,$$

которые являются обычными уравнениями движения частицы в полярной системе координат

$$ma_\rho = -\frac{\alpha}{\rho^2}, \qquad ma_\varphi = 0,$$

где a_ρ и a_φ – радиальное и угловое ускорения частицы.

Пример 2. Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения для материальной точки, движущейся в однородном поле тяжести, в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Для случая декартовой системы проинтегрировать уравнения движения при произвольных начальных условиях.

Решение: Для построения функции Гамильтона используем соотношение (2), заменив в нем обобщенные скорости $\dot{q}_\alpha$ на импульсы p_α с помощью (1).

а. В декартовых координатах:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) - mgz,$$

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}, \qquad p_y = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = m\dot{y}, \qquad p_z = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = m\dot{z}.$$

Тогда с помощью (2), находим

$$\mathcal{H}(x,y,z,p_x,p_y,p_z) = \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m} + mgz.$$

Подставляя это выражение в (3), получим уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{p}_x = 0, \qquad \dot{p}_y = 0, \qquad \dot{p}_z = -mg, \\ \dot{x} = \dfrac{p_x}{m}, \qquad \dot{y} = \dfrac{p_y}{m}, \qquad \dot{z} = \dfrac{p_z}{m}. \end{cases}$$

Общее решение этих уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} p_x(t) = p_{0x}, \qquad p_y(t) = p_{0y}, \qquad p_z(t) = p_{0z} - mgt, \\ x(t) = \dfrac{p_{0x}t}{m} + x_0, \qquad y(t) = \dfrac{p_{0y}t}{m} + y_0, \qquad z(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + \dfrac{p_{0z}t}{m} + z_0. \end{cases}$$

Здесь постоянные p_{0x}, p_{0y}, p_{0z}, x_0, y_0, z_0 определяют значения импульса и координат в начальный момент времени.

б. В цилиндрических координатах:

$$\mathcal{L}(\varrho,\varphi,z,\dot{\varrho},\dot{\varphi},\dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{\varrho}^2+\varrho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right) - mgz,$$

$$p_\varrho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varrho}} = m\dot{\varrho}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = m\varrho^2\dot{\varphi}, \qquad p_z = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = m\dot{z}.$$

$$\mathcal{H}(\varrho,\varphi,z,p_\varrho,p_\varphi,p_z) = \frac{1}{2m}\left(p_\varrho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\varrho^2} + p_z^2\right) + mgz.$$

в. В сферических координатах:

$$\mathcal{L}(\rho,\phi,\theta,\dot{\rho},\dot{\phi},\dot{\theta}) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\rho^2\dot{\theta}^2\sin^2\phi\right) - mg\rho\cos\phi,$$

$$p_\rho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \qquad p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi}, \qquad p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta}\sin^2\phi.$$

$$\mathcal{H}(\rho,\phi,\theta,p_\rho,p_\phi,p_\theta) = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2} + \frac{p_\theta^2}{\rho^2\sin^2\phi}\right) + mg\rho\cos\phi.$$

Задачи

1. Составить функцию Лагранжа для математического маятника с массой m и длиной l при отклонении от положения равновесия на угол φ.

2. Записать функцию Лагранжа математического маятника массы m и длины l, точка подвеса которого движется в горизонтальной плоскости по закону $x = x(t)$.

3. Записать функцию Лагранжа математического маятника массы m и длины l, точка подвеса которого движется в вертикальной плоскости по закону $y = y(t)$ и $x = x(t)$.

4. Составить уравнение Лагранжа для материальной точки с массой m в поле силы тяжести.

5. Записать уравнения движения для малых колебаний математического маятника длины l, точка подвеса которого колеблется по горизонтали по закону $x = a\cos\big(\gamma t\big)$.

6. Найти функцию Лагранжа, описываемой гамильтонианом
$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2} + \frac{1}{2}\bigg(q_1 + q_2\bigg)^2.$$

7. Найти функцию Лагранжа, если функция Гамильтониана равна
а. $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = \dfrac{\vec{p}^2}{2m} - (\vec{p}, \vec{a}), \qquad (\vec{a} = \mathrm{const});$
б. $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = \dfrac{c|\vec{p}|}{n(\vec{r})}.$

8. Построить функцию Гамильтона и выписать канонические уравнения для ангармонического осциллятора, функция Лагранжа которого имеет вид:
$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2,$$
где $\omega,\ \alpha,\ \beta$ – постоянные величины.

9. Определить скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент импульса и момента количества движения $\vec{\mathcal{M}} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right]$.

10. Определить скобки Пуассона, составленные из компонент полного вектора момента количества движения системы N-частиц $\vec{\mathcal{M}} = \sum\limits_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right]$.

11. Найти функцию Гамильтона механической системы с двумя степенями свободы по известной функции Лагранжа; q_1, q_2 – обобщенные координаты.

    а. $\mathcal{L} = 6\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 2q_1^2 + 4q_2^2$;

    б. $\mathcal{L} = 2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 3q_1^2 + 4q_1q_2$;

    в. $\mathcal{L} = 2\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 4q_2^2 + 2q_1q_2$.

§6. Законы сохранения

Законы сохранения физических величин приводят к интегралам движения. ***Интегралом движения*** называется такая функция времени, координат и скоростей частиц, которая при движении механической системы сохраняет постоянное значение, определяемое начальными условиями. Интегралы движения, содержащие скорости частиц, называются *первыми интегралами движения. Вторыми интегралами движения* называются такие функции времени, координат частиц и произвольных констант, которые при движении системы сохраняют постоянные значения.

Основные свойства пространства и времени и связанные с ними интегралы движения.

1. Из *однородности времени* следует закон сохранения полной энергии механической системы $\left(\dfrac{dE}{dt} = 0\right)$.
2. С *однородностью пространства* связан закон сохранения импульса механической системы $\left(\dfrac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = 0\right)$.
3. *Изотропность пространства* приводит к закону сохранения момента импульса механической системы $\left(\dfrac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} = 0\right)$.

Пример 1. Пусть функция Гамильтона $\mathcal{H}$ системы частиц не изменяется при бесконечно малом переносе (повороте). Вывести отсюда закон сохранения импульса (момента импульса).

Решение: Пусть $\vec{\varepsilon}$ – вектор бесконечно малого смещения; при этом

$$\vec{r}_\alpha \to \vec{r'}_\alpha = \vec{r}_\alpha + \vec{\varepsilon}, \qquad \vec{p}_\alpha \to \vec{p'}_\alpha = \vec{p}_\alpha,$$
$$\mathcal{H}(\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha) = \mathcal{H}(\vec{r'}_\alpha, \vec{p'}_\alpha).$$

Отсюда $\displaystyle\sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}_\alpha} = 0$. Используя уравнения Гамильтона, получаем

$$\dot{\vec{\mathcal{P}}} = \sum_\alpha \dot{\vec{p}}_\alpha = -\sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}_\alpha} = 0, \qquad \vec{\mathcal{P}} = \text{const}.$$

При бесконечно малом повороте $\delta\vec{\varphi}$ (вектор угла поворота)

$$\vec{r}_\alpha \to \vec{r'}_\alpha = \vec{r}_\alpha + \big[\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_\alpha\big], \qquad \vec{p}_\alpha \to \vec{p'}_\alpha = \vec{p}_\alpha + \big[\delta\vec{\varphi}, \vec{p}_\alpha\big],$$

$$\mathcal{H}(\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha) = \mathcal{H}(\vec{r'}_\alpha, \vec{p'}_\alpha),$$

$$\sum_\alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}_\alpha} \big[\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_\alpha\big] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}_\alpha} \big[\delta\vec{\varphi}, \vec{p}_\alpha\big] \right\} = 0$$

$$= \sum_\alpha \Big\{ -\dot{\vec{p}}_\alpha \big[\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_\alpha\big] + \dot{\vec{r}}_\alpha \big[\delta\vec{\varphi}, \vec{p}_\alpha\big] \Big\} = -\delta\vec{\varphi} \sum_\alpha \frac{d}{dt} \big[\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha\big]$$

или

$$\vec{\mathcal{M}} = \sum_\alpha \big[\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha\big] = \mathrm{const}.$$

Ответ: $\vec{\mathcal{P}} = \mathrm{const}$, $\vec{\mathcal{M}} = \sum_\alpha \big[\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha\big] = \mathrm{const}$.

Задачи

1. Материальная точка массы m движется в плоскости $z = 0$ по закону $x = \mathcal{R}\cos(\omega t)$, $y = \mathcal{R}\sin(\omega t)$. Приведите сохраняющиеся величины при таком движении материальной точки.

2. Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы:

   а. в цилиндрических координатах (ϱ, φ, z);

   б. в сферических координатах (ρ, ϕ, θ).

3. Материальная точка массы m движется в плоскости $z = 0$ по закону $x = \alpha \mathrm{ch}(kt)$, $y = \beta \mathrm{sh}(kt)$. Определить значения сохраняющихся при таком движении динамических величин и траекторию движения частицы.

4. Вывести с помощью канонических уравнений Гамильтона закон сохранения полной механической энергии.

5. Показать, что при движении в поле $U(r) = \dfrac{\alpha}{r}$ величина

   $$\vec{A} = \big[\vec{\vartheta}, \vec{\mathcal{M}}\big] + \frac{\alpha \vec{r}}{r}$$

   есть интеграл движения.

6. Заряд e движется в магнитном поле вида $\vec{\mathcal{H}} = q\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ (поле магнитного монополя). Доказать, что величина $\vec{A} = \vec{\mathcal{M}} - \dfrac{eq}{c}\dfrac{\vec{r}}{r}$ является интегралом движения.

7. Заряд e движется в однородном постоянном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$. Доказать, что при таком движении сохраняется величина $A = \big(\vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{H}}\big) + \dfrac{e}{2c}\big[\vec{r}, \vec{\mathcal{H}}\big]$, где $\vec{\mathcal{M}}$ – момент импульса заряда.

§7. Релятивистская механика

1. ***Преобразования Лоренца*** описывают изменения координат и времени при рассмотрении одних и тех же событий в различных инерциальных системах отсчета K и K'.

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + Vt'), \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{Vx'}{c^2}\right), \end{cases}$$

где $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$ – релятивистский множитель. Если наблюдателя поместить в систему K', то система K по отношению к нему движется со скоростью $-V$, направленной в сторону отрицательных значений оси x'. Для преобразования координат и времени, измеренных в системе K, наблюдатель в системе K' получит сходные выражения:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{Vx}{c^2}\right). \end{cases}$$

2. ***Преобразования скоростей.*** Если материальная точка движется в системе K' с известной скоростью

$$\vec{u}'\left(\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}\right) = u'_x\vec{i}' + u'_y\vec{j}' + u'_z\vec{k}',$$

то скорость ее движения в системе K

$$\vec{u}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$$

может быть найдена с помощью преобразования Лоренца

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u'_x + V}{1 + \dfrac{u'_x V}{c^2}}, \\ u_y = \dfrac{u'_y}{1 + \dfrac{u'_x V}{c^2}} \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}, \\ u_z = \dfrac{u'_z}{1 + \dfrac{u'_x V}{c^2}} \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}. \end{cases}$$

3. ***Сокращение длины.*** Пусть горизонтальный размер неподвижного в системе K' тела измерен по оси x' и составляет l_0. Наблюдатель из системы K в некоторый момент времени измеряет x-овые координаты концов тела, чтобы получить его горизонтальный размер l в системе K. Оказывается, что

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Происходит лоренцово сокращение продольного размера тела, или сокращение длины.

4. ***Замедление времени.*** Пусть в системе K' закреплены часы, которые отсчитали промежуток времени τ_0. Наблюдатель, находящийся в системе K, по своим часам измерит соответствующий промежуток времени τ, связанный с промежутком в системе K':

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

5. ***Относительность одновременности.*** Пусть в системе K' в двух точках оси x' одновременно происходят два независимых события, причем их одновременность установлена по часам системы K. Если наблюдатель находится в системе K', то для него события окажутся неодновременными: их разделяет промежуток времени

$$\Delta\tau' = \frac{V \Delta x'}{c^2},$$

где $\Delta x'$ – расстояние между точками, в которых произошли события.

6. ***Релятивистский импульс*** тела в системе K:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}},$$

где m_0 – масса покоя тела, $\vec{u}$ – вектор скорости тела.

7. ***Релятивистская энергия*** тела в системе K:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Исключив из двух предыдущих соотношений скорость u, можно найти связь энергии тела и его импульса:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Из этого соотношения следует, что даже в состоянии покоя ($p = 0$) неподвижное тело обладает энергией $E = m_0 c^2$, которая носит название **энергия покоя**. Эта энергия зависит только от массы тела, а полученное выражение указывает на ее тождественную связь с массой.

8. ***Кинетическая энергия*** T тела может быть представлена как превышение полной энергии тела над его энергий покоя:

$$T = E - m_0 c^2.$$

Воспользовавшись этим определением, легко установить связь кинетической энергии и импульса тела:

$$p^2 = T\left(\frac{T}{c^2} + 2m_0\right).$$

Пример 1. Два фотона движутся навстречу друг к другу. Какова относительная скорость одного фотона в системе отсчета, связанной со вторым фотоном?

Решение: Систему K будем считать лабораторной, а систему K' свяжем с первым фотоном так, чтобы его скорость была направлена в положительном направлении оси x. Воспользуемся преобразованиями скоростей

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \dfrac{u'_x V}{c^2}},$$

где $u_x = -c$ – скорость второго фотона в системе K, u'_x – скорость второго фотона в системе K', $V = c$ – скорость первого фотона в системе K. Рассмотрим предыдущее выражение как уравнение относительно u'_x

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \dfrac{u_x V}{c^2}}.$$

Подстановка значений дает $u'_x = -c$, то есть полученное значение относительно скорости фотонов, как и следовало ожидать, не превышает скорости света

Ответ: $-c$.

Пример 2. Частица вылетает со скоростью u под углом α к оси x системы K. Под каким углом α' к оси x' системы K' движется частица? Какова ее скорость u' в этой системе?

Решение: В системе K проекции вектора скорости на оси x и y составляют

$$u_x = u\cos\alpha, \qquad u_y = u\sin\alpha.$$

Они задают модуль скорости и угол наклона вектора к оси x:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{u_y}{u_x}\right).$$

Аналогичная связь между искомыми величинами и проекциями вектора скорости существует в системе K'. Воспользуемся преобразованиями координат и результатами предыдущей задачи:

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - V}{1 - \dfrac{u_x V}{c^2}} = \dfrac{u\cos\alpha - V}{1 - \dfrac{uV\cos\alpha}{c^2}}, \\ \\ u'_y = \dfrac{u_y}{1 - \dfrac{u_x V}{c^2}}\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} = \dfrac{u\sin\alpha}{1 - \dfrac{uV\cos\alpha}{c^2}}\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}. \end{cases}$$

В системе K' угол наклона вектора скорости к оси x составит

$$\alpha' = \operatorname{arctg}\left(\frac{u'_y}{u'_x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha - V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right),$$

а модуль вектора скорости

$$u' = \frac{\sqrt{\left(u\cos\alpha - V\right)^2 + \left(1 - V^2/c^2\right)^2 u^2\sin^2\alpha}}{1 - \dfrac{uV\cos\alpha}{c^2}}.$$

Ответ: $u' = \dfrac{\sqrt{(u\cos\alpha - V)^2 + (1 - V^2/c^2)^2 u^2\sin^2\alpha}}{1 - uV\cos\alpha/c^2}$,
$\alpha' = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha - V}\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}\right)$.

Пример 3. Собственное время жизни нестабильной частицы составляет τ_0. Вычислить путь частицы до распада в лабораторной системе отсчета, если время жизни частицы в ней увеличивается до τ.

Решение: Систему K' свяжем с частицей, в которой она окажется покоящейся. Значит, скорость частицы совпадает со скоростью этой системы относительно неподвижной лабораторной системы K. За время τ частица вместе с системой K' пройдет в системе K путь $s = V\tau$. Следовательно, необходимо найти скорость V частицы в лабораторной системе. Эффект замедления времени дает связь

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

Откуда, $V = c\sqrt{1 - \tau_0^2/\tau^2}$. Пройденный путь $s = c\sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}$.

Ответ: $s = c\sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}$.

Задачи

1. Движущаяся частица обладает импульсом p, направленным вдоль оси x, и полной энергией E. Найти импульс и энергию частицы в системе отсчета, движущейся со скоростью V вдоль той же оси x. Каков будет результат, если вместо частицы движется фотон, то есть квант излучения?

2. Две одинаковые частицы, массы которых составляют m_0, движутся с одинаковыми импульсами p, направленными навстречу друг другу. Найти массу частицы, получающейся в результате неупругого соударения первоначальных частиц. Что измениться, если частицы будут двигаться во взаимно перпендикулярных направлениях?

3. Стержень длиной l_0 направлен под углом α к оси x системы K. Какую длину будет иметь стержень в системе K', двигающейся со скоростью V в положительном направлении оси x системы K?

4. На покоящуюся частицу массой M_1 налетает частицы массой M_2, кинетическая энергия которой равна T_2. После столкновения частицы слипаются и двигаются как единое целое. Найти массу образовавшейся частицы M и ее скорость V.

5. Стержень, собственная длина которого $l_0 = 5$ м, движется в продольном направлении со скоростью V относительно K системы отсчета. При каком значении V длина стержня в K системе будет $l = 3$ м?

6. Протон движется со скоростью $0.7c$. Найти импульс и кинетическую энергию протона.

7. С момента образования до распада π-мезон пролетел расстояние $s = 1.35$ км. Время жизни π-мезона в неподвижной системе

координат равно $\tau' = 5$ мкс. Определить время жизни π-мезона по часам в системе координат, движущейся вместе с ним.

8. Протон движется со скоростью, равной 0.8 скорости света. Навстречу ему движется электрон со скоростью 0.9 скорости света. Каковы их скорости относительно друг друга? Определить полную и кинетическую энергию электрона.

9. Релятивистский протон с импульсом $\vec{p}_0$ влетел в момент $t = 0$ в область, где имеется поперечное однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, причем $\vec{p}_0 \perp \vec{E}$. Найти зависимость от времени угла α, на который протон будет отклоняться от первоначального направления движения.

10. При каких значениях скорости частицы ее ньютоновский импульс отличается от релятивистского на 1% (на 10%)?

11. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя m_0 от 0.6 до 0.8c? Сравнить полученный результат со значением, вычисленным по нерелятивистской формуле.

Ответы и указания

§1. Кинематика материальной точки

1. $\vec{\vartheta} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$.

2. $a = -k\vartheta^2$.

3. $\vartheta = \left|\dfrac{dx}{dt}\right| = \dfrac{eA}{mk}\Big(1 - \cos(kt)\Big)$, $\vartheta_{min} = \dfrac{eA}{mk}\big(1 - \cos 0^\circ\big) = 0$,
$\vartheta_{min} = \dfrac{eA}{mk}\big(1 - \cos\pi\big) = \dfrac{2eA}{mk}$.

4. $\vartheta_x = \dfrac{\vartheta\alpha}{y}$, $\vartheta_y = \mathrm{th}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$, $a_x = -\dfrac{\vartheta^2\alpha^2}{y^3}\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$, $a_y = \dfrac{\vartheta^2\alpha^2}{y^3}$,
$a = \dfrac{\vartheta^2\alpha}{y^2}$.

5. Траектория – парабола $y = x\mathrm{tg}\alpha - \dfrac{\mathrm{g}x^2}{2\vartheta_0^2\cos^2\alpha}$,
высота $H = \dfrac{\vartheta_0^2}{2\mathrm{g}}\sin^2\alpha$, $L = \dfrac{\vartheta_0^2}{\mathrm{g}}\sin 2\alpha$, $T = 2\dfrac{\vartheta_0}{\mathrm{g}}\sin\alpha$.

6. $r = \alpha$, $\varphi = kt$, $z = \vartheta t$.

7. Окружность, $(x-\alpha)^2 + y^2 = \alpha$, $s = \alpha kt$.

8. Линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $(x - R/4)^2 + y^2 = R^2/4$. Уравнения движения в сферических координатах: $\rho = R$, $\phi = kt/2$, $\theta = kt/2$.

9. $a = \sqrt{\dfrac{\vartheta_1^2 x_2^2 - \vartheta_2^2 x_1^2}{\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2}}$, $k = \sqrt{\dfrac{\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$.

10. **а.** $\vartheta(t) = \alpha x_0 \exp(\alpha t)$, $a(t) = \alpha^2 x_0 \exp(\alpha t)$;
б. $\langle\vartheta\rangle_s = \dfrac{\alpha(x_0 + s)}{\ln\Big((x_0+s)/x_0\Big)}$.

§2. Динамика материальной точки

1. $y_{max} = \dfrac{\vartheta_0^2 \sin^2\alpha}{2\mathrm{g}}$, $x_{max} = \dfrac{\vartheta_0^2}{\mathrm{g}} \sin 2\alpha$.

2. $H_{max} = H + \dfrac{\vartheta_0^2 \sin^2\alpha}{2\mathrm{g}} = 13.83$ м,
$x_{max} = \vartheta_0 t \cos\alpha = 23.8$ м,
где $t = \dfrac{\vartheta_0 \sin\alpha}{\mathrm{g}} + \sqrt{\left(\dfrac{\vartheta_0 \sin\alpha}{\mathrm{g}}\right)^2 + \dfrac{2H}{\mathrm{g}}}$.

3. **а.** $F_c = -\dfrac{m\vartheta_0}{t} = -1.2 \cdot 10^4$ Н; **б.** $l = \dfrac{m\vartheta_0^2}{2F_c} = 7.5 \cdot 10^{-2}$ м.

4. $s = \dfrac{2\pi\mathcal{F}_0}{m\omega^2}$.

5. $t = \dfrac{m}{k} \ln\left(\dfrac{k\vartheta_0}{m\mathrm{g}} + 1\right)$.

6. $\vartheta = \vartheta_0 \exp\left(\dfrac{kt}{m}\right)$, $s = \dfrac{m\vartheta_0}{k}\left[\exp\left(\dfrac{kt}{m}\right) - 1\right]$.

7. $\Delta t = t_\beta - t_\alpha = \dfrac{2\vartheta_0 \sin(\alpha-\beta)}{\mathrm{g}(\cos\alpha + \cos\beta)}$.

8. $t = \dfrac{h}{\vartheta_0}\left(\dfrac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)\left[\dfrac{1-\left(\vartheta/\vartheta_0\right)^{1-\alpha}}{1-\left(\vartheta/\vartheta_0\right)^{2-\alpha}}\right]$.

9. $F = k^2 mr$.

10. $R_x = -a\vartheta_x$, где $\vartheta_x = \vartheta_0 \exp\left(\dfrac{-a\mathrm{g}}{P}t\right)$.

11. $m_b = m\left(\vartheta_0^2 + 2a_0H\right)/\left(\vartheta_0^2 + 2\mathrm{g}H\right)$.

12. $t = \dfrac{m}{k} \ln\left(\dfrac{k\vartheta_0 + m\mathrm{g}f}{k\vartheta_1 + m\mathrm{g}f}\right)$.

13. $\vartheta = \dfrac{Q}{mk}\left[1 - \cos(kt)\right]\sin\alpha$.

14. $t_2 = t_1\big(1 + m_2/m_1\big)$.

§3. Движение в полях

1. Траектория – парабола, $y = \dfrac{eE}{2m\vartheta_0^2}x^2$.

2. $T = \dfrac{2m\vartheta_0}{eE}$.

3. Окружность с радиусом ϑ_0/ω_H, где $\omega_H = \dfrac{e\mu_0 H}{m}$ – электронная (циклотронная) частота.

4. $z = \dfrac{eE_0}{m\omega^2}\Bigg(1 - \cos\big(\omega x/\vartheta_0\big)\Bigg)$. Ось Oz направлена вдоль поля.

5. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\vartheta}_0 t + \dfrac{e\vec{E}_0}{m\omega^2}\big(1 - \cos(\omega t)\big)$;
$\vec{\vartheta}(t) = \vec{\vartheta}_0 + \dfrac{e\vec{E}_0}{m\omega}\sin(\omega t)$.

6. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0\cos(\omega t) + \dfrac{\vec{\vartheta}_0}{\omega}\sin(\omega t)$;
$\vec{\vartheta}(t) = \vec{\vartheta}_0\cos(\omega t) - \vec{r}_0\omega\sin(\omega t)$;
траектория – эллипс в плоскости векторов $\vec{r}_0$ и $\vec{\vartheta}_0$, уравнение которого в системе координат с осью x вдоль вектора $\vec{r}_0$ имеет вид: $x^2\sin^2\alpha - xy\sin(2\alpha) + y^2\big(\cos^2\alpha + r_0^2\omega^2/\vartheta_0^2\big) = r_0^2\sin^2\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{\vartheta}_0$, $\omega = \sqrt{k/m}$.

7. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \dfrac{m}{k}\vec{\vartheta}_0\big(1 - e^{-kt/m}\big) + \dfrac{m}{k}\vec{g}\left[t - \dfrac{m}{k}\big(1 - e^{kt/m}\big)\right]$,
$\vec{\vartheta}(t) = \vec{\vartheta}_0 e^{-kt/m} + \dfrac{m}{k}\vec{g}\big(1 - e^{-kt/m}\big)$; траектория движения лежит в плоскости векторов $\vec{\vartheta}_0$ и $\vec{g}$ и описывается уравнением:
$z = r_0 + x\left(\mathrm{tg}\alpha + \dfrac{mg}{k\vartheta_0\cos\alpha}\right) + \dfrac{m^2 g}{k^2}\ln\left(1 - \dfrac{kx}{m\vartheta_0\cos\alpha}\right)$.

8. $x(t) = \dfrac{x(0)}{\left[1 \pm x(0)t\sqrt{\frac{2A}{m}}\right]}$.

9. $\vec{F} = \left\{mk^2x, mk^2y, 0\right\}$

10. $\langle F\rangle = 2E/a$.

11. $\dot{x} = a\omega\mathrm{th}(\omega t)$, $x = a\ln(\mathrm{ch}\omega t)$, $\dot{y} = \dfrac{a\omega}{\mathrm{ch}\omega t}$, $y = a\arcsin(\mathrm{th}\omega t)$.

§4. Движение тел переменной массы

1. **а.** $m = m_0 e^{-\mathrm{g}t/u}$; **б.** $m = m_0 e^{-(a+\mathrm{g})t/u}$.

2. $\ddot{x} = -\mathrm{g} - \dfrac{\dot{f}(t)}{f(t)}u - \dfrac{\mathcal{R}(x,\dot{x})}{m_0 f(t)}$.

3. **а.** $m = m_0\exp\left(-\dfrac{n+1}{u}\mathrm{g}t\right)$; **б.** $m = m_0\exp\left(-\dfrac{n\mathrm{g}}{u}t\right)$.

4. $T = u\ln\left(\dfrac{2}{a+\mathrm{g}}\right)$.

5. Примерно 98 %.

6. $s = u^2\big(\ln k\big)^2/(2a)$.

7. $s = \dfrac{m_0 u}{\beta}\dfrac{e-2}{e}$.

8. $\vartheta(t) = u\ln\big(m_0/m\big) - \mathrm{g}t$.

9. **а.** $\vartheta = \dfrac{F}{\mu}\ln\left(\dfrac{m_0}{m_0-\mu t}\right)$; **б.** $\vartheta = Ft/(m_0+\mu t)$.

10. $\vartheta(t) = \vartheta_0 - \mathrm{g}t + u\ln\left(\dfrac{m_0}{m_0-ct}\right)$.

11. $\vartheta = u\ln\left(\dfrac{m_0}{m_0-M}\right) - \mathrm{g}\dfrac{M}{k}$;

$$z = u\frac{M}{k} - \frac{\mathrm{g}M^2}{2k^2} - \frac{u}{k}\big(m_0-M\big)\ln\left(\frac{m_0}{m_0-M}\right).$$

§5. Уравнения Лагранжа и Гамильтона. Скобки Пуассона

1. $\mathcal{L} = \dfrac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$.

2. Координаты тела массы m в инерциальной системе записываются в виде: $x = x(t) + l\sin\varphi$, $y = l\cos\varphi$;
функция Лагранжа: $\mathcal{L} = \dfrac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi - m\ddot{x}l\sin\varphi$.

3. $\mathcal{L} = \dfrac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi - m\ddot{x}(t)l\cos\varphi - m\ddot{y}(t)l\sin\varphi$.

4. $m\ddot{\vec{r}} = -m\vec{\mathrm{g}}$.

5. $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \alpha\cos\big(\gamma t\big)$, где $\omega_0^2 = \mathrm{g}/l$, $\alpha = \dfrac{a\gamma^2}{l}$.

6. $\mathcal{H} = \dfrac{p_1^2}{2} - \dfrac{1}{2}\bigg(q_1 + q_2\bigg)^2$.

7. **а.** $\mathcal{L} = \dfrac{m\big(\vec{p}/m - \vec{a}\big)^2}{2}$; **б.** $\mathcal{L} = 0$; подобные “частицы” нельзя описывать с помощью функции Лагранжа.

8. $\mathcal{H}(p,x) = \dfrac{p^2}{2\big(1+2\beta x\big)^2} + \dfrac{\omega^2x^2}{2} + \alpha x^3$, $\dot{x} = \dfrac{p}{1+2\beta x}$,
$\dot{p} = \dfrac{\beta p^2}{\big(1+2\beta x\big)^2} - \omega^2x - 3\alpha x^2$.

9. $\big\{\mathcal{M}_x, p_y\big\} = -p_z$, $\big\{\mathcal{M}_y, p_z\big\} = -p_x$, $\big\{\mathcal{M}_z, p_x\big\} = -p_y$,
$\big\{\mathcal{M}_x, p_x\big\} = 0$, $\big\{\mathcal{M}_y, p_y\big\} = 0$, $\big\{\mathcal{M}_z, p_z\big\} = 0$,
$\big\{\mathcal{M}_x, \vec{p}\big\} = \big[\vec{i}, \vec{p}\big]$, $\big\{\mathcal{M}_y, \vec{p}\big\} = \big[\vec{j}, \vec{p}\big]$, $\big\{\mathcal{M}_z, \vec{p}\big\} = \big[\vec{k}, \vec{p}\big]$.

10. $\big\{\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y\big\} = -\mathcal{M}_z$, $\big\{\mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z\big\} = -\mathcal{M}_x$, $\big\{\mathcal{M}_z, \mathcal{M}_x\big\} = -\mathcal{M}_y$.

11. **а.** $\mathcal{H} = -6p_1^2 + p_1p_2 - 2q_1^2 - 4q_2^2$;

б. $\mathcal{H} = p_1p_2 - 2p_2^2 - 3q_1^2 - 4q_1q_2$;

в. $\mathcal{H} = (1/8)p_1^2 + (1/8)p_2^2 - 4q_2^2 - 2q_1q_2$.

§6. Законы сохранения

1. Полная энергия и момент импульса.

2. **а.** $\mathcal{M}_x = m\big(\varrho\dot{z} - z\dot{\varrho}\big)\sin\varphi - m\varrho z\dot{\varphi}\cos\varphi$,
$\mathcal{M}_y = m\big(z\dot{\varrho} - \varrho\dot{z}\big)\cos\varphi - m\varrho z\dot{\varphi}\sin\varphi$,
$\mathcal{M}_z = m\varrho^2\dot{\varphi}$,
$\mathcal{M}^2 = m^2\varrho^2\dot{\varphi}^2\big(\varrho^2 + z^2\big) + m^2\big(\varrho\dot{z} - z\dot{\varrho}\big)^2$.

б. $\mathcal{M}_x = -m\rho^2\big(\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\theta\cos\phi\big)$,
$\mathcal{M}_y = m\rho^2\big(\dot{\theta}\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\cos\theta\sin\phi\big)$,
$\mathcal{M}_z = m\rho^2\sin^2\theta\cdot\dot{\phi}$,
$\mathcal{M}^2 = m^2\rho^4\big(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\dot{\phi}^2\big)$.

3. Сохраняются величины: момент импульса $\vec{\mathcal{M}} = \{0, 0, mk\alpha\beta\}$;
полная энергия $E = \dfrac{mk^2}{2}\big(\beta^2 - \alpha^2\big)$;
z-проекция импульса $p_z = 0$.
Уравнение траектории: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$.

§7. Релятивистская механика

1. $p'_x = \dfrac{p_x - \dfrac{EV}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$, $E' = \dfrac{E - p_x V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$, для фотона $E' = E\sqrt{\dfrac{1 - V/c}{1 + V/c}}$.

2. $M = 2m_0\sqrt{1 + \dfrac{p^2}{m_0^2c^2}}$, $M = 2m_0\sqrt{1 + \dfrac{p^2}{2m_0^2c^2}}$.

3. $l' = l\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}\cos\alpha$.

4. $M = (M_1 + M_2)\sqrt{1 + \dfrac{2M_1T_2}{(M_1 + M_2)^2c^2}}$, $V = \dfrac{c\sqrt{T_2(2M_2c^2 + T_2)}}{(M_1 + M_2)c^2 + T_2}$.

5. $V = c\sqrt{1 - (l/l_0)^2} = 4/5c$.

6. $p = \dfrac{m\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2/c^2}} = 4.91 \cdot 10^{-19}$ кг·м/с,

$T = mc^2\left(\dfrac{1}{1-\vartheta^2/c^2} - 1\right) = 6.02 \cdot 10^{-11}$ Дж.

7. $\tau = \tau'\sqrt{1 - \dfrac{s^2}{c^2\tau'^2}} = 2.2 \cdot 10^{-6}$ с.

8. $u' = \dfrac{u+\vartheta}{1+u\vartheta/c^2} = 2.97 \cdot 10^8$ м/с,

$E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\vartheta^2/c^2}} = 1.173$ МэВ, $T = E - E_0 = 0.662$ МэВ.

9. $\mathrm{tg}\alpha = \vartheta_y/\vartheta_x = eEt/p_0$.

10. $\vartheta/c = \sqrt{\eta(2-\eta)} = 0.14$, при $\eta = 0.01$ (0.45, при $\eta = 0.1$).

11. $A = 0.42 m_0c^2$. Соответствующая же работа, по нерелятивистской формуле, $A = 0.14 m_0 c^2$.

Приложение

Таблица основных интегралов

$$\int a du = au + C, \qquad \big(a \in R, C = \text{const}, u = u(x)\big).$$

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \qquad \big(m \neq -1\big).$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C, \qquad \int e^u du = e^u + C.$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \qquad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

$$\int \cos u du = \sin u + C, \qquad \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tg} u + C, \qquad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctg} u + C.$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$$

Основные тригонометрические формулы

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

$$\text{sh}x = \frac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big), \quad \text{ch}x = \frac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big), \quad \text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}.$$

Литература

[1] Ландау Л.Д. Теоретическая механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука, 1988.

[2] Голдстейн Г. Классическая механика / Г. Голдстейн. - М.: Наука, 1957.

[3] Угаров В.А. Специальная теория относительности / В.А. Угаров. - М.: Наука, 1977.

[4] Сафаров Р.Х. Задания для практических занятий по классической механике и специальной теории относительности / Р.Х. Сафаров. - Казань: Изд. Казгоспедуниверситета, 2004.

[5] Коткин Г.Л. Сборник задач по классической механике / Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо. - М.: Наука, 1977.

[6] Павленко Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. - М.: Физматлит, 2003.

[7] Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. - М.: Наука, 1986.

[8] Ольховский И.И. Задачи по теоретической механике для физиков / И.И. Ольховский, Ю.Г. Павленко, Л.С. Кузьменков. - М.: Изд. Моск. Унив., 1977.

[9] Леушин А.М. Теоретическая механика. Задачник для физиков / А.М. Леушин, Р.Р. Нигматуллин, Ю.Н. Прошин. - Казань: Изд. КазГУ, 2002.

[10] Лайтман А. Сборник задач по теории относительности и гравитации / А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски. - М.: Мир, 1979.

[11] Соколовский Ю.И. Элементарный задачник по теории относительности / Ю.И. Соколовский. - М.: Наука, 1971.

[12] Иродов И.Е. Основные законы механики / И.Е. Иродов. - М.: Высш. шк., 1985.

[13] Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. - М.: Наука, 1966.