КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Р.А. Даишев, А.Ю. Даньшин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конспект лекций

Учебно-методическое пособие

Казань 2009

УДК 517.5

Печатается по решению Редакционно-издательского совета физического факультета Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина методической комиссии физического факультета Протокол №4 от 25 мая 2009 г. заседание кафедры теории относительности и гравитации Протокол №3 от 3 апреля 2009 г.

Рецензент — к.ф.-м.н., доцент Желифонов М.П.

Даишев Р.А., Даньшин А.Ю. Дифференциальные уравнения. Конспект лекций — Казань, 2009.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов 2-го курса физического факультета Казанского государственного университета. Оно представляет собой детализированную и расширенную обработку тех лекций, которые в течение ряда лет читались на физическом факультете университета.

В пособии излагаются основные понятия и определения теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Излагаются наиболее важные методы интегрирования, доказываются теоремы существования решений и исследуются свойства этих решений.

Лекция 1

1.1. Основные понятия и определения

Теория дифференциальных уравнений возникает из задач дифференциального и интегрального исчислений. Само определение дифференциального уравнения опирается на понятие производной функции, а задача его решения является по существу обобщенной задачей интегрирования. В дифференциальном исчислении по заданной функции $y = y(x)$ находим ее производную

$$y'(x) = f(x) \, , \tag{1.1}$$

которая сама является некоторой функцией $f(x)$ переменной x. В интегральном исчислении мы решаем обратную задачу: пусть задана функция $f(x)$, найти ее первообразную $y(x)$. Решение этой задачи дается неопределенным интегралом

$$y(x) = \int f(x)\, dx + C \, ,$$

где C — произвольная постоянная. Таким образом, в задаче интегрального исчисления мы решаем уравнение (1.1), рассматривая в нем функцию $y(x)$ как неизвестную. Уравнение (1.1) является простейшим примером того, что в математике называется дифференциальным уравнением. Дадим общее определение дифференциального уравнения.

Пусть $y = y(x)$ — некоторая неизвестная действительная функция одной действительной переменной x, а $y'(x)$, $y''(x)$,..., $y^{(n)}(x)$ — ее производные до n-го порядка включительно. Иногда, для краткости, указание на аргумент функций мы будем опускать и подразумевать его по умолчанию.

Определение 1. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{1.2}$$

где F — некоторая функция многих переменных от указанных аргументов.

Определение 2. Старший порядок производной неизвестной функции $y = y(x)$, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* данного дифференциального уравнения.

Таким образом, уравнение (1.2) — это обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка.

Решить дифференциальное уравнение — это значит найти такую функцию $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее и ее производных в уравнение (1.2) обращает это уравнение в тождество.

Определение 3. Функция $y = \varphi(x)$, обращающая дифференциальное уравнение в тождество, называется *частным решением* этого дифференциального уравнения.

Любое дифференциальное уравнение имеет бесконечно много частных решений подобно тому, как любая функция имеет бесконечно много первообразных, отличающихся друг от друга на произвольную постоянную. В общем случае, для того чтобы решить дифференциальное уравнение n-го порядка вида (1.2), необходимо проделать n раз операцию неопределенного интегрирования. На каждом i-м шаге такого интегрирования возникает своя произвольная постоянная C_i. Таким образом, после n-го шага в конечном решении дифференциального уравнения n-го порядка появится ровно n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\,. \tag{1.3}$$

Такое решение называется *общим решением* дифференциального уравнения. Любое частное решение уравнения (1.2) получается из общего решения (1.3) при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, диктуемых условиями решаемой задачи. Иначе говоря, *общим решением называется решение, содержащее в себе все без исключения частные решения.* Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего некоторым заранее заданным условиям, называется *задачей Коши.*

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения вида (1.2). Она ставится следующим образом: необходимо решить уравнение (1.2) в предположении, что решение должно удовлетворять следующим условиям:

$$y(x_0) = y_0\,,\; y'(x_0) = y_1\,,\; y''(x_0) = y_2\,,\; \ldots\,,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,, \tag{1.4}$$

где x_0 — некоторая заданная точка на действительной числовой прямой, $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ — некоторые заданные числа, то есть в задаче Коши даны значения функции и всех ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно в некоторой точке x_0. Условия (1.4) называются *данными Коши* или *начальными условиями*, а сами величины x_0 и $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ — *начальными значениями.* Если общее решение дифференциального уравнения уже получено в виде (1.3), то для отыскания констант, соответствующих частному решению, удовлетворяющему данным

Коши, необходимо составить и решить систему

$$\begin{cases} \Phi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_0, \\ \Phi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Это система из n уравнений с n неизвестными величинами $C_1, C_2, ..., C_n$, которые, в силу теоремы о существовании и единственности неявной функции, определяются из этой системы однозначно. Подставив найденные константы в общее решение (1.3), получим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям задачи Коши.

Пример. Рассмотрим физическую задачу о падении первоначально покоящегося тела с высоты h. Выберем систему координат, направив вверх ось x с началом координат на поверхности Земли. Функция $x = x(t)$ будет определять положение x тела во времени t. Из физики мы знаем, что все тела у поверхности Земли падают с одним и тем же ускорением g, а ускорение — это вторая производная от координаты по времени. При сделанном нами выборе системы координат ускорение свободного падения g направлено в сторону, противоположную направлению оси x, поэтому для решения поставленной задачи необходимо решить следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$x''(t) = -g$$

с начальными условиями $x(0) = h$, $x'(0) = 0$, при условии, что в момент времени $t = 0$ тело покоилось и находилось на высоте h. Первый интеграл этого уравнения дает

$$x'(t) = \int (-g)\, dt = -gt + C_1 ,$$

второй интеграл —

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 .$$

Таким образом, получено общее решение уравнения. Исходя из физических соображений можно сказать, что константа C_1 представляет собой начальную скорость v_0 нашего тела, а константа C_2 — начальное положение x_0. Поэтому общее решение уравнения можно записать в виде

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} \,,$$

где все величины приобретают ясный физический смысл. В нашем случае $v_0 = 0$, а $x_0 = h$, поэтому частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$x(t) = h - \frac{gt^2}{2} \,.$$

Наряду с задачей Коши часто приходится решать задачи, в которых значение искомой функции задается в двух точках, ограничивающих отрезок, на котором требуется определить решение. Такие задачи называются *краевыми* или *граничными* задачами.

1.2. Геометрическое толкование дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$

Введем на плоскости декартову систему координат. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения $y' = f(x, y)$. Соответствующая этому решению кривая на плоскости называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения. (Говоря шире, интегральной кривой системы дифференциальных уравнений называется график решения этой системы.) Рассматриваемое уравнение каждой паре значений (x, y), то есть точке плоскости, ставит определённое значение производной y'. Поскольку y' — тангенс угла наклона касательной в каждой точке интегральной кривой, то уравнение $y' = f(x, y)$ определяет в каждой точке некоторое направление. *Вся совокупность таких направлений* определяет *поле направлений*, изображаемых на рисунке 1 стрелками. Задача теории дифференциальных уравнений может быть сформулирована таким образом: найти такие кривые, чтобы их касательные в каждой точке кривой имели направления, совпадающие с полем направлений в этой точке.

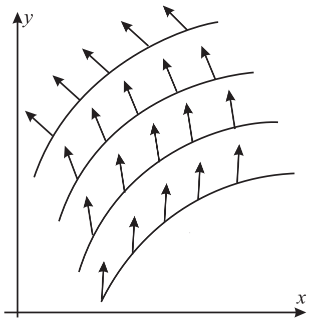

Рис. 1.

Можно найти геометрическое место точек, в которых касательные к интегральным кривым имеют одно и то же направление. Такие геометрические места точек (см. рис.1) называются *изоклинами.*

Будем говорить, что дифференциальное уравнение разрешимо *явно,* если его решение выражено через элементарные функции. Будем также говорить, что решение дифференциального уравнения находится в квадратурах, если оно выражено через квадратуры от явно заданных функций. Такие решения называются *решениями в квадратурах.*

1.3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_m(x)$ – набор из m неизвестных действительных функций одной действительной переменной x.

Определение 4. *Системой обыкновенных дифференциальных уравнений* называется система уравнений вида

$$
\begin{cases}
F_1(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_m, y_m', y_m'', \ldots, y_m^{(n_m)}) = 0, \\
F_2(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_m, y_m', y_m'', \ldots, y_m^{(n_m)}) = 0, \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
F_l(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_m, y_m', y_m'', \ldots, y_m^{(n_m)}) = 0,
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

где $F_i \quad (i = 1, \ldots, l)$ — функции многих переменных от указанных аргументов.

Определение 5. Наивысший порядок производной, входящей в уравнения системы (1.5), называется *порядком* системы дифференциальных уравнений.

Очевидно, что порядок системы (1.5) — это наибольшее из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$.

Определение 6. Набор функций $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$, превращающий все уравнения системы (1.5) в тождество, называется *частным решением* этой системы дифференциальных уравнений.

Как и в пункте 1.1., *общим решением называется решение, содержащее в себе все без исключения частные решения.*

1.4. Дифференциальные уравнения в частных производных

До сих пор мы рассматривали в этой лекции только *обыкновенные* дифференциальные уравнения, неизвестные функции в которых были функциями одной переменной. Однако во многих практических задачах таких функций оказывается недостаточно для описания изучаемых процессов, и необходимо рассматривать функции многих переменных. Обобщение понятия дифференциального уравнения на случай, когда неизвестная функция зависит от многих переменных, приводит к понятию *дифференциального уравнения в частных производных.*

Пусть $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — искомая функция, зависящая от нескольких независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n \quad (n > 1)$.

Определение 7. Выражение вида

$$\Phi\left(x_1, x_2, ..., x_n, u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0 \tag{1.6}$$

называется *дифференциальным уравнением в частных производных* m*-го порядка* относительно неизвестной функции от n переменных $u(x) \overset{def}{=} u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Как и в обыкновенных дифференциальных уравнениях, порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

Дифференциальные уравнения в частных производных являются обобщением обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку обыкновенные уравнения можно формально рассматривать как частный случай уравнения (1.6) при $n = 1$. Так же как и в случае обыкновенных уравнений, решить уравнение (1.6) — это значит найти такую функцию $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, которая при подстановке ее в уравнение обращает это уравнение в тождество.

Определение 8. Функция $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, обращающая дифференциальное уравнение в частных производных в тождество, называется *частным решением* этого дифференциального уравнения.

Как и в случае обыкновенных уравнений, уравнение в частных производных имеет бесконечно много частных решений. Однако общее решение такого уравнения оказывается сложнее. В качестве примера рассмотрим уравнение в частных производных вида

$$F(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}) = 0\ . \tag{1.7}$$

В уравнение входит только производная $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$. При постоянном значении переменной x_2 уравнение (1.7) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с неизвестной функцией u и независимой переменной x_1. Параметр x_2 изменяет вид этого уравнения. Пусть общим решением уравнения (1.7), рассматриваемого как обыкновенное дифференциальное уравнение, является функция

$$u = \Phi(x_1, x_2, C)\ , \tag{1.8}$$

которая содержит произвольную постоянную C и параметр x_2. Однако, для того чтобы выражение (1.8) было решением уравнения (1.7), необходимо и достаточно, чтобы C была постоянной только относительно переменной x_1. Следовательно, C может быть произвольной функцией от переменной x_2, то есть $C = f(x_2)$. Таким образом, общее решение уравнения (1.7) имеет вид

$$u = \Phi(x_1, x_2, f(x_2))\ ,$$

где $f(x_2)$ — произвольная функция указанной переменной. Итак, общее решение уравнения в частных производных первого порядка вида (1.7) содержит одну произвольную функцию. Естественно ожидать от более сложных уравнений в частных производных еще большего произвола в характере общих решений.

ЛЕКЦИЯ 2

В этой лекции мы рассмотрим некоторые простейшие интегрируемые типы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, то есть уравнения вида

$$F(x, y, y') = 0\,, \tag{2.1}$$

и дадим методы их решения.

В случае если уравнение (2.1) можно разрешить относительно производной, то тогда его можно представить в виде

$$y' = f(x, y)\,. \tag{2.2}$$

Это уравнение называется *уравнением, разрешенным относительно производной.* Если же уравнение (2.1) относительно производной разрешить не удается, то оно называется *уравнением, не разрешенным относительно производной.*

При решении дифференциальных уравнений производную неизвестной функции удобно представлять в виде отношения дифференциалов: $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,.$$

Иногда это уравнение бывает удобно представлять в виде

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0\,, \tag{2.3}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — некоторые функции двух переменных. В это уравнение обе переменные входят равноправным образом. Уравнение (2.3) не связывает нас выбором неизвестной функции, то есть мы можем искать решение или в виде функции $y = y(x)$, или в виде $x = x(y)$.

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым и легко решаемым уравнением среди всех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка является уравнение с разделяющимися переменными. *Уравнение с разделяющимися переменными* — это дифференциальное уравнение первого порядка, которое может быть записано в виде

$$y' = g(x)\, h(y)\ . \tag{2.4}$$

Представляя производную как отношение дифференциалов, уравнение (2.4), если $h(y) \neq 0$, можно переписать в виде

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\, dx$$

или

$$f(y)\, dy = g(x)\, dx\ ,$$

где $f(y) = \dfrac{1}{h(y)}$. Таким образом, мы разделили переменные: в правую часть уравнения вошла только функция от переменной y и дифференциал от y, а в левую — функция от x и дифференциал от x. Получившееся выражение является равенством дифференциалов некоторых двух функций, одна из которых функция только переменной x, а другая только переменной y, то есть

$$dF(y) = f(y)\, dy\ , \quad dG(x) = g(x)\, dx\ ,$$

и наше уравнение принимает вид

$$dF(y) = dG(x)\ .$$

Интегрируя обе части этого уравнения, находим общий интеграл уравнения (2.4):

$$F(y) = G(x) + C\ ,$$

где C — произвольная постоянная, а

$$F(y) = \int f(y)\,dy\ ,\ G(x) = \int g(x)\,dx\ .$$

В общем случае уравнение с разделяющимися переменными — это уравнение вида

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx + N_1(x)\,N_2(y)\,dy = 0\ .$$

Разделяя в нем переменные и предполагая, что $M_2 \cdot N_1 \neq 0$, получим

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = -\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx\ .$$

Общий интеграл этого уравнения будет иметь вид

$$\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = -\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + C\ .$$

2.2. Однородные уравнения

Следующий тип легко интегрируемых обыкновенных дифференциальных уравнений — это однородные уравнения. *Однородным уравнением* называется уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\ . \tag{2.5}$$

Если же дифференциальное уравнение задано в виде (2.3), то есть в виде

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0\ ,$$

то оно называется однородным, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одной и той же степени.

Определение. Функция $M(x,\ y)$ называется *однородной функцией степени* n, если для любого k выполняется соотношение $M(kx, ky) = k^n M(x, y)$.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными при замене неизвестной функции. Введем неизвестную функцию $u = u(x)$, связанную с введенной ранее функцией соотношением $y = x \cdot u$. Отсюда $y' = u + x \cdot u'$, и уравнение (2.5) приводится к виду

$$u + x \cdot u' = f(u) .$$

Это дифференциальное уравнение для новой функции. Оно является уравнением с разделяющимися переменными, поскольку при $f(u) - u \neq 0$, $x \neq 0$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} .$$

Интегрируя обе части последнего соотношения, можно получить общее решение в виде

$$x = C \exp\left(\int \frac{du}{f(u) - u} \right) .$$

Обозначим

$$\varphi(u) = \exp\left(\int \frac{du}{f(u) - u} \right) ,$$

тогда, возвращаясь к старой функции, можно записать общее решение уравнения (2.5) в виде

$$x = C\varphi\left(\frac{y}{x}\right) .$$

Следует отметить, что кроме этого общего решения, уравнение (2.5) может иметь также решение вида

$$y = u_0 x ,$$

где u_0 — константа, являющаяся корнем уравнения $f(u) = u$.

2.3. Линейное уравнение первого порядка

Уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной,

$$p(x)\, y' + q(x)\, y + r(x) = 0\ ,$$

называется *линейным уравнением первого порядка.* Здесь функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ — заданные функции переменной x. Если $p(x) \neq 0$, то уравнение легко привести к виду

$$y' + a(x)\, y = b(x). \tag{2.6}$$

В случае, когда $r(x) = 0$ или $b(x) = 0$, линейное уравнение называется *однородным*, в противном случае, то есть когда $r(x) \neq 0$ или $b(x) \neq 0$, оно называется *неоднородным.*

Легко видеть, что линейное однородное уравнение

$$y' + a(x)\, y = 0$$

является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные

$$\frac{dy}{y} = -a(x)\, dx$$

и интегрируя обе части этого уравнения, получаем общее решение линейного однородного уравнения

$$y = C \exp\left(-\int a(x)\, dx\right)\ . \tag{2.7}$$

Общее решение неоднородного линейного уравнения (2.6) можно найти из общего решения соответствующего ему линейного однородного уравнения *методом вариации постоянной.* Суть этого метода состоит в следующем.

Пусть дано уравнение вида (2.6). Однородное уравнение называется *соответствующим* данному неоднородному, если оно получается из неоднородного приравниванием к нулю правой части уравнения (2.6).

Пусть решение однородного уравнения имеет вид (2.7), тогда решение уравнения (2.6) будем искать в виде

$$y = C(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right)\ , \tag{2.8}$$

где $C(x)$ — неизвестная функция. Подставляя (2.8) в уравнение (2.6), получим

$$C'(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) - C(x)\,a(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) +$$
$$+\,C(x)\,a(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) = b(x)\ ,$$

что приводит к дифференциальному уравнению для функции $C(x)$:

$$C'(x) = b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)\ .$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, и его общее решение имеет вид

$$C(x) = \int b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)\,dx + C\ ,$$

где C в правой части — обычная произвольная константа неопределенного интегрирования. Следовательно, общее решение линейного неоднородного уравнения можно записать в виде

$$y = \left[\int b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)\,dx + C\right]\exp\left(-\int a(x)\,dx\right)\ . \tag{2.9}$$

Следует отметить, что второе слагаемое этого решения является общим решением линейного однородного уравнения, соответствующего линейному неоднородному, а первое слагаемое является частным решением линейного неоднородного уравнения.

На практике нет необходимости пользоваться общими формулами (2.7) и (2.9) для нахождения общих решений линейных уравнений. Линейное однородное уравнение можно проинтегрировать непосредственно, разделяя переменные, а линейное неоднородное уравнение можно решить описанным здесь методом вариации постоянной.

2.4. Уравнение Бернулли

К линейным уравнениям приводятся некоторые другие типы дифференциальных уравнений. Одним из таких уравнений является *уравнение Бернулли*, которое имеет вид

$$y' + a(x)\, y = b(x)\, y^n\,, \tag{2.10}$$

где $n = const$. Очевидно, что при $n = 0$ мы получим неоднородное линейное уравнение, а при $n = 1$ уравнение Бернулли является линейным однородным уравнением. Поэтому в дальнейшем полагаем $n \neq 0$, $n \neq 1$.

В общем случае уравнение Бернулли сводится к линейному неоднородному уравнению заменой неизвестной функции

$$u = y^{1-n}\,.$$

Произведя соответствующую замену в уравнении (2.10), получим для новой функции u линейное неоднородное уравнение вида

$$u' + (1-n)\, a(x)\, u = (1-n)\, b(x)\,.$$

Найдя его общее решение и произведя обратную замену, получим общее решение уравнения Бернулли.

2.5. Уравнение Риккати

Уравнение Риккати не относится к линейным уравнениям:

$$y'(x) + a(x)y + b(x)y^2 = c(x). \tag{2.11}$$

В общем виде оно не интегрируется в квадратурах, но заменой переменных может быть преобразовано в уравнение Бернулли, если известно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения. Действительно, полагая $y(x) = y_1(x) + z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция, получим

$$y_1'(x) + z'(x) + a(x)\left[y_1(x) + z(x)\right] + b(x)\left[y_1(x) + z(x)\right]^2 = c(x).$$

Поскольку $y_1'(x) + a(x)y_1 + b(x)y_1^2 \equiv c(x)$, раскрывая скобки, получим относительно $z(x)$ уравнение Бернулли:

$$z' + (a(x) + 2b(x)y_1(x))\,z + b(x)z^2 = 0.$$

2.6. Уравнения в полных дифференциалах

Мы уже записывали дифференциальное уравнение первого порядка в виде

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0\,, \tag{2.12}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — некоторые функции двух переменных.

В том случае, когда выражение в правой части уравнения (2.12) является полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, уравнение (2.12) называется *уравнением* *в полных дифференциалах.* Тогда его можно переписать в виде

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = dU = 0,$$

и общий интеграл такого уравнения легко находится:

$$U(x,y) = C\ .$$

Теорема. Для того чтобы уравнение (2.12) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы производные $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ были непрерывны и удовлетворяли условию

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\ . \tag{2.13}$$

Доказательство. Необходимость. Дано, что наше уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то есть выполнено

$$M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x},\quad N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{2.14}$$

Тогда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y};\quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}.$$

Поскольку производные M'_y и N'_x непрерывны, вторые производные равны между собой. Вследствие равенства вторых производных условие (2.13) выполнено.

Достаточность. Пусть условие (2.13) выполнено. Найдем такую функцию $U(x,y)$, что $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = dU$. Для этого первое из равенств (2.14) проинтегрируем по x :

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y),$$

а получившееся выражение продифференцируем по y:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'_y = N(x,y).$$

Заменяя, вследствие (2.13), производную под знаком интеграла, получим

$$N(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'_y = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'_y,$$

откуда $\varphi'_y = N(x_0, y)$. Интегрируя это выражение, найдем

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y) dy.$$

Следовательно,

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y) dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y) dy.$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы показали, что если условие (2.13) выполнено, то общее решение уравнения (2.12) имеет вид

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y) dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y) dy = C. \tag{2.15}$$

Далеко не всегда уравнение (2.12) является уравнением в полных дифференциалах. Однако в некоторых случаях удается отыскать такую функцию $\mu(x,y)$, при умножении на которую обеих частей уравнения (2.12) оно становится уравнением в полных дифференциалах. Такая функция $\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем.* Если $\mu(x,y)$ — интегрирующий множитель уравнения (2.12), то

$$\mu(x,y)(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy) = dU = 0$$

и

$$\mu\, M = \frac{\partial U}{\partial x}\,,\ \mu\, N = \frac{\partial U}{\partial y}\,.$$

В общем случае задача отыскания интегрирующего множителя не является простой задачей. Действительно, из определения интегрирующего множителя и условия (2.13) имеем

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\,,$$

откуда

$$N\,\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\,\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu\,,$$

или, разделив обе части этого уравнения на μ, получим

$$N\,\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - M\,\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\,. \tag{2.16}$$

Отсюда следует, что для определения интегрирующего множителя $\mu(x, y)$ надо решить дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных. Эта задача в общем случае еще более сложная, чем решение исходного уравнения (2.12). Однако в некоторых случаях интегрирующий множитель удается отыскать при некоторых упрощающих предположениях.

Рассмотрим, например, случай, когда существует интегрирующий множитель, являющийся функцией только переменной x. Тогда уравнение (2.16) примет вид

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}\,.$$

Для существования интегрирующего множителя необходимо, чтобы правая часть этого уравнения была функцией, не зависящей от переменной y. Тогда интегрирующий множитель находится непосредственным интегрированием.

Пример. Решить уравнение

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0\,.$$

Решение. Замечая, что

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1\,,$$

находим интегрирующий множитель из уравнения

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = 1\,,$$

который, очевидно, равен

$$\mu = e^x\,.$$

Уравнение

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x\left(x^2 + y^2\right)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Интегрируя его, находим общее решение:

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^3}{3}\right) = C\,.$$

В заключение отметим, что метод разделения переменных для уравнения с разделяющимися переменными

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx + N_1(x)\,N_2(y)\,dy = 0$$

фактически сводится к умножению этого уравнения на интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{M_2(y)\,N_1(x)}\,.$$

ЛЕКЦИЯ 3

3.1. Теорема Коши существования и единственности решения уравнения $y' = f(x,y)$

Нахождение решений дифференциальных уравнений иногда оказывается весьма сложной задачей. Мы уже видели разнообразие методов решения даже простейших дифференциальных уравнений. Закономерен вопрос: если мы применим другой метод, решим наше дифференциальное уравнение другим способом, не найдем ли мы другое решение, совсем не похожее на уже найденное? Тогда возникнет следующий вопрос: а какое решение "правильное"? Какое из них адекватно описывает исследуемый нами физический процесс?

Ответ на эти вопросы дает теорема Коши. Из этой теоремы следует, что если уравнение удовлетворяет определенным условиям, то как бы мы ни решали это уравнение, найденное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, единственно и никакого другого решения не существует. Иначе говоря, через данную точку проходит только одна интегральная кривая.

Теорема Коши:

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ *функция* $f(x, y)$

1) непрерывна в прямоугольнике

$$D: \begin{cases} x_0 - a \le x \le x_0 + a \\ y_0 - b \le y \le y_0 + b \end{cases},$$

2) удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N\,|y_1 - y_2|,$$

где $N = const$, *то существует единственное решение* $y = y(x)$, $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, *этого уравнения, удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$, *где* $h < \min[\ a,\ b/M,\ 1/N\ ]$, $M = \max f(x, y)$ *в* D.

Прежде чем доказать теорему, введем несколько новых для нас понятий и докажем вспомогательную теорему.

Определение 1. Пространство V называется *метрическим,* если в нем определена функция $\rho(y, z)$ пар точек этого пространства, удовлетворяющая для любых двух точек y и z пространства V следующим условиям: 1) $\rho(y, z) \geq 0$, причем $\rho(y, y) = 0$ и из $\rho(y, z) = 0$ следует $y = z$; 2) $\rho(y, z) = \rho(z, y)$; 3) $\rho(y, z) \leq \rho(y, u) + \rho(u, z)$ – правило треугольника. Функция $\rho(y, z)$ называется *расстоянием между точками y и z* в пространстве V.

Определение 2. Последовательность точек $y_1, y_2, y_3, ...$ в пространстве V называется *фундаментальной,* если для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти $N(\varepsilon)$ такое, что $\rho(y_n, y_{n+m}) < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$ и любом $m > 0$.

Определение 3. Метрическое пространство V называется *полным,* если в нем сходится каждая фундаментальная последовательность его точек.

Определение 4. Оператор A называется *сжимающим оператором* если он удовлетворяет условиям:

1) оператор A переводит точки пространства V в точки того же пространства V : если $y \in V$ то $A(y) \in V$,

2) оператор A сближает точки: если y и z – любые точки пространства V, а $\rho(y, z)$ – расстояние между этими точками, то $\rho(\ A(y),\ A(z)\ ) = \alpha\, \rho(y, z),\ \alpha < 1$.

3.2. Принцип сжатых отображений

Теорема. *Если в полном метрическом пространстве V задан сжимающий оператор A, то существует единственная неподвижная точка $\bar{y}$, такая, что $A(\bar{y}) = \bar{y}$, пространства V и эта точка может быть найдена методом последовательных приближений, т.е. $\bar{y} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, где $y_n = A(y_{n-1})$, $n =$*

$1, 2, 3, ...,$ *причем точка* y_0 *выбирается в пространстве* V *произвольно.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек $\{y_n\}$, $y_n = A(y_{n-1})$.

A. Докажем, что эта последовательность фундаментальна, т.е. $\rho(y_n, y_{n+m}) < \varepsilon$, если $n > N(\varepsilon)$. Оценим расстояние между соседними членами этой последовательности. Пусть $\rho(y_0, y_1)$ — расстояние между первыми двумя точками. Поскольку оператор A — сжимающий , то

$$\rho(y_1, y_2) = \rho\left(A(y_0), A(y_1)\right) = \alpha\rho(y_0, y_1),$$

$$\rho(y_2, y_3) = \rho\left(A(y_1), A(y_2)\right) = \alpha\rho(y_1, y_2) = \alpha^2\rho(y_0, y_1),$$

$$\rho(y_3, y_4) = \rho\left(A(y_2), A(y_3)\right) = ... = \alpha^3\rho(y_0, y_1).$$

Рассуждая аналогично, нетрудно показать, что

$$\rho(y_{n+m-1}, y_{n+m}) = \alpha^{n+m-1}\rho(y_0, y_1).$$

Применим $(m-1)$ раз неравенство треугольника к $\rho(y_n, y_{n+m})$: $\rho(y_n, y_{n+m}) \leq \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, y_{n+2}) + ... + \rho(y_{n+m-1}, y_{n+m}) =$ $= \alpha^n\rho(y_0, y_1) + \alpha^{n+1}\rho(y_0, y_1) + ... + \alpha^{n+m-1}\rho(y_0, y_1) = \alpha^n\rho(y_o, y_1)(1+$ $+\alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{m-1}) < \alpha^n\rho(y_0, y_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{m-1} + ...) =$ $= \rho(y_0, y_1)\,\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} < \varepsilon$ при достаточно большом n. Следовательно, последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна, а в силу полноты пространства V, сходится к некоторому элементу $\bar{y} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ пространства V.

B. Покажем теперь, что точка $\bar{y}$ является неподвижной. Пусть $A(\bar{y}) = \bar{\bar{y}}$. Применяя дважды правило треугольника, получим $\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) \leq \rho(\bar{y}, y_n) + \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}})$.

1) Для $\forall\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться $\rho(\bar{y}, y_n) < \varepsilon/3$, так как $\bar{y} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

2) $\rho(y_n, y_{n+1}) < \varepsilon/3$, т.к. последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна.

3) $\rho(y_{n+1}, \overline{\overline{y}}) = \rho\left(A(y_n), A(\bar{y})\right) < \alpha\rho(y_n, \bar{y}) < \varepsilon/3$.

Отсюда следует, что $\rho(\bar{y}, \overline{\overline{y}}) < \varepsilon$. В левой части этого неравенства — расстояние между двумя фиксированными точками $\bar{y}$ и $\overline{\overline{y}}$, а в правой части — любое выбираемое произвольно и сколь угодно малое число. Такое неравенство может быть выполнено лишь в одном случае: если $\rho(\bar{y}, \overline{\overline{y}}) = 0$, т.е. $\bar{y} = \overline{\overline{y}}$, $\quad A(\bar{y}) = \bar{y}$.

C. Покажем, что точка $\bar{y}$ единственная, то есть у сжимающего оператора существует единственная неподвижная точка. Предположим, что существует еще одна неподвижная точка $\bar{z}:\ A(\bar{z}) = \bar{z}$. Вычислим расстояние между этими двумя точками. $\rho(\bar{y}, \bar{z}) = \rho\left(A(\bar{y}), A(\bar{z})\right) = \alpha\rho(\bar{y}, \bar{z}) < \rho(\bar{y}, \bar{z})$. Получили, что $\rho(\bar{y}, \bar{z}) < \rho(\bar{y}, \bar{z})$. Противоречия можно избежать, только если исходно положить $\rho(\bar{y}, \bar{z}) = 0$, и, следовательно, $\bar{y} = \bar{z}$.

Принцип сжатых отображений доказан. Используем его для доказательства теоремы Коши.

3.3. Доказательство теоремы Коши

Рассмотрим полное метрическое пространство, точками которого являются всевозможные непрерывные функции $y(x)$, определенные на отрезке $[\ x_0 - h, \quad x_0 + h\ ]$, графики которых лежат в прямоугольнике D, (рис. 2), а расстояние между функциями определим равенством

$$\rho(y, z) = \max\left|y - z\right|. \tag{3.1}$$

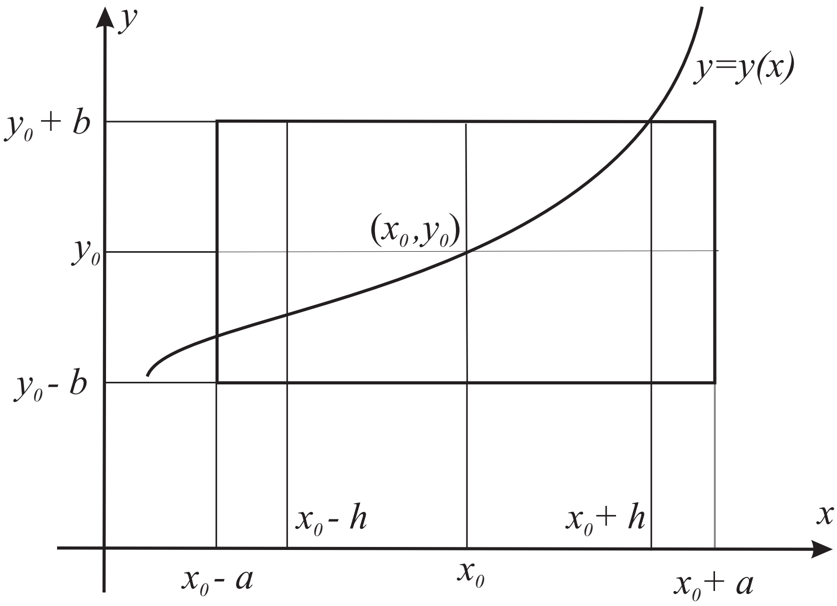

Рис. 2.

Заметим, что дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y_0 = y(x_0)$ эквивалентно интегральному уравнению

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)dt. \tag{3.2}$$

Рассмотрим оператор

$$A(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)dt. \tag{3.3}$$

Потребуем, чтобы этот оператор каждой непрерывной функции $y(x)$, заданной на отрезке $[\ x_0 - h, \quad x_0 + h\ ]$ и не выходящей из прямоугольника D, ставил в соответствие непрерывную функцию $A(y)$, заданную на том же отрезке и график которой также не выходил бы из области D. Иначе говоря, потребуем, что если $|y - y_0| < b$ при $x \in [\ x_0 - h, \quad x_0 + h\ ]$, то и $|A(y) - y_0| < b$ при тех же значениях x. Из последнего неравенства следует $\left| \int_{x_0}^{x} f(t, y)dt \right| \leq Mh \leq b$. При выполнении этого неравенства оператор $A(y)$ удовлетворяет условию

1) принципа сжатых отображений: оператор $A(y)$ переводит точки пространства в точки того же пространства.

Потребуем, чтобы оператор $A(y)$ был сжимающим, то есть потребуем выполнения условия $\rho\left(A(y), A(z)\right) = \alpha\ \rho(y,z);\ \alpha < 1$.

$$\rho\left(A(y), A(z)\right) = \max\left|A(y) - A(z)\right| =$$

$$= \max\left|\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,y)dt\right) - \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,z)dt\right)\right| =$$

$$= \max\left|\int\limits_{x_0}^{x}\left[f(t,y) - f(t,z)\right]dt\right| \le \max\left|\int\limits_{x_0}^{x}\left|f(t,y) - f(t,z)\right|dt\right|.$$

Воспользуемся условием Липшица $\left|f(x,y) - f(x,z)\right| \le N\left|y - z\right|$.

Получим $\rho\left(A(y), A(z)\right) \le N \cdot \max\left|\int\limits_{x_0}^{x}\left|y - z\right|dt\right| \le$

$\le N \cdot \max\left|y - z\right| \cdot \max\left|\int\limits_{x_0}^{x} dt\right| = N \cdot \max\left|y - z\right| \cdot h = Nh\rho(y,z)$.

Далее подберём h так, что $Nh = \alpha < 1$. Тогда получим, что оператор $A(y)$ удовлетворяет условию 2) определения, то есть оператор $A(y)$ — сжимающий.

Согласно принципу сжатых отображений, существует единственная неподвижная точка оператора $A(y)$, то есть существует единственное решение интегрального уравнения (3.2), а значит, и исходного дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, которое может быть найдено методом последовательных приближений, то есть $\bar{y}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$, где $y_n = A(y_{n-1})$, причем начальная функция $y_0(x)$ выбирается произвольно.

Таким образом, нами доказаны существование и единственность решения уравнения $y' = f(x, y)$ на интервале $J = [\ x_0 - h, \quad x_0 + h\ ]$. Если при этом мы не вышли из прямоугольника D, где выполняются условия теоремы Коши, то решение может быть продолжено. В самом деле, пусть $x_0^{(1)} = x_0 + h, y_0^{(1)} = y(x_0^{(1)})$ - новые начальные данные (точка $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})$ на интегральной кривой — см. рис. 3.) По доказанной теореме Коши, в за-

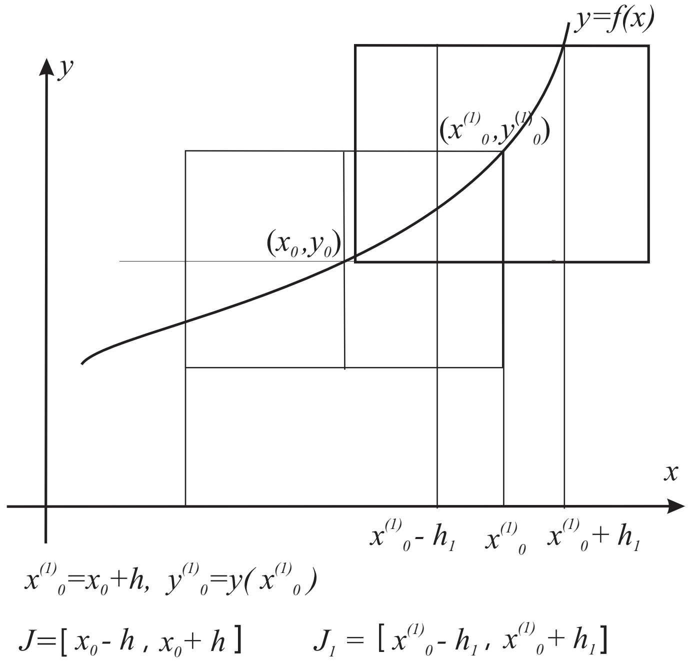

Рис. 3.

мкнутом интервале $J_1 : [\ x_0^{(1)} - h_1 \leq x \leq x_0^{(1)} + h_1\ ]$, если он не выходит за пределы прямоугольника D, существует единственное решение. Поскольку середина J_1 совпадает с концом J и оба построенных решения принимают в этой точке одно и то же значение $y_0^{(1)}$, то, в силу единственности, оба решения совпадают в общей части J и J_1. Но половина интервала $[\ x_0^{(1)}, x_0^{(1)} + h_1\ ]$ лежит вне J. Поэтому найденное решение $y_1(x)$ назовём "продолжением"полученного ранее решения $y(x)$ в J. Этот процесс можно продолжить и для левой половины интервала, где $x < x_0$. Можно доказать, что с помощью таких продолжений можно подойти сколь угодно близко к границе области D.

Теорема Коши доказывает существование частного решения, определенного начальными данными. Из этой теоремы легко получить построение общего решения в некоторой ограниченной области. Рассмотрим прямоугольник D.

$$D: \begin{cases} x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b. \end{cases}$$

Зафиксируем x_0, начальное условие $y_0 = \bar{y}_0$ будем считать вещественным параметром, меняющимся в интервале $\bar{y}_0 \in [\ y_0 - \frac{b}{2},\ y_0 + \frac{b}{2,}\ ]$. Тогда при любом выборе $\bar{y}_0$ переменная не выйдет из D, если $\bar{y}_0 - \frac{b}{2} \leq y \leq \bar{y}_0 + \frac{b}{2}$. Поэтому для всех начальных значений $(x_0, \bar{y}_0)$ решение дифференциального уравнения будет существовать при $x \in (x_0 - \bar{h},\ x_0 + \bar{h})$, где $\bar{h} = \min(a, \frac{b}{2M})$. Тем самым мы получим семейство решений $y(x) = \varphi(x, c)$, где $c = y_0$, непрерывно (это можно показать) зависящее от параметра c.

Замечание 1. Если функция $f(x, y)$ имеет *непрерывную* в D производную $f'_y(x, y)$, то *условие Липшица удовлетворено автоматически*:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|f'_y(x, y_1 + \theta(y_1 - y_2)\right| |y_1 - y_2| \leq N\,|y_1 - y_2|\,,$$

где $N = \max\left|f'_y(x, y)\right|$ в области D. В замкнутой области, вследствие непрерывности производной, этот максимум всегда существует.

Замечание 2. Пусть D — некоторая область на плоскости (x, y), где для функции $f(x, y)$ выполнены условия теоремы Коши. Тогда можно доказать, что через каждую точку этой области проходит *одна и только одна интегральная кривая* уравнения $y' = f(x, y)$.

Теорема (о непрерывной зависимости решения от параметра и от начальных условий). *Если правая часть дифференциального уравнения*

$$y' = f(x, y, \mu)$$

непрерывна по μ *при* $\mu_0 \le \mu \le \mu_1$ *и удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения, причём постоянная Липшица* N *не зависит от* μ, *то решение уравнения* $y(x,\mu)$, *удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$, *непрерывно зависит от параметра* μ.

Эту теорему мы доказывать не будем.

ЛЕКЦИЯ 4

4.1. Теорема Коши существования и единственности решения системы уравнений

На прошлой лекции мы доказали теорему Коши существования и единственности решения уравнений вида $y' = f(x,y)$.

Совершенно аналогично можно доказать теорему существования и единственности решения для системы уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n), \quad y_i(x_0) = y_{i0}, \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{4.1}$$

Перепишем систему дифференциальных уравнений в виде системы интегральных уравнений

$$y_i = y_{i0} + \int\limits_{x_0}^{x} f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n)dt, \tag{4.2}$$

в предположении, что в области D, определенной неравенствами

$$D: \begin{cases} x_0 - a \le x \le x_0 + a, \\ y_{i0} - b_i \le y_i \le y_{i0} + b_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

правые части удовлетворяют условиям:

1) все функции $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ непрерывны, а следовательно, ограничены: $|f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)| \le M$,

2) все функции $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ удовлетворяют условию Липшица

$$|f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) - f_i(x, z_1, z_2, ..., z_n)| \le N \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|. \quad (4.3)$$

Точкой полного метрического пространства V, в котором будет действовать сжимающий оператор A (см. пункт (3.1) лекции 3), будет теперь система n непрерывных функций $(y_1, y_2, ..., y_n)$, то есть n-мерная вектор-функция $Y(x)$ с координатами $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, определённая на отрезке $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, где $h < \min\left[\, a, \ \frac{b_1}{M}, \ \frac{b_2}{M}, \ \dots, \frac{b_n}{M}, \ \frac{1}{nN}\,\right]$, точнее постоянная h будет определена ниже.

Расстояние в пространстве интересующих нас n-мерных вектор-функций $Y(x)$ определим равенством

$$\rho\,(Y(x), Z(x)) = \sum_{i=1}^{n} \max |y_i - z_i|, \quad (4.4)$$

где $z_1(x)$, $z_2(x)$, ..., $z_n(x)$ - координаты вектор-функции $Z(x)$.

Нетрудно проверить, что при таком определении расстояния, множество n-мерных вектор-функций $Y(x)$ превращается в полное метрическое пространство. Сжимающий оператор A определим равенством (в виде набора n интегралов):

$A[\, Y\,] = (y_{10} + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n)\, dt, \ y_{20} + \int\limits_{x_0}^{x} f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n)\, dt,$

$\dots, y_{n0} + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n)\, dt)$, то есть при действии оператора A на точку $(y_1, y_2, ..., y_n)$ получим точку того же пространства с координатами, равными правым частям системы (4.2). Точка $A[\ Y\ ]$ принадлежит пространству непрерывных функций, так как все ее координаты являются непрерывными функциями. Однако необходимо, чтобы ее координаты не выходили из области D, если координаты вектор-функции $Y(x)$ не выходят из области D. Это условие будет выполнено, если $\mid y_i - y_{i0} \mid \leq b_i$ то есть будет выполнено $\left| y_{i0} + \int\limits_{x_0}^{x} f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n)dt - y_{i0} \right| =$

$= \left| \int\limits_{x_0}^{x} f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n)dt \right| \leq M \left| \int\limits_{x_0}^{x} dt \right| \leq Mh \leq b_i.$ Это условие, в свою очередь, будет выполнено, если $h \leq \dfrac{b_i}{M}$.

Остается проверить выполнение условия 2) принципа сжатых отображений, а именно, оператор $A[\ Y\ ]$ сближает точки, то есть $\rho(A[Y], A[Z]) =$

$= \sum\limits_{i=i}^{n} \max \left| \int\limits_{x_0}^{x} [f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n) - f_i(t, z_1, z_2, ..., z_n)]dt \right| \leq$

$\leq \sum\limits_{i=1}^{n} \max \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n) - f_i(t, z_1, z_2, ..., z_n) \mid dt \right| \leq$

$\leq N \sum\limits_{i=1}^{n} \max |y_i - z_i| \cdot n \cdot \max \left| \int\limits_{x_0}^{x} dt \right| = N\rho(Y, Z)nh.$ Следовательно, если выбрать $Nnh = \alpha < 1$ или $h = \dfrac{\alpha}{Nn}$, где $\alpha < 1$, то условие 2) определения сжимающего оператора будет удовлетворено и будет существовать единственная неподвижная точка $\bar{Y}$, причем ее можно найти методом последовательных приближений. Но условие $\bar{Y} = A(\bar{Y})$ по определению оператора A эквивалентно тождествам

$$\bar{y}_i \equiv y_{i0} + \int\limits_{x_0}^{x} f_i(t, \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n)dt, \qquad (i = 1, 2, ...n),$$

где $\bar{y}_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$ — координаты вектор-функции $\bar{Y}$, то есть $\bar{Y}$ является единственным решением системы (4.2). Тем самым мы доказали теорему существования и единственности решения для системы дифференциальных уравнений (4.1).

Теорема. *Если в системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n), \quad y_i(x_0) = y_{i0}, \quad (i = 1, 2, ..., n))$$

1) все функции $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) \quad (i = 1, 2, ..., n)$ *непрерывны в области* D, *определенной неравенствами*

$$D: \begin{cases} x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \\ y_{i0} - b_i \leq y_i \leq y_{i0} + b_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

2) все функции $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) \quad (i = 1, 2, ..., n)$ *удовлетворяют условию Липшица*

$$|f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) - f_i(x, z_1, z_2, ..., z_n)| \leq N \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|,$$

где $N = const$, *то существует единственное решение* $y_i(x) \quad (i = 1, 2, ..., n)$ $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ *системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям* $y_i(x_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *где* $h < \min\left[\, a, \; {}^{b_i}\!/_{M}, \; {}^{1}\!/_{nN} \,\right]$, $M = \max |f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)|$ *в* D.

4.2. Особые точки, особые кривые, особые решения

Вернёмся к уравнениям $y' = f(x, y)$. Рассмотрим точки (x_0, y_0), в окрестности которых решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, не существует или, если и существует, то не единственно. Такие точки называются *особыми точками.*

Кривая, состоящая из особых точек, называется *особой.*

Если график некоторого решения сплошь состоит из особых точек, то решение называется *особым.*

Для нахождения особых точек или особых кривых необходимо, прежде всего, найти множество точек, в которых нарушены условия теоремы Коши существования и единственности решения, так как только среди них могут быть особые точки. Разумеется, не каждая точка, в которой нарушены условия существования и единственности решения, обязательно является особой, поскольку условия теоремы достаточны для существования и единственности решения, но они не являются необходимыми.

Первое условие теоремы Коши существования и единственности решения нарушается в точках разрыва функции $f(x, y)$, причем если при приближении по любому пути точки (x, y) к точке (x_0, y_0), то есть $(x, y) \to (x_0, y_0)$ (некоторой изолированной точке разрыва), функция $f(x, y) \to \infty$, то вместо уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ можно рассматривать уравнение $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x, y)}$, правая часть которого становится непрерывной в точке (x_0, y_0), если считать, что $\dfrac{1}{f(x, y)} \to 0$.

Следовательно, в задачах, где x и y равнозначны, первое условие теоремы Коши нарушается в тех точках, в которых функции $f(x, y)$ и $\dfrac{1}{f(x, y)}$ разрывны. Особенно часто приходится рассматривать уравнения вида $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, где функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны. В этом случае функ-

ции $\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ и $\dfrac{N(x,y)}{M(x,y)}$ будут одновременно разрывны лишь в точках (x_0, y_0), в которых $M(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) = 0$ и не существует пределов $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{N(x,y)}{M(x,y)}$.
Рассмотрим несколько типичных особых точек уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Пример 1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$, или, что то же $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{2y}$.

Правые части этих уравнений разрывны в точке $(x_0, y_0) = (0,0)$. Действительно, предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2y}{x}$ зависит от пути. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим путь $y = kx$, $\forall k$. Ясно, что когда $x \to 0$, то и $y \to 0$. Тогда $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2kx}{x} = 2k$. Поскольку здесь k — любое число, то и значение предела произвольно, т.е. предел функции зависит от пути стремления точки (x,y) к точке $(0,0)$, а это значит, что предел нашей функции в данной точке не существует. Интегрируя уравнение, получим $y = Cx^2$ - семейство квадратичных парабол, проходящих через точку $x = 0$, $y = 0$.

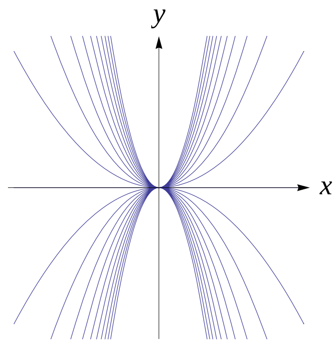

Рис. 4. **Узел**

Через эту точку, в которой нарушено первое условие теоремы Коши - непрерывность правой части уравнения - проходит бесконечно много интегральных кривых исследуемого уравнения. Решение в этой точке существует, но оно не единственно. Начало координат – особая точка уравнения, называемая *узлом.* Поведение интегральных кривых в окрестности этой особой точки изображено на рисунке 4.

Пример 2. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ или $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x}{y}$.

Правая часть этого уравнения терпит разрыв в точке $(0,0)$. Интегрируя его, получим $y = {}^{C}\!/_{x}$ — семейство гипербол. Начало координат $x = 0$, $y = 0$ является особой точкой уравнения, в ней также нарушено первое условие теоремы Коши — условие непрерывности правой части. Через эту точку не проходит ни одно решение нашего уравнения. Особая точка такого рода называется *седлом.* Поведение интегральных кривых в окрестности этой особой точки изображено на рисунке 5.

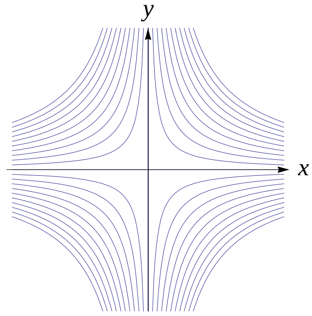

Рис. 5. **Седло**

Пример 3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$ или $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x-y}{x+y}$.

Правая часть этого уравнения терпит разрыв в точке $(0,0)$. Интегрируя это однородное уравнение, получим $\sqrt{x^2+y^2} = C \cdot e^{\operatorname{arctg} y/x}$, или, в полярных координатах, $\rho = C \cdot e^{\varphi}$ — однопараметрическое семейство логарифмических спиралей. Особая точка такого типа называется *фокусом.* Интегральные кривые в окрестности этой особой точки изображены на рисунке 6.

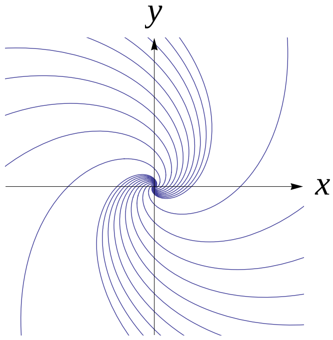

Рис. 6. **Фокус**

Пример 4. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ или $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{y}{x}$.

Как и выше, правая часть этого уравнения терпит разрыв в точке $(0,0)$. Интегрируя уравнение, получим $x^2 + y^2 = C^2$ —

семейство окружностей с центром в точке $(0, 0)$ – начале координат. В этом примере не существует решения, удовлетворяющего условию $y(0) = 0$. Особая точка такого типа, то есть особая точка, окрестность которой заполнена семейством замкнутых интегральных кривых (см. рис. 7), называется *центром.*

Можно показать, (мы этого делать не будем), что *только непрерывности правой части уравнения* $y' = f(x, y)$ *без выполнения второй части требования теоремы Коши — условия Липшица — недостаточно для единственности решения. Однако существование решения при этом уже обеспечивается.*

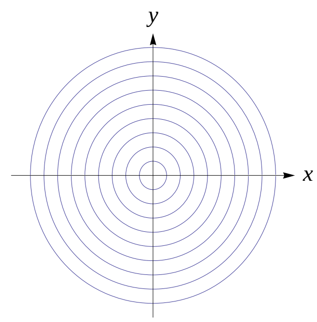

Рис. 7. **Центр**

Второе условие — условие Липшица, или более грубое условие, требующее существования ограниченной производной f'_y, чаще всего нарушается в точках, при приближении к которым эта производная неограниченно возрастает, т.е. точках, в которых $\dfrac{1}{f'_y} = 0$. Уравнение $\dfrac{1}{f'_y(x, y)} = 0$, вообще говоря, определяет некоторую кривую, в точках которой, как мы уже сказали выше, может быть нарушена единственность решения. *Если* в точках этой кривой единственность нарушена, то кривая называется *особой кривой*, а если, кроме того, эта кривая окажется ещё и интегральной, то мы получим *особую интегральную кривую.* Возможно, что кривая, описываемая уравнением $\dfrac{1}{f'_y(x, y)} = 0$, имеет несколько ветвей, тогда для каждой ветви необходимо решить вопрос о том, является ли она особой кривой, и если да, то является ли она особой интегральной кривой.

Рассмотрим следующий пример. Исследуем, имеет ли уравнение $\dfrac{dy}{dx} = (y-x)^{\frac{2}{3}} + a$, где $a = 5$ или $a = 1$, особое решение. Правая часть уравнения непрерывна, но частная производная $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{2}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}}$ неограниченно возрастает при приближении к прямой $y = x$. Если $a = 5$, то функция $y = x$ не удовлетворяет уравнению, и, следовательно, она не является особым решением этого уравнения. Если же $a = 1$, функция $y = x$ удовлетворяет уравнению и, следовательно, является решением. Осталось выяснить, нарушена ли единственность в точках этой прямой. Заменой переменных $z = y - x$ имеем $\dfrac{dz}{dx} = z^{\frac{2}{3}}$, откуда $y - x = \dfrac{(x-c)^3}{27}$.

Получили однопараметрическое семейство кубических парабол. Кривые этого семейства проходят через каждую точку графика решения $y = x$ (см. рис. 8) и, следовательно, в каждой точке этой прямой единственность решения нарушена. Поэтому функция $y = x$ является особым решением, а соответствующая ей прямая — *особой интегральной прямой.*

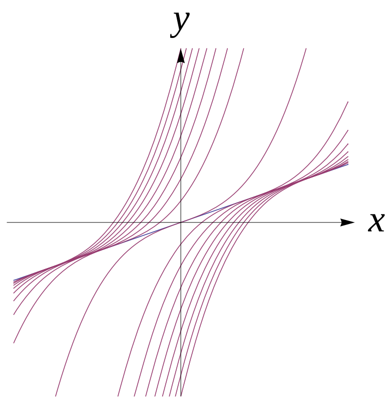

Рис. 8.

ЛЕКЦИЯ 5

5.1. Уравнения, не разрешённые относительно производной

Общий вид уравнения, не разрешённого относительно производной имеет вид: $F(x,y,y')=0$. При решении этих уравнений чаще всего могут встретиться следующие случаи.

(**1**) Если это уравнение удаётся разрешить относительно производной y', то получаем одно или несколько уравнений $y'=f_i(x,y)$ $(i=1,2,...)$, при интегрировании которых можно найти решения исходного уравнения. В частности, если $F(x,y,y')\equiv A_n(x,y)(y')^n+A_{n-1}(x,y)(y')^{n-1}+...+A_1(x,y)y'+A_0(x,y)=0$, то рассматривая это уравнение как алгебраическое уравнение относительно y', найдём, вообще говоря, n решений. Таким образом, мы получим n уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, которые решаем обычными методами.

Пример. $x(y')^2-2yy'+4x=0$. Разрешим уравнение относительно производной: $y'=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2-4x^2}}{x}$. Это однородное уравнение. Обозначая $\dfrac{y}{x}=t$, получим $t'x=\pm\sqrt{t^2-4}$. Разделяя переменные получим: $\dfrac{dt}{\sqrt{t^2-4}}=\pm\dfrac{dx}{x}$, откуда

$\ln\left(\dfrac{t}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{t}{2}\right)^2-1}\right)+C=\pm\ln x$, или

$\dfrac{y_1}{2x}+\sqrt{\left(\dfrac{y_1}{2x}\right)^2-1}+C_1=x$, и $\dfrac{y_2}{2x}+\sqrt{\left(\dfrac{y_2}{2x}\right)^2-1}+C_2=\dfrac{1}{x}$, то есть получим два решения исходного уравнения.

(**2**) $\mathbf{F(x,y')=0}$. Существуют два подхода к решению уравнений такого вида.

(**a**) Разрешим уравнение относительно y', если это возможно, и далее решаем обычными методами.

(**b**) Если разрешить уравнение обычным приемом относительно производной нельзя, то введем параметр $p: \ x = \varphi(p), \ y' = \psi(p)$ такой, что $F(\varphi(p), \ \psi(p)) \equiv 0$. Поскольку $dy = y'dx$, то $dy = \psi(p)d\varphi(p) = \psi(p)\cdot\varphi'(p)dp$ или $y = \int \psi(p)\cdot\varphi'(p)dp + C$. Таким образом, мы получили решение уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = \int \psi(p)\cdot\varphi'(p)dp + C. \end{cases}$$

(**3**) $\mathbf{F(y,y')=0}$. Если уравнение трудно разрешить относительно y', то вновь вводим параметр $p: \ y = \varphi(p), \ y' = \psi(p)$ такой, что $F(\varphi(p), \ \psi(p)) \equiv 0$. Поскольку $dy = y'\,dx$, то $dx = \dfrac{dy}{y'} = \dfrac{d\varphi(p)}{\psi(p)} = \dfrac{\varphi'(p)dp}{\psi(p)}$, или $x + C = = \int \dfrac{\varphi'(p)}{\psi(p)}dp$. Таким образом, мы снова получили решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x + C = \int \dfrac{\varphi'(p)}{\psi(p)}dp, \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

(**4**) **Уравнение Лагранжа.** Это уравнение, общий вид которого может быть записан в виде: $A(y')y + B(y')x = C(y')$ или $y = \varphi(y')x + \psi(y')$. Будем решать это уравнение методом введения параметра. Полагаем $y' = p, \quad dy = pdx$. Тогда

$y = \varphi(p)x + \psi(p), \quad dy = x\varphi'_p(p)dp + \varphi(p)dx + \psi'_p(p)dp = pdx,$ откуда $(p - \varphi(p))\, dx = \Big(x\varphi'_p(p) + \psi'_p(p)\Big)\, dp$ или $\dfrac{dx}{dp} \equiv x'_p = \dfrac{\varphi'_p(p)}{p - \varphi(p)}\, x(p) + \dfrac{\psi'_p(p)}{p - \varphi(p)}$. (Случай, когда $\varphi(p) = p$ рассмотрим ниже, когда будем рассматривать уравнение Клеро.) Отсюда следует, что уравнение может быть представлено в виде $x'_p + a(p)x = b(p)$. Это линейное относительно $x(p)$ уравнение первого порядка, метод решения которого нам уже известен.

(**5**) **Уравнение Клеро.** Частным случаем уравнения Лагранжа является уравнение $y = y' \cdot x + \psi(y')$. (Здесь $\varphi(y') = y'$). Как и в предыдущем случае, введём параметр $y' = p, \quad dy = pdx$. Тогда $y = p{\cdot}x{+}\psi(p)$. Продифференцируем это выражение и после простых преобразований получим $\dfrac{dp}{dx} \cdot \Big(x + \psi'_p(p)\Big) = 0$. Очевидна альтернатива:

1) $\dfrac{dp}{dx} = 0$, тогда $p = C$, и $y = C \cdot x + \psi(C)$ - однопараметрическое семейство интегральных кривых, или

2) $\begin{cases} x = -\psi'_p(p), \\ y = -p\psi'_p(p) + \psi(p) \end{cases}$

— решение, записанное в параметрическом виде. Исследуем свойства этого решения.

Легко проверить, что интегральная кривая, определяемая решением 2), является *огибающей* семейства интегральных кривых 1). Действительно, огибающая некоторого однопараметрического семейства $\Phi(x, y, C) = 0$ определяется уравнениями

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0, \end{cases}$$

которые для семейства $y = Cx + \psi(C)$ имеют вид

$$\begin{cases} y = Cx + \psi(C), \\ x = -\psi'_C(C), \end{cases}$$

что лишь обозначением параметра отличается от 2).

Заметим, что иногда метод введения параметра применим и для уравнения вида $y = f(x, y')$.

Пример. $y = 2y'x + \dfrac{x^2}{2} + y'^2$, $y' = p$, $y = 2px + \dfrac{x^2}{2} + p^2$.

$$dy = pdx = 2pdx + 2xdp + xdx + 2pdp; \quad (p + x)dx + 2(x + p)dp = 0.$$

$$(p + x)(dx + 2dp) = 0.$$

$$1) \;\; x + p = 0, \;\; x = -p, \;\; y = 2px + \frac{x^2}{2} + p^2 = -\frac{x^2}{2}.$$

$$2) \;\; x + 2p = C, \; x = C - 2p,$$

$$y = 2p(C - 2p) + \frac{(C - 2p)^2}{2} + p^2 = \frac{1}{2}(C^2 - 2p^2).$$

$$\begin{cases} x = C - 2p, \\ y = \dfrac{1}{2}(C^2 - 2p^2). \end{cases}$$

5.2. Теорема существования и единственности решения

Ранее нами была доказана теорема существования и единственности решения $y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$. Ниже мы исследуем вопрос о существовании и единственности решений уравнений вида $F(x, y, y') = 0$. Очевидно, что для таких уравнений через некоторую точку (x_0, y_0) может проходить уже не одна, а несколько интегральных кривых, так как разрешая уравнение $F(x, y, y') = 0$ относительно производной y', мы, как правило, получаем не одно, а несколько действительных значений $y' = f_i(x, y), (i = 1, 2, ...)$. Если каждое из уравнений $y' = f_i(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения, то для каждого из этих уравнений найдётся единственное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Поэтому единственность решения уравнения $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, обычно понимается в том смысле, что через данную точку (x_0, y_0) *по данному направлению* проходит не более одной интегральной кривой уравнения.

Теорема. *Существует единственное решение* $y = y(x)$, *уравнения* $F(x, y, y') = 0$, $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, *где* h *достаточно мало, удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$, *для которого* $y'(x_0) = y'_0$, y'_0 *- один из корней уравнения* $F(x_0, y_0, y') = 0$, *если в замкнутой окрестности точки* (x_0, y_0, y'_0) *функция* $F(x, y, y')$ *удовлетворяет условиям:*

1) функция $F(x, y, y')$ *непрерывна по всем аргументам;*

2) существует непрерывная по всем аргументам частная производная $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$, *причём* $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, y'_0)}{\partial y'} \ne 0$;

3) существует непрерывная по всем аргументам, ограниченная по модулю производная $\dfrac{\partial F}{\partial y}$: $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \le N$.

Доказательство. Согласно известной теореме о существовании неявной функции, можно утверждать, что условия 1), 2) и 3) гарантируют существование единственной и непрерывной в окрестности точки (x_0, y_0) функции $y' = f(x, y)$, определяемой уравнением $F(x, y, y') = 0$ и удовлетворяющей условию $y_0' = f(x_0, y_0)$. Остается проверить, будет ли функция $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) удовлетворять условию Липшица, или более жесткому условию $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le \hat{N}$, где $\hat{N} = const$. В этом случае можно будет утверждать, что уравнение $y' = f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы Коши существования и единственности решения. Следовательно, можно будет утверждать, что существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, а вместе с тем существует и единственная интегральная кривая уравнения $F(x, y, y') = 0$, проходящая через точку (x_0, y_0) и имеющая в ней угловой коэффициент касательной, равный y_0'.

Согласно известной теореме о неявных функциях, можно утверждать, что при выполнении условий 1), 2) и 3) производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ существует и может быть найдена по правилу дифференцирования неявных функций.

Разрешим уравнение $F(x, y, y') = 0$ относительно y', и это решение подставим обратно в это же уравнение. Очевидно, результате получим тождество $F\left(x, y, y'(x, y)\right) \equiv 0$. Дифференцируя его по y и принимая во внимание $y' = f(x, y)$, получим $\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial y'} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ или $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\partial F}{\partial y} \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial y'}$. Отсюда, в силу условий 2) и 3) теоремы (производная $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ существует и отлична от нуля, и существует ограниченная по модулю производная $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \le N$) следует, что в замкнутой окрестности точки (x_0, y_0) выполнено $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le \hat{N}$, где $\hat{N} = const$.

ЛЕКЦИЯ 6

6.1. Теорема существования и единственности решения для дифференциальных уравнений высших порядков

Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{6.1}$$

Функция F считается непрерывной функцией своих аргументов. Если она удовлетворяет теореме существования неявной функции, то уравнение (6.1) можно представить в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ...y^{(n-1)}), \tag{6.2}$$

который является общим видом уравнения n-го порядка, разрешённого относительно старшей производной. Будем пока изучать уравнения только такого вида.

Уравнение (6.2) нетрудно свести к системе уравнений первого порядка. Действительно, если в уравнении (6.2) неизвестными функциями считать не только y, но и все производные до $(n-1)$-го порядка, то есть $y' = y_1$, $y'' = y_2$, ... , $y^{(n-1)} = y_{n-1}$, то уравнение (6.2) примет вид системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-2}' = y_{n-1}, \\ y_{n-1}' = f(x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ \dots,y_{n-1}). \end{cases} \tag{6.3}$$

Тем самым мы получили систему, записанную в *нормальной форме.* Для таких систем мы уже доказывали теорему существования и единственности решения: если правые части всех уравнений системы (6.3) непрерывны в рассматриваемой области и удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам, кроме x (см. п. 4.1. лекции 4), то существует единственное решение системы (6.3), удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$, $y_1(x_0) = y_{1,0}$, ... , $y_{n-1}(x_0) = y_{n-1,0}$. Правые части первых $n-1$ уравнений системы (6.3) непрерывны и удовлетворяют условию Липшица. Следовательно, условия теоремы существования и единственности решения будут выполнены, если функция $f(x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ \dots,y_{n-1})$ будет непрерывна в окрестности начальных данных и будет удовлетворять условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго.

Итак, переходя вновь к переменным x и y, получим следующую теорему существования и единственности решения:

Теорема. *Существует единственное решение дифференциального уравнения n-го порядка*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ...y^{(n-1)}),$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, *если в окрестности начальных значений* $(x_0,\ y_0,\ y'_0,\ ...,\ y_0^{(n-1)})$ *функция* $f(x, y, y', y'', ...y^{(n-1)})$ *является непрерывной функцией своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго.*

Замечание. Последнее условие может быть заменено более жестким условием существования в той же окрестности ограниченных частных производных первого порядка от функции $f(x,\ y,\ y',\ y'',\ ...,\ y^{(n-1)})$ по всем аргументам, начиная со второго.

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения n-го порядка называется множество решений, состоящее из всех без исключения частных решений.

Иначе говоря, общее решение содержит в себе все без исключения частные решения. Забегая вперёд, заметим, что общее решение зависит от n параметров, в качестве которых могут быть выбраны, например, начальные значения искомой функции и производных $y_0,\ y_0',\ ...,y_0^{(n-1)}$.

6.2. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется дифференциальное уравнение, линейное относительно неизвестной функции и всех её производных, то есть имеющее вид

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=b(x), \tag{6.4}$$

где $a_0(x)\neq 0$. Если $b(x)=0$, то уравнение называется *однородным*, а если $b(x)\neq 0$, то уравнение называется *неоднородным.*

Поскольку $a_0(x)\neq 0$, уравнение (6.4) всегда может быть приведено к виду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \tag{6.5}$$

Далее, если не оговорено противное, все $p_i(x)$ будем считать непрерывными функциями.

Обозначим

$$L[\, y \,] \stackrel{def}{=} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y.$$

Будем называть $L[\, y \,]$ *линейным дифференциальным оператором.* Он обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

1) $L[\, C\, y \,] = C\; L[\, y \,]$,

2) $L[\, y_1 + y_2 \,] = L[\, y_1 \,] + L[\, y_2 \,]$,

3) $L\left[\, \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\; y_i \,\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\; L[\, y_i \,]$.

Рассмотрим линейные однородные уравнения $L[\, y \,] = 0$ или

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{6.6}$$

Докажем ряд теорем о свойствах решений таких уравнений.

Теорема 1. *Если* $y = y(x)$ *является решением линейного однородного уравнения* $L[\, y \,] = 0$, *то и* $C \cdot y(x)$, *где* C *—* $const$, *является решением того же уравнения.*

Доказательство. Поскольку $L[\, y \,] = 0$, то и $L[\, C \cdot y \,] = C \cdot L[\, y \,] = 0$.

Теорема 2. *Если функции* $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ *являются решениями линейного однородного уравнения, то функция*

$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ *также является решением того же уравнения, где* $C_1 = const$, $C_2 = const$.

Доказательство. $L[\, y\,] = L[\, C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2\,] = C_1 \cdot L[\, y_1\,] + C_2 \cdot L[\, y_2\,] = 0$.

Следствие. Пусть имеется n решений $y_1,\ y_2,\ \ldots,y_n$ линейного однородного уравнения $L[\ y\ ] = 0$. Тогда их линейная комбинация с постоянными коэффициентами $y(x) = C_1\ y_1(x) + C_2\ y_2(x) + \ldots + C_n\ y_n(x)$ также является решением того же уравнения.

ЛЕКЦИЯ 7

7.1. Общее решение линейного дифференциального уравнения n-го порядка

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$L[\, y\,] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{7.1}$$

Как найти его общее решение?

Вспомним следующее определение: функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots, y_n(x)$ называются *линейно зависимыми* на некотором интервале изменения $x:\ a \le x \le b$, если существуют постоянные величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что на $[a,b]$ $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, и хотя бы одно $\alpha_i \ne 0$. Если тождество справедливо только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ называются *линейно независимыми на отрезке* $[a,b]$.

Теорема 1. *Если функции* $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots, y_n(x)$ *линейно зависимы на* $[a, b]$, *то на том же отрезке* $[a, b]$ *определитель Вронского этих функций тождественно равен нулю:*

$$W(x) \equiv W[\, y_1, y_2, ..., y_n] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Доказательство. Нам дано, что функции $y_1,\ y_2,\ \dots, y_n$ линейно зависимы на отрезке $a \le x \le b$, т.е. $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, причём не все $\alpha_i = 0$. Продифференцируем это равенство 1 раз, 2 раза, ..., $(n-1)$ раз, а затем составим систему

$$\begin{cases} \alpha_1\, y_1(x) \ + \ \alpha_2\, y_2(x) \ + \ \dots \ + \ \alpha_n\, y_n(x) \ = \ 0, \\ \alpha_1\, y_1'(x) \ + \ \alpha_2\, y_2'(x) \ + \ \dots \ + \ \alpha_n\, y_n'(x) \ = \ 0, \\ \alpha_1\, y_1''(x) \ + \ \alpha_2\, y_2''(x) \ + \ \dots \ + \ \alpha_n\, y_n''(x) \ = \ 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = \ 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Рассмотрим эту систему как систему алгебраических уравнений для определения α_i . Мы знаем, что не все α_i равны нулю, то есть система заведомо имеет нетривиальные решения. Но однородная система линейных алгебраических уравнений может иметь нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель этой системы тождественно равен нулю. Легко видеть, что определитель этой системы совпадает с определителем Вронского. Следовательно, для того чтобы не все α_i были равны нулю, необходимо, чтобы $W(x) \equiv 0$.

Теорема 2. *Если линейно независимые на* $[a,b]$ *функции* $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,y_n(x)$ *являются решениями линейного однородного уравнения с непрерывными на* $[a,b]$ *коэффициентами* $p_i(x)$, *то определитель Вронского этих функций не может обратиться в нуль ни в одной точке отрезка* $[a,b]$.

Доказательство. Доказательство будем вести от противного. Предположим, что в некоторой точке x_0 отрезка $[a,b]$ определитель Вронского равен нулю: $W(x_0)=0$. Подсчитаем систему (7.2) в этой точке x_0 и вновь рассмотрим её как систему алгебраических уравнений для определения α_i

$$\begin{cases} \alpha_1\, y_1(x_0) + \alpha_2\, y_2(x_0) + \dots + \alpha_n\, y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1\, y_1'(x_0) + \alpha_2\, y_2'(x_0) + \dots + \alpha_n\, y_n'(x_0) = 0, \\ \alpha_1\, y_1''(x_0) + \alpha_2\, y_2''(x_0) + \dots + \alpha_n\, y_n''(x_0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

Поскольку $W(x_0)=0$, существуют нетривиальные решения этой системы относительно α_i . Составим с α_i линейную комбинацию $y(x)=\alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x) + \dots + \alpha_n\, y_n(x)$. Поскольку все $y_i(x)$, входящие в эту линейную комбинацию, являются решениями уравнения (7.1) $L[\ y\ ]=0$, то и $y(x)$ тоже является решением этого уравнения. Более того, если положить $y(x)=0$, то получим тривиальное решение, удовлетворяющее в силу системы (7.3) нулевым начальным условиям $y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,\ y''(x_0)=0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=0$. Вследствие теоремы существования и единственности решения, это единственное решение уравнения (7.1) $L[\ y\ ]=0$ и никаких других решений $y(x)$ этого уравнения с найденными нами ранее α_i

нет. Поэтому $\alpha_1\, y_1(x) \;+\; \alpha_2\, y_2(x) \;+\; ... \;+\; \alpha_n\, y_n(x) \equiv 0$ и функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ линейно зависимы.

Таким образом, предположение, что определитель Вронского хотя бы в одной точке отрезка $[a, b]$ может обратиться в нуль, приводит к противоречию с условиями теоремы.

Докажем теперь основную теорему данной лекции.

Теорема 3. *Общим решением линейного однородного уравнения* $L[\,y\,] = 0$ *на отрезке* $[a, b]$ *является линейная комбинация* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x)$ *из* n *линейно независимых на этом отрезке частных решений* $y_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ *с произвольными постоянными коэффициентами.*

Доказательство. Уравнение $L[\,y\,] = 0$ при $x \in [a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения. Поэтому решение $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x)$ будет общим решением, то есть будет содержать в себе все без исключения частные решения, если окажется возможным подобрать таким образом произвольные постоянные C_i, чтобы удовлетворить произвольно заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $y''(x_0) = y_0''$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, $x_0 \in [a, b]$. Потребовав, чтобы решение $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x)$ удовлетворяло поставленным начальным условиям, получим систему n линейных относительно C_i $(i = 1, 2, ..., n)$ алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x_0) &= \; y_0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i'(x_0) &= \; y_0', \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i''(x_0) &= \; y_0'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(n-1)}(x_0) &= \; y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Поскольку $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots, y_n(x)$ — линейно независимые решения уравнения $L[\,y\,] = 0$, определитель Вронского $W(x_0)$ этой системы отличен от нуля в любой точке $x_0 \in [a, b]$. Следовательно, эта система разрешима относительно C_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ при любом выборе $x_0 \in [a, b]$ и при любом выборе правых частей этой системы.

Таким образом, какие бы начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $y''(x_0) = y_0''$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, $x_0 \in [a, b]$ мы ни задали (иначе говоря, какое бы частное решение мы ни выбрали), заданное частное решение подбором постоянных C_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ можно выделить из решения $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x)$, а это и означает, что данная линейная комбинация является общим решением.

Следствие. Максимальное число линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения n-го порядка равно n.

Определение. Любые n линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется его *фундаментальной системой решений.*

На языке фундаментальной системы решений основную теорему этой лекции можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3^***.** *Если* $y_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *— фундаментальная система решений, то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения* n*-го порядка представимо в виде* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x)$, *где* C_1, C_2, ... , C_n *— произвольные постоянные.*

7.2. Формула Остроградского — Лиувилля

Совершенно очевидно, что вся информация о решениях линейного однородного уравнения (7.1) каким-то образом "спрятана"в коэффициентах $p_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ этого уравнения. Попытаемся эту информацию представить в явном виде.

Пусть задана фундаментальная система решений $Y_1(x)$, $Y_2(x), ..., Y_n(x)$. Выпишем соответствующее им дифференциальное уравнение. Пусть $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ Y_i(x)$. Определитель Вронского системы функций $y(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ... , $Y_n(x)$ имеет вид

$$W[\,Y_1, Y_2, ..., Y_n,\ y] = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & .... & Y_n & y \\ Y_1' & Y_2' & .... & Y_n' & y' \\ Y_1'' & Y_2'' & .... & Y_n'' & y'' \\ \multicolumn{5}{c}{...} \\ Y_1^{(n-2)} & Y_2^{(n-2)} & .... & Y_n^{(n-2)} & y^{(n-2)} \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & .... & Y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ Y_1^{(n)} & Y_2^{(n)} & .... & Y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель равен нулю, поскольку система функций $y(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ... , $Y_n(x)$ линейно зависима. Разложим его по элементам последнего столбца:

$$y^{(n)}\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots\dots\dots\dots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \dots\dots\dots\dots & Y_n' \\ Y_1'' & Y_2'' & \dots\dots\dots & Y_n'' \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ Y_1^{(n-2)} & Y_2^{(n-2)} & \dots\dots\dots & Y_n^{(n-2)} \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \dots\dots\dots & Y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} -$$

$$- \; y^{(n-1)}\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots\dots\dots\dots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \dots\dots\dots\dots & Y_n' \\ Y_1'' & Y_2'' & \dots\dots\dots & Y_n'' \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ Y_1^{(n-2)} & Y_2^{(n-2)} & \dots\dots\dots\dots & Y_n^{(n-2)} \\ Y_1^{(n)} & Y_2^{(n)} & \dots\dots\dots\dots & Y_n^{(n)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \; ... \; + (-1)^n \, y \begin{vmatrix} Y_1' & Y_2' & \dots\dots\dots\dots & Y_n' \\ Y_1'' & Y_2'' & \dots\dots\dots & Y_n'' \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ Y_1^{(n-2)} & Y_2^{(n-2)} & \dots\dots\dots & Y_n^{(n-2)} \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \dots\dots\dots & Y_n^{(n-1)} \\ Y_1^{(n)} & Y_2^{(n)} & \dots\dots\dots & Y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель, стоящий при $y^{(n)}$ — есть определитель Вронского $W(x) \neq 0$. Он отличен от нуля, поскольку функции $Y_1(x)$, $Y_2(x), ..., Y_n(x)$ линейно независимы. Определитель, стоящий при $y^{(n-1)}$ — это производная определителя Вронского: $W'(x)$. Структура остальных определителей нас в данный момент не интересует. Важно лишь то, что эти определители — некоторые функции от x. Поделив на $W(x)$, получим искомое уравнение

$$y^{(n)} - \frac{W'(x)}{W(x)} y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + ... + p_n(x) y = 0, \tag{7.4}$$

где

$$p_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}, \tag{7.5}$$

а $p_2(x), ..., p_n(x)$ — также отношения соответствующих определителей. Формулы (7.4) и (7.5) и отвечают на вопрос, каким образом связаны между собой коэффициенты $p_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ уравнения (7.1) с решениями $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ... , $Y_n(x)$ этого уравнения.

Из формулы (7.5) легко получить **формулу Остроградского — Лиувилля** :

$$W(x) = C\, e^{-\int p_1(x) dx}, \tag{7.6}$$

где C — $const.$

В силу (7.6) общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0, \tag{7.7}$$

которое имеет одно частное решение $Y_1(x)$, всегда находится в квадратурах, так как любое решение уравнения (7.7) также должно быть решением уравнения

$$\begin{vmatrix} Y_1(x) & y(x) \\ Y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = C\, e^{-\int p_1(x) dx},$$

что приводит к линейному уравнению первого порядка

$$Y_1(x) \cdot y'(x) - Y_1'(x) \cdot y(x) = C\, e^{-\int p_1(x) dx}. \tag{7.8}$$

Это уравнение легко решается. Действительно, поделим (7.8) на $Y_1^2(x)$. Тогда левая часть получившегося уравнения будет представлять собой производную частного двух функций:

$$\left(\frac{y(x)}{Y_1(x)}\right)' = \frac{C\ e^{-\int p_1(x)dx}}{Y_1^2(x)}.$$

Проинтегрировав, получим искомое решение

$$y(x) = Y_1(x) \cdot \left[\int \frac{C\ e^{-\int p_1(x)dx}}{Y_1^2(x)} dx + \hat{C}\right].$$

ЛЕКЦИЯ 8

8.1. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$L[\ y\ ] = y^{(n)} +\ p_1(x)\ y^{(n-1)} +\ p_2(x)\ y^{(n-2)} + ... +\ p_{n-1}(x)\ y' +$$
$$+\ p_n(x)\ y = f(x) \qquad (8.1)$$

и соответствующее ему однородное уравнение: $L[\ y\ ] = 0$.

Теорема. *Если* $z(x)$ *— частное решение неоднородного линейного уравнения, то общее решение неоднородного линейного уравнения есть* $Y(x) = z(x) + y(x)$, *где* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\ y_i(x)$ *— общее решение соответствующего однородного уравнения* $L[\ y\ ] = 0$.

Доказательство. Так как для уравнения $L[\ y\ ] = f(x)$ справедлива теорема существования и единственности решения, покажем, что для произвольных начальных данных задачи Коши $Y^{(k)}(x_0) = Y_0^{(k)}$, $(k = 0, 1, ..., n-1)$ найдутся коэффициенты C_i такие, что

$$\begin{cases} Y_0 = z(x_0) \ + \ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \, y_i(x_0), \\ Y_0' = z'(x_0) \ + \ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \, y_i'(x_0), \\ Y_0'' = z''(x_0) \ + \ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \, y_i''(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_0^{(n-1)} = z^{(n-1)}(x_0) + \ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \, y_i^{(n-1)}(x_0). \end{cases}$$

Получили линейную по отношению к постоянным C_i систему n алгебраических уравнений с n неизвестными. При произвольных левых частях $Y_0,\ Y_0',\ Y_0'',\ \dots,Y_0^{(n-1)}$ и любых $z(x_0),\ z'(x_0),\ z''(x_0),\ \dots,z^{(n-1)}(x_0)$ она допускает единственное решение, поскольку определитель Вронского $W[\,y_1,\ y_2,\ \dots,y_n\,]$ для линейно независимой системы функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ отличен от нуля.

Таким образом, задача нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения включает в себя задачу нахождения частного решения этого уравнения.

8.2. Нахождение общего решения методом вариации произвольных постоянных

Пусть общее решение линейного однородного уравнения есть $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \, y_i(x)$. Будем считать, что $C_i = C_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ с тем, чтобы подобрать произвольные n функций $C_i(x)$ такие, которые бы удовлетворяли неоднородному уравнению $L[y] = f(x)$. Осуществим это следующим образом. Продифференцировав $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x) \, y_i(x)$, получим

$y'(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x) \, y_i'(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) \, y_i(x)$, положим (это — первое требование) $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i(x) = 0$.

$y''(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i''(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i'(x)$, положим (это — второе требование) $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i'(x) = 0$.

....

$y^{(n-1)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n-1)}(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-2)}(x)$,

положим (это — $(n-1)$-ое требование) $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-2)}(x) = 0$.

$y^{(n)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n)}(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x)$.

Здесь мы уже *не можем* требовать, чтобы $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = 0$, поскольку функции $C_i(x)$ уже подчинены $n-1$ требованию, а надо ещё удовлетворить и уравнению $L[y] = f(x)$. Подставим $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, ... , $y^{(n)}(x)$ в уравнение. Получим $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = f(x)$. Это и есть последнее условие, налагаемое на $C_i(x)$. Таким образом, все функции $C_i(x)$ могут быть определены из системы

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i(x) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i'(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-2)}(x) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Определитель этой системы $W(x) \neq 0$, так как функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ линейно независимы. Они являются фундаментальной системой решений однородного уравнения

$L[\ y\ ] = 0$. Из полученной системы найдём все $C_i' = \varphi_i(x)$, затем, проинтегрировав, получим $C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + \hat{C}_i$, где все $\hat{C}_i$ — $const$. Таким образом, общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\hat{C}_i\ y_i(x)\right] + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\int \varphi_i(x)dx\right) \cdot y_i(x)\right].$$

Легко видеть, что первое слагаемое в этом решении — общее решение соответствующего однородного уравнения, второе слагаемое – частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения.

8.3. Метод Коши нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения $L[\ y\ ] = f(x)$

В этом методе предполагается известным зависящее от одного параметра решение $K(x, s)$ соответствующего линейного однородного уравнения $L[y] = 0$, удовлетворяющее условиям

$$K(s, s) = K'(s, s) = ... = K^{(n-2)}(s, s) = 0, \quad K^{(n-1)}(s, s) = 1. \tag{8.2}$$

Покажем, что в этом случае функция

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, s)f(s)ds \tag{8.3}$$

будет частным решением линейного неоднородного уравнения $L[\ y\ ] = f(x)$, удовлетворяющим нулевым начальным условиям $y(x_0) = y'(x_0) = y''(x_0) = ... = y^{(n-1)}(x_0) = 0$.

В курсе математического анализа доказывается формула дифференцирования по параметру интеграла, зависящего от этого параметра. Если $F(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,s)ds,$ то

$$\frac{dF}{dx}=f\left(x,\psi(x)\right)\psi'_x-f\left(x,\varphi(x)\right)\varphi'_x+\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x,s)ds.$$

Дифференцируя по x соотношение (8.3), пользуясь приведенной формулой и учитывая условия (8.2), которым должно удовлетворять решение $K(x,s)$, получим

$$y'(x) \;=\; \underbrace{K(x,x)}_{=0}\cdot f(x)\cdot(x)'_x \;-\; K(x,x_0)\cdot f(x_0)\cdot\underbrace{(x_0)'_x}_{=\,0}\;+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x} K'_x(x,s)f(s)ds=\int\limits_{x_0}^{x} K'_x(x,s)f(s)ds.$$

Аналогично для второй и следующих производных имеем

$$y''(x)=\int\limits_{x_0}^{x} K''_{xx}(x,s)\;f(s)ds,\;...,\;y^{(n-1)}(x)=\int\limits_{x_0}^{x} K^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,s)\;f(s)ds,$$

$$y^{(n)}(x)\;=\;\underbrace{K^{(n-1)}(x,x)}_{=1}\cdot f(x)\;+\;\int\limits_{x_0}^{x} K^{(n)}_{x^n}(x,s)\;f(s)\;ds=$$

$$=\;f(x)\;+\;\int\limits_{x_0}^{x} K^{(n)}_{x^n}(x,s)\;f(s)\;ds.$$

Подставим эти производные в уравнение (7.1), и, учитывая, что $K(x,s)$ — решение однородного уравнения, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x}\;\underbrace{L[K(x,s)]}_{\equiv 0}\;f(s)\;ds\;+\;f(x)\;\equiv\;f(x).$$

Тем самым мы показали, что если известно некоторое решение $K(x,s)$ линейного однородного уравнения, зависящее от одного параметра s и удовлетворяющее условиям (8.2), то частное решение линейного неоднородного уравнения (8.1) можно найти по формуле (8.3).

Решение $K(x,s)$ всегда может быть выделено из общего решения $y(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x)$ линейного однородного уравнения, если выбрать произвольные постоянные так, чтобы выполнялись условия (8.2). Действительно, предположим, что $K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x)+...+C_n(s)y_n(x)$, где y_i $(i=1,2,...,n)$ - фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения. Учитывая, что $K'(s,s)=K'_x(x,s)|_{x=s}$, и т. д., условия (8.2) запишем в виде

$$\begin{cases} C_1(s)\, y_1(s) \ + \ C_2(s)\, y_2(s) \ + \ ... \ + \ C_n(s)\, y_n(s)=0, \\ C_1(s)\, y_1'(s) \ + \ C_2(s)\, y_2'(s) \ + \ ... \ + \ C_n(s)\, y_n'(s)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1(s)\, y_1^{(n-2)}(s)+C_2(s)\, y_2^{(n-2)}(s)+...+C_n(s)\, y_n^{(n-2)}(s)=0, \\ C_1(s)\, y_1^{(n-1)}(s)+C_2(s)\, y_2^{(n-1)}(s)+...+C_n(s)\, y_n^{(n-1)}(s)=1. \end{cases}$$

Рассмотрим эту систему как линейную алгебраическую систему относительно $C_i(s)$ $(i=1,2,...,n)$. Эта система всегда имеет решение, поскольку ее определитель совпадает с определителем Вронского $W[\,y_1,\ y_2,\ ...\ ,y_n\,]$, который, в силу линейной независимости y_i, отличен от нуля. Решая систему (например, по формулам Крамера), найдем все $C_i(s)(i=1,2,...,n)$, а значит, и искомое решение $K(x,s)$.

Пример. Для уравнения $y''+a^2y=f(x)$ общим решением соответствующего однородного уравнения является функция $y(x)=C_1\cos ax+C_2\sin ax$. Условия (2) приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \ \ C_1\ \cos as \ + \ C_2\ \sin as=0, \\ -C_1\ a\ \sin as+C_2\ a\ \cos as=1. \end{cases}$$

Следовательно, $C_1=-\dfrac{\sin as}{a}$; $C_2=\dfrac{\cos as}{a}$. Искомое решение имеет вид

$$K(x,s) \;=\; -\,\frac{\sin as\;\cos ax}{a} \;+\; \frac{\cos as\;\sin ax}{a} \;=\; \frac{\sin a(x-s)}{a}.$$

Тогда решение исходного уравнения, удовлетворяющего нулевым начальным условиям, представимо в виде

$$y(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \sin a(x-s) f(s) ds.$$

ЛЕКЦИЯ 9

9.1. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

На практике часто встречаются линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами, которые всегда можно представить в виде

$$L[\,y\,] \;=\; y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y \;=\; f(x)\,, \qquad (9.1)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — заданные действительные числа. Рассмотрим сначала однородные уравнения, то есть уравнения вида

$$L[\,y\,] \;=\; y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = \;0\,. \qquad (9.2)$$

Оказывается, что интегрирование уравнения (9.2) всегда возможно в элементарных функциях и сводится к алгебраическим операциям.

Решения уравнения (9.2) будем искать в виде $y = e^{kx}$, где k — $const$. Подставим эту функцию в (9.2), получим

$$e^{kx}\,(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n) = 0.$$

Отсюда, поскольку $e^{kx} \neq 0$, следует

$$F(k) \stackrel{def}{=} k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0. \qquad (9.3)$$

Уравнение (9.3) называется *характеристическим уравнением* линейного дифференциального уравнения (9.2). Это алгебраическое уравнение n-го порядка. Согласно основной теореме алгебры, любое уравнение n-го порядка имеет ровно n корней.

1. Характеристическое уравнение имеет n различных вещественных корней $k_1, k_2, ..., k_n$. Им соответствуют n частных линейно независимых решений $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}$ уравнения (9.2). В линейной независимости этих функций можно убедиться, проверив, что определитель Вронского этих функций отличен от нуля. В этом случае общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + ... + C_n e^{k_n x}. \qquad (9.4)$$

2. Все корни различные, но среди них есть комплексные. Пусть $k_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $k_2 = \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, k_{2s-1} = \alpha_s + i\beta_s$, $k_{2s} = \alpha_s - i\beta_s$ – комплексные корни характеристического уравнения, остальные корни $k_{2s+1}, \ldots, k_n$ вещественные. Частные решения для комплексных корней имеют вид: $y_1 = e^{(\alpha_1 + i\beta_1)x}$, $y_2 = e^{(\alpha_1 - i\beta_1)x}, \ldots, y_{2s-1} = e^{(\alpha_s + i\beta_s)x}$, $y_{2s} = e^{(\alpha_s - i\beta_s)x}$, а для действительных корней — $y_{2s+1} = e^{k_{2s+1}x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}$. Поскольку $e^{k_1 x}$ – решение, то $L[\, e^{k_1 x}\,] = 0$. Воспользуемся в этом соотношении известной формулой $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$, получим $L[\, e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + ie^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x\,] = 0$. Вследствие линейности оператора, имеем $L[\, e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x\,] + iL[\, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x\,] = 0$.

Так как $e^{k_2 x}$ — тоже решение, то $L[\ e^{k_2 x}\ ] = 0$, следовательно, $L[\ e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x - ie^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x\ ] = L[\ e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x\ ] - iL[\ e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x\ ] = 0$.

Комплексная величина равна нулю тогда и только тогда, когда равны нулю действительная и мнимая части этой величины: $L[\ e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x\ ] = 0$, $L[\ e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x\ ] = 0$.

Таким образом, каждой паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения соответствуют два линейно независимых решения вида $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

В результате получаем систему n линейно независимых решений $e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x$, $e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x$, $e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x$, $e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x$, ... , $e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x$, $e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x$, $e^{k_{2s+1}x}$, ... , $e^{k_n x}$, линейная комбинация которых дает общее решение.

3. Имеются кратные вещественные корни. Пусть k_1– корень характеристического полинома кратности m_1. Тогда в $F(k)$ всегда можно выделить множитель $(k-k_1)^{m_1}$:

$$F(k) = (k-k_1)^{m_1}\cdot\varphi(k), \tag{9.5}$$

причем $\varphi(k_1) \neq 0$. Покажем, что решениями уравнения (9.2) в исследуемом случае будут m_1 функций $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = xe^{k_1 x}$, ... , $y_{m_1} = x^{m_1-1}e^{k_1 x}$.

Вначале покажем, что $L\left[\ x\ e^{k_1 x}\ \right] = 0$. Для этого воспользуемся очевидным равенством $L\left[\ e^{kx}\ \right] = e^{kx}\ F(k)$, а также обратим внимание на то, что $x\ e^{kx} = \dfrac{d}{dk}\ e^{kx}$. Используя (9.5), получим

$$L\left[\ x\ e^{kx}\right] = L\left[\ \frac{d}{dk}\ e^{kx}\right] = \frac{d}{dk}\ L\ \left[\ e^{kx}\ \right] = \frac{d}{dk}\ \left[\ e^{kx}\ F(k)\ \right] =$$

$$= \frac{d}{dk}\ \left[\ e^{kx}(k-k_1)^{m_1}\varphi(k)\ \right] \stackrel{def}{=} \frac{d}{dk}\left[(k-k_1)^{m_1}A(k)\right] =$$

$$= m_1(k-k_1)^{m_1-1}A(k) + (k-k_1)^{m_1}A'_k(k),$$

где $e^{kx}\varphi(k) \stackrel{def}{=} A(k)$. Совершенно очевидно, что полученное выражение при $k = k_1$ обращается в нуль: $L\left[xe^{k_1x}\right] = 0$, то есть функция $y_2 = xe^{k_1x}$ является решением уравнения (9.2).

Покажем, что $L\left[\ x^2\ e^{k_1x}\right] = 0$. Как и в предыдущем случае, отметим, что $x^2e^{kx} = \dfrac{d^2}{dk^2}e^{kx}$. Поэтому

$$L\left[\ x^2e^{kx}\right] = L\left[\frac{d^2}{dk^2}e^{kx}\right] = \frac{d^2}{dk^2}\ L\left[\ e^{kx}\ \right] = \frac{d^2}{dk^2}\ \left[\ e^{kx}\ F(k)\ \right] =$$

$$= \frac{d^2}{dk^2}\ \left[\ e^{kx}(k-k_1)^{m_1}\varphi(k)\ \right] \stackrel{def}{=} \frac{d^2}{dk^2}\ \left[\ (k-k_1)^{m_1}\ A(k)\ \right] =$$

$$= m_1(m_1-1)(k-k_1)^{m_1-2}A(k) + 2m_1(k-k_1)^{m_1-1}A'_k(k) +$$

$$+ (k-k_1)^{m_1}A''_{kk}(k).$$

Очевидно, что полученное выражение при $k = k_1$ обращается в нуль: $L\left[\ x^2\ e^{k_1x}\ \right] = 0$, т. е. $y_3 = x^2\ e^{k_1x}$ является решением уравнения (9.2).

Аналогично имеем

$$L\left[x^{m_1-1}e^{kx}\right] = L\left[\frac{d^{m_1-1}}{dk^{m_1-1}}e^{kx}\right] =$$

$$= \frac{d^{m_1-1}}{dk^{m_1-1}}L\left[e^{kx}\right] = \frac{d^{m_1-1}}{dk^{m_1-1}}\left[e^{kx}F(k)\right] =$$

$$= \frac{d^{m_1-1}}{dk^{m_1-1}}\left[e^{kx}(k-k_1)^{m_1}\varphi(k)\right] \stackrel{def}{=} \frac{d^{m_1-1}}{dk^{m_1-1}}\left[\ (k-k_1)^{m_1}\ A(k)\ \right].$$

Для того чтобы подсчитать эту производную, воспользуемся формулой Лейбница

$$[\,(k-k_1)^{m_1}\,A(k)\,]^{(m_1-1)} = C^0_{m_1-1}\;[\,(k-k_1)^{m_1}\,]^{(m_1-1)}\;A(k) +$$
$$+C^1_{m_1-1}\,[(k-k_1)^{m_1}]^{(m_1-2)}\,A'_k(k) + C^2_{m_1-1}\,[(k-k_1)^{m_1}]^{(m_1-3)}\,A''_{kk}(k) +$$
$$+\;...\;+C^s_{m_1-1}\,[\,(k-k_1)^{m_1}]^{(m_1-1-s)}\;A^{(s)}_{k^s}(k)\;+\;...+$$
$$+C^{m_1-1}_{m_1-1}\,(k-k_1)^{m_1}\,A^{(m_1-1)}_{k^{m_1-1}}(k),$$

получим

$$\frac{d^{m_1-1}}{dk^{m_1-1}}\,[(k-k_1)^{m_1}A(k)] = C^0_{m_1-1}m_1(m_1-1)...4\cdot 3\cdot 2\cdot(k-k_1)A(k) +$$
$$+\,C^1_{m_1-1}\,m_1\,(m_1-1)\;...\;4\cdot 3\cdot\;(k-k_1)^2\,A'_k(k)\;+\;...$$
$$...\;+\;C^s_{m_1-1}\,m_1\,(m_1-1)\;...\;(m_1-s+1)\,(k-k_1)^{m_1-s}\,A^{(s)}_{k^s}(k)\;+\;...$$
$$...\;+\;C^{m_1-1}_{m_1-1}\,(k-k_1)^{m_1}\,A^{(m_1-1)}_{k^{m_1-1}}(k).$$

Очевидно, что полученное выражение при $k = k_1$ обращается в нуль, $L\left[\,x^{m_1-1}\,e^{k_1x}\,\right] = 0$, поскольку каждое слагаемое содержит множитель $(k-k_1)$ в соответствующей степени. Таким образом, мы показали, что $y_{m_1} = x^{m_1-1}\,e^{k_1x}$ является решением уравнения (9.2).

Покажем теперь, что функция $y = x^{m_1}\,e^{k_1x}$ решением уравнения (9.2) *не является*. После вычислений, аналогично проведенным выше, получим

$$L\left[\,x^{m_1}\,e^{k_1x}\,\right] = \frac{d^{m_1}}{dk^{m_1}}\,[(k-k_1)^{m_1}A(k)] = C^0_{m_1}(m_1)!\,A(k) +$$
$$+\,C^1_{m_1}\,m_1\,(m_1-1)\;...\;4\cdot 3\cdot 2\,(k-k_1)\,A'_k(k)\;+\;...$$
$$...\;+\;C^s_{m_1}\,m_1\,(m_1-1)\;...\;(m_1-s+1)\,(k-k_1)^{m_1-s}\,A^{(s)}_{k^s}(k)\;+\;...$$
$$...\;+\;C^{m_1}_{m_1}\,(k-k_1)^{m_1}\,A^{(m_1)}_{k^{m_1}}(k).$$

Поскольку $A(k) \overset{def}{=} e^{kx}\,\varphi(k)$, а $\varphi(k_1) \neq 0$, ясно, что в полученном выражении первое слагаемое при $k = k_1$ в нуль не обращается. Следовательно, $L\left[\, x^{m_1}\, e^{k_1 x}\,\right] \neq 0,$ и функция $y = x^{m_1}\, e^{k_1 x}$ решением уравнения (9.2) не является.

Таким образом, мы показали, что функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = x\, e^{k_1 x}$, ... , $y_{m_1} = x^{m_1 - 1} e^{k_1 x}$, или, кратко,

$$y_s(x) = x^s\, e^{k_1 x}, \ \ (0 \leq s \leq m_1 - 1) \tag{9.6}$$

являются решениями уравнения (9.2) в случае, когда k_1 — корень характеристического уравнения кратности m_1. Поскольку эти функции линейно независимы (в этом можно убедиться, вычислив определитель Вронского), они могут быть включены в фундаментальную систему решений уравнения (9.2).

4. Имеются кратные комплексные корни. Пусть $\alpha + i\beta$ – комплексный корень кратности m. Повторяя дословно все рассуждения, проведённые нами в пунктах 3 и 2, покажем, что этому корню отвечают следующие линейно независимые частные решения:

$$e^{\alpha x}\, \cos\beta x,\ x\, e^{\alpha x}\, \cos\beta x,\ x^2\, e^{\alpha x}\, \cos\beta x,\ \ldots, x^{m-1}\, e^{\alpha x}\, \cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\, \sin\beta x,\ x\, e^{\alpha x}\, \sin\beta x,\ x^2\, e^{\alpha x}\, \sin\beta x,\ \ldots, x^{m-1}\, e^{\alpha x}\, \sin\beta x.$$

9.2. Уравнения Эйлера

Уравнениями Эйлера называются уравнения вида

$$a_0\, x^n\, y^{(n)} + a_1\, x^{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, x\, y' + a_n\, y = f(x). \tag{9.18}$$

Решение этого уравнения заменой $x = e^t$, если $x > 0$, или $x = -\, e^t$, если $x < 0$, сводится к решению линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

Действительно,

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{e^t dt} = e^{-t}\, y'_t,\ y'' = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d(e^{-t} y'_t)}{e^t dt} = e^{-2t}\,(y''_{tt} - y'_t),$$

$$y'''_{xxx} = e^{-3t}\,(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t),\ \dots$$

и т.д.

Легко видеть, что после подстановки этих производных, уравнение примет вид

$$a_0\, y^{(n)}_{t^n} + b_1\, y^{(n-1)}_{t^{n-1}} + \dots + b_{n-1}\, y'_t + a_n\, y = f(e^t).$$

Это и есть уравнение с постоянными коэффициентами, которое решается уже известными нам методами.

ЛЕКЦИЯ 10

10.1. Понятие о краевых задачах

В предыдущих лекциях изучение дифференциальных уравнений было в основном посвящено решению задачи Коши, в которой в качестве дополнительных условий задаются начальные данные, определяющие значения неизвестной функции и ее производных при одном фиксированном значении независимой переменной.

Однако часто приходится решать, так называемые, *краевые* или *граничные* задачи. В этих задачах значение искомой функции, ее производных или их линейных комбинаций задается не в одной, а в двух точках, ограничивающих отрезок, на котором требуется определить решение. Например, в задаче о движении материальной точки массы m под действием силы $\vec{F}(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt})$ нужно найти закон движения, если в начальный момент времени t_0 точка находилась в положении $\vec{r}_0$, а в момент t_1 — в положении $\vec{r}_1$.

Задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt})$$

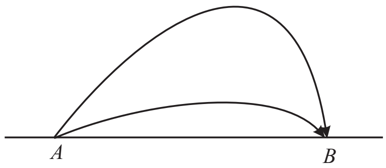

Рис. 9.

с краевыми условиями $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$.

Заметим, что задача, вообще говоря, может совсем не иметь никакого решения или иметь не единственное решение. Так, при стрельбе из точки A в точку B (см. рис. 9) снаряд может лететь как по настильной, так и по навесной траекториям.

Пример. Найти решение уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющее граничным условиям $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$. Общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Исходя из граничных условий, попробуем определить постоянные интегрирования C_1 и C_2. Из первого граничного условия следует $C_1 = 0$, тогда $y(x) = C_2 \sin x$.

Если $x_1 \neq n\pi$, то из второго граничного условия следует $y_1 = C_2\ \sin x_1$, $C_2 = \dfrac{y_1}{\sin x_1}$, $y(x) = y_1\,\dfrac{\sin x}{\sin x_1}$. В этом случае решение поставленной задачи существует и единственно.

Если $x_1 = n\pi$, и $y_1 = 0$, то все кривые пучка $y(x) = C_2 \sin x$ являются графиками решения этой задачи. Решение существует, но оно не единственно.

Если $x_1 = n\pi$, $y_1 \neq 0$, решение задачи не существует.

Рассмотрим подробнее краевые задачи для линейных уравнений второго порядка

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = \varphi(x) \tag{10.1}$$

с линейными граничными условиями вида

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(x_0) + \beta_1 y(x_0) = u_0, \\ \alpha_2 y'(x_1) + \beta_2 y(x_1) = u_1, \end{cases} \qquad x_0 \le x \le x_1, \tag{10.2}$$

где α_i, β_i $(i = 1, 2)$, u_0, u_1 — заданные числа, часть из которых может быть равна нулю, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$, $(i = 1, 2)$.

Если $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2)$, то соответствующее граничное условие обычно называется условием *первого рода*, если $\beta_i = 0$ $(i = 1, 2)$ — условием *второго рода*, а если α_i, β_i $(i = 1, 2)$ одновременно отличны от нуля — условием *третьего рода.*

Краевые задачи, в которых правая часть уравнения не равна нулю, будем называть *неоднородными* краевыми задачами.

Краевые задачи для однородного уравнения с нулевыми граничными условиями $(u_0 = u_1 = 0)$ будем называть *однородными* краевыми задачами.

Если мы рассматриваем краевую задачу первого рода с ненулевыми граничными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \tag{10.3}$$

то легко показать, что линейной заменой переменных

$$z = y - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) \tag{10.4}$$

граничные условия (10.3) сводятся к нулевым $z(x_0) = 0$, $z(x_1) = 0$, причем линейность уравнения не нарушается и уравнение после замены сохранит свой линейный вид

$$z'' + p_1(x)\, z' + \hat{p}_2(x)\, z = \hat{\varphi}(x). \tag{10.5}$$

Вернемся к исходному уравнению (10.1). Умножим его на $e^{\int p_1(x)dx}$, получим

$$y'' \cdot e^{\int p_1(x)dx} + p_1(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx} y' + p_2(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx} y = \varphi(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx}.$$

Легко видеть, что

$$y'' \cdot e^{\int p_1(x)dx} + p_1(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx} y' = \frac{d}{dx}\left(e^{\int p_1(x)dx} y'\right).$$

Обозначим $e^{\int p_1(x)dx} \overset{def}{=} p(x)$, $p_2(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx} \overset{def}{=} -q(x)$, и $\varphi(x) e^{\int p_1(x)dx} \overset{def}{=} f(x)$. (Заметим, что функция $p(x)$ положительна: $p(x) > 0$.)

В результате получим дифференциальное уравнение вида

$$L[\, y\,] \overset{def}{=} \frac{d}{dx}[\, p(x)\, y'\,] - q(x) y = f(x). \tag{10.6}$$

Очевидно, что однородная краевая задача

$$L[\, y\,] = 0, \quad \begin{cases} \alpha_1 y'(x_0) + \beta_1 y(x_0) = 0, \\ \alpha_2 y'(x_0) + \beta_2 y(x_0) = 0, \end{cases} \quad x_0 \le x \le x_1,$$

всегда имеет тождественно равное нулю (так называемое *тривиальное*) решение $y(x) \equiv 0$.

10.2. Задача Штурма — Лиувилля

Важным случаем однородных краевых задач являются так называемые *задачи на собственные значения*. Эти задачи состоят в определении значений параметров, входящих в дифференциальное уравнение, при которых существуют *нетривиальные* решения однородной краевой задачи.

Типичной задачей на собственные значения для линейного дифференциального уравнения второго порядка является задача определения значений параметра λ, при которых существуют нетривиальные на $x_0 \le x \le x_1$ решения задачи

$$L[\,y\,] + \lambda\,\rho(x)\,y(x) = 0, \quad \begin{cases} \alpha_1 y'(x_0) + \beta_1 y(x_0) = 0, \\ \alpha_2 y'(x_1) + \beta_2 y(x_1) = 0, \end{cases} \tag{10.7}$$

где $\rho(x) > 0$ — известная, непрерывная на $[x_0,\ x_1]$ функция.

Такая задача на собственные значения называется *задачей Штурма — Лиувилля.*

Значения параметра λ, при которых задача (10.7) имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а соответствующие им нетривиальные решения — *собственными функциями* краевой задачи на собственные значения.

Собственные функции задачи Штурма — Лиувилля обладают рядом замечательных свойств, которые широко используются не только при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, но и при решении краевых задач уравнений в частных производных.

Имеют место следующие свойства собственных значений и собственных функций краевой задачи (10.7).

Свойство 1. *Существует бесконечное счётное множество* $\{\lambda_n\}$ *собственных значений и соответствующая им бесконечная последовательность* $\{y_n(x)\}$ *собственных функций.*

Это свойство мы доказывать не будем.

Все собственные значения можно занумеровать в порядке возрастания их абсолютной величины $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ...$

Свойство 2. *Каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть одному собственному значению λ_n соответствуют две линейно независимые собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$. (Более двух линейно независимых решений существовать не может, так как порядок уравнения равен двум.)

Используя граничные условия задачи (10.7), можем записать

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1'(x_0) + \beta_1 y_1(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_2'(x_0) + \beta_1 y_2(x_0) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим эту систему как линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно α_1 и β_1. Поскольку заведомо известно, что $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, определитель этой однородной системы, совпадающий с определителем Вронского, должен равняться нулю: $W[\ y_1(x),\ y_2(x)\ ] = 0$. Но это невозможно, т.к. $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые функции, а определитель Вронского линейно независимых функций ни в одной точке не может обратиться в нуль. Полученное противоречие доказывает свойство.

Свойство 3. *В случае граничных условий* $y(x_0) = y(x_1) = 0$ *и при выполнении условия* $q \geq 0$ *все собственные значения краевой задачи (10.7) положительны:* $\lambda_n > 0$.

Доказательство. Умножим уравнение для собственной функции $y_n(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right] - q(x)y_n(x) + \lambda_n\rho(x)y_n(x) = 0$$

на функцию $y_n(x)$ и проинтегрируем результат по $[\,x_0,\ x_1\,]$. Получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right]y_n(x)dx - \int\limits_{x_0}^{x_1}q(x)y_n^2(x)dx + \lambda_n\int\limits_{x_0}^{x_1}\rho(x)y_n^2(x)dx = 0.$$

Преобразуем первый интеграл по частям:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right]y_n(x)dx = \underbrace{p(x)\frac{dy_n}{dx}\cdot y_n(x)\Big|_{x_0}^{x_1}}_{=0} - \int\limits_{x_0}^{x_1}p(x)\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2dx.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю в силу граничных условий. Окончательно получим

$$\lambda_n\int\limits_{x_0}^{x_1}\rho(x)y_n^2(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_1}p(x)\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2dx + \int\limits_{x_0}^{x_1}q(x)y_n^2(x)dx,$$

что и доказывает утверждение.

Свойство 4. *Собственные функции* $y_n(x)$ *образуют на* $[\,x_0,\ x_1\,]$ *ортогональную с весом* $\rho(x)$ *систему* $\{y_n(x)\}$:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}y_n(x)\,y_m(x)\,\rho(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

Доказательство. Поскольку каждому собственному значению отвечает только одна собственная функция, то необходимо рассмотреть только случай, когда собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ соответствуют различным собственным значениям $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Запишем для этих собственных функций уравнения

$$L[y_n(x)] + \lambda_n\,\rho(x)\,y_n(x) = 0, \quad L[y_m(x)] + \lambda_m\,\rho(x)\,y_m(x) = 0.$$

Умножим первое из этих уравнений на $y_m(x)$, второе — на $y_n(x)$, затем проинтегрируем каждое из полученных уравнений по $[x_0,\ x_1]$, и результат интегрирования вычтем почленно один из другого:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}(y_m L[y_n]-y_n L[y_m])dx+(\lambda_n-\lambda_m)\int\limits_{x_0}^{x_1}\rho(x)y_m y_n dx=0.$$

Преобразуя первый интеграл, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y_m\frac{d}{dx}\left(p(x)y_n'\right)-y_n\frac{d}{dx}\left(p(x)y_m'\right)\right)dx+$$

$$+(\lambda_n-\lambda_m)\int\limits_{x_0}^{x_1}\rho(x)y_m y_n dx=0.$$

Это выражение можно легко представить в виде

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left[\left(y_m y_n'-y_n y_m'\right)p(x)\right]dx+(\lambda_n-\lambda_m)\int\limits_{x_0}^{x_1}\rho(x)y_m y_n dx=0,$$

откуда

$$\underbrace{\left[\left(y_m y_n'-y_n y_m'\right)p(x)\right]\Big|_{x_0}^{x_1}}_{=0}+(\lambda_n-\lambda_m)\int\limits_{x_0}^{x_1}\rho(x)y_m y_n dx=0.$$

Здесь первое слагаемое равно нулю, вследствие граничных условий. Поскольку $\lambda_n\neq\lambda_m$, заключаем, что

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}y_n(x)\ y_m(x)\ \rho(x)\ dx=0,\qquad m\neq n.$$

Таким образом, собственные функции задачи Штурма — Лиувилля (а их бесконечно много) образуют ортогональную с весом $\rho(x)$ систему.

Теорема разложимости В.А. Стеклова. *Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[x_0,\ x_1]$ и удовлетворяет однородным граничным условиям*

$$\begin{cases}\alpha_1 f'(x_0)+\beta_1 f(x_0)=0,\\ \alpha_2 f'(x_1)+\beta_2 f(x_1)=0,\end{cases}$$

то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[x_0,\ x_1]$ *ряд по собственным функциям* $y_n(x)$ *задачи Штурма — Лиувилля:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x). \tag{10.8}$$

Доказательство теоремы Стеклова здесь не будем приводить. Укажем только, что свойство ортогональности собственных функций позволяет легко определить коэффициенты разложения a_n. Действительно, умножая обе части формулы (10.8) на $y_m(x)\,\rho(x)$ и интегрируя результат по $[\,x_0,\ x_1\,]$ (почленное интегрирование ряда возможно в силу его равномерной сходимости), получаем

$$a_m = \frac{\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x) y_m(x) \rho(x) dx}{\int\limits_{x_0}^{x_1} y_m^2(x) \rho(x) dx}. \tag{10.9}$$

Выражение в знаменателе называется квадратом нормы собственной функции и обозначается

$$\|y_m\|^2 = N_m^2 = \int\limits_{x_0}^{x_1} y_m^2(x) \rho(x) dx. \tag{10.10}$$

Так как собственные функции определены с точностью до постоянного множителя, то во многих случаях их нормируют так, чтобы $N_m = 1$. В этом случае система $\{y_n(x)\}$ является ортонормированной.

Пример. Хорошо известное уравнение

$$y'' + a^2 y = 0, \tag{10.11}$$

очевидно, является частным случаем более общего уравнения (10.7)

$$\frac{d}{dx}\,[\,p(x)\ y'\,] - q(x) y + \lambda\,\rho(x)\ y(x) = 0,$$

если положить в последнем

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = 1, \quad \lambda = a^2.$$

Найдем решение уравнения (10.11), удовлетворяющее граничным условиям $y(0) = y(l) = 0$. Иначе говоря, решим для этого уравнения задачу Штурма — Лиувилля.

Общее решение имеет вид $y(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$. Из первого граничного условия следует, что $C_1 = 0$, следовательно, $y(x) = C_2 \sin ax$. Вследствие второго граничного условия, $y(k) = C_2 \sin al = 0$. Так как C_2 не может быть равным нулю, потребуем $\sin al = 0$. Тогда $al = \pi n$, $a = \dfrac{\pi n}{l}$, $a^2 = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2 \stackrel{def}{=} \lambda_n$.

Ясно, что этот результат является очевидным отражением свойств 1 и 3 краевой задачи (10.7).

Решение уравнения (10.11), удовлетворяющее поставленным граничным условиям, имеет вид $y(x) = C_2 \sin \dfrac{n\pi}{l} x$. Такой вид решения является отражением свойства 2: каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция.

Из курса математического анализа известно, что функции $\sin \dfrac{n\,\pi}{l}\, x$, $(n = 1,\ 2,\ 3,\ ...)$ образуют на интервале $(0,\ l)$ ортогональную систему функций с весом равным 1, по которой заданную на интервале $(0,\ l)$ функцию $f(x)$ можно разложить в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

где

$$\beta_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, (n = 1, 2, 3, ...).$$

Этот результат, очевидно, является отражением доказанного нами ранее свойства 4 и теоремы разложимости В.А. Стеклова.

ЛЕКЦИЯ 11

11.1. Функция Грина

Рассмотрим первую краевую задачу с нулевыми граничными условиями

$$\frac{d}{dx}\,[\,p(x)\,y'\,] - q(x)y = f(x), \qquad y(x_0) = y(x_1) = 0 \tag{11.1}$$

и укажем способ построения решения этой задачи. Для этого нам понадобится *функция Грина.*

Определение. *Функцией Грина* $G(x,s)$ *краевой задачи (11.1) называется функция, обладающая свойствами:*

1) $G(x,s)$ *непрерывна по* x *при фиксированном* s *при* $x_0 \le x \le x_1, \quad x_0 \le s \le x_1,$

2) $G(x,s)$ *является решением соответствующего однородного уравнения* $\dfrac{d}{dx}\,[\,p(x)\,y'\,] - q(x)y = 0$ *на всем отрезке* $[\,x_0,\ x_1\,]$, *за исключением точки* $x = s$,

3) $G(x,s)$ *удовлетворяет граничным условиям* $G(x_0,s) = G(x_1,s) = 0$,

4) в точке $x = s$ *производная* $G'_x(x,s)$ *должна иметь разрыв первого рода со скачком* $\dfrac{1}{p(s)}$.

Непосредственной подстановкой в уравнение $\dfrac{d}{dx}\,[\,p(x)\,y'\,] - q(x)y = f(x)$ проверим, что

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,s)\,f(s)\,ds \tag{11.2}$$

является решением задачи (11.1).

Граничные условия, очевидно, выполняются в силу свойства 3) функции Грина. Покажем, что функция (11.2) удовлетворяет уравнению (11.1). Для этого найдём $y'(x)$ и $y''(x)$ и подставим их в уравнение (11.1).

$$y'(x) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G'_x(x,s)f(s)ds = \int\limits_{x_0}^{x} G'_x(x,s)f(s)ds + \int\limits_{x}^{x_1} G'_x(x,s)f(s)ds.$$

Для того чтобы найти вторую производную, воспользуемся уже знакомой формулой дифференцирования интеграла, зависящего от параметра: если $F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,s)ds$, то $\dfrac{dF}{dx} =$
$\dfrac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,s)ds = f\left(x,\psi(x)\right)\psi'_x - f\left(x,\varphi(x)\right)\varphi'_x + \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x,s)ds.$
Получим

$$y''(x) = \int\limits_{x_0}^{x} G''_{xx}(x,s)f(s)ds + G'_x(x,x-0)f(x) +$$
$$+ \int\limits_{x}^{x_1} G''_{xx}(x,s)f(s)ds - G'_x(x,x+0)f(x) =$$
$$= \int\limits_{x_0}^{x} G''_{xx}(x,s)f(s)ds + f(x)\left[G'_x(x,x-0) - G'_x(x,x+0)\right] =$$
$$= \int\limits_{x_0}^{x} G''_{xx}(x,s)f(s)ds + f(x)\left[G'_x(x+0,x) - G'_x(x-0,x)\right].$$

Подставим $y'(x)$, $y''(x)$ в уравнение (11.1). В силу условий 2) и 4) нетрудно видеть, что это уравнение действительно выполнено тождественно:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \underbrace{\left[p(x)G''_{xx}(x,s) + p'_x(x)\cdot G'_x(x,s) - q(x)G(x,s)\right]}_{=0} f(s)ds +$$

$$+p(x)\underbrace{\left[G'_x(x+0,x)-G'_x(x-0,x)\right]}_{=1/p(x)}f(x)\equiv f(x).$$

11.2 Метод построения функции Грина

Мы знаем, что функция Грина удовлетворяет однородному линейному уравнению $\dfrac{d}{dx}[\,p(x)\,y'\,]-q(x)y=0$. Найдем решение $y_1(x)$ этого уравнения, определяемое начальными условиями $y_1(x_0)=0,\ \ y_1'(x_0)\neq\ 0$, и удовлетворяющее требованию $y_1(x_1)\neq\ 0$. (Случай $y_1(x_0)=y_1(x_1)=0$ является исключительным и мы не будем его здесь рассматривать.) Очевидно, что $C_1\cdot y_1(x)$, где C_1 — постоянная, также является решением того же уравнения и удовлетворяет граничному условию $C_1\cdot y_1(x_0)=0$.

Аналогично найдём нетривиальное решение $y_2(x)$, удовлетворяющее условию $y_2(x_1)=0$. Этому же условию удовлетворяют все решения семейства $C_2\cdot y_2(x)$, где C_2 — произвольная постоянная.

Функцию Грина ищем в виде

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1(s)\,y_1(x) & \text{при}\ \ x_0\le x\le s,\\ C_2(s)\,y_2(x) & \text{при}\ \ s\le x\le x_1,\end{cases} \tag{11.3}$$

причём постоянные $C_1(s)$ и $C_2(s)$ выберем так, чтобы выполнялись свойства 1) — 4), которыми должна обладать функция Грина, то есть функция $G(x,s)$ была бы непрерывна по x при фиксированном s и, в частности, непрерывна в точке $x=s$, а производная функции Грина $G'_x(x,s)$ в точке $x=s$ имела скачок $\dfrac{1}{p(s)}$:

$$\begin{cases} C_1\, y_1(s) - C_2\, y_2(s) = 0, \\ C_2\, y_2'(s) - C_1\, y_1'(s) = \dfrac{1}{p(s)}. \end{cases} \tag{11.4}$$

В силу предположения $y_1(x_0) = 0$, $y_1(x_1) \neq 0$ и $y_2(x_1) = 0$, $y_2(x_0) \neq 0$, решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, так как линейно зависимые от $y_1(x)$ решения имеют вид $C_1\, y_1(x)$ и, следовательно, при $C_1 \neq 0$ не обращаются в нуль в точке x_1, в которой обращается в нуль решение $y_2(x)$. Это означает, что определитель Вронского $W[\, y_1,\; y_2\,] \equiv W(x)$ решений $y_1,\; y_2$ в любой точке отличен от нуля и постоянные C_1 и C_2 легко находятся: $C_1 = \dfrac{y_2(s)}{W(s)p(s)}$, $C_2 = \dfrac{y_1(s)}{W(s)p(s)}$, откуда

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(s)}{W(s)p(s)} & \text{при } x_0 \le x \le s, \\ \dfrac{y_2(x)y_1(s)}{W(s)p(s)} & \text{при } s < x \le x_1. \end{cases} \tag{11.5}$$

Пример. Найти функцию Грина краевой задачи

$$y''(x) + y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\pi/2\right) = 0.$$

Решения соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющего поставленным граничным условиям, имеют вид $y_1(x) = C_1 \sin x$, $y_2(x) = C_2 \cos x$. Следовательно,

$$G(x,s) = \begin{cases} -\cos s \sin x & \text{при } 0 \le x \le s\,, \\ -\sin s \cos x & \text{при } s < x \le \pi/2\,. \end{cases}$$

11.3 Физическая интерпретация функции Грина

Во многих задачах решение $y(t)$ уравнения

$$y'' + p_1(t)\, y' + p_2(t)\, y = f(t) \tag{11.6}$$

описывает смещение некоторой системы (например, струны), $f(t)$ — силу, действующую на эту систему, t — время. Предположим, что при $t < s$ система находилась в состоянии покоя, а ее смещение вызывается силой $f_\varepsilon(t)$, отличной от нуля лишь в промежутке $s < t \le s + \varepsilon$, причём импульс этой силы равен единице: $\int\limits_s^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(t)dt = 1$. Согласно формуле (11.2), решение уравнения (11.6) может быть записано в виде $y_\varepsilon(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t,s) f_\varepsilon(s) ds$. Поскольку подынтегральная функция отлична от нуля только в промежутке $s < t \le s + \varepsilon$, то равенство может быть продолжено: $\int\limits_{t_0}^{t_1} G(t,s) f_\varepsilon(s) ds = \int\limits_s^{s+\varepsilon} G(t,s) f_\varepsilon(s) ds$. Если $G(t,s)$ — непрерывная по s функция, то к последнему интегралу можно применить теорему о среднем: $\int\limits_s^{s+\varepsilon} G(t,s) f_\varepsilon(t) dt =$ $= G(t,s^*) \underbrace{\int\limits_s^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(s) ds}_{=1} = G(t,s^*)$, где $s^* \in (s, s+\varepsilon)$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(t) = y(t) = G(t,s)$.

Таким образом, *функция Грина описывает мгновенное воздействие на систему силы единичного импульса.*

ЛЕКЦИЯ 12

12.1. Системы дифференциальных уравнений

Обратимся к физической задаче о движении материальной точки массы m под действием силы $\vec{F}(t, \vec{r}, \dfrac{d\vec{r}}{dt})$. По второму закону Ньютона

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t,\ \vec{r},\ \frac{d\vec{r}}{dt}), \tag{12.1}$$

где $\vec{F} = \vec{i}\,P + \vec{j}\,Q + \vec{k}\,R$. В координатной записи это векторное уравнение может быть представлено в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} m\ddot{x} = P(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} = Q(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} = R(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{cases} \tag{12.2}$$

Если принять за неизвестные функции не только $x(t), y(t),\ z(t)$ но и их производные $\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)$, то получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \\ \dot{z} = w, \\ m\dot{u} = P(t, x, y, z, u, v, w), \\ m\dot{v} = Q(t, x, y, z, u, v, w), \\ m\dot{w} = R(t, x, y, z, u, v, w). \end{cases} \tag{12.3}$$

Как известно, для того чтобы решить поставленную задачу описания траектории движения точки, необходимо задать начальное положение $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$ и скорость $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$, $w_0 = w(t_0)$ точки.

Обобщение такой задачи на n-мерный случай приводит к необходимости рассмотреть при наличии начальных условий $x_i(t_0) = \overset{0}{x}_i \ (\equiv x_{i\,0})$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases} \tag{12.4}$$

Удобно ввести в n-мерном евклидовом пространстве вектор-функции

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots\dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}.$$

Тогда система (12.4) может быть записана в более компактном виде

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X) \tag{12.4*}$$

с начальными условиями $X(t_0) = X_0$.

Решением системы (12.4) будет $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ... , $x_n = \varphi_n(t)$, или кратко

$$X = \Phi(t) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \dots\dots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix},$$

— что является интегральной кривой в евклидовом пространстве с координатами $(t, x_1, x_2, ..., x_n)$.

В физике и механике системе (12.4) или, эквивалентно, (12.4*) даётся более естественная интерпретация. Система (12.4*) называется *динамической системой*, переменная t принимается за время, и тогда $X = \Phi(t)$ описывает траекторию движения точки, $\dfrac{dX}{dt}$ — скорость точки в n-мерном евклидовом пространстве, которое в физике называют *фазовым пространством,* а траекторию — *фазовой траекторией.* Динамическая система (12.4*) в данный момент времени t определяет в n-мерном фазовом пространстве поле скоростей. Если правая часть $F(t, X)$ зависит от времени, то поле скоростей меняется со временем и фазовые траектории могут пересекаться. Если же $F = F(X)$, то поле скоростей стационарно, и, следовательно, через каждую точку фазового пространства $(x_1, x_2, ..., x_n)$ будет проходить лишь одна траектория.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = -x.$$

Представим ее в виде $\dfrac{dx}{y} = -\dfrac{dy}{x} = dt$, получим $\dfrac{dx}{y} + \dfrac{dy}{x} = 0$. Это уравнение легко интегрируется $x^2 + y^2 = C_1^2$ или в параметрическом виде $x = C_1 \cos\varphi$, $y = C_1 \sin\varphi$. Подставив x и y в исходную систему, получим единственное уравнение для определения функции $\varphi(t)$: $\dfrac{d\varphi}{dt} = -1$, откуда $\varphi(t) = -t + C_2$. Таким образом, общее решение системы

$$x = C_1 \cos(t - C_2), \ \ y = -C_1 \sin(t - C_2).$$

На фазовой плоскости это решение описывает семейство концентрических окружностей, а начало координат является точкой покоя системы.

12.2. Сведение системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению старшего порядка

Рассмотрим общий случай. Предположим, что в системе (12.4) функции f_i имеют непрерывные частные производные до $(n-1)$-го порядка включительно. Подставив в (12.4) некоторое решение $x_i = x_i(t)$, получим n тождеств. Дифференцируя первое тождество по t, получим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt},$$

или, вследствие самого первого уравнения нашей системы (12.4),

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} f_k \overset{def}{=} F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n).$$

(Здесь получившуюся в результате подстановки правую часть равенства мы обозначили $F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n)$.) Дифференцируя последовательно это тождество n раз, получим

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_k} f_k \overset{def}{=} F_3(t, x_1, x_2, ..., x_n),$$

....

$$\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} \overset{def}{=} F_{n-1}(t, x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} \overset{def}{=} F_n(t, x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (12.5)$$

В результате мы получили $n-1$ тождество

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{d^3x_1}{dt^3} = F_3(t, x_1, x_2, ..., x_n)\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases} \tag{12.6}$$

Выражая из этих тождеств $x_2,\ x_3,\ \dots, x_n$ через $t,\ x_1,$ $\dfrac{dx_1}{dt},\ \dfrac{dx_2}{dt},\ \dots, \dfrac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}},$ получим

$$\begin{cases} x_2 = \Psi_2\left(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{d^2x_1}{dt^2}, ..., \dfrac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right), \\ x_3 = \Psi_3\left(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{d^2x_1}{dt^2}, ..., \dfrac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \Psi_n\left(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{d^2x_1}{dt^2}, ..., \dfrac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right). \end{cases} \tag{12.7}$$

(Это всегда можно сделать, если все якобианы $\dfrac{D\,(f, F)}{D(t, x)} \neq 0$ для всех рассматриваемых значений $(t, x_1, x_2, ..., x_n)$.) Подставляя полученные $x_2,\ x_3,\ \dots, x_n$ в последнее тождество (12.5), имеем

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right). \tag{12.8}$$

Этому соотношению удовлетворяет всякое решение $x_1(t)$ из решений системы (12.4).

Можно доказать (мы этого делать не будем), что если $\forall\, x_1 = \varphi_1(t)$ удовлетворяет уравнению (12.8), то, определив из (12.7) $x_2 = \varphi_2(t),\ x_3 = \varphi_3(t),\ \dots, x_n = \varphi_n(t)$, получим, что набор функций $\{\ \varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \dots, \varphi_n(t)\ \}$ есть решение нашей системы уравнений (12.4).

Таким образом, решение системы дифференциальных уравнений может быть сведено к решению одного дифференциального уравнения n-го порядка. Ранее нами уже был проведен и обратный процесс, а именно, что решение уравнения n-го порядка может быть сведено к решению системы n дифференциальных уравнений первого порядка.

Замечание. Если указанный выше процесс применить к линейной однородной системе $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k, \quad i = 1, 2, ..., n,$ то (12.8) тоже будет линейным однородным уравнением n-го порядка. Если при этом $a_{ik} = const$, то и (12.8) будет линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами. Аналогичное замечание справедливо и для неоднородной системы $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\ x_k + \psi_i(t)$.

12.3. Интегрирование систем дифференциальных уравнений путем нахождения интегрируемых комбинаций

Определение. *Интегрируемой комбинацией* называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием комбинирования уравнений системы (12.4), но уже легко интегрирующееся: $d\,\Phi(t, x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Отсюда

$$\Phi(\ t,\ x_1,\ x_2,\ \dots,x_n\ )\ =\ C. \tag{12.9}$$

Данное выражение называется *первым интегралом системы* (12.4).

Другими словами, первым интегралом $\Phi(t,\ x_1,\ x_2,\ \dots,x_n) = C$ системы (12.4) называется соотношение, обращающееся в тождество при некотором C, если $x_1,\ x_2,\ \dots,x_n$ заменить решением $x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t),\ \dots,x_n = \varphi_n(t)$ системы (12.4).

Часто под первым интегралом понимают левую часть равенства (12.9) как *функцию, не равную тождественно постоянной, но сохраняющую постоянные значения вдоль интегральных кривых системы* (12.4).

Если найдено s интегрируемых комбинаций, то может быть получено s первых интегралов $\Phi_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_1$, $\Phi_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_2$, ..., $\Phi_s(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_s$, и если эти первые интегралы функционально независимы, то есть $\dfrac{D(\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_s)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_s})} \neq 0$, то s независимых функций из набора $x_1,\ x_2,\ \dots,x_n$ можно выразить через остальные и, подставляя их в систему (12.4), придем к системе уравнений с меньшим числом неизвестных. При $s = n$, а также когда все интегралы независимы, все неизвестные функции могут быть определены из системы $\Phi_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_1$, $\Phi_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) = = C_2$, ..., $\Phi_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_n$.

Систему (12.4) иногда удобно представить в виде

$$\frac{dx_1}{f_1(t,x)} = \frac{dx_2}{f_2(t,x)} = \ \dots\ = \frac{dx_n}{f_n(t,x)} = \frac{dt}{1}.$$

Обозначая $t = x_0$ и переобозначая удобным образом переменные, можно получить систему, записанную в *симметричной форме*

$$\frac{dx_0}{A_0(x_0, x_1, ..., x_n)} = \frac{dx_1}{A_1(x_0, x_1, ..., x_n)} = \ ... \ = \frac{dx_n}{A_n(x_0, x_1, ..., x_n)}.$$

Преимуществом такой формы записи системы является то, что в эту систему все переменные $x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ входят *равноправно,* тогда как в нормальной системе (12.4) такого равноправия нет: $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ рассматриваются как функции, а t — как независимая переменная.

Симметричная форма системы уравнений может оказаться очень полезной для нахождения интегрируемых комбинаций. Для этого можно воспользоваться свойством равных дробей: если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = t,$$

то при любых $k_1,\ k_2,\ ...\ , k_n$ имеем

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + ... + k_n b_n} = t.$$

ЛЕКЦИЯ 13

13.1. Системы линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) x_k + f_i(t) \ \ (i = 1, 2, ..., n). \qquad (13.1)$$

Эта система может быть записана в матричной форме

$$\frac{dX}{dt} = AX + F, \qquad (13.1^*)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t)\ a_{12}(t)\ ...\ a_{1n}(t) \\ a_{21}(t)\ a_{22}(t)\ ...\ a_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}(t)\ a_{n2}(t)\ ...\ a_{nn}(t) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots\dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots\dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Если все $f_i(t) \equiv 0$, то есть матрица-столбец $F(t) \equiv 0$, система называется *однородной.* При $F(t) \neq 0$, то есть когда хотя бы одна $f_i(t) \neq 0$, система называется *неоднородной.*

Введём в рассмотрение линейный оператор

$$L(\ \ ) \overset{def}{=} \frac{d}{dt} - A. \qquad (13.2)$$

Тогда систему уравнений (13.1^*) можно записать в виде $L(X) = 0$ для однородной системы и $L(X) = F(t)$ для неоднородной.

Рассмотрим некоторые свойства оператора $L(\ \ )$.

Свойство 1. *Оператор* $L(\ \ )$ *линеен:* $L(C_1X_1 + C_2X_2) = C_1L(X_1) + C_2L(X_2)$.

Действительно, $\frac{d}{dt}(C_1X_1 + C_2X_2) - A(C_1X_1 + C_2X_2) = C_1\left(\frac{dX_1}{dt} - AX_1\right) + C_2\left(\frac{dX_2}{dt} - AX_2\right) = C_1\ L(X_1) + C_2\ L(X_2)$.

Свойство 2. *Линейная комбинация* $\sum\limits_{s=1}^{m} C_sX_s$ *с постоянными коэффициентами решений* $X_1,\ X_2,\ \dots, X_s$ *линейной однородной системы также является решением этой системы дифференциальных уравнений.*

Доказательство. $L\left(\sum\limits_{s=1}^{m} C_s X_s\right) = \sum\limits_{s=1}^{m} C_s \underbrace{L\left(X_s\right)}_{=0} = 0.$

Свойство 3. *Если линейная однородная система имеет комплексное решение* $X = U(t) + iV(t)$, *то*

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots\dots\dots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \dots\dots\dots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$$

— также решения этой системы.

Доказательство. $L(X) = L(U + iV) = L(U) + iL(V) = = 0 \ \Rightarrow \ L(U) = 0, \quad L(V) = 0,$ поскольку комплексная величина равна нулю тогда и только тогда, когда действительная и мнимая части этой комплексной величины равны нулю. Таким образом, U и V — решения системы.

Определение. Векторы $X_1, \ X_2, \ \dots, X_n$ называются *линейно зависимыми* на сегменте $t \in [\ a, \ b\ ]$, если существуют такие постоянные $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \dots, \lambda_n$, среди которых хотя бы одно число $\lambda_k \neq 0$, что линейная комбинация $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n = 0$. Если же это соотношение выполнено тогда и только тогда, когда все $\lambda_k = 0$, то векторы $X_1, \ X_2, \ \dots, X_n$ *линейно независимы.*

Из матриц-столбцов

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ \dots, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

составим квадратную матрицу

$$W(t)=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей Вронского.* Здесь, как всегда, первый индекс обозначает строку, а второй — столбец. Определитель этой матрицы называется *определителем Вронского* или *вронскианом.*

Теорема 1 (о линейной зависимости системы решений). *Если определитель Вронского решений* $X_1,\ X_2,\ \dots, X_n$ *однородной системы линейных дифференциальных уравнений с непрерывными на сегменте* $[\,a,\ b\,]$ *коэффициентами* $a_{ik}(t)$ *равен нулю хотя бы в одной точке* $t_0 \in [\,a,\ b\,]$, *то решения* $X_1,\ X_2,\ \dots, X_n$ *линейно зависимы на* $[\,a,\ b\,]$ *и, следовательно,* $\det W(t) \equiv 0$ *на* $[\,a,\ b\,]$.

Доказательство. Вследствие непрерывности коэффициентов $a_{ik}(t)$, выполняется теорема существования и единственности решения для системы дифференциальных уравнений. Следовательно, начальное значение $X(t_0)=0$ определяет единственное решение $X(t)\equiv 0$ однородной системы.

Поскольку $\det W(t_0)=0$, то существует такая система постоянных $C_1,\ C_2,\ \dots, C_n$, среди которых хотя бы одна C_i отлична от нуля, что

$$C_1X_1(t_0)+C_2X_2(t_0)+\dots+C_nX_n(t_0)=0, \qquad (13.3)$$

что эквивалентно системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1\, x_{11}(t_0) + C_2\, x_{12}(t_0) + \ \dots\ + C_n\, x_{1n}(t_0) = 0, \\ C_1\, x_{21}(t_0) + C_2\, x_{22}(t_0) + \ \dots\ + C_n\, x_{2n}(t_0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1\, x_{n1}(t_0) + C_2\, x_{n2}(t_0) + \ \dots\ + C_n\, x_{nn}(t_0) = 0 \end{cases}$$

с определителем равным нулю. Соответствующее этой нетривиальной системе постоянных $C_1,\ C_2,\ \dots,C_n$ решение $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(t)$ в силу (13.3) удовлетворяет начальному условию $X(t_0) = 0$. Но тогда $X(t) \equiv 0$, и мы на всём сегменте $[a,\ b]$ имеем $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(t) \equiv 0$, при этом хотя бы одна из C_i отлична от нуля. Это означает линейную зависимость на $[a,\ b]$ системы решений $X_1,\ X_2,\ \dots,X_n$. Теорема доказана.

Теорема 2(об общем решении линейной однородной системы.) *Линейная комбинация* $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(t)$ *с произвольными постоянными* n *линейно независимых решений* $X_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *однородной системы линейных уравнений с непрерывными на сегменте* $[a,\ b]$ *коэффициентами* $a_{ik}(t)$ *является общим решением этой системы дифференциальных уравнений.*

Доказательство. Покажем, что какое бы частное решение, отвечающее начальным значениям $\overset{*}{X}(t_0) = \overset{*}{X}_0$ (то есть $\overset{*}{x}_1(t_0) = \overset{*}{x}_{10},\ \overset{*}{x}_2(t_0) = \overset{*}{x}_{20},\ \dots,\overset{*}{x}_n(t_0) = \overset{*}{x}_{n0},$), ни взять, всегда найдутся такие $\overset{*}{C}_i$, что $\overset{*}{X}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overset{*}{C}_i\, X_i(t)$. (Иначе говоря, надо показать, что подбором постоянных C_i в решении $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, X_i(t)$ можно удовлетворить любым произвольно выбранным начальным условиям $X(t_0) = X_0$.)

В силу теоремы существования и единственности решения, это требование эквивалентно тому, что должно быть удовлетворено векторное уравнение $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, X_i(t_0) = X_0$, где C_i считаются неизвестными величинами, или подробно

$$\begin{cases} C_1\, x_{11}(t_0) + C_2\, x_{12}(t_0) + \ \dots\ + C_n\, x_{1n}(t_0) = \overset{0}{x}_1, \\ C_1\, x_{21}(t_0) + C_2\, x_{22}(t_0) + \ \dots\ + C_n\, x_{2n}(t_0) = \overset{0}{x}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1\, x_{n1}(t_0) + C_2\, x_{n2}(t_0) + \ \dots\ + C_n\, x_{nn}(t_0) = \overset{0}{x}_n\,. \end{cases}$$

Определитель данной системы — это определитель Вронского нашей линейно независимой системы решений. Поэтому он отличен от нуля, $\det W(t) \neq 0$. Следовательно, система всегда имеет единственное решение, которое может быть найдено, например, по формулам Крамера.

Теорема 3(об общем решении линейной неоднородной системы). *Если* $Y(t)$ *– частное решение неоднородной системы* $L\,(X(t)) = F(t)$, *то* $X(t) = Y(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, X_i(t)$, *где* $X_i(t)$ *— линейно независимые решения соответствующей однородной системы* $L\,(X(t)) = 0$, *а* C_i *— произвольные постоянные, есть общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений.*

Доказательство. Вместо неизвестного вектора $X(t)$ введём новый вектор $Z(t) = X(t) - Y(t)$. Тогда $L\,(Z(t)) = L\,(X(t)) - L\,(Y(t)) = 0$, поскольку $L\,(X(t)) = L\,(Z(t) + Y(t)) = L\,(Z(t)) + \underbrace{L\,(Y(t))}_{\equiv F(t)} = F(t) \ \Rightarrow\ L\,(Z(t)) = 0.$

Если $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ — система линейно независимых решений однородной системы $L\,(Z(t)) = 0$, то $Z(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(t)$

— общее решение этой однородной системы. Отсюда $X(t) = Y(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, X_i(t)$ есть общее решение неоднородной системы. Оно действительно общее, поскольку какое бы решение $\tilde{Y}(t)$, отвечающее произвольным начальным данным $\tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$, мы не взяли, найдутся такие постоянные $\tilde{C}_1,\ \tilde{C}_2,\ \dots,\tilde{C}_n$, что $\tilde{Y}(t) = Y(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{C}_i X_i(t)$, так как система алгебраических уравнений

$$
\begin{cases}
\tilde{C}_1\, x_{11}(t_0) + \tilde{C}_2\, x_{12}(t_0) + \ \dots\ + \ \tilde{C}_n\, x_{1n}(t_0) = \ \overset{0}{\tilde{y}_1} \ - y_1(t_0),\\
\tilde{C}_1\, x_{21}(t_0) + \tilde{C}_2\, x_{22}(t_0) + \ \dots\ + \ \tilde{C}_n\, x_{2n}(t_0) = \ \overset{0}{\tilde{y}_2} \ - y_2(t_0),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\tilde{C}_1\, x_{n1}(t_0) + \tilde{C}_2\, x_{n2}(t_0) + \ \dots\ + \ \tilde{C}_n\, x_{nn}(t_0) = \ \overset{0}{\tilde{y}_n} \ - y_n(t_0)
\end{cases}
$$

имеет единственное решение, которое может быть найдено, например, по формулам Крамера. Определитель этой системы совпадает с определителем Вронского для системы линейно независимых функций и поэтому отличен от нуля.

Теорема 4(о суперпозиции решений.)*Решением системы* $L\,(X(t)) = F_1(t) + F_2(t) + \dots + F_s(t)$ *является сумма всех решений* $X_1(t),\ X_2(t),\ \dots,X_s(t)$ *уравнений* $L\,(X(t)) = F_1(t),\ L\,(X(t)) = F_2(t),\ \dots,L\,(X(t)) = F_s(t)$.

Доказательство. Дано:

$$L\,(X_1(t)) \equiv F_1(t),\ \ L\,(X_2(t)) \ \equiv\ F_2(t),\ \dots,L\,(X_s(t)) \ \equiv\ F_s(t).$$

Тогда $\quad L\,(X_1(t) + X_2(t) + \ \dots\ + X_s(t)) =$
$= L\,(X_1(t)) + L\,(X_2(t)) + \dots + L\,(X_s(t)) \equiv F_1(t) + F_2(t) + \ \dots\ + F_s(t)$,
то есть сумма решений $X_1(t) + X_2(t) + \ \dots\ + X_s(t)$ действительно

является решением системы $L\left(X(t)\right)=F_1(t)+F_2(t)+\ldots+F_s(t)$.

Как следствие этой теоремы имеем, что если система

$$L\left(X(t)\right)=U(t)+i\,V(t)$$

имеет решение $Z=\tilde{X}(t)+i\,\tilde{Y}(t)$, то $L\left(\tilde{X}(t)\right)\equiv U(t), L\left(\tilde{Y}(t)\right)\equiv$ $\equiv V(t)$. Иначе говоря, функции $\tilde{X}(t)$ и $\tilde{Y}(t)$ являются решениями уравнений $L\left(X(t)\right)=U(t)$ и $L\left(Y(t)\right)=V(t)$.

13.2. Метод вариации произвольных постоянных

Решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt}-A(t)X=F(t) \tag{13.4}$$

ищем в виде

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i(t)\,X_i(t), \tag{13.5}$$

где $X_1(t)$, $X_2(t)$, ... , $X_n(t)$ — система линейно независимых решений однородной системы $\dfrac{dX}{dt}-A(t)X=0$, а $C_i(t)$ — неизвестные пока функции. Для нахождения этих функций подставим решение (13.5) в исходную систему (13.4):

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(t)X_i(t)+\sum_{i=1}^{n}C_i(t)\frac{dX_i(t)}{dt}-A(t)\sum_{i=1}^{n}C_i(t)X_i(t)=F(t).$$

Но $X_i(t)$ — решения однородной системы, то есть

$$\frac{dX_i}{dt}\equiv A(t)X_i(t),$$

и, следовательно, второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются. Остаётся $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(t)\, X_i(t) = F(t)$, что эквивалентно

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_{1i}(t) = f_1(t), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_{2i}(t) = f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_{ni}(t) = f_n(t). \end{cases}$$

Поскольку $\det W(t) \neq 0$, то существует единственное решение этой системы, которое может быть найдено, например, по формулам Крамера: $C_i'(t) = \varphi_i(t)$. Интегрируя, легко получить $C_i(t) = \int \varphi_i(t)\, dt + k_i$, $k_i - const$.

Таким образом,

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\int \varphi_i(t)\, dt\Big) X_i(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i\, X_i(t)$$

— общее решение системы.

ЛЕКЦИЯ 14

14.1. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется система

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k(t) + f_i(t), \tag{14.1}$$

где $a_{ik} - const$, или в матричном виде

$$\frac{dX}{dt} = AX - F(t), \tag{14.1*}$$

матрица $A = \|a_{ik}\|$ — числовая матрица.

Существуют два варианта решения этой системы.

Первый вариант решения системы (14.1) состоит в том, чтобы свести решение системы к решению дифференциального уравнения более высокого порядка. Ясно, что это будет линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, которое мы уже решали ранее.

Второй вариант решения системы (14.1) состоит в том, чтобы найти линейно независимую систему решений $X_1(t)$, $X_2(t)$, ... , $X_n(t)$ соответствующей однородной системы

$$\frac{dX}{dt} = AX, \tag{14.2}$$

а затем либо применить метод вариации произвольных постоянных, либо найти некоторое частное решение $Y(t)$ неоднородной системы. Тогда $X(t) = Y(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, X_i(t)$, C_i — произвольные постоянные.

Таким образом, необходимо найти способ получения n линейно независимых решений однородной системы. Будем искать решение системы (14.2) в виде

$$X(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ .... \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \qquad \text{Тогда} \quad \frac{dX(t)}{dt} = \lambda\, e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ .... \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в (14.2) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим

$$\begin{pmatrix} \lambda\, \alpha_1 \\ \lambda\, \alpha_2 \\ .... \\ \lambda\, \alpha_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ .... \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad (A - \lambda\, E) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ .... \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0,$$

где E — единичная матрица. В результате имеем однородную систему линейных алгебраических уравнений с одним параметром λ для определения неизвестных $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\alpha_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\,\alpha_1 + a_{12}\,\alpha_2 + \dots + a_{1n-1}\,\alpha_{n-1} + a_{1n}\,\alpha_n = 0, \\ a_{21}\,\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\,\alpha_2 + \dots + a_{2n-1}\,\alpha_{n-1} + a_{2n}\,\alpha_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\,\alpha_1 + a_{n2}\,\alpha_2 + \dots + a_{nn-1}\,\alpha_{n-1} + (a_{nn}-\lambda)\,\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{14.3}$$

Эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, то есть

$$\det(A-\lambda E)=0. \tag{14.4}$$

Уравнение (12.4) — это алгебраическое уравнение n-го порядка, называемое *характеристическим уравнением.* Из линейной алгебры следует что λ – собственные значения матрицы A, а

неизвестные векторы $\begin{pmatrix} \overset{(i)}{\alpha}_1 \\ \overset{(i)}{\alpha}_2 \\ \dots. \\ \overset{(i)}{\alpha}_n \end{pmatrix}$ $(i=1,\ 2,\ \dots,n)$ — собственные

векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\lambda_n$. Среди этих собственных значений λ_i имеются как вещественные, так и комплексные; как однократные, так и кратности $r>1$.

14.2. Простые корни характеристического полинома

Все корни характеристического полинома однократные, то есть все различны между собой: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$. В этом случае, как мы знаем из курса линейной алгебры, существует

n собственных векторов

$$X_1 = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} \overset{(1)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(1)}{\underset{2}{\alpha}} \\ \dots \\ \overset{(1)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad X_2 = e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} \overset{(2)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(2)}{\underset{2}{\alpha}} \\ \dots \\ \overset{(2)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix}, \ \dots\ , X_n = e^{\lambda n t}\begin{pmatrix} \overset{(n)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(n)}{\underset{2}{\alpha}} \\ \dots \\ \overset{(n)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

Среди собственных значений могут быть комплексные. Если один из корней характеристического уравнения равен $\lambda_s = p_s + i\ q_s$, то тогда непременно существует и комплексно сопряжённый корень $\lambda_{s+1} = p_s - i\ q_s$. Этим двум собственным значениям соответствуют решения

$$X_{s,s+1}(t) = e^{p_s t}\ (\cos q_s t \pm i\ \sin q_s t)\begin{pmatrix} \overset{(s)}{\beta_1} \pm i \overset{(s)}{\gamma_1} \\ \overset{(s)}{\beta_2} \pm i \overset{(s)}{\gamma_2} \\ \dots\dots\dots \\ \overset{(s)}{\beta_n} \pm i \overset{(s)}{\gamma_n} \end{pmatrix}.$$

Выделяя в этом выражении действительную и мнимую части, получим два независимых решения.

14.3. Кратные корни характеристического полинома

Характеристическое уравнение (14.4) имеет корень λ_0 кратности r. В этом случае решение будем искать в виде

$$X(t) = e^{\lambda_0 t}\left(\begin{pmatrix} \overset{(1)}{\alpha_1} \\ \overset{(1)}{\alpha_2} \\ \dots \\ \overset{(1)}{\alpha_n} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \overset{(2)}{\alpha_1} \\ \overset{(2)}{\alpha_2} \\ \dots \\ \overset{(2)}{\alpha_n} \end{pmatrix} + \dots + t^{r-1}\begin{pmatrix} \overset{(r)}{\alpha_1} \\ \overset{(r)}{\alpha_2} \\ \dots \\ \overset{(r)}{\alpha_n} \end{pmatrix}\right).$$

Подставим это выражение в уравнение (14.2): $\quad \dfrac{dX}{dt} = A\ X,$ имеем

$$\lambda_0 e^{\lambda_0 t}\left(\begin{pmatrix} \overset{(1)}{\alpha}_1 \\ \overset{(1)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(1)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \overset{(2)}{\alpha}_1 \\ \overset{(2)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(2)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + ... + t^{r-1}\begin{pmatrix} \overset{(r)}{\alpha}_1 \\ \overset{(r)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(r)}{\alpha}_n \end{pmatrix}\right) +$$

$$+e^{\lambda_0 t}\left(\begin{pmatrix} \overset{(2)}{\alpha}_1 \\ \overset{(2)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(2)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + 2t\begin{pmatrix} \overset{(3)}{\alpha}_1 \\ \overset{(3)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(3)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + ... + (r-1)t^{r-2}\begin{pmatrix} \overset{(r)}{\alpha}_1 \\ \overset{(r)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(r)}{\alpha}_n \end{pmatrix}\right) =$$

$$= e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \overset{(1)}{\alpha}_1 \\ \overset{(1)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(1)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \overset{(2)}{\alpha}_1 \\ \overset{(2)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(2)}{\alpha}_n \end{pmatrix} + ... + t^{r-1}\begin{pmatrix} \overset{(r)}{\alpha}_1 \\ \overset{(r)}{\alpha}_2 \\ .... \\ \overset{(r)}{\alpha}_n \end{pmatrix}\right)$$

. В левой и правой частях этого равенства — полиномы степени $r-1$. Сравнивая матричные коэффициенты при одинаковых степенях t, получим соответствующие системы линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных величин

$$\begin{pmatrix} \overset{(1)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(1)}{\underset{2}{\alpha}} \\ .... \\ \overset{(1)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \overset{(2)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(2)}{\underset{2}{\alpha}} \\ .... \\ \overset{(2)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad ... \quad, \begin{pmatrix} \overset{(r)}{\underset{1}{\alpha}} \\ \overset{(r)}{\underset{2}{\alpha}} \\ .... \\ \overset{(r)}{\underset{n}{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

ЛЕКЦИЯ 15

15.1. Теория устойчивости

Физические явления, как нам известно, описываются системами дифференциальных уравнений. При этом надо понимать, что описываемые физические явления рассматриваются при тех или иных упрощающих предположениях (то есть ставится, так называемая, "модельная задача описания физического явления"). Но правильно ли выбраны упрощающие предположения? Ведь может получиться так, что некоторые неучтенные моменты, не являющиеся на первый взгляд существенными, могут значительно изменить как качественные, так и количественные характеристики описываемого физического явления. В конечном счёте только *господин эксперимент* решает вопрос о соответствии модельных рассмотрений опытным данным.

Однако во многих случаях можно заведомо указать условия, при которых упрощения не допустимы. Эти условия выдвигает теория устойчивости.

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(t, y_1, y_2, ..., y_n) \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{15.1}$$

с начальными данными $y_i(t_0) = y_{0i}$, которые являются результатами измерений и, следовательно, получены с погрешностями. Возникает вопрос: как малое изменение начальных данных влияет на искомое решение? Если окажется, что сколь угодно малое изменение начальных данных приводит к сильному изменению решения, то решение, определяемое данными начальными значениями, не имеет никакого прикладного характера и не может описывать (даже приближённо) изучаемое явление.

Поэтому для приложений необходимо решать вопрос о тех условиях, при которых бесконечно малому изменению начальных значений соответствовало бы бесконечно малое изменение решения системы (15.1).

Вспомним теорему существования и единственности. Когда t меняется на конечном сегменте $[t_0,\ T]$, то из этой теоремы следует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Это означает, что бесконечно малому изменению начальных значений соответствует бесконечно малое изменение решения. Если же t может принимать сколь угодно большие значения, то для решения данного вопроса необходимо воспользоваться *теорией устойчивости.*

Перейдём к основным определениям теории устойчивости.

15.2. Основные определения и сведение задачи к исследованию точек покоя

Определение 1. Решение $(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \dots,\varphi_n(t))$ системы дифференциальных уравнений (15.1) называется *устойчивым по Ляпунову,* если $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого другого решения $(y_1(t),\ y_2(t),\ \dots,y_n(t))$ системы (15.1), начальные значения которого $y_i(t_0)$ удовлетворяют неравенству

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

выполняется

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \ \ (i = 1, 2, ..., n) \tag{15.2}$$

для всех $t \geq t_0$. Если же при сколь угодно малом $\delta > 0$ неравенство (15.2) не выполняется хотя бы для одной функции семейства $(y_1(t),\ y_2(t),\ \dots,y_n(t))$, то решение называется *неустойчивым.*

Определение 2. Если решение $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$ системы (15.1) устойчиво и при этом

$$\lim_{t\to\infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

когда $|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$, то решение $(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \dots,\varphi_n(t))$ называется *асимптотически устойчивым.*

Замечание. Если выполнено только $\lim\limits_{t\to\infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, то это еще не означает устойчивость решения $\{\varphi_i(t)\}$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $\dot{y} = -\alpha^2 y$, где $y(t_0) = y_0$. Решение этого уравнения $y = y_0 e^{-\alpha^2(t-t_0)}$ устойчиво, поскольку при $t > t_0$ для любого другого решения $\hat{y} = \hat{y}_0\ e^{-\alpha^2(t-t_0)}$, отвечающего начальным данным $\hat{y}(t_0) = \hat{y}_0$, условие $\left|\hat{y}_0 e^{-\alpha^2(t-t_0)} - y_0 e^{-\alpha^2(t-t_0)}\right| = e^{-\alpha^2 t} e^{\alpha^2 t_0} |\hat{y}_0 - y_0| < e^{\alpha^2 t_0} |\hat{y}_0 - y_0| < \varepsilon$ выполняется при $|\hat{y}_0 - y_0| < \varepsilon\ e^{-\alpha^2 t_0} \equiv \delta(\varepsilon)$.

Поскольку $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\alpha^2(t-t_0)} |\hat{y}_0 - y_0| = 0$, это решение также асимптотически устойчиво.

Пример 2. Решение $y = y_0\ e^{\alpha^2(t-t_0)}$ уравнения $\dot{y} = \alpha^2 y$, где $y(t_0) = y_0$, не устойчиво. Действительно, неравенство $\left|\hat{y}_0 e^{\alpha^2(t-t_0)} - y_0 e^{\alpha^2(t-t_0)}\right| = e^{\alpha^2(t-t_0)} |\hat{y}_0 - y_0| < \varepsilon$ нельзя реализовать при всех $t > t_0$, так как сколько бы мало ни отличались $\hat{y}_0$ и y_0 (то есть несмотря на выполнение неравенства $|\hat{y}_0 - y_0| < \delta$ при сколь угодно малом δ) при больших t, выражение $e^{\alpha^2(t-t_0)}$ может стать сколь угодно большой величиной.

Исследование на устойчивость решения $\{ \varphi_i(t) \}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ системы (15.1) всегда можно свести к исследованию на устойчивость тривиального решения, называемого *точкой покоя,* расположенного в начале координат.

В самом деле, введём новые функции $x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t)$. Тогда $\dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{dy_i}{dt} - \dfrac{d\varphi_i(t)}{dt}$, и из (15.1) следует

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\varphi_i(t)}{dt} + F_i\left(t, x_1 + \varphi_1(t), x_2 + \varphi_2(t), ..., x_n + \varphi_n(t)\right). \tag{15.3}$$

Очевидно, что исследуемому на устойчивость решению $y_i(t) = \varphi_i(t)$ соответствует в новых переменных решение $x_i(t) = 0$ системы (15.3). В дальнейшем мы всегда будем исследовать на устойчивость только тривиальное решение. Поскольку в координатах $\{x_1,\ x_2,\ ...\ , x_n\} \in\ E_n$ точка $x_i(t) = 0$ соответствует началу координат, то все дальнейшие исследования касаются исключительно поведения интегральных кривых в окрестности начала координат — точки покоя системы.

В связи с введением новых переменных, переформулируем определения 1 и 2.

Определение 1* . Точка покоя системы обыкновенных дифференциальных уравнений (15.3) устойчива по Ляпунову, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $|x_i(t_0)| < \delta$ следует $|x_i(t)| < \varepsilon$ для всех $t > t_0$.

Замечание. Иногда дают эквивалентное вышеуказанному определению следующее определение устойчивости.

Определение 1** . Точка покоя $x_i(t) = 0$ устойчива по Ляпунову, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t_0) < \delta^2$ следует $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon^2$ при $t \geq T > t_0$. Иначе говоря, траектория, начальная точка которой находится в δ-окрестности начала координат, не выходит из ε-окрестности начала координат при всех $t \geq T$.

15.3. Простейшие типы точек покоя

Исследуем расположение траекторий в окрестности точки покоя $x = 0,\ y = 0$ системы двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}\, x + a_{12}\, y, \\ \dot{y} = a_{21}\, x + a_{22}\, y, \end{cases} \qquad \text{где} \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Решение ищем в виде $x = \alpha_1 e^{\lambda t}$, $y = \alpha_2 e^{\lambda t}$. Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda +$

$+(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \equiv \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \Delta = 0.$ Коэффициенты α_1 и α_2 с точностью до постоянного множителя определятся из уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Последовательно рассмотрим следующие случаи.

I. $\mathbf{\Delta \neq 0}$.

A. Корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения вещественны и различны. Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{15.4}$$

то есть, иначе говоря,

$$\begin{cases} x(t) = c_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}\ , \\ y(t) = c_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}\ . \end{cases} \tag{15.5}$$

$\mathbf{A_1}$. $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$; пусть $\lambda_1 = -p^2$, $\lambda_2 = -q^2$. В этом случае решение (15.5) примет вид

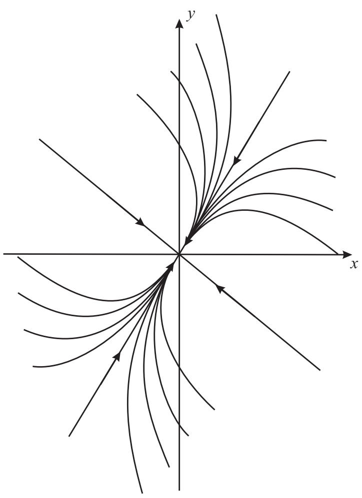

Рис. 10.
Устойчивый узел

$$\begin{cases} x(t) = C_1\alpha_1 e^{-p^2 t} + C_2\beta_1 e^{-q^2 t}\ , \\ y(t) = C_1\alpha_2 e^{-p^2 t} + C_2\beta_2 e^{-q^2 t}\ . \end{cases} \tag{15.6}$$

Точка покоя $x = 0$, $y = 0$ устойчива и асимптотически устойчива, так как из-за наличия множителей $e^{-p^2 t}$ и $e^{-q^2 t}$ все точки, находящиеся в момент времени t_0 в δ -окрестности начала координат, при достаточно большом t переходят в точки, лежащие в сколь угодно малой ε -окрестности начала координат, а при $t \to \infty$ и $x \to 0$, и $y \to 0$.

Если в (15.6) положить $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$, получим два выделенных решения. Эти решения имеют вид

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 C_1 e^{-p^2 t}\ , \\ y(t) = \alpha_2 C_1 e^{-p^2 t} \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x(t) = C_2\beta_1 e^{-q^2 t}\ , \\ y(t) = C_2\beta_2 e^{-q^2 t}\ . \end{cases}$$

В плоскости $(x,\ y)$ — это прямая $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ в случае первого решения или прямая $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$ в случае второго. Оба эти решения устойчивы, и при $t \to \infty$, и $x \to 0$, и $y \to 0$ вдоль этих прямых.

Покажем, что кривые входят в особую точку, касаясь той прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине значению λ. Пусть $p^2 < q^2$. Запишем (15.6) в виде

$$\begin{cases} x(t) = e^{-p^2 t}\left(C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{-(q^2-p^2)t}\right), \\ y(t) = e^{-p^2 t}\left(C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{-(q^2-p^2)t}\right). \end{cases} \tag{15.7}$$

Легко видеть, что поскольку $q^2 - p^2 > 0$, то при $t \to +\infty$ вторые слагаемые в скобках быстро убывают, поэтому при больших значениях t поведение решения определяется только первыми слагаемыми $\begin{cases} x(t) \approx e^{-p^2 t} C_1\alpha_1, \\ y(t) \approx e^{-p^2 t} C_1\alpha_2, \end{cases}$ то есть интегральные кривые асимптотически стремятся к прямой $y = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}x$.

Однако же "бесконечно давно", то есть при $t \to -\infty$, именно вторые слагаемые в (15.6) превалируют над первыми, и общее направление движения точек определяется, главным образом, прямой $y = \dfrac{\beta_2}{\beta_1}x$.

На рисунке 10 схематично изображено расположение траекторий около точки покоя рассматриваемого типа, называемой *устойчивым узлом.* Стрелками показано направление движения по траектории при возрастании t.

$\mathbf{A_2}$. $\lambda_1 > 0,\quad \lambda_2 > 0$. Пусть $\lambda_1 = p^2,\quad \lambda_2 = q^2$. При замене $t \to -t$, мы имеем ситуацию $\mathbf{A_1}$. Траектории имеют тот же вид, только точка по траектории движется *от* начала координат и при больших значениях t точки, которые в момент времени t_0 находились вблизи начала координат, удаляются из ε-окрестности начала координат. Это — *неустойчивый узел.*

$\mathbf{A_3}$. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$; пусть $\lambda_1 = p^2$, $\lambda_2 = -q^2$.

Точка покоя неустойчива, так как взяв решение $x(t) == C_1\alpha_1 e^{p^2 t}$, $y(t) = C_1\alpha_2 e^{p^2 t}$ (т.е. положив $C_2 = 0$), получим, что точка по прямой $y = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\, x$ удаляется от начала координат, при $t > t_0$ она покидает ε-окрестность начала координат $(x, y) = (0, 0)$.

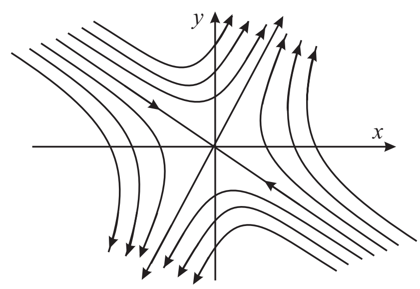

Рис. 11. **Седло.**

Вместе с тем существует другая прямая (при $C_1 = 0$) $x(t) = C_2\beta_1 e^{-q^2 t}$, $y(t) = C_2\beta_2 e^{-q^2 t}$, то есть $y = \dfrac{\beta_2}{\beta_1}\, x$, где точки $(x, y) \to (0, 0)$. Если же и $C_1 \neq 0$, и $C_2 \neq 0$, то как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$, точка покидает начало координат. Точка покоя рассматриваемого типа называется *седлом,* а прямые $y = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\, x$ и $y = \dfrac{\beta_2}{\beta_1}\, x$, вдоль которых точка или убегает от начала координат, или приближается к нему, называются *сепаратриссами седла.* Качественное поведение интегральных кривых в окрестности точки покоя изображено на рисунке 11.

B. Корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения комплексные: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Решение системы в этом случае может быть записано в виде

$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)\ , \\ y(t) = e^{\alpha t}(C_3 \cos \beta t + C_4 \sin \beta t)\ , \end{cases}$$ где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а C_3 и C_4 — линейные комбинации постоянных C_1 и C_2.

B₁. $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. В этом случае решение исследуемой системы уравнений имеет вид $$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\ , \\ y(t) = C_3 \cos \beta t + C_4 \sin \beta t\ . \end{cases}$$

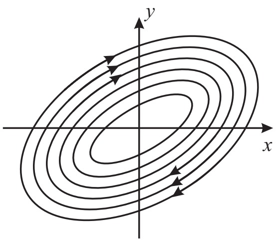

Рис. 12. **Центр**

Поскольку и $\sin \beta t$ и $\cos \beta t$ — периодические функции с одним и тем же периодом $^{2\pi}/_{\beta}$, значения $x(t)$ и $y(t)$ через период повторятся, а это означает, что через этот промежуток времени точка вернётся в исходное положение, т. е. траектория замкнётся. Следовательно, в этом случае мы имеем замкнутые циклы, окружающие точку $(x, y) = (0, 0)$. Решение устойчиво. Такая точка покоя называется *центром.* Качественное поведение интегральных кривых в окрестности этой точки покоя изображено на рисунке 12.

B₂. $\alpha < 0$, пусть $\alpha = -p^2$, $\beta \neq 0$.

Наличие множителя $e^{-p^2 t}$ в решении означает, что точка по спирали стремится к началу координат при $t \to \infty$. Решение устойчиво, более того, решение асимптотически устойчиво. Такая точка покоя называется *устойчивым фокусом.* Качественное поведение интегральных кривых в окрестности фокуса показано на рисунке 13.

B₃. $\alpha > 0$. Пусть $\alpha = p^2$, $\beta \neq 0$. Этот случай при замене $t \to -t$ переходит в случай $\mathbf{B_2}$. Точки по спирали бегут *от* начала координат. Точка покоя называется *неустойчивым фокусом.*

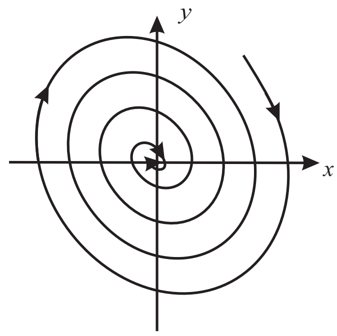

Рис. 13. **Фокус**

C. Корни характеристического уравнения кратные: $\lambda_1 = = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = (C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 t)e^{\lambda t}\,, \\ y(t) = (C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 t)e^{\lambda t}\,, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

$\mathbf{C_1}$. $\lambda < 0$. Пусть $\lambda = -p^2$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Точка покоя не только устойчива, но и асимптотически устойчива. Такая точка покоя называется *вырожденным устойчивым*

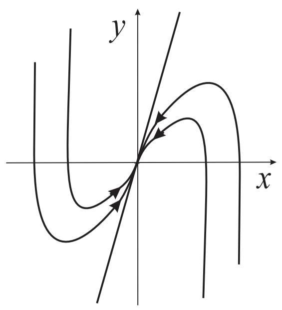

Рис. 14. **Вырожденный узел**

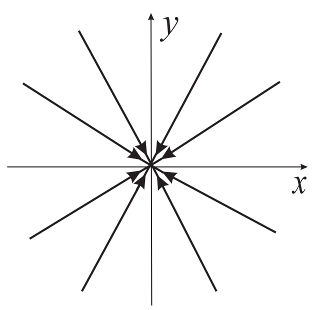

Рис. 15. **Дикритический узел**

узлом. Геометрически, вырожденный устойчивый узел занимает промежуточное положение между ситуациями $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{B_2}$, так как при сколь угодно малом изменении действительных коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} она может превратиться как в устойчивый узел типа $\mathbf{A_1}$, так и в устойчивый фокус. Качественное поведение интегральных кривых в окрестности вырожденного узла показано на рисунке 14.

$\mathbf{C_2}$. При $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем еще один тип устойчивого узла, так называемый *дикритический узел* (см. рисунок 15).

$\mathbf{C_3}$. $\lambda > 0$, пусть $\lambda = p^2$. При замене $t \to -t$ получим ситуацию **$\mathbf{C_1}$** или **$\mathbf{C_2}$**. В данном случае, хотя интегральные кривые и сохраняют ту же форму, но точки вдоль них бегут в противоположном направлении. Имеем или *вырожденный* или *дикритический неустойчивый узел.*

II. $\mathbf{\Delta = 0}$. Случаи **A, B, C** исключают ситуацию, когда один из корней характеристического полинома является нулевым, ибо при рассмотрении этих случаев определитель $\Delta \equiv (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$, а характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \Delta = 0$. **D.** Пусть теперь $\Delta = 0$ и $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda = 0$. Тогда $\lambda \cdot [\lambda - (a_{11} + a_{22})] = 0$ и, следовательно, возможны два решения: $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} \neq 0$. Общее решение системы уравнений в рассматриваемой ситуации имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}\,, \\ y(t) = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}\,. \end{cases}$$

Исключим из этих двух уравнений переменную t, получим

$$\frac{y - C_1\alpha_2}{x - C_1\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1},$$

то есть имеем семейство прямых

$$\beta_2(x - C_1\alpha_1) - \beta_1(y - C_1\alpha_2) = 0,$$

которое при любых значениях C_1 является семейством прямых, параллельных друг другу. При $C_2 = 0$ имеем $\begin{cases} x = C_1\alpha_1, \\ y = C_1\alpha_2, \end{cases}$ то есть $y = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\, x$ – целая *прямая точек покоя.*

D₁. $\lambda_2 < 0$. Пусть $\lambda = -q^2$.

При $t \to \infty$ точки на каждой траектории приближаются к точке покоя $x = c_1\alpha_1$, $y = c_1\alpha_2$. Точка покоя $x = 0$, $y = 0$ является точкой устойчивости, но асимптотической устойчивости нет.

D₂. $\lambda_2 > 0$. Пусть $\lambda = q^2$.

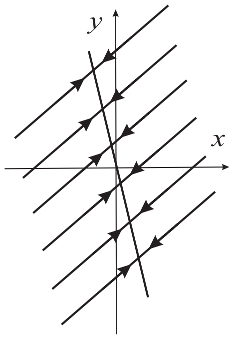

Рис. 16.

При замене $t \to -t$ приходим к случаю D_1. Однако при $\lambda = q^2$ движение происходит в противоположном направлении и точка покоя $x = 0$, $y = 0$, как и множество точек покоя, лежащих на прямой $y = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}x$, неустойчива.

На рисунке 16 схематично изображено расположение траекторий около прямой точек покоя. Стрелками показано направление движения по траекториям при возрастании t.

E. Осталось рассмотреть последний случай, когда оба корня характеристического уравнения равны нулю: $\lambda_1 = 0$, и $\lambda_2 = 0$. При этом $a_{11} + a_{22} = 0$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

Положим $a_{11} \equiv a$, тогда $a_{22} = -a$. Из $\Delta = 0$ следует $\dfrac{a}{a_{12}} = -\dfrac{a_{21}}{a} \equiv \nu$, то есть $a_{12} = \dfrac{a}{\nu}$, $a_{21} = -\nu a$. В терминах этих обозначений наша система запишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + \dfrac{1}{\nu}ay, \\ \dot{y} = -\nu ax - ay, \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\nu x + y}{x + {}^1\!/_\nu\, y} = -\nu.$$

Таким образом,

E₁. $x = C_1$, $y = C_2$. Каждая точка на плоскости есть точка покоя. Все решения устойчивы.

$\mathbf{E_2}$. $x = C_1 + C_2 t$, $y = C_3 + C_4 t$, где C_3, C_4 – линейные комбинации C_1, C_2. Точка покоя $x = 0$, $y = 0$ не является устойчивой.

Пример 1. Особой точкой (седлом) системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = 2x + y, \\ \dot{x} = 3x + 4y \end{cases}$$

является точка $(0, 0)$. Изображение интегральных кривых в окрестности этой точки получено численным интегрированием системы в пакете "Математика"и приведено на рисунке 17. Две выделенные, хорошо видные на рисунке прямые — это сепаратриссы седла.

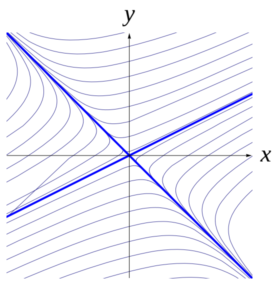

Рис. 17. **Седло**

Пример 2. Особой точкой (фокусом) системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = 4x - y, \\ \dot{x} = 3x - 2y \end{cases}$$

является начало координат. Изображение интегральных кривых в окрестности этой точки получено численным интегрированием системы в пакете "Математика"и приведено на рисунке 18.

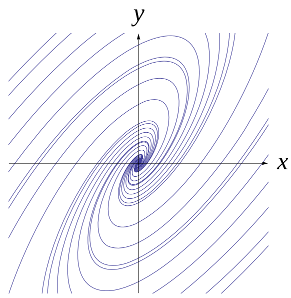

Рис. 18. **Фокус**

Пример 3. Особой точкой (вырожденным узлом) системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = x, \\ \dot{x} = 2x - y \end{cases}$$

является точка $(0, 0)$. На рисунке 19 показано расположение интегральных кривых, полученных численным интегрированием в пакете "Математика". На рисунке хорошо видно единственное выделенное направление, отвечающее единственному кратному корню λ характеристического уравнения.

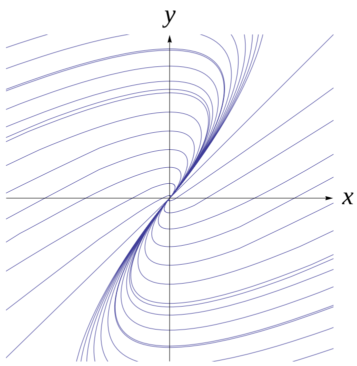

Рис. 19. **Вырожденный узел**

Пример 4. Особой точкой (центром) системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = 2x + 2y, \\ \dot{x} = -2x - 5y \end{cases}$$

является начало координат — точка $(0, 0)$. На рисунке 20 показано расположение интегральных кривых этой системы, полученных численным интегрированием в пакете "Математика".

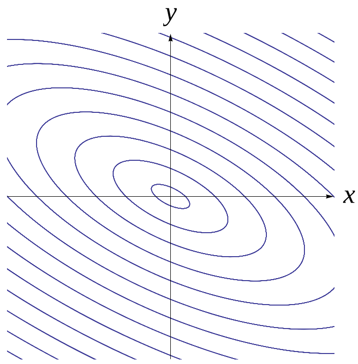

Рис. 20. **Центр**

Пример 5. Особыми точками системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = 4y^2 - x^2, \\ \dot{x} = 2xy - 4e - 8 \end{cases}$$

являются две точки: $(-2, -1)$ и $(4, 2)$. Первая особая точка — фокус, вторая особая точка — узел. На рисунке 21 показано расположение интегральных кривых этой системы. Рисунок получен численным интегрированием в пакете "Математика".

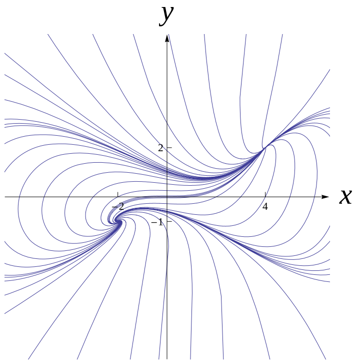

Рис. 21. **Узел + фокус**

Пример 6. Особыми точками системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = 4y^2 - x^2, \\ \dot{x} = 2xy - 4e - 8 \end{cases}$$

являются две точки: $(-1, -1)$ и $(1, 1)$. Первая особая точка — седло, вторая особая точка — фокус. На рисунке 22 показано расположение интегральных кривых этой системы. Рисунок получен численным интегрированием в пакете "Математика".

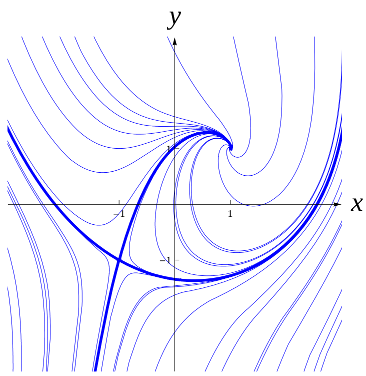

Рис. 22. **Фокус + седло**

Подводя итоги, заметим, что если оба корня характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то решение $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчиво. Если хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть, то точка покоя $x = 0,\ y = 0$ неустойчива.

Совершенно аналогично обстоит дело и в случае системы n линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{x}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k,\quad (i = 1, 2, ..., n)$, где $A = \|a_{ik}\|$ — числовая матрица. Характеристическое уравнение для этой системы имеет вид $\det(A - \lambda E) = 0$. Если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то точка покоя асимптотически устойчива. Если же вещественная часть хотя бы одного корня положительна, то точка $x_i = 0\ (i = 1, 2, ..., n)$ не является устойчивой точкой покоя.

Пример. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2z, \\ \dot{z} = 5x - 4y. \end{cases} \qquad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda 2 - 1 \\ 3 - \lambda - 2 \\ 5 - 4 - \lambda \end{vmatrix} =$

$= -\lambda^3 + 9\lambda - 8 = 0$. У этого характеристического уравнения существует положительный корень $\lambda_1 = 1 > 0$. Точка покоя неустойчива.

ЛЕКЦИЯ 16

16.1. Второй метод Ляпунова

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{16.1}$$

Теорема 1 (теорема Ляпунова об устойчивости.) *Если существует дифференцируемая функция* $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, *назы-*

ваемая функцией Ляпунова, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:

1) $V(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, *причём* $V(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ *лишь при* $x_i = 0$, $(i = 1, 2, ..., n)$, *то есть функция Ляпунова* V *имеет строгий минимум в начале координат;*

2) $\frac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \dots, x_n) \leq 0$ *при* $t \geq t_0$, *то точка покоя* $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *устойчива.*

Замечание. В теореме предполагается, что производная $\frac{dV}{dt}$ из условия 2) взята вдоль интегральной кривой, то есть она вычислена в предположении, что аргументы x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ функции $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ заменены решениями $x_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ системы уравнений (16.1). Действительно, если это так, то

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n).$$

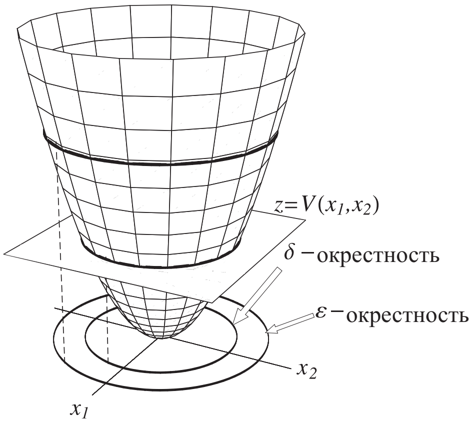

Рис. 23.

Доказательство. Для наглядности рисунки будем делать только для случая двух независимых функций $x_1(t)$, $x_2(t)$. В окрестности начала координат, как и в окрестности всякой точки строгого минимума, поверхности уровня $V(x_1, x_2, ..., x_n) = C$ являются замкнутыми поверхностями, внутри которых находится точка строгого минимума. (Например, для случая функции двух переменных $z = V(x_1, x_2)$ сечение $z = C$ $(C = const)$ задаёт замкнутую кривую, (см. рисунок 23)).

Зададимся $\varepsilon > 0$. При достаточно малом $C > 0$ поверхность уровня $V(x_1, x_2, ..., x_n) = C$ целиком лежит в ε-окрестности начала координат, но не проходит через начало системы координат (рис. 24). Следовательно, можно подобрать такое $\delta > 0$, что δ-окрестность начала координат целиком лежит внутри поверхности $V(x_1, x_2, ..., x_n) = C$, причем $V < C$ в этой окрестности. Если начальная точка с координатами $x_i(t_0)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ выбрана в δ-окрестности, и, следовательно, выполняется неравенство $V(x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0)) < C_1 < C$, то при $t \geq t_0$, точка траектории не может выйти за пределы выбранной ε-окрестности, так как в силу условия (2) функция $V(x_1(t),\ x_2(t),\ ...\ , x_n(t)) = C$ не возрастает и поэтому $V(x_1(t),\ x_2(t),\ ...\ , x_n(t)) < C_1 < C$.

Пример.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -xy^4, \\ \dfrac{dy}{dt} = \quad yx^4. \end{cases}$$

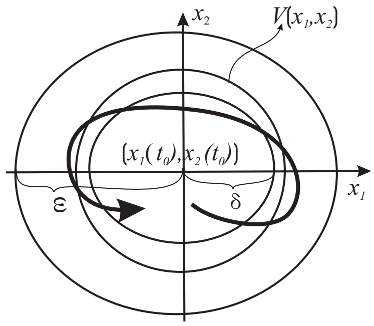

Рис. 24.

Рассмотрим $V(x, y) = x^4 + y^4$. Эта функция удовлетворяет условию 1) теоремы: $x^4 + y^4 > 0$ и $x^4 + y^4 = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ и $y = 0$. Условие 2) для нашей задачи имеет вид $\dfrac{dV}{dt} = 4x^3(-xy^4) + 4y^3(yx^4) \equiv 0$, и, следовательно, по теореме Ляпунова точка покоя $x = 0,\ y = 0$ устойчива.

Теорема 2 (теорема А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости).

Если существует дифференцируемая функция, называемая функцией Ляпунова, $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, *удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:*

1) $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет строгий минимум в начале координат: $V(0, 0, ..., 0) = 0$;

2) производная функции V, вычисленная вдоль интегральных кривых системы удовлетворяет условию

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \dots,x_n) \ \leq\ 0;$$

причем

3) вне сколь угодно малой окрестности начала координат, то есть при $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \delta > 0$ $(t \geq T_0 \geq t_0)$, производная $\dfrac{dV}{dt} \leq$ $\leq \beta < 0$, где β — постоянная,

то точка $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ асимптотически устойчива.

Доказательство. В силу условий 1) и 2) теоремы, точка покоя $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ по теореме 1 является устойчивой точкой. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такая, что траектория, начальная точка которой находится в δ-окрестности, не выйдет из ε-окрестности $\forall t > t_0$. В силу тех же условий 2) и 3) теоремы, функция $V(x_1(t),\ x_2(t),\ \dots,x_n(t))$ монотонно убывает с возрастанием t и, следовательно, существует ее предел при $t \to \infty$. Обозначим $\lim\limits_{t\to\infty} V\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right) = a$. Покажем, что $a = 0$. Тогда из того факта, что V– непрерывная функция и $V = 0$ только при $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, будет следовать, что $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, и, тем самым, теорема будет доказана.

Предположим противное, $a \neq 0$. Тогда, в силу условия 1), непременно $a > 0$. Взяв $\tilde{C} \geq a$, получим, что траектория движения точки будет находиться внутри области, окруженной поверхностью уровня $V\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \tilde{C}$. Поскольку

$\tilde{C} \geq a > 0$, то траектория будет находиться при $t \geq T > t_0$ вне некоторой δ_1-окрестности начала координат и, согласно условию 3) теоремы, будет выполнено $\dfrac{dV}{dt} \leq -\beta < 0, \quad t \geq T$. Умножая на dt это неравенство ($dt > 0$, так как параметр t растет) и интегрируя от T до t, получим

$$V\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right) - V\left(x_1(T), x_2(T), ..., x_n(T)\right) \leq -\beta(t - T)$$

или

$$V\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right) \leq V\left(x_1(T), x_2(T), ..., x_n(T)\right) - \beta(t - T).$$

Из последнего соотношения видно, что при неограниченном росте t во втором слагаемом можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство $V\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right) \leq 0$. Налицо явное противоречие, которое и доказывает теорему.

Пример.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = \quad x - y^3. \end{cases}$$

Рассмотрим $V(x, y) = x^2 + y^2$.

Очевидно, что $V(x, y) > 0$, причём $V(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$. Второе условие теоремы Ляпунова имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0,$$

причём вне окрестности начала координат $\dfrac{dV}{dt} \leq \beta < 0$. Следовательно, решение $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчиво.

Теорема 3 (теорема Четаева о неустойчивости).

Если существует дифференцируемая функция $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, *удовлетворяющая в некоторой замкнутой* h*-окрестности начала координат условиям*

1) в сколь угодно малой окрестности U *начала координат существует область (на рисунке (25) обозначенная* $V > 0$*), в которой* $V(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$, *причём* $V(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ *на лежащей в* U *части границы области* $V > 0$;

2) в области $(V > 0)$ *производная*

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \dots, x_n) > 0;$$

причём

3) в области $V > \alpha$, $\alpha > 0$, *производная* $\frac{dV}{dt} \geq \beta > 0$, *где* β *— постоянная,*

то точка $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *неустойчива.*

Доказательство. Начальную точку $x_i(t_0)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ возьмём в сколь угодно малой окрестности начала координат в области $V > 0$ $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha > 0$. Так как вдоль траектории $\frac{dV}{dt} \geq 0$, то функция $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ вдоль траектории не убывает и, следовательно, пока траектория не покинет рассматриваемую h-окрестность начала координат, где выполнены условия теоремы, траектория должна находиться в области $V > \alpha$. Допустим, что траектория не покидает h-окрестности начала координат. Тогда, в силу условия 3), вдоль траектории при $t \geq t_0$ $\frac{dV}{dt} \geq \beta > 0$. Умножим это неравенство на dt $(dt > 0)$ и проинтегрируем. Получим

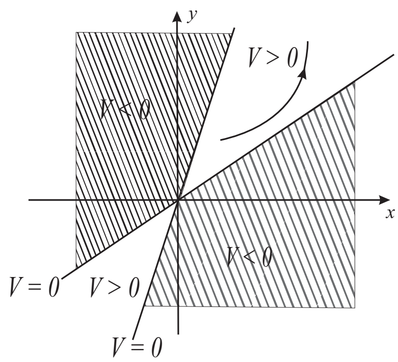

Рис. 25.

$$V(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) - V(x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0)) \geq \beta(t - t_0).$$

Отсюда следует, что при $t \to \infty$ функция $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ вдоль траектории неограниченно возрастает, что находится в противоречии с предположением о том, что траектория не выходит за рамки замкнутой h-окрестности начала координат, так как в этой h-окрестности начала координат непрерывная функция $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ ограничена.

Отметим, что в практическом плане использование теорем Ляпунова и Чебышева весьма эффективно, поскольку для исследования решений на устойчивость нет необходимости интегрировать систему дифференциальных уравнений.

16.2. Исследование уравнений на устойчивость по первому приближению

При исследовании на устойчивость точки покоя $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{16.2}$$

где $f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ — дифференцируемые в окрестности начала координат функции, часто применяется следующий метод: пользуясь дифференцируемостью функций $f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ представляют систему уравнений (16.2) в окрестности начала координат $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k + R_k(t, x_1, x_2, ..., x_n). \tag{16.3}$$

Для этого функцию $f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ представляют формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) = f_i(t, 0, 0, ..., 0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, 0, 0, ..., 0)}{\partial x_k} x_k +$$

$$+ \sum_{k}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(t, \theta_1 x_1, \theta_2 x_2, ..., \theta_n x_n)}{\partial x_k \partial x_j} x_k x_j.$$

После этого исходная система принимает искомый вид (16.3), где

$$a_{ik} = \frac{\partial f_i(t, 0, 0, ..., 0)}{\partial x_k},$$

$$R_i = f_i(t, 0, 0, ..., 0) + \sum_{k}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(t, \theta_1 x_1, \theta_2 x_2, ..., \theta_n x_n)}{\partial x_k \partial x_j} x_k x_j.$$

Если R_i имеют порядок малости выше первого относительно $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, то исследуют на устойчивость точку $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ линейной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, x_k, \tag{16.4}$$

которую называют системой первого приближения. Исследование на устойчивость такой системы много легче, чем исследование исходной системы, однако при a_{ik}, зависящих от t, задача весьма не проста. В случаях же, когда $a_{ik} = const$, (система дифференциальных уравнений в этом случае называется *стационарной*), исследование на устойчивость заметно упрощается и, на основании изученного нами ранее материала, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема (об устойчивости по первому приближению).

Если:

1) система дифференциальных уравнений (16.2) стационарна по первому приближению;

2) все члены R_i в достаточно малой окрестности начала координат при $t \geq T > t_0$ удовлетворяют неравенству

$$|R_i| \leq N \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\alpha + 1/2},$$

где N *и* $\alpha > 0$, *и все корни характеристического полинома* $\det(A - \lambda E) = 0$ *имеют отрицательные действительные части,*

то тривиальное решение $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *исходной системы дифференциальных уравнений и линейной системы по первому приближению асимптотически устойчиво. Если же хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то точка покоя* $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *— неустойчивая точка покоя.*

В обосновании данного подхода огромная заслуга ученых Казанского университета Н.Г. Четаева и И.К. Персидского.

Если характеристическое уравнение имеет высокую степень, то его решение представляет значительные трудности. Поэтому необходим метод, позволяющий, не решая уравнения, установить отрицательность или неотрицательность вещественной части.

16.3. Теорема Гурвица

Теорема Гурвица. *Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней многочлена* $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_{n-1} z + a_n$ *с действительными коэффициентами* a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ *является положительность всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица*

$$\Gamma = \left\| \begin{matrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{matrix} \right\| .$$

По главной диагонали матрицы Гурвица стоят коэффициенты рассматриваемого многочлена в порядке их нумерации, начиная с a_1 до a_n. Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только четными индексами, включая $a_0 = 1$. Все недостающие коэффициенты, т.е. коэффициенты с индексами $n > 0$ или $n < 0$, заменяются нулями.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица обозначим следующим образом:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ \dots, \ \Delta_n = \det \Gamma.$$

Заметим, что поскольку $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n$, последнее из условий Гурвица $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ... , $\Delta_n > 0$ может быть заменено требованием $a_n > 0$.

Примеры.

1. Если характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0,$$

то условия Гурвица

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \ \Rightarrow \ a_2 > 0.$$

2. Характеристическое уравнение имеет вид

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0,$$

тогда условия Гурвица

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \ \Rightarrow \ a_3 > 0.$$

3. Характеристическое уравнение имеет вид

$$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0,$$

тогда условия Гурвица

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \ \Rightarrow \ (a_1 a_2 - a_3)\, a_3 - a_1^2\, a_4 > 0,$$

$$\Delta_4 > 0 \ \Rightarrow \ a_4 > 0.$$

Пример. Исследовать на устойчивость по первому приближению систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

Правые части этих уравнений с точностью до первого порядка представим по формуле Маклорена:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + R_1(x, y), \\ \dot{y} = -x - 3y + R_2(x, y). \end{cases}$$

Следовательно, система первого приближения имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y, \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = -1/2 \pm i \cdot 7/2$. Легко видеть, что $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = -1/2 < 0$. Решение $x = 0$, $y = 0$ является устойчивой точкой покоя.

ЛЕКЦИЯ 17

17.1. Уравнения в частных производных первого порядка

Определение. Выражение вида

$$\Phi\left(u(x_1, x_2, ..., x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0 \tag{17.1}$$

называется *дифференциальным уравнением в частных производных m-го порядка* относительно неизвестной функции $u(x) \equiv u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Как и в обыкновенных дифференциальных уравнениях, порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется *порядком* этого уравнения. Рассмотрим некоторые примеры таких уравнений.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = x + y.$$

Оно легко интегрируется, его решение имеет вид $z = \frac{1}{2}x^2 + xy + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — произвольная функция y.

Пример 2.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1.$$

Решение этого дифференциального уравнения также не вызывает затруднений: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1$, откуда $\frac{\partial z}{\partial y} = x + A(y)$ и, следовательно, $z = xy + \int A(y)\,dy + B(x)$. Здесь $A(y)$ и $B(x)$ — произвольные функции указанных в скобках аргументов.

Примеры показывают, что общее решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка содержит одну произвольную функцию, а уравнение второго порядка — две произвольные функции, и так далее...

Предположения нуждаются в строгом обосновании. С. Ковалевской была доказана следующая теорема существования и единственности решения уравнения в частных производных.

Прежде чем сформулировать эту терему, напомним определение аналитической функции.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *аналитической* в окрестности точки $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$, если данная функция может быть разложена в степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности этой точки к самой этой функции.

17.2. Теорема Коши — Ковалевской существования и единственности решения уравнения в частных производных

Теорема Коши — Ковалевской. *Существует единственное аналитическое в окрестности точки* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$ *решение уравнения* m*-го порядка, разрешённого относительно старшей производной по одной из переменных*

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} = f\left(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}}, ..., \frac{\partial^m}{\partial x_n^m}\right),$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{x_1=\overset{\circ}{x}_1} = \varphi_0(x_2, ..., x_n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\big|_{x_1=\overset{\circ}{x}_1} = \varphi_1(x_2, ..., x_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1}}\big|_{x_1=\overset{\circ}{x}_1} = \varphi_{m-1}(x_2, ..., x_n),$$

если функции $\varphi_0(x_2, ..., x_n)$, $\varphi_1(x_2, ..., x_n)$, $\dots, \varphi_{m-1}(x_2, ..., x_n)$ *являются аналитическими в окрестности точки* M_0 *, а функция* f *в правой части уравнения является аналитической функцией в окрестности начальных значений своих аргументов.*

Таким образом, решение определяется заданием начальных функций $\varphi_0(x_2, ..., x_n)$, $\varphi_1(x_2, ..., x_n)$, $\dots, \varphi_{m-1}(x_2, ..., x_n)$. Если мы их будем произвольно менять в классе аналитических функций, то получим совокупность аналитических решений исходного уравнения, зависящую от m произвольных функций. Иначе говоря, общее решение содержит m произвольных функций.

17.3. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

Определение. *Квазилинейным неоднородным уравнением в частных производных первого порядка* называется уравнение вида

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + ...$$

$$+X_n(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = Y(x_1, x_2, ..., x_n, z). \qquad (17.2)$$

Это уравнение, линейное относительно производных, может не быть, однако, линейным относительно неизвестной функции $z(x_1, x_2, ..., x_n)$. Если $Y \equiv 0$, а $X_i = X_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, то есть X_i не зависят от z, то уравнение $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, ..., x_n)\ \dfrac{\partial z}{\partial x_i} = 0$ называется *линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка.*

Для большей наглядности сначала целесообразно рассмотреть квазилинейное уравнение вида

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \qquad (17.3)$$

где функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ задают непрерывное векторное поле

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{i}\ P(x, y, z) + \vec{j}\ Q(x, y, z) + \vec{k}\ R(x, y, z).$$

Векторными линиями векторного поля $\vec{F}(x, y, z)$ называются линии, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, у которых касательный вектор в каждой точке совпадает по направлению с вектором $\vec{F}(x, y, z)$ в данной точке: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = k\vec{F}$, k — $const$, t — параметр данной линии. Векторные линии поля $\vec{F}(x, y, z)$, как известно, находятся путём интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{17.4}$$

Поверхности, составленные из векторных линий, называются

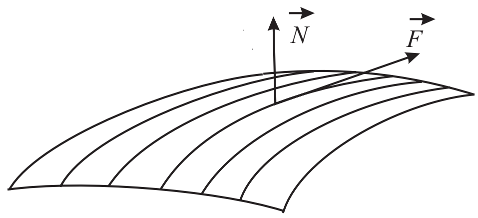

Рис. 26. **Векторная поверхность**

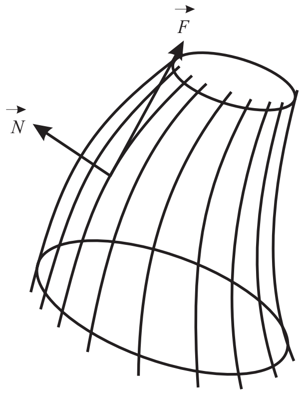

Рис. 27. **Векторная трубка**

векторными поверхностями (рис. 26) данного векторного поля. Из векторных линий построим *векторную трубку* (рис. 27). Боковая поверхность векторной трубки, как и любой векторной поверхности, характеризуется тем, что в любой ее точке выполняется условие ортогональности $\left(\vec{N}\cdot\vec{F}\right)=0$, где $\vec{N}$ — вектор нормали к боковой поверхности.

Если боковая поверхность векторной трубки определяется уравнением $u(x,y,z)=0$, то

$$\vec{N} = \overrightarrow{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\vec{k},$$

и условие ортогональности $\left(\vec{N}\cdot\vec{F}\right)=0$ даёт

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{17.5}$$

— линейное однородное уравнение в частных производных относительно функции трех переменных $u(x,y,z)$.

Если боковая поверхность векторной трубки определяется уравнением $z = z(x,y)$, то $\vec{N} = -\dfrac{\partial z}{\partial x}\,\vec{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\,\vec{j} + \vec{k}$ и условие $\left(\vec{N}\cdot\vec{F}\right) = 0$ после очевидных преобразований примет вид: $P(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$, что совпадает с уравнением (17.3).

Итак, чтобы найти уравнение боковой поверхности векторной трубки, необходимо проинтегрировать квазилинейное уравнение (17.3), когда мы ищем решение в явном виде $z = z(x,y)$, или линейное уравнение (17.5), когда мы ищем решение в неявном виде $u(x,y,z) = 0$.

Для того чтобы решить уравнение (17.3) или (17.5), мы должны сначала найти векторные линии (так как векторные поверхности состоят из векторных линий), то есть решить вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (17.4):

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Пусть (α) : $\begin{cases} \psi_1(x,y,z) = C_1, \\ \psi_2(x,y,z) = C_2, \end{cases}$ — два независимых первых интеграла системы (17.4), которые задают нам двухпараметрическое семейство векторных линий, называемых *характеристиками* уравнения (17.3) или (17.4). Но боковая поверхность векторной трубки состоит из однопараметрического семейства векторных линий. Для того чтобы из двухпараметрического семейства (α) с параметрами C_1 и C_2 выделить однопараметрическое семейство, мы должны задать зависимость (в общем случае произвольную) между этими параметрами: $\Phi(C_1,\ C_2) = 0$.

Это означает, что искомое уравнение поверхности определяется соотношением

$$\Phi\left(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)\right)=0, \tag{17.6}$$

где Φ — произвольная функция своих аргументов, а (17.6) — общее решение уравнения (17.3).

Если требуется найти не произвольную векторную трубку векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$, а векторную поверхность, проходящую через заданную кривую $(\beta):\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=0,\\ \varphi_2(x,y,z)=0,\end{cases}$ (такая задача называется *задачей Коши для дифференциального уравнения в частных производных*), то функция Φ в соотношении (17.6) уже не может быть произвольной: переменные x, y, z, входящие в это выражение, должны одновременно удовлетворять и условиям (α), и уравнению кривой (β). Иначе говоря, они одновременно должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=0,\\ \varphi_2(x,y,z)=0,\\ \psi_1(x,y,z)=C_1,\\ \psi_2(x,y,z)=C_2.\end{cases}$$

Исключая x, y и z из этой системы, найдём конкретную связь между параметрами C_1 и C_2 : $\tilde{\Phi}(\,C_1,C_2)=0$. Тогда решением уравнения (15.3) будет конкретная функция

$$\tilde{\Phi}\left(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)\right)=0, \tag{17.7}$$

описывающая уравнение векторной поверхности, проходящей через заданную кривую (β).

Пример. Найти интегральную поверхность уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

проходящую через кривую $\begin{cases} x = 0, \\ z = y^2. \end{cases}$

Составим вспомогательную систему $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{0}$, первые интегралы этой системы $z = C_1,\ x^2 + y^2 = C_2$. Следовательно, общим решением исходного уравнения является функция $\Phi\left(z,\ x^2 + y^2\right) = 0$, что эквивалентно $z = f(x^2 + y^2)$ — поверхности вращения.

Исключим $x,\ y,\ z$ из системы $\begin{cases} x = 0, \\ z = y^2, \\ z = C_1, \\ x^2 + y^2 = C_2, \end{cases}$ получим $C_1 = C_2$

или $z = x^2 + y^2$ — параболоид.

ЛЕКЦИЯ 18

18.1. Общее решение линейного уравнения в частных производных первого порядка

Пусть задано линейное однородное уравнение первого порядка

$$X_1(x_1, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + ... + X_n(x_1, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0. \tag{18.1}$$

Составим вспомогательную систему

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, ..., x_n)}. \tag{18.2}$$

Найдём $n-1$ функционально независимых первых интегралов:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = C_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = C_{n-1}. \end{cases}$$

В n-мерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами $(x_1,\ x_2,\ \dots\ , x_n)$ эта система определяет $(n-1)$-параметрическое семейство кривых, называемых *характеристиками* уравнения (18.1).

Теорема 1. *Левая часть любого первого интеграла*

$$\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = C$$

системы вспомогательных уравнений (18.2) является решением исходного линейного уравнения (18.1).

Доказательство. Вдоль любой интегральной кривой системы (18.2) выполняется тождество $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv C$. Это значит, что $d\psi = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx_i \equiv 0$. Из (18.2) следует, что dx_i пропорциональны $X_i(x_1, ..., x_n)$, и, следовательно, вдоль любой интегральной кривой выполнено $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}\, X_i(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0$. Но интегральные кривые вспомогательной системы проходят через каждую точку изменения переменных $x_1,\ x_2,\ \dots\ , x_n,$ а левая часть тождества $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}\, X_i(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0$ не зависит от $C_1,\ C_2,\ \dots\ , C_{n-1},$ и, следовательно, она не меняется при переходе от одной интегральной кривой к другой. Это означает, что наше тождество справедливо не только вдоль интегральной кривой, но и во всей области изменения переменных $x_1,\ x_2,\ \dots\ , x_n$.

А это, в свою очередь, означает, что $\psi(\ x_1,\ x_2,\ \dots, x_n\ )$ есть решение уравнения в частных производных (18.1).

Очевидно, что

$$\Phi\left(\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \psi_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)\right) = C,$$

где Φ – произвольная дифференцируемая функция, является первым интегралом вспомогательной системы (18.2), так как вдоль интегральной кривой все функции $\psi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv C_i$. Значит, и функция Φ обращается в постоянную вдоль интегральной кривой. Но тогда

$$z = \Phi\left(\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ \psi_2(x_1, x_2, ..., x_n),\ \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)\right)$$

является решением линейного уравнения (18.1).

Теорема. 2. *Функция*

$$z = \Phi\left(\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ \psi_2(x_1, x_2, ..., x_n),\ \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)\right),$$

где Φ *– произвольная дифференцируемая функция, является общим решением уравнения (18.1).*

Доказательство. Мы должны доказать, что любое решение $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ уравнения (18.1) при конкретном выборе функции Φ может быть записано в виде $\varphi = \Phi\left(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}\right)$. Пусть $z = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ – любое решение уравнения (18.1). Тогда выполнено

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} X_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \tag{18.3}$$

Докажем, что существует функция Φ такая, что

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \Phi\left(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}\right),$$

где $\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\psi_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, ... , $\psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – решения уравнения (18.2), то есть для каждой из этих функций выполнено

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} = 0, \ \ldots \ , \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_i} = 0. \quad (18.4)$$

Систему уравнений (18.3),(18.4) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно функций X_i с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Однородная система алгебраических уравнений имеет нетривиальные решения X_i тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю: $\Delta \equiv 0$. Приведённый выше определитель одновременно является якобианом n функций φ, ψ_1, ψ_2, ... , ψ_{n-1}. Тождественное обращение в нуль якобиана n функций n переменных указывает на наличие функциональной зависимости между этими функциями. Отсюда

$$\varphi(x_1, x_2, ...x_n) = \Phi\left(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}\right),$$

что и требовалось доказать.

18.2. Общее решение квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка

Пусть теперь задано квазилинейное неоднородное уравнение

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + ...$$
$$+X_n(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = Y(x_1, x_2, ..., x_n, z). \qquad (18.5)$$

Решение этого уравнения будем искать в неявном виде $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$, тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big/\dfrac{\partial u}{\partial z}$. Подставим эту производную в уравнение (18.5), получим

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ...$$
$$+X_n(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial u}{\partial x_n} + Y(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \qquad (18.6)$$

Сначала найдём функции $u(x_1, x_2, ..., x_n, z)$, обращающие уравнение (18.6) в тождество при независимо меняющихся переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ z$. Для этого составим вспомогательную систему

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, ..., x_n, z)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, ..., x_n, z)} = ...$$
$$... = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, ..., x_n, z)} = \frac{dz}{Y(x_1, x_2, ..., x_n, z)} \qquad (18.7)$$

и найдём из неё первые интегралы уравнения (18.6) :

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \psi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ z) = C_1, \\ \psi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ z) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ z) = C_n. \end{cases} \qquad (18.8)$$

Общим решением уравнения (18.6) является произвольная дифференцируемая функция

$$u=\Phi\left(\psi_1(x_1,...,x_n,z),\psi_2(x_1,...,x_n,z),...,\psi_n(x_1,...,x_n,z)\right). \tag{18.9}$$

Но тогда общим решением исходного уравнения (18.5) является произвольная дифференцируемая функция $z(x_1,x_2,...,x_n)$, определяемая из неявного уравнения

$$u=\Phi\left(\psi_1(x_1,...,x_n,z),\psi_2(x_1,...,x_n,z),...,\psi_n(x_1,...,x_n,z)\right)=0. \tag{18.10}$$

Пример. Решить уравнение $x\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$. Решение ищем в виде неявной функции $u(x,y,z)=0$. Тогда исходное уравнение примет вид $x\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$. Вспомогательная система: $\dfrac{dx}{0}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{z}$. Характеристики: $x=C_1,\ \ln z=\dfrac{1}{C_1}\,y+\ln C_2$ или $\begin{cases} x=C_1, \\ z=C_2e^{\frac{y}{x}}. \end{cases}$

Общее решение изменённого уравнения можно записать в виде $\Phi\left(x,z\,e^{-\frac{y}{x}}\right)=0\Rightarrow z\ e^{-\frac{y}{x}}=f(x)$. Тогда $z=f(x)\ e^{\frac{y}{x}}$ – общее решение исходного уравнения.

18.3. Задача Коши квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка

Геометрические соображения приводят к следующему истолкованию формулы (18.10).

Система уравнений (18.7) задаёт в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $(x_1,x_2,...,x_n,z)$ n-параметрическое семейство характеристик (18.8). Это семейство заполняет всю область изменения аргументов. Наша задача — выделить из этого множества $(n-1)$-мерное подмножество, которое будет образовывать интегральную поверхность. Для этого достаточно параметры $C_1,\ C_2,\ \ldots, C_n$ связать, наложив произвольную достаточно гладкую связь вида

$$\Phi\,(\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ , C_n\ ) = 0. \tag{18.11}$$

Подставляя в (18.11) первые интегралы из (18.8), мы и получим (18.10). Эти геометрические соображения дают возможность найти решение задачи Коши. Эта задача ставится следующим образом: через $(n-1)$-мерное многообразие (β) в пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ провести интегральную поверхность. Зададим это многообразие в параметрическом виде

$$(\beta)\quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \\ x_2 = \varphi_2(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \\ z\ =\ \varphi\ (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}). \end{cases} \tag{18.12}$$

Теперь мы должны связь (18.11) наложить не произвольным образом, а исходя из (18.12). Переменные $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ должны одновременно удовлетворять и условиям (18.8) — (α), и уравнению (18.12) — (β). Из двух систем (α) и (β) мы и получим искомую связь, в которой функция Φ будет уже, вообще говоря, вполне определённой функцией, дающей решение поставленной задачи Коши.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

Составим систему

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

Её интегралами будут

$$z-2y=C_1,\quad 2\sqrt{z-x-y}+y=C_2.$$

Поэтому общее решение нашего уравнения имеет вид

$$\Phi\left(z-2y,\ \ 2\sqrt{z-x-y}+y\right)=0.$$

Найдём решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $z=2x$ при $y=0$.

Полагая в найденных ранее интегралах $y=0$, получим

$$z=C_1,\quad 2\sqrt{z-x}=C_2.$$

Разрешая эту систему относительно x и z, найдём

$$\begin{cases} x=C_1-\dfrac{C_2^2}{4}, \\ z=C_1. \end{cases}$$

Поскольку x и z связаны условием $z-2x=0$, решением поставленной задачи Коши будет

$$C_1-2\left(C_1-\frac{C_2^2}{4}\right)=0,\quad 2C_1-C_2^2=0.$$

Заменяя C_1 и C_2 их выражениями, окончательно получим

$$2z-4y-\left(2\sqrt{z-x-y}+y\right)^2=0.$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность Анчикову А.М. и Сушкову С.В., которые внимательно прочитали рукопись и внесли много полезных замечаний. Все эти замечания тщательно учтены при подготовке рукописи к печати. Мы также признательны Патрину Е.В. и Попову В.А. за помощь, которую они оказали при подготовке графических иллюстраций.

ЛИТЕРАТУРА

При написании этого пособия были использованы книги:

1. Эльсгольц Л.Э. "Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление", М.: Наука, 1969.
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. "Дифференциальные уравнения", М.: Наука, 1985.
3. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. "Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления", М.: Наука, 1980.
4. Степанов В.В. "Курс дифференциальных уравнений", М.: Гостехиздат, 1959.

СОДЕРЖАНИЕ

Даишев Ренат Абдурашидович, Даньшин Александр Юрьевич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конспект лекций

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 03.07.2009 г.
Форм. бум. 60x84 1/16. Гарнитура "Таймс". Печать ризографическая.
Печ. л. 9,5. Т.250. З. 237.

Лаборатория оперативной полиграфии КГУ
420045, Казань, ул.Кр.Позиция 2а
Тел. 231-52-12