Министерство образования и науки РФ

ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Институт экономики и финансов

Кафедра математики и экономической информатики

В. Л. ВОРОНЦОВА
Н. А. ОПОКИНА
Е. М. РОМАНОВА

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Конспект лекций

Казань-2014

Направление подготовки :

080100.62: «Экономика» (бакалавриат, I курс, 1 семестр; очное обучение) **Дисциплина**: **«Экономико-математические методы»**

Учебный план: «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», очное, 2014 г.

Количество часов: 72 ч. (в том числе : лекции 18 часов, практические занятия - 18 часов, самостоятельная работа – 36; форма контроля: зачет (1-й семестр))

Темы: 1. Метод искусственного базиса.

2.Двойственность в линейном программировании и ее экономический анализ. Элементы теории двойственности. Основные теоремы двойственности о взаимосвязи решений исходной и двойственной задач.

3.Транспортные задачи линейного программирования. Основные способы построения начального опорного плана. Теоремы об оптимальности плана. Метод потенциалов.

4.Задача о загрузке оборудования.

5.Сетевое планирование управления. Сетевые графики, правила их построения, нумерация событий. Временные параметры. Критический путь.

6. Динамическое программирование.

Ключевые слова: расширенная задача, прямая задача, двойственная задача, опорный план, метод северо-западного угла, метод наименьшей стоимости, потенциал, цикл, сетевой график, событие, работа, критический путь, принцип оптимальности.

Дата начала использования: **1 сентября 2014 г.**

Авторы - составители:

Опокина Надежда Анатольевна, доцент кафедры математики и экономической информатики, к.ф.-м.н., **e-mail:** **opnadin@mail.ru**

Воронцова Валерия Леонидовна, доцент кафедры математики и экономической информатики., к.ф.-м.н., **e-mail:** **milen99@narod.ru**

Романова Елена Михайловна, доцент кафедры математики и экономической информатики, к.ф.-м.н., **e-mail:** **romanova1elena@rambler.ru**

Содержание

Лекция 1

Метод искусственного базиса

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия метода искусственного базиса.

Ключевые слова. Основная задача, расширенная задача, искусственный вектор, искусственная переменная.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме.
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается индивидуальные задания по вариантам;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. **Составление расширенной ЗЛП.**
2. **Теорема о взаимосвязи исходной и расширенной задач.**
3. **Алгоритм метода искусственного базиса.**

Для задачи, записанной в форме основной задачи линейного программирования, можно непосредственно указать ее опорный план, если среди векторов a_j, компонентами которых служат коэффициенты при неизвестных в системе уравнений данной задачи, имеется m единичных. Однако для многих задач линейного программирования, записанных в форме основной задачи и имеющих опорные планы, среди векторов a_j не всегда есть m единичных. Рассмотрим такую задачу:

Пусть требуется найти максимум функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \, (j = 1,2,\ldots,n) \; b_i \geq 0 (i = 1,2,\ldots,m) \quad (3)$$

Матрица из коэффициентов при неизвестных не содержит ни одного единичного вектора

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Определение 1. Задача, состоящая в определении максимального значения функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m} \quad (4)$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_{n+m} = b_m \end{cases} \quad (5)$$

$$x_j \geq 0\,(j = 1,2,\ldots,n)\; b_i \geq 0 (i = 1,2,\ldots,m) \quad (6)$$

где M – некоторое достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задается, называется **расширенной задачей** по отношению к задаче (1) – (3).

Расширенная задача имеет опорный план $\overline{X} = (0,0,...,0,b_1,b_2,...,b_m)$

Он определяется системой единичных векторов a_{n+1}, a_{n+2},..., a_{n+m}, образующих базис ***m***-го векторного пространства, который называется ***искусственным***. Сами векторы, так же как и переменные x_{n+i} (i=1,2,…m), называются ***искусственными***. Так как расширенная задача имеет опорный план, то ее решение может быть найдено симплексным методом.

Теорема 1. Если в оптимальном плане $\overline{X}^* = (x^*{}_1, x^*{}_2,..., x^*{}_n, x^*{}_{n+1},..., x^*{}_{n+m})$ расширенной задачи (4) – (6) значения искусственных переменных x_{n+i} =0, (i=1,2,…m) , то $\overline{X}^* = (x^*{}_1, x^*{}_2,..., x^*{}_n)$ является оптимальным планом задачи (1) – (3).

Таким образом, если в найденном оптимальном плане расширенной задачи, значения искусственных переменных равны нулю, то тем самым получен оптимальный план исходной задачи. Если оптимальное решение расширенной задачи будет содержать, по крайней мере, одно x_{n+i}>0, то исходная задача не имеет решения. Поэтому остановимся более подробно на нахождении решения расширенной задачи.

При опорном плане $\overline{X} = (0,0,...,0,b_1,b_2,...,b_m)$ расширенной задачи значение оценок есть

$$\Delta'_0 = -M\sum_{i=1}^{m} b_i\ , \quad z'_j = -M\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

А значения $\Delta'_j = z_j - c_j$ равны $\Delta'_j = -M\sum_{i=1}^{m} a_{ij} - c_j\,(j = 1,2,..,n+m)$. Таким образом, Δ'_0 и разности $\Delta'_j = z_j - c_j$ состоят из двух независимых частей, одна из которых зависит от *M*, а другая – нет.

После вычисления Δ'_0 и $\Delta'_j = z_j - c_j$ их значения, а так же исходные данные расширенной задачи заносят в таблицу, которая содержит на одну строку больше, чем обычная симплексная таблица. При этом в ***(m+2)*** – ю строку помещают коэффициенты при *M*, а в *(m+1)*-ю - слагаемые, не содержащие *M*.

При переходе от одного опорного плана к другому в базис вводят вектор, соответствующий наибольшему по абсолютной величине отрицательному числу *(m+2)*-й строки. Искусственный вектор, исключенный из базиса в результате некоторой итерации, в дальнейшем не имеет смысла вводить ни в один из последующих базисов и, следовательно, преобразование столбцов этого вектора излишне. Пересчет симплекс-таблиц при переходе от одного опорного плана к другому производят по общим правилам симплексного метода.

Итерационный процесс по *(m+2)*-й строке ведут до тех пор, пока:

1) либо все искусственные векторы не будут исключены из базиса;
2) либо не все искусственные векторы исключены, но *(m+2)*-я строка не содержит больше отрицательных элементов в столбцах векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{n+m}$ (для задач на максимум) или положительных элементов (в задаче на минимум).

В первом случае базис отвечает некоторому опорному плану исходной задачи и определение ее оптимального плана продолжают по (m+1)-й строке.

Во втором случае, если элемент, стоящий в (m+2)-й строке столбца вектора *b* отрицателен (для задач на максимум) или положителен (в задаче на минимум), то исходная задача не имеет решения; если же он равен нулю, то найденный опорный план исходной задачи является вырожденным и базис содержит по крайней мере один из векторов искусственного базиса.

Если исходная задача содержит несколько единичных векторов, то их следует включить в искусственный базис.

Задания для практики:

Выполнить задания [1]: с. 221, № 5;

[2]: с. 419 - 420, № 25.24(17-24).

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие задачи линейного программирования решаются методом искусственного базиса?
2. Как составляется расширенная задача?
3. В каком случае можно сократить количество вводимых искусственных векторов?
4. Когда оптимальный план расширенной задачи является оптимальным планом исходной задачи?
5. Как определяется вектор, вводимый в базис, при использовании искусственного базиса?
6. Когда расширенная задача не имеет решения и как это определить, решая расширенную задачу?

Глоссарий

Система единичных векторов a_{n+1}, a_{n+2},..., a_{n+m}, образующие базис $\boldsymbol{m}$-го векторного пространства называется ***искусственным базисом***.

Искусственные векторы, входящие в искусственный базис, называются ***искусственными***.

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2007.
2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сб. задач по мат. программированию - Минск: Высшая школа, 1985, стр.32-33.
5. Акулич И. А. Математическое программирование в примерах и задачах -М.: Высшая школа, 1994, глава 1, §1.4, стр.47-55.

Лекции 2 и 3

Двойственность в линейном программировании

(занятия 1 и 2)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия теории двойственности.

Ключевые слова. Прямая задача, двойственная задача, симметричные и несимметричные пары двойственных задач, оптимальный план исходной задачи, оптимальный план двойственной задачи.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Элементы теории двойственности. Двойственные задачи и правила их построения.
2. Основные теоремы двойственности о взаимосвязи решений исходной и двойственной задач.
3. Экономическая интерпретация пары двойственных задач.

1.**Элементы теории двойственности. Двойственные задачи и правила их построения.**

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие другую задачу, называемую ***двойственной*** по отношению к первой.

Рассмотрим общую задачу линейного программирования (задача 1):

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n (\max)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 (j = 1,2,...,l; l \le n)$$

$$x_j - \text{любого знака}(j = l+1, l+2,..., n)$$

Построим другую задачу (задача $1^{'}$):

$$T = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_ny_n (\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + ... + a_{ml}y_m \ge c_l \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,l+1}y_2 + ... + a_{m,l+1}y_m = c_{l+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}x_m = c_n \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 (i = 1,2,...k; k \le m)$$

$$y_i - \text{любого знака}(i = k+1, k+2,..., m)$$

Задачу 1 назовем **исходной** или **прямой** задачей. Тогда задача 1 называется **двойственной** (или **сопряженной**) к задаче $1^{'}$.

Двойственной по отношению к задаче 1 является задача $1^{'}$; двойственной по отношению к двойственной задаче является прямая задача. Отсюда следует, что любую из задач 1 и $1^{'}$ можно рассматривать как прямую, тогда другая будет двойственной к ней. Поэтому задачи 1 и $1^{'}$ называются **взаимно двойственными** (или взаимосопряженными).

Двойственная задача получается из прямой задачи по следующим правилам:

1. Каждому неравенству прямой задачи соответствует неотрицательная переменная двойственной задачи и, наоборот, неотрицательной переменной прямой задачи соответствует неравенство двойственной задачи.
2. Каждому равенству прямой задачи соответствует произвольная переменная двойственной задачи и, наоборот, каждой произвольной переменной прямой задачи ставится в соответствие равенство двойственной задачи.
3. Транспонированная матрица системы ограничений прямой задачи служит матрицей системы ограничений двойственной задачи.
4. Свободные члены системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной задачи, и наоборот, коэффициенты целевой функции – свободными членами системы ограничений двойственной задачи.
5. Задача минимизации соответствует задача максимизации и наоборот. При этом

ограничения в задаче на минимум должны содержать только знаки $\geq$ и =, а в задаче на максимум – только знаки $\leq$ и =.

Если прямая задача на минимум содержит ограничения вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i$, то следует предварительно умножить обе части соответствующего неравенства на – 1. Аналогично, если прямая задача на максимум и содержит неравенство вида $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \geq b_k$, то необходимо вначале обе части данного ограничения умножить на – 1.

Пары двойственных задач подразделяют на **симметричные** и **несимметричные**. В симметричной паре двойственных задач ограничения прямой и двойственной задач являются только неравенствами.

Прямая задача (1) двойственная задача(1')

$$
\begin{array}{ll}
\min Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 & \max f = 10y_1 + 20y_2 - 25y_3 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10 & y_1 \geq 0 \\
4x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 20 & y_2 - \text{произвольного знака} \\
x_1 - 5x_2 + 7x_3 + x_4 \geq -25 & y_3 \geq 0 \\
x_1 \geq 0 & 2y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 2 \\
x_2 - \text{произвольного знака} & 3y_1 + y_2 - 5y_3 = -3 \\
x_3 \geq 0 & y_1 + 6y_2 + 7y_3 \leq 5 \\
x_4 - \text{произвольного знака} & -2y_2 + y_3 = 4
\end{array}
$$

Таким образом, переменные обеих задач могут принимать только неотрицательные значения. В несимметричной паре двойственных задач ограничения одной их задач являются равенствами.

Пример .

Прямая задача (1).

$$Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 (\min)$$

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10 \\
4x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 20 \\
-x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 \leq 25
\end{cases}
$$

$x_1 \geq 0; x_2 - \text{произвольное}; x_3 \geq 0; x_4 - \text{произвольное}$

Прямая задача на минимум и третье ограничение содержит знак «$\leq$». Поэтому, умножив обе части этого неравенства на - 1, преобразуем его, получим неравенство со знаком «$\geq$». Используя приведенные правила, получаем следующую пару двойственных задач:

Прямая задача (1) двойственная задача(1')

$$\min Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10$$
$$4x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 20$$
$$x_1 - 5x_2 + 7x_3 + x_4 \geq -25$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \forall$$
$$x_3 \geq 0$$
$$x_4 \forall$$

$$\max\ f = 10y_1 + 20y_2 - 25y_3$$
$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \forall$$
$$y_3 \geq 0$$
$$2y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 2$$
$$3y_1 + y_2 - 5y_3 = -3$$
$$y_1 + 6y_2 + 7y_3 \leq 5$$
$$-2y_2 + y_3 = 4$$

Пусть даны ЭММ ЗЛП в канонической форме и двойственная к ней. Исходная задача:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ (\max),$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1,2,\ldots,m),$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,..,n)$$

Или в матричной форме

Z=CX (max),

AX=B,

$X \geq 0$

Двойственная задача

$$T = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \text{ (min)},$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \;\; (j = 1,2,\ldots,n)$$

Или в матричной форме

$$T=YB \text{ (min)},$$

$$YA \geq C,$$

Каждая из пары двойственных задач является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо одна от другой. При определении оптимального плана одной из задач находится и решение другой задачи. Зависимость между решениями прямой и двойственной задачи характеризуют следующие теоремы.

2. Основные теоремы двойственности.

Лемма I. Если $\overline{X}$ – некоторый план исходной задачи, $\overline{Y}$ – произвольный план двойственной, то значение целевой функции исходной задачи при плане $\overline{X}$ не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при плане $\overline{Y}$,т.е. $Z(\overline{X}) \leq T(\overline{Y})$.

Лемма 2. Если $\overline{X}^*$ – некоторый план прямой задачи, $\overline{Y}^*$ – некоторый план двойственной задачи, и выполняется условие $Z(\overline{X}^*) = T(\overline{Y}^*)$, то $\overline{X}^*$ - оптимальный план прямой задачи, а $\overline{Y}^*$ - оптимальный план двойственной задачи.

Первая теорема двойственности.

Если из пары двойственных задач одна обладает оптимальным планом, то и другая имеет оптимальное решение, причем значения целевых функций для их оптимальных планов совпадают, т.е. $Z_{\max} = T_{\min}$

Если целевая функция одной из задач не ограничена, то другая задача не имеет решения.

Из первой теоремы вытекает следующее **следствие**:

Для пары двойственных задач справедливо одно и только одно из следующих утверждений:

1) Прямая и двойственная задачи имеют оптимальные решения и $Z_{\max} = T_{\min}$;
2) Одна из задач имеет хотя бы один план, но не имеет конечного оптимального плана, и другая задача не имеет ни одного плана;
3) Ни одна из пары двойственных задач не имеет планов.

Из первой теоремы двойственности следует, что по **оптимальному плану исходной** задачи $\bar{X}^*$, используя формулу $\bar{Y}^* = C_б A_б^{-1}$, можно определить **оптимальный план двойственной** задачи.

<u>Вторая теорема двойственности.</u>

Рассмотрим пару симметричных двойственных задач в матричной форме

Прямая задача	Двойственная задача
Z=CX (min),	T=YB (max),
AX≥B,	YA≤C,
$X \geq 0$	$Y \geq 0$

Для того, чтобы планы $\overline{X}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\overline{Y}=(y_1, y_2, ..., y_n)$ прямой и двойственной задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\bar{y}(A\bar{x}-b)=0 \quad (1)$$
$$(c-\bar{y}A)\bar{x}=0 \quad (2)$$

3. Экономическая интерпретация двойственных задач.

Исследуем экономическую интерпретацию задачи планирования производства и двойственной к ней задачи.

В двойственной задаче переменными величинами являются оценки $y_1, y_2, \ldots, y_m$ приписываемые единице каждого вида ресурсов. Они должны быть такими, чтобы общая оценка всего имеющегося количества ресурсов была минимальной, при условии, что суммарная оценка ресурсов, расходуемых на единицу любого вида продукции, будет не меньше дохода от нее.

Прямая задача:

$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n(max)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j=1,\ldots,n$$

Двойственная задача

$f=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m$ (min)

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases}$$
$$y_i \ge 0, \quad i=1,\ldots,m$$

С экономической стороны решение прямой задачи дает оптимальный план выпуска продукции, в решение двойственной задачи – оптимальную систему оценок, применяемых ресурсов.

Прямая (исходная задача)

$$\begin{array}{ccccccc} A & \bullet & X & = & AX & \le & B \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Нормы расхода} \\ \text{ресурсов на еди}- \\ \text{ницу продукции} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \text{размеры вы}- \\ \text{пуска про}- \\ \text{дукции} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{общий} \\ \text{расход} \\ \text{ресурсов} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \text{объем} \\ \text{имеющихся} \\ \text{ресурсов} \end{pmatrix}$$

$$X \ge 0$$

$$f = \quad Y \quad \bullet \quad B \quad = \quad YB$$

$$f = \begin{pmatrix} \text{оценки еди}- \\ \text{ницы ресурсов} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \text{объем имею}- \\ \text{щихся ре}- \\ \text{сурсов} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{общая оценка} \\ \text{имеющихся} \\ \text{ресурсов} \end{pmatrix} \to \min$$

Двойственная задача

$$C \quad \bullet \quad X \quad = \quad CX$$

$$Z = \begin{pmatrix} \text{Доход от еди}- \\ \text{ницы продукции} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \text{размеры вы}- \\ \text{пуска про}- \\ \text{дукции} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{общий} \\ \text{доход} \end{pmatrix} \to \max$$

$$\begin{array}{ccccccc} A^T & \bullet & Y & = & AY & \ge C \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Нормы расхода} \\ \text{ресурсов на еди}- \\ \text{ницу продукции} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \text{размеры вы}- \\ \text{пуска про}- \\ \text{дукции} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{общий} \\ \text{расход} \\ \text{ресурсов} \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} \text{объем} \\ \text{имеющихся} \\ \text{ресурсов} \end{pmatrix}$$

$$Y \ge 0$$

На основании первой теоремы двойственности мы можем сказать, что оптимальные планы двойственных задач связаны равенством значений целевых функций. Кроме того, по второй теореме двойственности: если при подстановке оптимального плана исходной задачи в систему ограничений i-е ограничение выполняется как строгое неравенство, то соответствующая, i-я переменная в оптимальном плане двойственной задачи равна 0.

По экономическому содержанию, это означает, что положительную двойственную оценку могут иметь лишь ресурсы, полностью используемые в оптимальном плане, оценки не полностью используемых ресурсов всегда равны 0 (именно для не полностью используемых ресурсов ограничения исходной задачи выполняются как строгие неравенства).

С другой стороны, если в оптимальном плане исходной задачи какая-то j-я переменная положительна, то j-ое ограничение двойственной задачи при подстановке ее оптимального плана будет выполняться как строгое равенство. Если же j-я переменная исходной задачи не входит в оптимальный план (т.е. равна 0), то при подстановке оптимального плана двойственной задачи в ее систему ограничений j-ое ограничение будет обращаться в строгое неравенство.

Экономическое содержание этой математической зависимости следующее: если данный вид продукции вошел в оптимальный план, то оценка ресурсов, затрачиваемых на единицу этой продукции, равна доходу от нее и производство продукции рентабельно. Если же данная продукция не вошла в оптимальный план, то по оценкам ее производство будет убыточным, т.е. оценка затрачиваемых ресурсов на выпуск единицы этой продукции окажется выше дохода от нее (и как крайний случай может быть равна ей при наличии в задаче множества оптимальных планов).

Задания для практики

Выполнить задания [2]: с. 424, №№ 26.2(1-8).

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается сущность двойственности в линейном программировании?
2. Какие пары двойственных задач относятся к симметричным и несимметричным?
3. Дайте экономическую интерпретацию двойственной задачи, если исходная задача состоит в оптимальном использовании ресурсов.
4. Сформулируйте основные теоремы двойственности.
5. Как по решению исходной (двойственной) найти решение двойственной (исходной) задачи?
6. Как определить рентабельность каждого вида продукции, используя двойственные оценки?
7. Как проводится экономический анализ показателей симплексной таблицы с оптимальным планом?

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2007.
2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сб. задач по мат. программированию - Минск: Высшая школа, 1985, стр.32-33.
5. Акулич И. А. Математическое программирование в примерах и задачах -М.: Высшая школа, 1994, глава 1, §1.4, стр.47-55.

Лекция 4

Транспортная задача (занятие 1)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия в постановке транспортной задачи.

Ключевые слова. Открытая и закрытая модель транспортной задачи. Вырожденный и невырожденный опорный план, метод «северо-западного» угла, метод минимальной стоимости, метод Фогеля.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Постановка транспортной задачи. ЭММ транспортной задачи.

2. Закрытая и открытая модели. Теоремы о существовании решения.

3. Основные способы построения начального опорного плана. Теоремы об оптимальности плана.

1. Постановка задачи и ее ЭММ.

Транспортная задача формулируется в следующем виде. Некоторый однородный груз, сосредоточенный у m поставщиков в количествах a_1, a_2, …, a_m единиц соответственно, необходимо доставить n потребителям в количествах b_1, b_2, …, b_n единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю ($i=1,2,…,m;j=1,2,…,n$). Требуется составить план перевозок, имеющий минимальную стоимость. Предположим, что суммарные запасы груза равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1)$$

Обозначим через x_{ij} количество груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю. Тогда условие задачи можно представить в виде таблицы (таблица 1)

Таблица 1.

b_j / a_i	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Матрица $X=(x_{ij})_{m \times n}$ называется матрицей (или планом) перевозок, а матрица $C=(c_{ij})_{m \times n}$ матрицей тарифов.

Составим ЭММ задачи. Минимизация транспортных затрат должна осуществляться при соблюдении следующих ограничений:

1. Груз каждого поставщика должен быть вывезен полностью, что математически выражается системой уравнений:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1j}+\ldots+x_{1n}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2j}+\ldots+x_{2n}=a_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{in}=a_i, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mj}+\ldots+x_{mn}=a_m \end{cases} \qquad (2)$$

Эти уравнения получаются из строк таблицы 1.

2. Потребности каждого потребителя должны быть удовлетворены полностью, т.е. должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{i1}+\ldots+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{i2}+\ldots+x_{m2}=b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{mj}=b_j, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{in}+\ldots+x_{mn}=b_n \end{cases} \qquad (3)$$

Уравнения получаются из столбцов таблицы 1.

3.Переменные должны быть неотрицательны,

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n) \quad (4)$$

Суммарные затраты на перевозки выражаются функцией

$$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+\ldots+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn},$$

которая должна принимать минимальное значение.

Таким образом, математическая запись транспортной задачи следующая:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} (\min) \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,..m) \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,..n) \quad (7)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n) \quad (8)$$

Задача содержит $m+n$ ограничений с m*n переменными.

2. Закрытая и открытая модели. Теоремы о существовании решения.

Модель называется **закрытой**, если выполнено равенство (1). Если равенство (1) не выполнено, то модель называется открытой.

Теорема 1. Транспортная задача, для которой выполняется условие (1)

$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, имеет решение.

Решение транспортной задачи начинается с построения опорного плана.

Теорема 2. Опорный план транспортной задачи содержит не более $m + n - 1$ положительных компонент .

Опорный план называется **невырожденным**, если число положительных компонент равно $m + n - 1$, в противном случае план называется **вырожденным**.

Каждому опорному плану должно соответствовать $m + n - 1$ занятых клеток, а остальные $m*n-(m + n - 1)=(m-1)(n-1)$ клеток будут свободными.

Рассмотрим методы получения первоначального опорного плана.

1. **Метод «северо-западного» угла**.

Пример 1. Исходные данные транспортной задачи заданы в таблице 2.

Таблица 2.

a_i \ b_j	***120***	***55***	***50***	***25***
110	***10***	***3***	***4***	***1***
80	***2***	***5***	***8***	***6***
60	***4***	***2***	***2***	***7***

Модель задачи закрытая, так как $\sum_{i=1}^{3} a_i = 250; \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 250$

Рассмотрим этапы составления плана в таблице 3.

Таблица 3.

a_i \ b_j	***120***	***55***	***50***	***25***
110	***10*** ***110***	***3*** ***-***	***4*** ***-***	***1*** ***-***
80	***2*** ***10***	***5*** ***55***	***8*** ***15***	***6*** ***-***
60	***4*** ***-***	***2*** ***-***	***2*** ***35***	***7*** ***25***

При нахождении опорного плана распределение груза начинают с клетки (1.1).

1. В клетку (1.1) заносим

$x_{12} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{110{,}120\} = 110$. Первый поставщик полностью отправил груз и поэтому $x_{12}=x_{13}=x_{14}=0$, соответствующие клетки (1.2), (1.3), (1.4) вычеркиваем. Потребности 1-го потребителя остались неудовлетворенными на $b_1' = b_1 - a_1 = 120 - 110 = 10$.

2. В клетку (2.1) занесем значение $x_{21} = \min\{a_1, b_1'\} = 10$. Первый потребитель удовлетворен полностью. Прочеркиваем клетку (3.1). У 2-го поставщика осталось

$a_2' = a_2 - b_1' = 80 - 10 = 70$ единиц груза.

3. Заполняем клетку (2.2), выбирая

$x_{22} = \min\{a_2', b_1\} = \min\{70{,}55\} = 55$. прочеркиваем клетку (3.1). У 2-го поставщика осталось $a_2'' = a_2 - x_{22} = 70 - 55 = 15$.

4. Загружаем клетку (2.3), полагая $x_{23} = \min\{a_2'', b_3\} = 15$. Груз 2-го поставщика реализован полностью. Прочеркиваем клетку (2.4), а $b_3' = b_3 - x_{23} = 50 - 15 = 35$.
5. Записываем в клетку (3.3) $x_{33} = \min\{a_3, b_3'\} = \min\{60{,}35\} = 35$. Потребности 3-го потребителя удовлетворены. Остаток груза поставщика составляет $a_3' = a_3 - x_{33} = 60 - 35 = 25$.
6. Заполняется клетка (4.4): $x_{44} = a_3 - x_{33} = 60 - 35 = 25$. В результате получаем опорный план (таблица 3).

Или $$X_1 = \begin{pmatrix} 110 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 55 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 25 \end{pmatrix}$$

Суммарные расходы на перевозку составляют:

$$Z(X_1) = 10 \cdot 110 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 55 + 8 \cdot 15 + 2 \cdot 35 + 7 \cdot 25 = 1760$$

2. **Метод минимальной стоимости**. При нахождении первоначального опорного плана среди всех стоимостей перевозок в таблице выбирается

минимальная $(\min\{c_{ij}\} = c_{lk})$ и клетка *(l, к)* заполняется: $x_{lk} = \min\{a_l, b_k\}$. Затем из рассмотрения исключают *l*-ю строку, если запасы l-го поставщика исчерпаны ($x_{lk} = a_l$) или *к*-ый столбец, если спрос *к*-го потребителя удовлетворен полностью ($x_{lk} = b_k$). Или l-ю строку и *к*-ый столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя ($x_{lk} = a_l = b_k$).

Из оставшихся свободных клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшей стоимостью и заполняют её аналогично предыдущей. Процесс распределения продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности – удовлетворены. Составим по данному методу план предыдущей транспортной задачи (табл.2).

Таблица 2.

a_i \ b_j	***120***	***55***	***50***	***25***
110	***10***	***3***	***4***	***1***
80	***2***	***5***	***8***	***6***
60	***4***	***2***	***2***	***7***

Наименьшая стоимость перевозки $(\min\{c_{ij}\} = c_{14} = 1)$. Заполняем клетку (1.4). $x_{14} = \min\{a_1, b_4\} = 25$. При этом $x_{24}=x_{34}=0$ и четвертый столбец исключается из дальнейшего рассмотрения.

Таблица 4.

a_i \ b_j	**120**	**55**	**50**	**25**
110	**10**	**3**	**4**	**1** **25**
80	**2**	**5**	**8**	**6** **-**
60	**4**	**2**	**2**	**7** **-**

Минимальная из оставшихся стоимостей $c_{21}=c_{32}=c_{33}=2$. Выбираем одну из клеток, соответствующих данной стоимости, например, (2.1) и занесем в нее величину $x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = 80$. При этом $x_{22}=x_{23}=x_{24}=0$ и вторая строка из рассмотрения выводится. Находим минимальную стоимость среди оставшихся свободных клеток $c_{32}=c_{33}=2$. Заполняем клетку (3.2) $x_{32} = \min\{a_3, b_2\} = 55$. Далее заполняем клетку (3.3) $x_{33} = \min\{a_3 - x_{32}, b_3\} = 5$ полагая $x_{31}=x_{34}=0$, исключаем третью строку. Теперь груз остался лишь у первого поставщика. Загружаем клетку (1.3), $x_{13} = \min\{a_1 - x_{14}, b_3 - x_{33}\} = 45$, а затем клетку (1.1) $x_{11} = \min\{40,40\} = 40$.

Таблица 5.

b_j / a_i	***120***	***55***	***50***	***25***
110	***10*** ***40***	***3*** **-**	***4*** ***45***	***1*** ***25***
80	***2*** ***80***	***5*** **-**	***8*** **-**	***6*** **-**
60	***4*** **-**	***2*** ***55***	***2*** ***5***	***7*** **-**

В результате получим опорный план

$$X_2 = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 45 & 25 \\ 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Суммарная стоимость перевозок по плану X_2 составляет:

$Z(X_2) = 10 \cdot 40 + 4 \cdot 45 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 55 + 2 \cdot 5 = 885$ ед

Суммарная стоимость перевозок по плану X_1 полученному методом северо-западного угла, выше, чем по плану X_2. Это связано с тем, что при получении плана перевозок X_1 не учитываются стоимости перевозок.

Не должно быть ни одного прямоугольника, все вершины которого находились бы в занятых клетках.

3. **Метод двойного предпочтения**.

Для нахождения опорного плана по каждой строке выбирается клетка с наименьшей стоимостью и отмечается. Если имеются две клетки с одинаковой минимальной стоимостью, то отмечаются обе клетки. По каждому столбцу выбирается тоже клетка с наименьшей стоимостью и отмечается. Распределение груза начинается с клеток с двойными отметками по наименьшим стоимостям. Затем загружаются клетки с одной отметкой. Заполнение клеток производится также, как в методе наименьшей стоимости. Если все отмеченные клетки заполнены или часть из них прочеркнута, а опорный план еще не получен, то дальнейшая загрузка клеток производится по методу наименьшей стоимости.

Рассмотрим пример (таблица 6).

Таблица 6

b_j a_i	***120***	***55***	***50***	***25***
110	***10*** ***40***	***3*** ***45***	***4*** ***-***	***1*** ٧٧ ***25***
80	***2*** ٧٧ ***80***	***5*** ***-***	***8*** ***-***	***6*** ***-***
60	***4*** ***-***	***2*** ٧٧ ***10***	***2*** ٧٧ ***50***	***7*** ***-***

По первой строке $(\min\{c_{1j}\} = c_{14} = 1)$, и отмечаем клетку (1.4). По второй строке $(\min\{c_{2j}\} = c_{21} = 2)$, выбираем клетку (2.1) и отмечаем. По третьей строке $(\min\{c_{3j}\} = c_{32} = c_{33} = 2)$, им соответствуют клетки (3.2) и (3.3) отмечаем их. По первому столбцу $(\min\{c_{i1}\} = c_{21} = 2)$, соответствует клетке (2.1), отмечаем ее второй раз. По второму столбцу $(\min\{c_{i2}\} = c_{32} = 2)$, в клетку (3.2) ставится вторая отметка. По третьему столбцу $(\min\{c_{i3}\} = c_{33} = 2)$ и второй раз отмечается клетка (3.3). По четвертому столбцу $(\min\{c_{i4}\} = c_{14} = 1)$ и вторая отметка ставится в клетку (1.4). Распределение груза начнем с клетки с двойной отметкой (1.4), где самая меньшая стоимость $x_{14} = \min\{a_1, b_4\} = 25$, при этом x_{24}=x_{34}=0 , клетки (2.4), (3.4) вычеркиваются. Затем заполним клетку с двойной отметкой (3.3), $x_{33} = \min\{a_3, b_3\} = 50$ и x_{13}=x_{23}=0, клетки (1.3), (2.3) прочеркиваются. Далее загрузим клетку с двойной отметкой (3.2),

$x_{32} = \min\{a_3 - x_{33}, b_3\} = \min\{10,55\} = 10,\ x_{31} = 0$, то клетка (3.1) вычеркивается. Заполняем клетку с двойной отметкой (2.1).

$x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = \min\{80,120\} = 80,\ x_{22} = x_{24} = 0$, клетки (2.2), (2.4) прочеркиваем. Больше отмеченных клеток нет, но опорный план еще не получен, и распределение груза продолжаем по методу наименьшей стоимости. Заполняем клетку (1.2), $x_{21} = \min\{a_1 - x_{14}, b_2 - x_{32}\} = 45$ и клетку (1.1)

$x_{11} = \min\{a_1 - x_{12}, b_1 - x_{21}\} = \min\{40,40\} = 40$.

В результате получен первоначальный опорный план

$$X_3 = \begin{pmatrix} 40 & 45 & 0 & 25 \\ 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 0 \end{pmatrix}$$

Суммарная стоимость перевозки по этому плану

$Z(X_3) = 10 \cdot 40 + 3 \cdot 45 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 50 = 840$ ед

Замечание. Может оказаться, что план транспортной задачи будет содержать меньше, чем $m+n-1$ положительных компонент. Это произойдет, если остаток груза i-го поставщика будет равен величине b_j или остаток неудовлетворенных потребностей j-го потребителя будет равен a_i. Тогда занесем в следующую по строке или столбцу клетку (в ту из них, которой соответствует меньшая стоимость перевозки единицы груза) величину $x_{i,j+1}=0$ (или $x_{i+1,j}=0$). Она соответствует нулевым значениям базисных переменных, т.е. получается вырожденный опорный план. При этом следует проверять, чтобы не было ни одного прямоугольника, все вершины которого находились бы в занятых клетках.

4. Метод аппроксимации Фогеля. При составлении первоначального опорного плана данным методом по всем строкам и столбцам определяют разность между двумя наименьшими тарифами. Эти разности записывают в отдельные строку и столбец распределительной таблицы. Среди указанных разностей выбирают максимальную. В строке (столбце) с максимальной разностью определяют минимальный тариф и заполняют соответствующую этому тарифу клетку. Распределение груза производится по рассмотренным ранее правилам. Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).Рассмотрим метод на предыдущем примере.

					Этапы
b_j / a_i	***120***	***55***	***50***	***25***	***N1***
110	***10***	***3***	***4***	***1*** ***25***	***2***
80	***2***	***5***	***8***	***6*** ***-***	***3***
60	***4***	***2***	***2***	***7*** ***-***	***0***
N1	***2***	***1***	***2***	***5***	

На первом этапе максимальная разность равна 5 и соответствует 4-му столбцу. Минимальный тариф в 4-м столбце c_{14}=1, заполняем клетку (1,4):

$x_{14} = \min\{a_1, b_4\} = \min\{110,25\} = 25$

Исключаем из рассмотрения 4-ый столбец, у 1-го поставщика остается $a_1'=110-25=85$. После этого определяем следующую клетку для заполнения.

На 2-м этапе максимальная разность равна 3 и соответствует 2-ой строке.

Минимальный тариф в этой строке равен c_{21}=2, заполняем клетку (2,1):

$x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = \min\{80,120\} = 80$

					Этапы	
b_j \ a_i	**120**	**55**	**50**	**25**	**N1**	**N2**
110	10	3	4	1 25	2	1
80	2 80	5 -	8 -	6 -	3 -	3 -
60	4	2	2	7 -	0	0
N1	2	1	2	5		
N2	2	1	2	-		

Исключаем из рассмотрения 2-ую строку, у 2-го поставщика груза не осталось. После этого определяем следующую клетку для заполнения. Потребности 1-го потребителя остались не удовлетворены на $b'_1=120-80=40$.

На 3-м этапе максимальная разность равна 3 и соответствует 2-ой строке. Минимальный тариф в этой строке равен $c_{21}=2$, заполняем клетку (2,1):

$$x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = \min\{80{,}120\} = 80$$

					Этапы		
b_j / a_i	120	55	50	25	N1	N2	N3
110	10	3 55	4	1 25	2	2	2
80	2 80	5 -	8 -	6 -	3	3	-
60	4	2 -	2	7 -	0	0	0
N1	2	1	2	5			
N2	2	1	2	-			
N3	2	1	2	-			

$a''_1 = 85 - 55 = 30$

					Этапы			
b_j / a_i	**120**	**55**	**50**	**25**	**N1**	**N2**	**N3**	**N4**
110	**10** **-**	**3** **55**	**4** **30**	**1** **25**	**2**	**2**	**2**	**2**
80	**2** **80**	**5** **-**	**8** **-**	**6** **-**	**3**	**3**	**-**	**-**
60	**4**	**2** **-**	**2**	**7** **-**	**0**	**0**	**0**	**0**
N1	**2**	**1**	**2**	**5**				
N2	**2**	**1**	**2**	**-**				
N3	**2**	**1**	**2**	**-**				
N4	**2**	**1**	**2**	**-**				

$b''_3 = 50-30=20$

					Этапы					
b_j / a_i	**120**	**55**	**50**	**25**	**N1**	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**	**N6**
110	**10** **-**	**3** **55**	**4** **30**	**1** **25**	**2**	**2**	**2**	**2**	**-**	**-**
80	**2** **80**	**5** **-**	**8** **-**	**6** **-**	**3**	**3**	**-**	**-**	**-**	**-**
60	**4** **40**	**2** **-**	**2** **20**	**7** **-**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
N1	**2**	**1**	**2**	**5**						
N2	**2**	**1**	**2**	**-**						
N3	**2**	**1**	**2**	**-**						
N4	**2**	**1**	**2**	**-**						
N5	**2**	**1**	**2**	**-**						
N6	**-**	**-**	**2**	**-**						

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 55 & 30 & 25 \\ 80 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

Суммарная стоимость перевозки по этому плану

$$Z(X_4)=3\cdot 55+4\cdot 30+1\cdot 25+2\cdot 80+4\cdot 40+2\cdot 20=670 \text{ ед}$$

Наименьшую стоимость имеет первоначальный опорный план, полученный методом аппроксимации Фогеля.

Задания для практики

Выполнить задания [3]: с. 432 - 434, №№ 27.3(1,2), 27.4(1,2), 27.5(1,2).

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте постановку транспортной задачи и напишите ее экономико-математическую модель (ЭММ).
2. Укажите необходимое и достаточное условия существования решения транспортной задачи.
3. Сколько положительных компонент может содержать опорный план транспортной задачи?
4. Какие существуют методы построения первоначального опорного плана транспортной задачи? Постройте опорный план с помощью этих методов.

Глоссарий

Модель называется **закрытой**, если выполнено равенство $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Модель называется **открытой**, если не выполнено равенство $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Опорный план называется **невырожденным**, если число положительных компонент равно $m + n - 1$.

Опорный план называется **вырожденным**, если число положительных компонент не равно $m + n - 1$.

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2007.
2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сб. задач по мат. программированию - Минск: Высшая школа, 1985, стр.32-33.
5. Акулич И. А. Математическое программирование в примерах и задачах -М.: Высшая школа, 1994, глава 1, §1.4, стр.47-55.

Лекция 5

Транспортная задача

Метод потенциалов

(занятие 2)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия метода потенциалов для решения транспортной задачи.

Ключевые слова. Метод потенциалов, блокирование перевозок.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. **Метод потенциалов. Правило построения цикла по переброске грузов.**
2. **Транспортные задачи с нарушенным балансом производства и потребления.**
3. **Блокирование перевозок.**

1. **Метод потенциалов**. Полученный первоначальный опорный план транспортной задачи следует проверить на оптимум. Если он не оптимален, его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

<u>Теорема 3</u>. Если план $X^0=(x^0_{ij})_{mxn}$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m+n$ чисел u_i,v_j, удовлетворяющих условиям:

$$u_i+v_j=c_{ij} \text{ для } x_{ij}^0>0$$

$$u_i+v_j\le c_{ij} \text{ для } x_{ij}^0=0 \ (i=1,2,\ldots m; j=1,2,\ldots n)$$

Числа u_i,v_j называются **потенциалами** соответственно i-го поставщика и j-го потребителя.

Из формулировки теоремы следует, что для оптимальности плана транспортной задачи необходимо выполнение условий:

а) для каждой **занятой** клетки сумма потенциалов должна быть **равна стоимости перевозки единицы груза (тарифу)**, стоящей в этой клетке, т.е. $u_i+v_j=c_{ij}$ для $x_{ij}^0>0$;

б) для каждой **свободной** клетки сумма потенциалов должна быть меньше или равна **тарифу** в этой клетке, т.е. $u_i+v_j\leq c_{ij}$ для $x_{ij}^0=0$.

Алгоритм метода потенциалов

1.По одному из рассмотренных выше методов составляется первоначальный опорный план.

2.Проверяется число занятых клеток, которое должно равняться $N = m + n – 1$. Если $N < m + n – 1$ (план вырожденный), то $(m + n –1)–N$ клеток заполняется нулевыми перевозками $x_{ij}^0=0$.

3.Находят потенциалы поставщиков и потребителей u_i,v_j из системы $m + n – 1$ уравнений для занятых клеток $u_i+v_j=c_{ij}$.

Так как число уравнений меньше числа неизвестных $m + n$, то один из потенциалов принимается за 0, а остальные определяются однозначно. Найденные значения u_i,v_j заносятся в таблицу.

4.Вычисляют оценки для всех свободных клеток по формуле

$\gamma_{ij} = c_{ij} - (U_i + V_j)$.

Если все $\gamma_{ij} \geq 0$, то полученный план является оптимальным. При этом если все $\gamma_{ij} > 0$, то оптимальный план единственный.

Если хотя бы одна оценка $\gamma_{ij} = 0$, то задача имеет бесчисленное множество оптимальных планов. Если хотя бы одна оценка $\gamma_{ij} < 0$, то план не оптимален и переходят к новому опорному плану.

5.Среди отрицательных оценок γ_{ij} выбирают минимальную и для соответствующей клетки строят цикл пересчета.

Пусть $\min\{\gamma_{ij}\} = \gamma_{st}$ и для клетки *(s,t)* строится **цикл** (цепь).

Циклом в таблице условий транспортной задачи называется замкнутая ломаная линия, состоящая из звеньев, пересекающих под прямым углом. Все вершины ломаной находятся в занятых клетках, кроме клетки *(s,t)*. Каждое звено соединяет две клетки строки (столбца). Для любой свободной клетки можно построить лишь один цикл.

Построенный цикл обходим против часовой стрелки, начиная с клетки *(s,t)* и отмечаем его вершины попеременно знаками плюс и минус. Вершине в клетке *(s,t)* присваивается знак плюс. Клетки цикла, отмеченные знаком «+», образуют «положительную полуцепь», а знаком «-» - «отрицательную полуцепь». Среди поставок в клетках отрицательной полуцепи выбирается минимальная. Пусть

$$\min\{x_{ij}\} = x_{pq} = \theta \ .$$

Число θ к поставкам при положительных вершинах прибавляется. А из поставок при отрицательных вершинах вычитается. В результате происходит перераспределение груза по вершинам цикла и получается новый опорный план. Экономически оценка γ_{st} показывает на сколько единиц уменьшатся транспортные издержки при загрузке клетки *(s,t)* единицей груза. Отсюда следует, что при загрузке *(s,t)* грузом в θ единиц, значение целевой функции уменьшится на величину $\Delta Z = \theta \cdot |\gamma_{st}|$.

6.Новый опорный план снова проверяют на оптимальность, т.е. повторяют все действия, начиная с этапа 3.

Следует отметить, что если при отрицательных вершинах имеется два или более одинаковых минимальных значения θ, освобождают только одну из этих клеток, а остальные оставляют занятыми (с нулевыми поставками).

2. Транспортные задачи с нарушенным балансом производства и потребления

Как было доказано (теорема 1), для разрешимости транспортной задачи должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1)$$

Это - закрытая моделью, если это условие нарушено – открытая модель.

<u>Приведение открытой модели к закрытой</u>. Возможны два случая:

а) Суммарные запасы превышают суммарные потребности:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

В этом случае транспортная задача имеет вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} (\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = 1,2,...m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,...n)$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n)$$

б) Суммарные потребности превышают суммарные запасы:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Тогда транспортная задача записывается следующим образом:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\,(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad (i=1,2,...m)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le b_j \quad (j=1,2,...n)$$

$$x_{ij}\ge 0 \quad (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$$

Для решения транспортной задачи с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую. В случае (а) вводится фиктивный потребитель с потребностью $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$ и полагают стоимости перевозок единицы груза от любого поставщика к фиктивному потребителю равными нулю, т.е. $C_{i,n+1}=0,\ i=1,...m$.

В случае (б) вводится $m+1$ -ый фиктивный поставщик, запасы которого принимаются равными $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$. Стоимости перевозок единицы груза от фиктивного поставщика к любому потребителю полагают равными 0: $C_{m+1,j}=0,\ j=1,...n$

После соответствующих преобразований задача принимает вид закрытой модели и решается обычным способом.

3. Блокирование перевозок.

В реальных условиях перевозки груза от определенных поставщиков к отдельным потребителям не могут быть осуществлены. Такие условия

возникают в задачах по перевозке неоднородного груза и при исследовании открытых моделей, если:
а) требуется полностью удовлетворить спрос некоторого потребителя, в случае, когда суммарный запас груза у поставщиков меньше суммарного объема потребления; б) требуется вывезти весь груз некоторого поставщика при условии, когда суммарный запас груза у поставщиков превышает суммарные потребности.

Предположим, что перевозки от i-го поставщика j-му потребителю должны быть исключены. Это условие будет выполнено, если в оптимальном плане транспортной задачи клетка (i,j) будет свободной, т.е. $x^0_{ij}=0$. Для определения оптимальных планов таких задач стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика j-му потребителю устанавливают значительно больше любой из стоимостей перевозок решаемой задачи, т.е. принимает $c_{ij}=M$, где M – достаточно большое положительное число по сравнению со стоимостями перевозок в других клетках. При таком предположении в оптимальном плане клетка (i,j) будет свободной. Такой метод называется **методом запрещения перевозок** или **блокированием клеток**.

Задания для практики:

Выполнить задания [3]: с.437-440 №27.7(1-5),

Вопросы для самоконтроля:

1. Как строится система потенциалов? Как определяются оценки свободных клеток?
2. Укажите критерий оптимальности плана транспортной задачи.
3. Что такое цикл? Как он строится?
4. Какая модель транспортной задачи называется закрытой, а какая – открытой?
5. Как открытую модель можно привести к закрытой?

6. В чем заключается сущность блокирования перевозок?

Глоссарий

Циклом в таблице условий транспортной задачи называется замкнутая ломаная линия, состоящая из звеньев, пересекающих под прямым углом. Все вершины ломаной находятся в занятых клетках, кроме клетки *(s,t)*. Каждое звено соединяет две клетки строки (столбца). Для любой свободной клетки можно построить лишь один цикл.

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2007.
2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сб. задач по мат. программированию - Минск: Высшая школа, 1985, стр.32-33.
5. Акулич И. А. Математическое программирование в примерах и задачах -М.: Высшая школа, 1994, глава 1, §1.4, стр.47-55.

Лекция 6

Задача о загрузке оборудования (λ – задача)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия задачи о загрузке оборудования.

Ключевые слова. Стандартный час**,** приведенные к стандартным часам ресурсы**,** приведенные к стандартным часам потребности и приведенные к стандартным часам затраты**.**

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Постановка задачи о загрузке оборудования.
2. Составление ЭММ задачи о загрузке оборудования и приведение ее к ЭММ транспортной задачи.
3. Алгоритм решения.

Пусть на предприятии имеются m различных станков, на которых может изготовляться любое из n изделий. Заданы: матрица производительностей $\lambda = (\lambda_{ij})_{m\times n}$, где λ_{ij} - производительность (шт/час) i -го станка при производстве j-го изделия, матрица затрат $C=(c_{ij})_{mxn}$, где c_{ij} - затраты (т. Руб.) на производство единицы j-го изделия на i -ом станке. Известны также мощности станков $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (в станко-ч.) и плановое задание по выпуску изделий $b_1, b_2, \ldots, b_n$ в штуках. Исходные данные можно представить в виде таблицы 1. *Таблица 1.*

b_j / a_i	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
a_1	C_{11} λ_{11} X_{11}	C_{12} λ_{12} X_{12}	…	C_{1j} λ_{1j} X_{1j}	…	C_{1n} λ_{1n} X_{1n}
a_2	C_{21} λ_{21} X_{21}	C_{22} λ_{22} X_{22}	…	C_{2j} λ_{2j} X_{2j}	…	C_{2n} λ_{2n} X_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
a_i	C_{i1} λ_{i1} X_{i1}	C_{i2} λ_{i2} X_{i2}	…	C_{ij} λ_{ij} X_{ij}	…	C_{in} λ_{in} X_{in}
…	…	…	…	…	…	…
a_m	C_{m1} λ_{m1} X_{m1}	C_{m2} λ_{m2} X_{m2}	…	C_{mj} λ_{mj} X_{mj}	…	C_{mn} λ_{mn} X_{mn}

Требуется распределить производство изделий на различных станках так, чтобы при выполнении планового задания затраты были минимальными.

Составим ЭММ задачи. Обозначим через x_{ij} время в часах, в течение которого i -ый станок занят изготовлением j-го изделия.

Ограничения составляются исходя из следующих требований.

1. Суммарное время, затрачиваемое каждым i -ым станком, не должно превышать фонда рабочего времени данного станка:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = 1,2,...m) \; (1)$$

2. Каждое j-ое изделие должно быть изготовлено в требуемом количестве:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} \cdot x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,...n) \; (2)$$

Где величина $\lambda_{ij} x_{ij}$ определяет количество изделий j-го вида, изготовляемых на i-ом станке.

3. Переменные могут принимать только неотрицательные значения:

$x_{ij} \ge 0 \; (i = 1,2,...m; \; j = 1,2,...,n) \; (3)$

В качестве критерия эффективности принимаем суммарные затраты, которые должны быть минимальны. Затраты, связанные с производством j-го вида изделий на i-ом станке в количестве $\lambda_{ij} x_{ij}$ составляют $c_{ij} \lambda_{ij} x_{ij}$, откуда суммарные затраты на выполнение всего планового задания будут равны

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \lambda_{ij} x_{ij} \quad (4)$$

Следовательно, математическая формулировка задачи следующая: найти такие значения *m,n* переменных x_{ij}, которые удовлетворяют условиям (1) – (3) и обеспечивают минимум функции (4).

Предположим, что производительности любых двух станков пропорциональны. Выберем один из них, например, *k*-ый станок в качестве «базового» и составим отношения производительности любого *i*-го станка (*i=1,2,…m*) к производительности *k*-го станка

$$\alpha_i = \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{k1}} = \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{k2}} = \ldots = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{kj}} = \ldots = \frac{\lambda_{in}}{\lambda_{kn}} \quad (5)$$

Число α_i называется индексом *i-го* станка и показывает, во сколько раз *i*-ый станок производительнее по сравнению с «базовым» станком. Из (5) следует

$$\lambda_{ij} = \alpha_i \lambda_{kj} \quad (6)$$

Равенство (6) дает возможность выразить все данные задачи в одних единицах измерения. Выберем в качестве такой единицы **час работы «базового» станка** и назовем его **стандартным часом**.

Фонд рабочего времени *i*-го станка составляет a_i часов, но так как его производительность в α_i раз больше производительности «базового» станка, то приведенная к стандартным часам его фонд рабочего времени составит

$$a_i' = \alpha_i a_i, (i = 1,2,\ldots,m) \, (7)$$

Время, затрачиваемое на *i*-ом станке на производство *j*-го изделия, в стандартных часах будет:

$$x_i' = \alpha_i x_j, (j = 1,2,\ldots,n) \quad (8)$$

Заказ по *j*-му изделию составляет b_j штук. Если бы это изделие изготовлялось на «базовом» станке, то для его производства нужно было бы $b_j' = \dfrac{b_j}{\lambda_{kj}}$ (9) стандартных часов.

Затраты по производству единицы j-го изделия на i-ом станке (в расчете на 1 стандартный час) составят

$$c'_{ij} = c_{ij}\lambda_{kj}, (i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n) \quad (10)$$

Величины a'_i, b'_j, c'_{ij} называются приведенными к стандартным часам **ресурсами, потребностями и затратами**. Из равенств (6) – (9) получим

$$a_i = \frac{a_i}{\alpha_i} \quad (7')$$

$$x_{ij} = \frac{x'_{ij}}{\alpha_i} \quad (8')$$

$$b_j = \lambda_{kj} \cdot b'_j \quad (9')$$

$$c_{ij} = \frac{c'_{ij}}{\lambda_{kj}} \quad (10')$$

Используя эти соотношения, ограничения и целевая функцию задачи (1) – (4) преобразуется к следующей транспортной задаче: найти значения , которые удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} \le a' \ (i = 1,2,...,m);$$
$$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = b'_j \ (j = 1,2,...,n);$$
$$x'_{ij} = \alpha_i x_{ij} \ge 0$$

и обеспечивают минимум функции

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij} x'_{ij}$$

Необходимым и достаточным условием существования решения задачи является выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{m} a_i' \geq \sum_{j=1}^{n} b_j'$$

Т.е. суммарные приведенные ресурсы должны быть не меньше суммарных приведенных потребностей.

Следует заметить, что при решении практических задач встречаются случаи, когда некоторые изделия не могут обрабатываться на отдельных станках, т.е. некоторые $\lambda_{kj} = 0$. Тогда в качестве «базового» станка следует выбрать тот станок, на котором могут изготовляться все изделия. Если $\lambda_{kj} = 0$, то при решении задачи с данными a_i', b_j', c_{ij}' необходимо блокировать клетку (i, j).

Может также оказаться, что условия пропорциональности станков (5) выполняются для некоторых станков лишь приближенно. Тогда индекс α_i определяется приближенно как среднее арифметическое взвешенное по формуле

$$\alpha_i' = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{kj}} \cdot b_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$$

Пример 1. Решите задачу о загрузке оборудования, исходные данные которой приведены в таблице 2.

Таблица 2.

b_j / a_i	**800**	**600**	**900**	**1500**	α_i
150	**16** **10**	**15** **8**	**10** **12**	**12** **20**	**2**
100	**17** **15**	**16** **12**	**19** **18**	**15** **30**	**3**
220	**18** **5**	**10** **4**	**15** **6**	**20** **10**	**1**

Решение.

Примем в качестве «базового» 3-ий станок. По формуле (5) определим индекс каждого станка:

$$\alpha_1 = \frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{20}{10} = 2;$$
$$\alpha_2 = \frac{15}{5} = \frac{12}{4} = \frac{18}{6} = \frac{30}{10} = 3;$$
$$\alpha_3 = 1$$

и заносим в последний столбец таблицы 2.

Используя формулы (7), (9), (10), все данные выразим в стандартных часах:

$a_i' = \alpha_i \cdot a_i; a_1' = 2 \cdot 150 = 300; a_2' = 3 \cdot 100 = 300; a_3' = 1 \cdot 220;$

$b_j' = \dfrac{b_j}{\lambda_{ij}}; b_1' = \dfrac{800}{5} = 160; b_2' = \dfrac{600}{4} = 150; b_3' = \dfrac{900}{6} = 150;$

$b_4' = \dfrac{1500}{10} = 150$

$c_{ij}' = c_{ij} \cdot \lambda_{ij}; c_{11}' = 5 \cdot 16 = 80; c_{12}' = 4 \cdot 15 = 60; c_{13}' = 6 \cdot 10 = 60;$

$c_{14}' = 10 \cdot 12 = 120;$

$c_{21}' = 5 \cdot 17 = 85; c_{22}' = 4 \cdot 16 = 64; c_{13}' = 6 \cdot 19 = 114; c_{24}' = 10 \cdot 15 = 150;$

$c_{31}' = 5 \cdot 18 = 90; c_{32}' = 4 \cdot 10 = 40; c_{33}' = 6 \cdot 15 = 90; c_{34}' = 10 \cdot 20 = 200;$

Полученные данные запишем в таблицу 3.

Получаем транспортную задачу.

b_j / a_i	***160***	***150***	***150***	***150***	
300	***80***	***60***	***60***	***120***	***0***
300	***85***	***64***	***114***	***150***	***0***
220	***90***	***40***	***90***	***200***	***0***

$$\sum_{i=1}^{3} a_i' = 300 + 300 + 220 = 820;$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j' = 160 + 150 + 150 + 150 = 610$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i' \geq \sum_{j=1}^{4} b_j$$

Выполнено необходимое и достаточное условие существования решения этой задачи.

Вводим 5-ый балансовый столбец, полагаем b'_5=210; c'_{15}= c'_{25}= c'_{35}=0. Составим первоначальный опорный план методом минимальной стоимости:

b_j / a_i	***160***	***150***	***150***	***150***	***210***
300	***80*** ***150***	***60*** ***-***	***60*** ***150***	***120*** ***-***	***0*** ***-***
300	***85*** ***10***	***64*** ***-***	***114*** ***-***	***150*** ***150***	***0*** ***140***
220	***90*** ***-***	***40*** ***150***	***90*** ***-***	***200*** ***-***	***0*** ***70***

Решаем задачу методом потенциалов, получаем оптимальный план:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 150 & 150 & 0 \\ 160 & 0 & 0 & 0 & 140 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & 70 \end{pmatrix}$$

От стандартных часов переходим к реальным часам работы каждого оборудования по формуле $x_{ij} = \dfrac{x'_{ij}}{\alpha_i}$ и получаем оптимальное решение

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{150}{2} & \frac{150}{2} & 0 \\ \frac{160}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{140}{3} \\ 0 & 150 & 0 & 0 & 70 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 75 & 75 & 0 \\ \frac{160}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{140}{3} \\ 0 & 150 & 0 & 0 & 70 \end{pmatrix}$$

Суммарные затраты составят:

$$Z_{\min}=75\cdot 12\cdot 10+75\cdot 20\cdot 12+\frac{160}{3}\cdot 15\cdot 17+140\cdot 0+150\cdot 4\cdot 10+70\cdot 0=46600 \text{ ед}$$

Задания для практики:

Выполнить задания [3]: с. 447 № 27.14(1-3).

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте постановку задачи о загрузке оборудования и ее ЭММ.

2. Как λ–задача приводится к транспортной?

3. Что называют приведенными к стандартным часам ресурсами времени, приведенными к стандартным часам потребностями, приведенными к стандартным часам затратами?

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2007.
2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сб. задач по мат. программированию - Минск: Высшая школа, 1985, стр.32-33.
5. Акулич И. А. Математическое программирование в примерах и задачах -М.: Высшая школа, 1994, глава 1, §1.4, стр.47-55.

Лекция 7

Сетевое планирование управления

(занятие № 1)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия структурного планирования, календарного планирования и оперативного управления.

Ключевые слова. Графы, эйлеровы графы, сетевые графики.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. **Сетевое планирование управления.**

2. **Сетевые графики.**
3. **Правила построения сетевых графиков.**
4. **Упорядочение сетевого графика. Нумерация событий.**

1. Сетевое планирование управления.

Чтобы составить достаточное представление о графе, достаточно вообразить некоторое множество точек плоскости или пространства и множество отрезков, соединяющих все или некоторые из этих точек. Точки множества называют вершинами, а отрезки их соединяющие, - дугами, если указано, какая вершина является начальной, и ребрами, если ориентация не указана. Граф, состоящий из дуг, называют ориентированным (орграфом) а образованный ребрами, - неориентированным. Одним из важнейших приложений теории графов является **сетевое планирование и управление** сложными комплексами взаимосвязанных работ. Сетевое планирование является одним из новых методов управления созданием больших систем или сложных комплексов.

Основными областями сетевого планирования являются: строительство промышленных и гражданских объектов, создание новых производственных мощностей, проектно-конструкторские и научно-исследовательские работы и др.

Сетевое планирование представляет собой развитую и цельную систему планирования и управления.

Конечным результатом действия системы являются: выявление и мобилизация резервов времени и материальных ресурсов, улучшение технических показателей планируемой программы, повышение эффективности управления, при четком распределении ответственности между руководителями разного уровня и ответственными исполнителями.

Автоматизация планирования и управления состоит из следующих этапов:

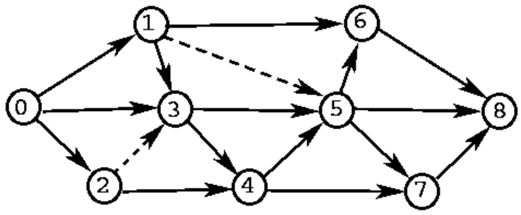
1) Построение сетевого плана и расчета его параметров;
2) Расчет резервов времени и ресурсов;
3) Минимизация времени выполнения проекта при заданных ресурсах или минимизация стоимости при заданном времени;
4) Оперативное управление ходом выполнения проекта, т.е.систематическое сравнение реального хода выполнения проекта во времени с заранее построенным сетевым планом и оперативное устранение помех, возникающих в ходе реализации проекта.

2. Сетевые графики. Основные понятия и определения, употребляемые в сетевом планировании.

При разработке больших и сложных комплексов (проектов) всегда существует последовательность выполняемых по времени операций, процессов, работ. При сетевом планировании весь комплекс работ или процессов представляется в виде сетевого графика, который и является моделью проекта.

Сетевой график – это упорядоченное множество событий P_j и работ A_{ij}, отображающее технологическую взаимосвязь между отдельными работами (рис.1).

Работы A_{ij} на сетевом графике изображаются стрелками, события – кружками, с номером этого события.



События – это результат свершения какой-либо промежуточной или конечной цели. Событие представляет собой промежуточный или окончательный результат завершения одной или нескольких работ. Так на рис.1 событие P_2 представляет результат одной работы A_{62}, а событие P_8 результат трех работ A_{58}, A_{68}, A_{78}.

Сетевой график имеет одно **начальное событие**, определяющий момент, с которого начинают выполнять работы, и одно конечное событие, отражающее момент выполнения всего комплекса работ.

Работа – элемент сетевого графика, отображающий определенный этап процесса. Она изображается стрелкой, острие которой обозначает конец работы, а противоположный конец стрелки – начало работы. Работа связывает два события: исходит из одного (начинается после свершения данного события) и входит в другое. Работы на графике подразделяются на реальную работу, работу – ожидание и фиктивную.

Реальная работа – это работа требующая использование ресурсов и затрат времени (возведение стен, рытье котлована и т.д.). Она изображается на сетевом графике сплошной стрелкой с указанием над ней времени, необходимого для ее выполнения, т.е. ее продолжительность (t_{ij}).

Работа-ожидание – это работа, которая потребляет только время и не потребляет никаких других ресурсов. Такие работы на графике изображаются пунктирными стрелками с указанием над ними времени ожидания, например, работа A_{23} (рис.1). Ожидание возникает тогда, когда после свершения события следующая за этим событием работа не может быть сразу начата. Например, выдержка бетона, застывание металла и т.п.

Фиктивная работа – это работа не потребляющая ни времени, ни ресурсов; на сетевом графике она изображается пунктирной стрелкой и служит для выражения правильной взаимосвязи работ.

Путем в сетевом графике называется непрерывная последовательность работ, связывающая любые два события.

Под длиной пути из события (P_i) в событие (P_j) понимается сумма продолжительностей работ, составляющих данный путь, т.е. продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь.

Критическим путем называется путь наибольшей длины между начальным завершающим событиями. Он является самым напряженным путем при реализации проекта и определяет продолжительность выполнения всего комплекса работ.

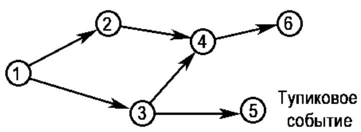
Все остальные пути короче критического и поэтому имеют резервы времени. С понятием «резерв времени» связаны сроки начала и окончания работ, сроки свершения событий.

3. Правила построения сетевых графиков.

1. Направление стрелок-работ в сетевом графике должно быть слева направо.

2. Все события, кроме конечного, должны иметь выходящие работы. Начальное событие не имеет выходящих работ.
3. В сетевом графике не должно быть тупиковых событий.

а)



б)

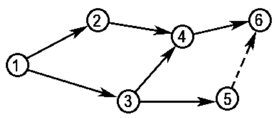
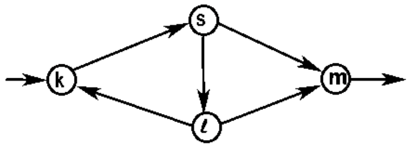


Рис.2

а) неправильно; б) правильно (P_4 – начальное событие, P_6 – завершающее событие).

4. В сетевом графике не должно быть циклов.

а)



б)

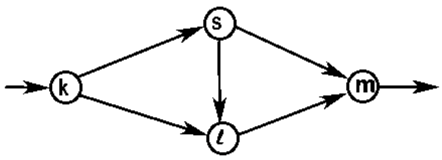
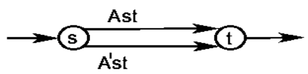


Рис. 3

а) неправильно; б) правильно

5. Если два события соединяют несколько работ, то для большей наглядности в сетевом графике вводятся дополнительные события и фиктивные работы.



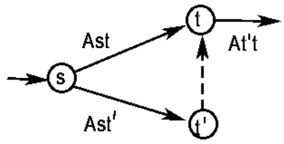


Рис.4

($P_{t'}$ - дополнительное событие, $A_{tt'}$ -фиктивная работа, не имеющая продолжительности).

6. Фиктивные работы и фиктивные события вводятся в сетевой график при неполной зависимости работ и событий.

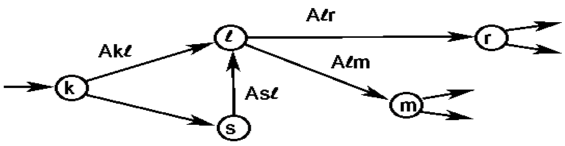


Рис.5

Предположим, что начало выполнения работы A_{lr} не зависит от завершения работы A_{sl} , а только определяется завершением работы A_{kl} .

Работа же A_{lm} может начаться только после свершения события p_l.

В таком случае сетевой график представим следующим образом:

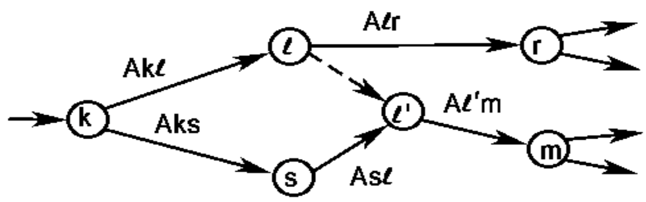


Рис.6

7. Нередко в отдельных событиях сетевого графика входят внешние по отношению к данной сети работы. От них зависит начало работ, выходящих из данного события.

   Внешними работами могут быть, например, разрешение на строительство, поставка материалов, оборудование и т.д.

   Такие внешние работы в сетевом графике принято называть поставками. Они на графике изображаются также сплошными линиями.

   Если продолжительность поставки возможно по времени определить конкретно, то эта работа привязывается своим началом к соответствующему событию и при расчете сетевого графика учитывается. Если же продолжительность поставки определить трудно или вообще невозможно, то она при расчете графика не учитывается, а лишь фиксируется момент времени (событие),к которому она должна быть завершена, так как в противном случае нельзя начинать работы, исходящие из данного события.

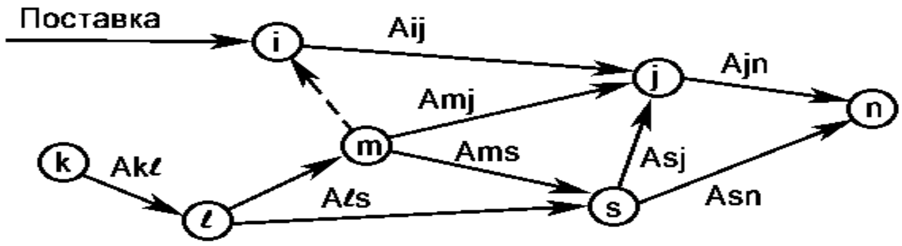


Рис.7

4. Упорядочение сетевого графика. Нумерация событий.

Каждая работа в сетевом графике должна быть определена однозначно, следовательно, возникает задача правильной нумерации событий. Необходимо перенумеровать все события данного сетевого графика так, чтобы для любой работы выполнялось неравенство $i<j$.

Алгоритм.

1. Все события сети разбиваются по рангам.
2. Нумерация событий ведется последовательно по мере возрастания рангов. События одного ранга нумеруются в произвольном порядке. Рассмотрим как разбиваются события по рангам и их нумерацию.

а) На сетевом графике выбирается событие, которое не имеет входящих работ (начальное событие) и присваивается ему нулевой ранг. Так как событие нулевого ранга только одно, то его номер 1.

б) Отмечаем все работы выходящих из события нулевого ранга P_1 цифрой «I».

в) После выполнения пункта «б» у нас появится одно или несколько событий, в которые входят только отмеченные цифрой «I» работы. Присвоим этим событиям ранг I. Если событий первого ранга несколько, то нумеруем их в произвольном порядке P_2, P_3, ..., $P_к$.

г) Отмечаем все работы, выходящие из событий первого ранга, цифрой II и присваиваем всем событиям, в которые входят работы, отмеченные цифрами I и II или только цифрой II, ранг 2. Обобщая это и дальше, можно сказать, что всякое событие ранга m имеет входящие работы лишь из событий, ранги которых меньше, чем m.

Так как в сетевом графике число работ и событий счетное то, через конечное число шагов все события будут разбиты по рангам и занумерованы. Рассмотрим пример.

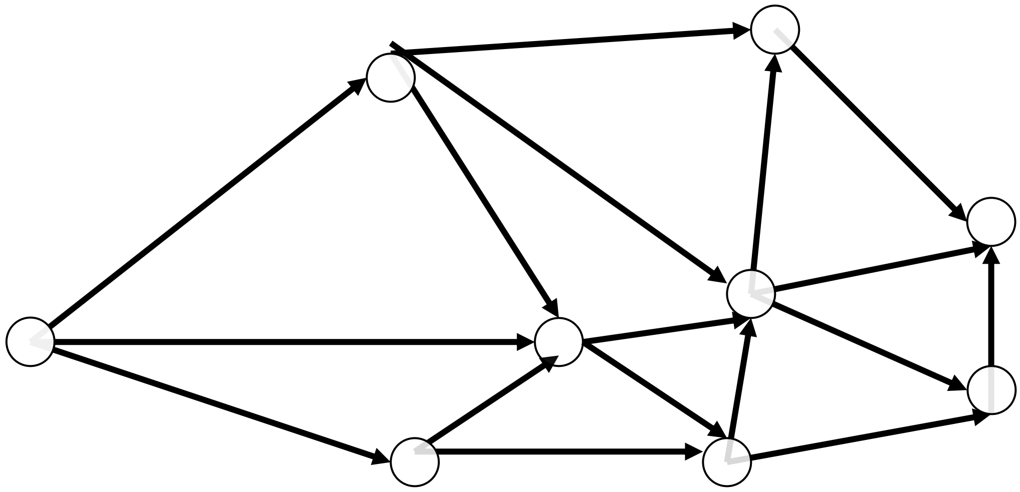


Рис.8

Перенумеруем события данного сетевого графика.

Событию, которое не имеет входящих работ, присвоим нулевой ранг, а так как такое событие одно, то это будет начальное событие, номер которого 1.

Отметим цифрой (1) все работы, выходящие из события P_1. Присвоим ранг (1) событиям, в которые входят только работы, отмеченные цифрой (1) и пронумеруем их в произвольном порядке. В нашем примере это событие P_2 и P_3.

Затем отмечаем цифрой (2) работы, выходящие из событий 1-го ранга. Событиям, в которые входят работы, отмеченные цифрами (1) и (2) или только цифрой (2) присвоим ранг 2 и перенумеруем. Это событие P_4. Отмечаем цифрой (3) работы выходящие из событий 2-го ранга, присваиваем ранг 3 и перенумеровываем события, в которые входят работы, отмеченные цифрами (2) и (3) или только цифрой (3). Это событие P_5. Отмечаем цифрой 4 работы, выходящие из событий 3-го ранга. Присваиваем событиям, в которые входят работы, отмеченные цифрами (2), (3), (4), или (3), (4), или только (4) ранг 4 и нумеруем их. Это будет событие P_6.

Отмечаем цифрой (5) работы, выходящие из события 4-го ранга, присваиваем событиям, в которые входят работы, отмеченные цифрами (2), (3), (4), (5) или только – (5), ранг 5 и перенумеруем их. Это события P_7 и P_8. Осталось одно событие, которое не имеет выходящих работ (конечное), ему присваиваем ранг 6. Это будет событие P_9. Таким образом мы получили сетевой график с упорядоченной нумерацией событий (рис.9).

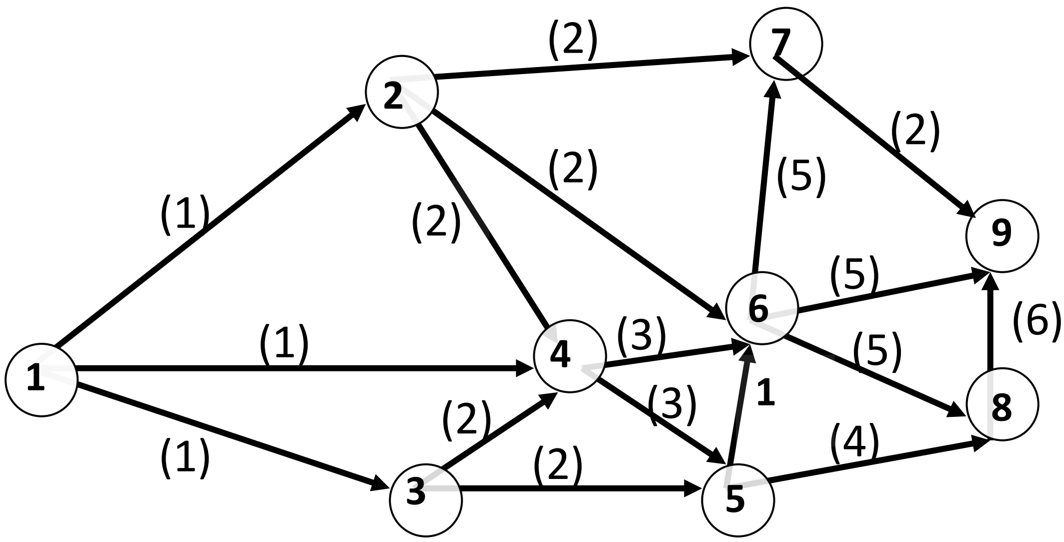


Рис.9

Задания для практики:

Выполнить задания [3]:с.454-455 №№29.1(1-4), 29.2(1-4).

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение сетевой модели (сетевого графика).
2. Что называется событием сетевого графика? И как оно изображается?
3. Определение работы. Какие виды работ встречаются в сетевом графике и как они изображаются?
4. Что называется путем? Как определяется длина пути?
5. Какой путь называется критическим?
6. Какие существуют правила построения сетевого графика?
7. В чем заключается метод ранжирования событий сетевого графика?

Глоссарий.

События – это результат свершения какой-либо промежуточной или конечной цели. **Начальное событие** - момент, с которого начинают выполнять работы.

Конечное событие - момент выполнения всего комплекса работ.

Работа – элемент сетевого графика, отображающий определенный этап процесса. **Реальная работа** – это работа требующая использование ресурсов и затрат времени (возведение стен, рытье котлована и т.д.).

Работа-ожидание – это работа, которая потребляет только время и не потребляет никаких других ресурсов.

Фиктивная работа – это работа не потребляющая ни времени, ни ресурсов.

Путем в сетевом графике называется непрерывная последовательность работ, связывающая любые два события.

Под **длиной пути** из события (P_i) в событие (P_j) понимается сумма продолжительностей работ, составляющих данный путь, т.е. продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь.

Критическим путем называется путь наибольшей длины между начальным завершающим событиями.

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2007.

2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сб. задач по мат. программированию - Минск: Высшая школа, 1985, стр.32-33.
5. Акулич И. А. Математическое программирование в примерах и задачах -М.: Высшая школа, 1994, глава 1, §1.4, стр.47-55.

Лекция 8

Сетевое планирование управления
(занятие № 2)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия структурного планирования, календарного планирования и оперативного управления.

Ключевые слова.

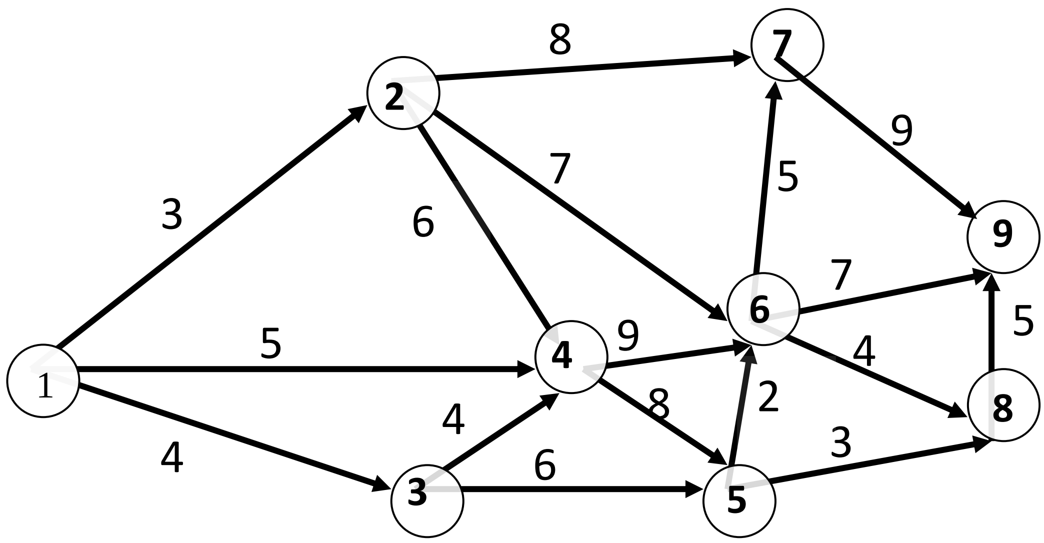
Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. **Временные параметры.**

2. **Критический путь.**



Пусть дан пронумерованный сетевой график (рис.1). Над каждой стрелкой работой проставлено число t_{ij}, равное продолжительности работы A_{ij} .

Рис.1

Параметрами сетевого графика являются:

$T_j^{(p)}$ - наиболее ранний срок наступления события P_j;

$T_j^{(n)}$ – наиболее поздний срок наступления события P_j ;

$R_{ij}^{(c)}$ - свободный резерв времени работы A_{ij} ;

$R_{ij}^{(n)}$ - полный резерв времени работы A_{ij} , показывает количество времени, на которое можно перенести начало работы A_{ij} или увеличить ее продолжительность, не изменяя времени завершения проекта, т.е. без изменения времени свершения конечного события;

T_n^{O}- длина критического пути.

1	Пере-чень работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	Послед. выпол-нения	3,4, 5	6,7	6,7	8,9, 15	9, 15	8,10, 11	12, 13	9, 15	10, 11	12,13	14	14	-	-	-
3	*t*	7	3	5	8	4	6	8	2	10	5	11	3	4	2	6
4	*Aij*															

Значения $T_j^{\,p}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ в сетевом графике вычисляются по формуле Форда

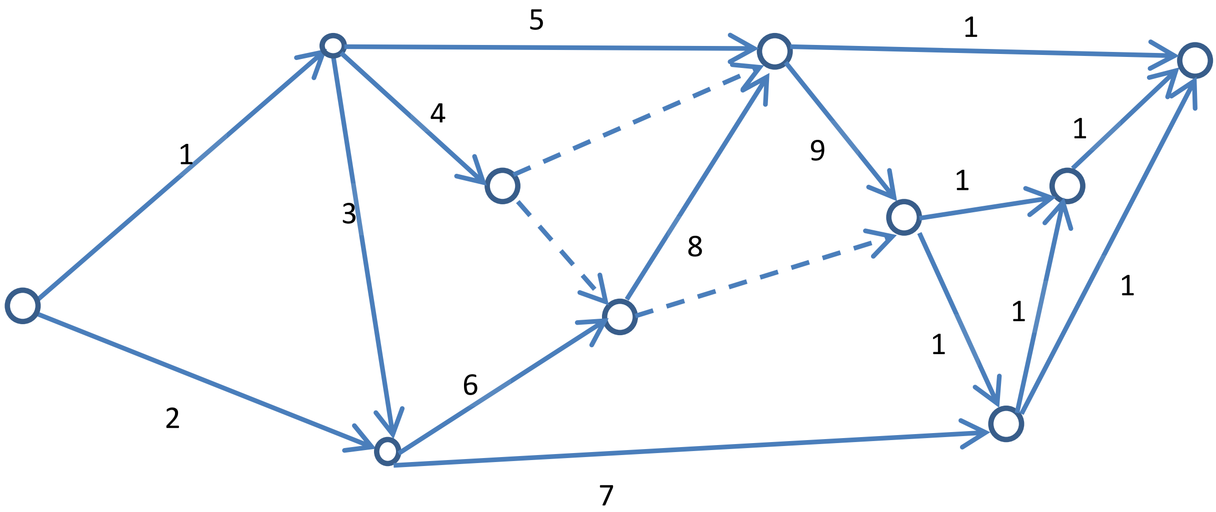
$$T_j^{(p)}=\max_{A_{ij}\subset U_j^{+}}\{\, T_i^{(p)}+t_{ij} \,\} \quad (1)$$, где

$T_j^{\,(p)}$ - наиболее ранний срок наступления события P_j, раньше которого не может свершиться данное событие-это самый ранний момент времени, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.

$T_i^{\,(p)}$ - наиболее ранний срок наступления события P_i ;

t_{ij}- продолжительность работы A_{ij} ;

($U_k^{\,+}$)- множество работ, входящих в событие k.



$T_1^{(p)}$ - начало отсчета в сетевом графике принимается равным нулю.

$T_1^{(p)}=0$

$T_2^{(p)}=max\{\ T_1^{(p)}+t_{12}\}=0+7=7;$

A_{12}

$T_3^{(p)}=max\{\ T_1^{(p)}+t_{13};T_2^{(p)}+t_{23}\}=max\{0+3;7+5\}=12;$

A_{13}, A_{23}

$T_4^{(p)}=max\{T_2^{(p)}+t_{24}\}=max\{7+8\}=15;$

A_{24}

$T_5^{(p)}=max\{T_4^{(p)}+t_{45};T_3^{(p)}+t_{35}\ \}=max\{15+0;12+6\}=18;$

$\{A_{35},A_{45}\}$

$T_6^{(p)}=max\{\ T_2^{(p)}+t_{26};\ T_4^{(p)}+t_{46};\ T_5^{(p)}+t_{56}\}=$

$\{A_{26},A_{46},\ A_{56}\}$

$=max\{7+4;15+0;18+2\}=20;$

$T_7^{(p)}=max\{ T_6^{(p)}+t_{67}; T_5^{(p)}+t_{57} \}=$

$\{A_{67},A_{57} \}$

$=max\{20+10;18+0\}=30;$

$T_8^{(p)}=max\{ T_7^{(p)}+t_{78}\}=$

$\{A_{78} \}$

$=max\{30+5\}=35;$

$T_9^{(p)}=max\{ T_7^{(p)}+t_{79}; T_8^{(p)}+t_{89}\}=$

$\{A_{79},A_{89}\}$

$=max\{30+11;35+3\}=41.$

$T_{10}^{(p)}=max\{ T_6^{(p)}+t_{610}; T_8^{(p)}+t_{810}; T_9^{(p)}+t_{910}\}=$

$\{A_{26},A_{46}, A_{56}\}$

$=max\{20+6;35+4;41+2\}=43;$

Не представляет труда убедиться в том, что $T_j^{(p)}$ равен наибольшей продолжительности пути от начального события P_1 до события P_j. T_n^O - это продолжительность критического пути (наиболее продолжительный путь от начального до завершающего события).

Величины $T_j^{(n)}$ $(j=1,2,..,n)$, также вычисляются по формуле Форда

$$T_j^{(n)} = \min_{A_{jk} \subset U_j^-} \{T_k^{(n)} - t_{jk}\} \quad (2)$$

Где U_j^- - множество работ, выходящих из j-го события.

$T_k^{(n)}$-поздний срок свершения конечного события работы A_{jk};

После чего находим

$T_{10}^{(p)} = T_{10}^{(n)} = 43$

$$T_9^{(n)} = \min_{A_{9;10}} \{T_{10}^{(n)} - t_{9;10}\} = 43 - 2 = 41$$

$$T_8^{(n)} = \min_{\{A_{8;10}, A_{89}\}} \{T_{10}^{(n)} - t_{8;10}; T_9^{(n)} - t_{89}\} = min\{43 - 4; 41 - 3\} = 38$$

$$T_7^{(n)} = \min_{\{A_{79}, A_{78}\}} \{T_9^{(n)} - t_{79}; T_8^{(n)} - t_{78}\} = min\{41 - 11; 38 - 5\} = 30$$

$$T_6^{(n)} = \min_{\{A_{6;10}, A_{67}\}} \{T_{10}^{(n)} - t_{6;10}; T_7^{(n)} - t_{67}\} = min\{43 - 6; 30 - 10\} = 20$$

$$T_5^{(n)} = \min_{\{A_{56}, A_{57}\}} \{T_6^{(n)} - t_{56}; T_7^{(n)} - t_{57}\} = min\{20 - 2; 30 - 0\} = 18$$

$$T_4^{(n)} = \min_{\{A_{45}, A_{46}\}} \{T_5^{(n)} - t_{45}; T_6^{(n)} - t_{46}\} = min\{18 - 0; 20 - 0\} = 18$$

$$T_3^{(n)} = \min_{\{A_{38}, A_{35}\}} \{T_8^{(n)} - t_{38}; T_5^{(n)} - t_{35}\} = min\{38 - 8; 18 - 6\} = 12$$

$$T_2^{(n)} = \min_{\{A_{26}, A_{24}, A_{23}\}} \{T_6^{(n)} - t_{26}; T_4^{(n)} - t_{24}; T_3^{(n)} - t_{23}\} = min\{20 - 4; 18 - 8; 12 - 5\} = 7$$

$$T_1^{(n)} = \min_{\{A_{12}, A_{13}\}} \{T_2^{(n)} - t_{12}; T_3^{(n)} - t_{13}\} = min\{7 - 7; 12 - 3\} = 0$$

Занесем все найденные временные параметры в таблицу . В первые два столбца записываются работы A_{ij}, где под номером i стоят события P_i , из которых данные работы выходят, а под номером j события P_j , в которых они заканчиваются.

t_{ij} – продолжительность работы A_{ij}, выписывается с сетевого графика. Затем заполняются столбцы $T_i^{(p)}, T_j^{(p)}$.

$T_i^{(p)}$- заполняются для событий в столбце i , а $T_j^{(p)}$ - для событий в столбце j. Затем заносятся значения $T_j^{(n)}$ для событий в столбце j.

Расчет резервов времени.

Для работы (A_{ij}) вычисляются полный и свободный резервы времени.

Полный резерв времени вычисляется по формуле $R_{ij}^{(n)} = T_j^{(n)} - T_i^{(p)} - t_{ij}$ (4)

и показывает на сколько единиц времени можно либо увеличить продолжительность работы (A_{ij}), либо начать выполнять позднее момента $T_i^{(p)}$, не повлияв на срок завершения проекта.

Свободный резерв времени определяется по формуле $R_{ij}^{(c)} = T_j^{(\text{p})} - T_i^{(p)} - t_{ij}$ (5)

и показывает количество времени, на которое можно перенести начало работы или увеличить ее продолжительность, не изменяя раннего срока свершения события, в которое входит данная работа, т.е. не изменяя раннего срока начала последующих работ:

Найдем $R_{ij}^{(n)}$ и R_{ij}^{c} для нашего примера по формулам (4), (5):

$R_{ij}^{(n)} = T_j^{(n)} - T_i^{(p)} - t_{ij}$ $\quad$ $R_{ij}^{(c)} = T_j^{(\text{p})} - T_i^{(p)} - t_{ij}$

$R_{12}^{(n)} = 7 - 0 - 7 = 0;$ $\quad$ $R_{12}^{\text{c}} = 7 - 0 - 7 = 0;$

$R_{13}^{(n)} = 12 - 0 - 3 = 9;$ $\quad$ $R_{13}^{\text{c}} = 12 - 0 - 3 = 9;$

$R_{23}^{(n)} = 12 - 7 - 5 = 0;$ $\quad$ $R_{23}^{\text{c}} = 12 - 7 - 5 = 0;$

$R_{24}^{(n)} = 18 - 7 - 8 = 3;$ $\quad$ $R_{24}^{\text{c}} = 15 - 7 - 8 = 0;$

$R_{35}^{(n)} = 18 - 12 - 6 = 0;$ $\quad$ $R_{35}^{\text{c}} = 18 - 12 - 6 = 0;$

$R_{38}^{(n)} = 38 - 12 - 8 = 18;$ $\quad$ $R_{38}^{\text{c}} = 35 - 12 - 8 = 15;$

$R_{45}^{(n)} = 18 - 15 - 0 = 3;$ $\quad$ $R_{45}^{\text{c}} = 18 - 15 - 0 = 3;$

$R_{46}^{(n)} = 20 - 15 - 0 = 5;$ $R_{46}^{c} = 20 - 15 - 0 = 5;$

$R_{56}^{(n)} = 20 - 18 - 2 = 0;$ $R_{56}^{c} = 20 - 18 - 2 = 0;$

$R_{57}^{(n)} = 30 - 18 - 0 = 12;$ $R_{57}^{c} = 30 - 18 - 0 = 12;$

$R_{67}^{(n)} = 30 - 20 - 10 = 0;$ $R_{67}^{c} = 30 - 20 - 10 = 0;$

$R_{6;10}^{(n)} = 43 - 20 - 6 = 17;$ $R_{6;10}^{c} = 43 - 20 - 6 = 17;$

$R_{78}^{(n)} = 38 - 30 - 5 = 3;$ $R_{78}^{c} = 35 - 30 - 5 = 0;$

$R_{79}^{(n)} = 41 - 30 - 11 = 0;$ $R_{79}^{c} = 41 - 30 - 11 = 0;$

$R_{89}^{(n)} = 41 - 35 - 3 = 3;$ $R_{89}^{c} = 41 - 35 - 3 = 3;$

$R_{8;10}^{(n)} = 43 - 35 - 4 = 4;$ $R_{8;10}^{c} = 43 - 35 - 4 = 4$

$R_{9;10}^{(n)} = 43 - 41 - 2 = 0;$ $R_{9;10}^{c} = 43 - 41 - 2 = 0$

Таблица 1.

Работы A_{ij} i	j	t_{ij}	$T_i^{(p)}$	$T_j^{(p)}$	$T_j^{(n)}$	$R_{ij}^{(n)}$	$R_{ij}^{(c)}$	Работы, принадлежащие кр.пути
1	**2**	**3**	**0**	**3**	**3**	**0**	**0**	**A_{12}**
	3	**4**	**0**	**9**	**5**	**1**	**0**	
2	**3**	**5**	**7**	**12**	**12**	**0**	**0**	**A_{23}**
	4	**8**	**7**	**15**	**18**	**3**	**0**	
3	**5**	**6**	**12**	**18**	**18**	**0**	**0**	**A_{35}**
	8	**8**	**12**	**35**	**38**	**18**	**15**	
4	**5**	**0**	**15**	**18**	**18**	**3**	**3**	
	6	**0**	**15**	**20**	**20**	**5**	**5**	
5	**6**	**2**	**18**	**20**	**20**	**0**	**0**	**A_{56}**
	7	**0**	**18**	**30**	**30**	**0**	**12**	
6	**7**	**10**	**20**	**30**	**30**	**0**	**0**	**A_{67}**
	10	**6**	**20**	**43**	**43**	**17**	**17**	
7	**8**	**5**	**30**	**35**	**38**	**3**	**0**	
	9	**11**	**30**	**41**	**41**	**0**	**0**	**A_{79}**
8	**9**	**3**	**35**	**41**	**41**	**3**	**3**	
	10	**4**	**35**	**43**	**43**	**4**	**4**	
9	**10**	**2**	**41**	**43**	**43**	**0**	**0**	**$A_{9;10}$**
10			**43**					

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием принадлежности событий критическому пути является условие $T_j^{(p)}=T_j^{(n)}$.

Событие принадлежит критическому пути если его ранний срок наступления, равен позднему сроку свершения.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием принадлежности работы A_{ij} критическому пути является условие $R_{ij}^{(n)}=0$.

Работы принадлежащие критическому пути не имеют полного резерва времени.

Алгоритм расчета критического пути в сетевом графике.

1. Строится упорядоченный сетевой график
2. Определяются $T_j^{(p)}$ $(j=1,\ldots,n)$
3. Определяются $T_j^{(n)}$ $(j=1,\ldots,n)$
4. Из условия $T_j^{(p)}=T_j^{(n)}$ определяются события принадлежащие критическому пути.
5. Вычисляются $R_{ij}^{(n)}$ и R_{ij}^{c} .
6. Работы лежащие на пути от P_i до P_n, для которых $R_{ij}^{c}=R_{ij}^{(n)}=0$ принадлежат критическому пути.
7. Находим продолжительность (продолжительности) критического пути (путей), которая должна быть равна
   $T_n=T_n^{(p)}=T_n^{(n)}$

Таким образом в нашем примере критический путь включает работы A_{12}, A_{23}, A_{35}, A_{56}, A_{67}, A_{79}, $A_{9;10}$ и его длина равна 43.

Задания для практики:

Выполнить задания [3]: с.458-459 №№29.4(1,2), 29.5, 29.6.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение временных параметров сетевого графика. Приведите формулы, по которым они рассчитываются.
2. Сформулируйте теоремы: о принадлежности события критическому пути; о принадлежности работы критическому пути.
3. В чем сущность алгоритма расчета критического пути в сетевом графике?

Глоссарий.

$T_j^{(p)}$ - **наиболее ранний срок наступления события** P_j, раньше которого не может свершиться данное событие-это самый ранний момент времени, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.
$T_j^{(n)}$ - **наиболее поздний срок наступления события** P_j, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ,следующих за этим событием.
$R_{ij}^{(n)}$ - **полный резерв времени работы** A_{ij} , показывает количество времени, на которое можно перенести начало работы A_{ij} или увеличить ее продолжительность, не изменяя времени завершения проекта, т.е. без изменения времени свершения конечного события.
Свободный резерв времени $R_{ij}^{(c)}$ и показывает количество времени, на которое можно перенести начало работы или увеличить ее продолжительность, не изменяя раннего срока свершения события, в которое входит данная работа, т.е. не изменяя раннего срока начала последующих работ.

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2007.

2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сб. задач по мат. программированию - Минск: Высшая школа, 1985, стр.32-33.
5. Акулич И. А. Математическое программирование в примерах и задачах -М.: Высшая школа, 1994, глава 1, §1.4, стр.47-55.

Лекция 9

Динамическое программирование

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия динамического программирования.

Ключевые слова. Управление (стратегия), оптимальная стратегия, шаг, функция полезности, функциональное уравнение Белмана, прямой и обратный ход вычислений.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Основные понятия и определения динамического программирования.

2. Основные понятия и формулировка общей задачи динамического программирования

3. Задача о распределении капиталовложений (портфель ценных бумаг). Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана.

4. Решение задачи методом математического программирования.

1. Предмет динамического программирования.

Динамическое программирование – это раздел математического программирования, предметом которого является решение задач с дискретным множеством допустимых управлений, когда имеются различные варианты поведения, приводящие к различным результатам, среди которых необходимо выбрать оптимальный.

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, позволяющий осуществлять оптимальное планирование многошаговых управляемых процессов, а также процессов, зависящих от времени.

2. Основные понятия и формулировка общей задачи динамического программирования.

Определение 1. Экономический процесс называется **управляемым,** если можно влиять на ход его развития путем изменения параметров

этого процесса.

Определение 2. Управлением (стратегией) называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе (шаге), с целью влияния на ход процесса.

Определение 3. Момент времени, в котором принимается решение об очередном изменении параметров (управлений), называется **шагом**.

Определение 4. Стратегия (управление) называется **оптимальной**, если она приводит к наилучшему результату.

Основной задачей класса задач, решаемых методом динамического программирования, является задача распределения и эффективного использования ресурсов различных типов, капиталовложений, кредитов и т.д. Задачи динамического программирования решаются **методом функциональных уравнений**, который был предложен Р. Беллманом (США) в начале 50-х годов XX века и развит в его работах.

Общая задача динамического программирования формулируется следующим образом:

Найти максимум функции

$$z(x_1, x_2, ..., x_n) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + ... + g_n(x_n)$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = x,$$

$$x_i \geq 0,\ \left(i = \overline{1,n}\right).$$

3. Задача о распределении капиталовложений.

Пусть X - сумма средств (капитал), которую необходимо распределить между n предприятиями, занумерованными в определенном порядке числами $1,2,\ldots,n$, а x_i - часть капитала X, выделяемая *i*- му предприятию $\left(i=\overline{1,n}\right)$. В результате использования всех ресурсов или их части каждое предприятие может получить некоторый доход, измеряемый либо в денежных, либо в других единицах. Размер дохода зависит от примененного технологического процесса и от количества использованных денежных средств.

Основные предположения:

1. Доходы, получаемые различными предприятиями, выражаются в одних единицах.
2. Доход, получаемый от вложения средств в данное предприятие не зависит от вложения средств в другие предприятия.
3. Общий доход всех предприятий может быть определен как сумма доходов, полученных отдельными предприятиями.

Обозначим через $g_i(x_i)$ **функцию полезности**, определяющую доход, получаемый *i*-м предприятием от использования вложенной суммы x_i. Так как доходы предприятий независимы, то можно записать функцию общей полезности процесса распределения:

$$z=g_1(x_1)+g_2(x_2)+\ldots+g_n(x_n),\quad (\max). \qquad (1)$$

Так как общее количество денежных средств $-X$, то ограничение на ресурсы:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=X. \qquad (2)$$

Ресурсы не могут быть отрицательными:

$$x_i \geq 0, \ \left(i = \overline{1,n}\right). \qquad (3)$$

Совокупность целевой функции (1) и ограничений (2) и (3) – и есть ЭММ задачи о распределении капиталовложений.

4. Вывод функционального уравнения Беллмана.

Распределение средств между *n* предприятиями можно рассматривать как *n* шаговый процесс. Номером *i*-го шага будем считать номер *i*-го предприятия, которому выделяются средства x_i.

1 шаг: средства x_1 выделяются 1-му предприятию;

2 шаг: средства x_2 выделяются 2-му предприятию из оставшихся средств $x - x_1$;

3 шаг: средства x_3 выделяются 3-му предприятию из средств $x - x_1 - x_2$;

…………………………………………………………………………….

n шаг: средства x_n выделяются *n*-му предприятию из средств $x - x_1 - x_2 - ... - x_{n-1}$.

Пусть $f_n(x)$ - максимальный доход, получаемый при распределении капитала $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$ между всеми *n* предприятиями $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Тогда

$$f_n(x) = \max\left(g_1(x_1) + g_2(x_2) + ... + g_n(x_n)\right), \qquad (4)$$

Где $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$, $x_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,n}\right)$

Функция $f_n(x)$ зависит от количества ресурсов x и от числа предприятий *n*.

Если капитал $x = 0$, то и доход

$$f_n(0) = 0 \qquad (5)$$

Если все средства выделяются только одному предприятию $(n = 1)$, то из (4) следует

$$f_1(x) = g_1(x) \quad (6)$$

Обозначим через $f_k(x)$ - функции, выражающие максимальный доход, получаемый за первые k шагов, т.е. при распределении капитала x между первыми k предприятиями $(k = \overline{1,n})$.

Установим соотношение, связывающее функции $f_k(x)$ и $f_{k-1}(x)$ $(k=2,3,\dots,n)$

При $k = 2$:

$$f_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x} (g_1(x_1) + g_2(x_2)) = \max_{0 \le x_2 \le x} (g_2(x_2) + f_1(x_1)) =$$
$$= \max_{0 \le x_2 \le x} (g_2(x_2) + f_1(x - x_2)).$$

При $k = 3$:

$$f_3(x) = \max_{0 \le x_3 \le x} (g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3)) = \max_{0 \le x_3 \le x} (g_3(x_3) + f_2(x - x_3)).$$

……………………………………………………………………………

При $k = k$:

$$f_k(x) = \max_{0 \le x_N \le x} (g_k(x_N) + f_{k-1}(x - x_N)).$$

Этот доход, зависящий от x_k, называется **условно – оптимальным**. Придавая x_k различные значения: $0, x_0, x_1, \dots, x_n$ и выбирая из соответствующих условно – оптимальных доходов максимальный, получим

$$f_k(x) = \max_{0 \le x_N \le x} \left(g_k(x_N) + f_{k-1}(x - x_N) \right), \quad \left(k = \overline{2, n} \right). \qquad (7)$$

Рекуррентное соотношение (7) является основным функциональным уравнением динамического программирования применительно к задаче распределения капиталовложений и называется **уравнением Беллмана**. Оно выражает **принцип оптимальности Беллмана**:

«Оптимальное поведение обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальные состояния и решения в начальный момент времени, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения.»

Соотношение (7), выведенное для k>1, дополнятся еще одним равенством для k=1. Очевидно, что доход, получаемый от вложения капитала x в одно первое предприятие A_1, равен

$$f_1(x) = \max_{0 \le x_1 \le x} \left(g_1(x_1) \right) = g_1(x_1)$$

С помощью соотношений (6) и (7) можно последовательно найти $f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x)$ и определить среди них максимальное. Этот способ называется **прямым ходом вычислений**.

Оптимальная политика распределения капитала определяется путем **обратного хода вычислений**, т.е. сначала вычисляется доход на последнем *n*-м этапе, затем на *(n-1)*-м этапе и, наконец, на 1-м этапе. Определим оптимальную политику распределения капитала $x=x_0$ между n предприятиями.

Пусть max функции

$$f_n(x_0) = \max_{0 \le x_n \le x_0} \left(g_n(x_n) + f_{n-1}(x_0 - x_n) \right)$$

достигается при x_n^*, где x_n^* – часть капитала x_0, выделяемая *n*-му предприятию;

max функции

$$f_{n-1}\left(x_0 - x_n^*\right) = \max_{0 \le x_{n-1} \le x_0 - x_n^*} \left(g_{n-1}\left(x_{n-1}\right) + f_{n-2}\left(\left(x_0 - x_n^*\right) - x_{n-1}\right)\right)$$

достигается при x_{n-1}^*, где x_{n-1}^* – часть капитала, выделяемая *n-1*-му предприятию, и т.д.

Определив таким образом x_n^*, x_{n-1}^*, …, x_2^*, x_1^*, построим оптимальную политику распределения капитала x.

Задача. Для реконструкции четырех предприятий выделено 100 млн. руб. В таблице указаны значения прироста выпуска продукции при выделенных капиталовложениях, где $g_i(x_i)$- функция полезности на *i*-м предприятии при выделенных средствах в количестве x_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$.

Капиталовложения x (млн. руб)	Прирост выпуска продукции			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
25	20	15	18	14
50	30	35	32	28
75	50	45	47	56
100	70	61	65	71

Составить план распределения капиталовложений, обеспечивающий максимальный прирост выпуска продукции в денежных единицах.

Решение. Если предприятию денежные средства не выделить, то $x_i = 0$ и доход (прирост продукции) $g_i(0) = 0$. По этой же причине $f_n(0) = 0$. Выше было показано (6), что

$$f_1(x) = g_1(x).$$

Исходные данные удобно ввести в следующую таблицу

x	$f_1(x)$	$g_2(x)$	$f_2(x)$	$g_3(x)$	$f_3(x)$	$g_4(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0
25	20	15		18		14	
50	30	35		32		28	
75	50	45		47		56	
100	70	61		65		71	

Незаполненные столбцы будем заполнять по мере определения значений $f_n(x)$ с помощью функционального уравнения Беллмана

$$f_k(x) = \max_{0 \le x_N \le x} \left(g_k(x_N) + f_{k-1}(x - x_N)\right)$$

$$f_2(25) = \max(g_2(25) + f_1(0),\ \ g_2(0) + f_1(25)) = \max(15 + 0,\ \ \underline{0 + 20}) = 20.$$

$$f_2(50) = \max(g_2(50) + f_1(0),\ \ g_2(25) + f_1(25),\ \ g_2(0) + f_1(50)) = \max(\underline{35 + 0},\ \ 0 + 30,\ \ \underline{15 + 20}) = 35.$$

$$f_2(75) = \max(g_2(75) + f_1(0),\ \ g_2(50) + f_1(25),\ \ g_2(25) + f_1(50),\ \ g_2(0) + f_1(75)) =$$
$$= \max(45 + 0,\ \ \underline{35 + 20},\ \ 15 + 30,\ \ 0 + 50) = 55.$$

$$f_2(100) = \max(g_2(100) + f_1(0),\ \ g_2(75) + f_1(25),\ \ g_2(50) + f_1(50),\ \ g_2(25) + f_1(75),$$
$$g_2(0) + f_1(100)) = \max(61 + 0,\ \ 45 + 20,\ \ 35 + 30,\ \ 15 + 50,\ \ \underline{0 + 70}) = 70.$$

Значения $f_2(x)$ удобно вычислять, одновременно двигаясь по столбцу $g_2(x)$ снизу вверх, а по столбцу $f_1(x)$ - сверху вниз, и суммируя попарно значения этих функций при тех значениях аргументов, которые в сумме дают количество денежных средств, выделяемых на рассматриваемом этапе (шаге). Вычисленные значения внесем в столбец $f_2(x)$.

X	$f_1(x)$	$g_2(x)$	$f_2(x)$	$g_3(x)$	$f_3(x)$	$g_4(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0
25	20	15	20	18		14	
50	30	35	35	32		28	
75	50	45	55	47		56	
100	70	61	70	65		71	

Теперь, двигаясь по столбцу $g_3(x)$ снизу вверх, а по столбцу $f_2(x)$ сверху вниз, найдем значения $f_3(x)$

$$f_3(25) = \max(g_3(25) + f_2(0),\ \ g_3(0) + f_2(25)) = \max(18 + 0,\ \ \underline{0 + 20}) = 20.$$

$$f_3(50) = \max(g_3(50) + f_2(0),\ \ g_3(25) + f_2(25),\ \ g_3(0) + f_2(50)) =$$
$$= \max(32 + 0,\ \ \underline{18 + 20},\ \ 0 + 35) = 38.$$

$$f_3(75) = \max(g_3(75) + f_2(0),\ \ g_3(50) + f_2(25),\ \ g_3(25) + f_2(50),\ \ g_3(0) + f_2(75)) =$$
$$= \max(47 + 0,\ \ 32 + 20,\ \ 18 + 35,\ \ \underline{0 + 55}) = 55.$$

$$f_3(100) = \max(g_3(100) + f_2(0),\ \ g_3(75) + f_2(25),\ \ g_3(50) + f_2(50),\ \ g_3(25) + f_2(75),$$
$$g_3(0) + f_2(100)) = \max(65 + 0,\ \ 47 + 20,\ \ 32 + 35,\ \ \underline{18 + 55},\ \ 0 + 70) = 73.$$

x	$f_1(x)$	$g_2(x)$	$f_2(x)$	$g_3(x)$	$f_3(x)$	$g_4(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0
25	20	15	20	18	20	14	
50	30	35	35	32	38	28	
75	50	45	55	47	55	56	
100	70	61	70	65	73	71	

Аналогично вычисляем значения $f_4(x)$:

$$f_4(25) = \max(g_4(25) + f_3(0),\ \ g_4(0) + f_3(25)) = \max(14 + 0,\ \ \underline{0 + 20}) = 20.$$

$$f_4(50) = \max(g_4(50) + f_3(0),\ \ g_4(25) + f_3(25),\ \ g_4(0) + f_3(50)) =$$
$$= \max(28 + 0,\ \ 14 + 20,\ \ \underline{0 + 38}) = 38.$$

$$f_4(75) = \max(g_4(75) + f_3(0),\ \ g_4(50) + f_3(25),\ \ g_4(25) + f_3(50),\ \ g_4(0) + f_3(75)) =$$
$$= \max(\underline{56 + 0},\ \ 28 + 20,\ \ 14 + 38,\ \ 0 + 55) = 56.$$

$$f_4(100) = \max(g_4(100) + f_3(0),\ \ g_4(75) + f_3(25),\ \ g_4(50) + f_3(50),\ \ g_4(25) + f_3(75),$$
$$g_4(0) + f_3(100)) = \max(71 + 0,\ \ \underline{56 + 20},\ \ 28 + 38,\ \ 14 + 55,\ \ 0 + 73) = 76.$$

x	$f_1(x)$	$g_2(x)$	$f_2(x)$	$g_3(x)$	$f_3(x)$	$g_4(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0
25	20	15	20	18	20	14	20
50	30	35	35	32	38	28	38
75	50	45	55	47	55	56	56
100	70	61	70	65	73	71	76

Все найденные значения внесем соответственно в столбцы $f_3(x)$ и $f_4(x)$. Итак, максимальный прирост продукции равен 76 ден.ед, причем

$$f_4(100) = g_4(75) + f_3(25)$$

$$f_3(25) = g_3(0) + f_2(25)$$

$$f_2(25) = g_2(0) + f_1(25)$$

$$f_1(25) = g_1(25)$$

Отсюда следует, что

$$f_4(100) = g_4(75) + g_3(0) + g_2(0) + g_1(25)$$

Таким образом, максимальный прирост выпуска продукции будет достигнут, если четвертому предприятию выделить 75 млн. руб ($x_4 = 75$), первому предприятию – 25 млн. руб ($x_1 = 25$). А вкладывать денежные средства на реконструкцию второго и третьего предприятий не выгодно $(x_2 = 0,\ \ x_3 = 0)$.

$$\overline{X}_{опт} = (25;0;0;75), \qquad Z_{\max} = 76 \text{ ден.ед.}$$

Задания для практики:

Выполнить задания [3]: с.463-465 №№30.1(1-4), №30.2(1-4),.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что является предметом динамического программирования?
2. Сформулируйте постановку задачи о распределении капитальных вложений.
3. Приведите уравнение Беллмана к задаче распределения ресурсов.
4. В чем состоит принцип оптимальности?

5. Приведите постановку задачи о загрузке оборудования с учетом износа. Напишите уравнение Беллмана применительно к этой задаче.
6. Приведите постановку задачи о кратчайшем пути.

Глоссарий.

Экономический процесс называется **управляемым,** если можно влиять на ход его развития путем изменения параметров этого процесса.

Управлением (стратегией) называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе (шаге), с целью влияния на ход процесса.

Шагом называется момент времени, в котором принимается решение об очередном изменении параметров (управлений.

Стратегия (управление) называется **оптимальной**, если она приводит к наилучшему результату.

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.3. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2007.

2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

4. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сб. задач по мат. программированию - Минск: Высшая школа, 1985, стр.32-33.

5. Акулич И. А. Математическое программирование в примерах и задачах -М.: Высшая школа, 1994, глава 1, §1.4, стр.47-55.