КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра математической статистики

Е.А. ТУРИЛОВА, С.Г ХАЛИУЛЛИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТОВ
ЧАСТЬ II
СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФИНАНСОВОГО РЫНКА

Учебно-методическое пособие

Казань – 2015

Рекомендовано на заседании кафедры математической статистики
Протокол №7 от 24 февраля 2014 года.

Рецензент:
доктор физико-математических наук, профессор **И.Н. Володин**

Турилова Е.А., Халиуллин С.Г. Математические и вероятностные основы финансовых расчетов. Часть II. Стохастический анализ финансового рынка/ Е.А. Турилова, С.Г. Халиуллин. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 86 с.

Изложен материал специального курса, на протяжении ряда лет читавшегося авторами в Казанском университете. Подробно разобраны доказательства ряда сложных и важных результатов теории случайных процессов и теории стохастического интеграла.

Для студентов-математиков, специализирующихся по теории вероятностей и математической статистике, и специалистов из других областей математики, интересующихся приложениями стохастического анализа в различных областях знаний.

Содержание

Введение

Современный финансовый рынок оказался той областью человеческой деятельности, где идеи стохастического анализа, в частности, теории мартингалов, стохастического интеграла Ито, были реализованы наиболее полно. Соединяясь с теорией и практикой финансов, эти идеи порождают новые теоретико-вероятностные задачи, исследованием которых и занимается финансовая математика.

Финансовый рынок состоит из двух основных (первичных) активов (ценных бумаг) – облигаций (безрисковые) и акций (рисковые). Облигации – это долговые обязательства, выпускаемые государством или банком с целью аккумулирования капитала. Примером облигации может служить банковский счёт или облигации государственного займа. Обладатели облигаций получают по ним строго определённый доход, обусловленный процентной ставкой. Акции – это долевые ценные бумаги, выпускаемые фирмами с целью аккумулирования капитала для последующей деятельности. Стоимость ее определяется состоянием фондового рынка и производственной деятельностью фирмы. Акционеры получают доход соответственно цене акции.

К производным (вторичным) ценным бумагам относятся опционы – такие ценные бумаги, которые позволяют ее обладателю продать (или купить) некоторую ценность (акции, валюту и т.д.) на оговариваемых заранее условиях.

Работа посвящена изучению стохастического характера изменения цены акции, составлению „оптимального“ портфеля ценных бумаг и связанным с этим многочисленным задачам финансовой математики, в частности, задаче расчета опционов. В этой области имеется большое количество литературы.

Переворот во взглядах на финансовые расчеты, связанные с опционами, совершили работы Блэка, Шоулса и Мертона. Развитая в этих работах теория позволяет находить „справедливую“ стоимость опциона, а также те оптимальные биржевые операции, которые позволяют продавцу опциона гарантировать возможные платежи, зависящие от случайного состояния цен на рынке. В отечественной литературе вопросам финансовой математики посвящен выпуск журнала „Теория вероятностей и ее применения“ за 1994 год, в котором изложена современная трактовка идей финансовой математики (см. А.Н.Ширяев, Ю.М.Кабанов, Д.Ю.Крамков, А.В.Мельников).

Весь материал разбит на две главы, в первой из которых приведены необходимые математические основы, во второй – теория финансового рынка. Нумерация формул в каждом параграфе своя, это не затрудняет чтения работы.

Глава 1. Математический аппарат.

§1. Условное математическое ожидание относительно разбиений

Пусть далее везде, если не оговорено, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – конечное вероятностное пространство, то есть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$ – конечное множество, $\mathcal{F}$ – алгебра подмножеств множества Ω, $\mathbf{P}$ – вероятность на алгебре $\mathcal{F}$.

Определение 1.1. Набор множеств

$$\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}, \qquad D_i \subseteq \Omega, \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

называется разбиением множества Ω, если выполнены следующие условия:
1. $D_i \in \mathcal{F}, \qquad (i = 1, \ldots, k);$
2. $\mathbf{P}(D_i) > 0, \qquad (i = 1, \ldots, k);$
3. $D_i \cap D_j = \emptyset, \ (i \neq j), \quad \Sigma_{i=1}^{k} D_i = \Omega.$

Множества D_i при этом называются атомами разбиения $\mathcal{D}$.

Пусть $A \in \mathcal{F}$, и $\mathbf{P}(A \mid D_i)$ – условная вероятность события A относительно события D_i:

$$\mathbf{P}(A \mid D_i) = \frac{\mathbf{P}(AD_i)}{\mathbf{P}(D_i)}. \tag{1}$$

С набором условных вероятностей $\{\mathbf{P}(A \mid D_i)\}_{i=1}^{k}$ свяжем случайную величину

$$\mathbf{P}(A \mid \mathcal{D})(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(A \mid D_i) I_{D_i}(\omega), \tag{2}$$

принимающую на атомах D_i разбиения $\mathcal{D}$ значения $\mathbf{P}(A \mid D_i)$. Случайная величина (2) называется условной вероятностью события A относительно разбиения $\mathcal{D}$.

Приведем свойства условных вероятностей относительно разбиения.
1°. $\mathbf{P}(A+B \mid \mathcal{D}) = \mathbf{P}(A \mid \mathcal{D}) + \mathbf{P}(B \mid \mathcal{D})$;
2°. $\mathbf{P}(A \mid \mathcal{D}) = \mathbf{P}(A)$, если $\mathcal{D} = \{\Omega\}$ – тривиальное разбиение.

Для случайной величины $\mathbf{P}(A \mid \mathcal{D})$ определено математическое ожидание

$$\mathbf{EP}(A \mid \mathcal{D}) = \mathbf{E}[\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(A \mid D_i) I_{D_i}(\omega)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(A \mid \mathrm{D}_i) \cdot \mathbf{P}(D_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(A \cdot D_i) = \mathbf{P}(A).$$

Таким образом мы получили формулу полной вероятности в несколько измененном виде:
3°. $\mathbf{EP}(A \mid \mathcal{D}) = \mathbf{P}(A)$.

Пусть $\eta = \eta(\omega)$ – случайная величина, принимающая значения $y_1, y_2, \ldots, y_k$, причем

$$\mathbf{P}\{\eta = y_j\} > 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Обозначим через $D_j = \{\omega : \eta(\omega) = y_j\}$. Разбиение

$$\mathcal{D}_\eta = \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$$

при этом называется разбиением, порожденным случайной величиной η. Условную вероятность $\mathbf{P}(A \mid \mathcal{D}_\eta)$ будем называть условной вероятностью события A относительно случайной величины η и обозначим $\mathbf{P}(A \mid \eta)$.

Обозначим также через $\mathbf{P}(A \mid \eta = y_j) = \mathbf{P}(A \mid D_j)$.

Точно также вводится понятие условной вероятности события A относительно случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$. Разбиение здесь порождается атомами

$$D_{y_1, y_2, \ldots, y_m} = \{\omega : \eta_1(\omega) = y_1, \eta_2(\omega) = y_2, \ldots, \eta_m(\omega) = y_m\}.$$

Обозначается эта условная вероятность $\mathbf{P}(A \mid \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$.

Упражнение 1. Пусть ξ и η – две независимые случайные величины, принимающие значения x и y соответственно. Доказать, что тогда

$$\mathbf{P}\{\xi + \eta = z \mid \eta = y\} = \mathbf{P}\{\xi + y = z\}.$$

Пример 1.1. Пусть ξ и η – две независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением Бернулли с параметром p, то есть

$$\mathbf{P}\{\xi = 1\} = \mathbf{P}\{\eta = 1\} = p, \quad \mathbf{P}\{\xi = 0\} = \mathbf{P}\{\eta = 0\} = q,$$

где $p + q = 1$. Рассмотрим событие $A = \{\xi + \eta = k\}, \quad (k = 0, 1, 2)$, и найдем условную вероятность $\mathbf{P}(A \mid \eta)$ при разных значениях k.

Имеем, учитывая упражнение 1,

$$\mathbf{P}\{\xi + \eta = k \mid \eta\} = \mathbf{P}\{\xi + \eta = k \mid \eta = 0\} \cdot I_{\{\eta=0\}}(\omega) +$$

$$+ \mathbf{P}\{\xi + \eta = k \mid \eta = 1\} \cdot I_{\{\eta=1\}}(\omega) = \mathbf{P}\{\xi = k\} \cdot I_{\{\eta=0\}}(\omega) +$$

$$+ \mathbf{P}\{\xi = k - 1\} \cdot I_{\{\eta=1\}}(\omega).$$

Итак, мы получили

$$\mathbf{P}\{\xi + \eta = k \mid \eta\} = \begin{cases} q \cdot I_{\{\eta=0\}}(\omega), & \mathrm{k} = 0, \\ p \cdot I_{\{\eta=0\}}(\omega) + q \cdot I_{\{\eta=1\}}(\omega), & \mathrm{k} = 1, \\ p \cdot I_{\{\eta=1\}}(\omega), & \mathrm{k} = 2. \end{cases}$$

Или

$$\mathbf{P}\{\xi + \eta = k \mid \eta\} = \begin{cases} q(1 - \eta), & \mathrm{k} = 0, \\ p(1 - \eta) + q\eta, & \mathrm{k} = 1, \\ p\eta, & \mathrm{k} = 2. \end{cases}$$

Пусть теперь $\xi = \xi(\omega)$ – случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_l$, то есть ее можно представить в виде

$$\xi = \sum_{j=1}^{l} x_j I_{A_j}, \qquad A_j = \{\omega : \xi(\omega) = x_j\},$$

а $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$ – некоторое разбиение Ω. Введем условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно разбиения $\mathcal{D}$ формулой:

$$\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{l} x_j \cdot \mathbf{P}(A_j \mid \mathcal{D}). \tag{3}$$

Согласно этому определению условное математическое ожидание случайной величины ξ само является случайной величиной как сумма случайных величин. Подойдем к этому понятию с другой стороны. Пусть определено условное математическое ожидание $\mathbf{E}(\xi \mid D_i)$ случайной величины ξ относительно события D_i по формуле:

$$\mathbf{E}(\xi \mid D_i) = \sum_{j=1}^{l} x_j \cdot \mathbf{P}(A_j \mid D_i) = \frac{1}{\mathbf{P}(D_i)} \cdot \mathbf{E}(\xi \cdot I_{D_i}). \tag{4}$$

Далее положим по определению

$$\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(\xi \mid D_i) \cdot I_{D_i}(\omega). \tag{5}$$

Отметим, что значение условного математического ожидания случайной величины относительно разбиения не зависит от способа представления случайной величины. Причем, для вычисления его можно идти по схеме (1) $\to$ (2) $\to$ (3), либо по схеме (1) $\to$ (4) $\to$ (5).

Приведем простейшие свойства условного математического ожидания.

1). $\mathbf{E}(a \cdot \xi + b \cdot \eta \mid \mathcal{D}) = a \cdot \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D}) + b \cdot \mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{D})$, где a и b – произвольные константы.

2). $\mathbf{E}(\xi \mid \Omega) = \mathbf{E}\xi$.

3). $\mathbf{E}(c \mid \mathcal{D}) = c$,

где c – константа.

4). Если $\xi = I_A$, то

$$\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D}) = \mathbf{P}(A \mid \mathcal{D}).$$

5). $\mathbf{E}[\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D})] = \mathbf{E}\xi$.

Последнее свойство обобщает формулу полной вероятности.

Упражнение 2. Доказать свойство 5).

Пусть $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ – два разбиения. Говорят, что разбиение $\mathcal{D}_2$ мажорирует разбиение $\mathcal{D}_1$, или $\mathcal{D}_2$ мельче $\mathcal{D}_1$, (в обозначениях $\mathcal{D}_1 \preceq \mathcal{D}_2$), если

$$\sigma(\mathcal{D}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{D}_2),$$

где $\sigma(\mathcal{D})$ – алгебра, порожденная разбиением $\mathcal{D}$.

6). Пусть $\mathcal{D}_1 \preceq \mathcal{D}_2$. Тогда

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D}_2) \mid \mathcal{D}_1] = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D}_1).$$

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{D}_1 = \{D_{11}, D_{12}, \ldots, D_{1m}\}, \mathcal{D}_2 = \{D_{21}, D_{22}, \ldots, D_{2n}\}.$$

Тогда, если $\xi = \sum_{j=1}^{l} x_j \cdot I_{A_j}$, то

$$\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D}_2) = \sum_{j=1}^{l} x_j \cdot \mathbf{P}(A_j \mid \mathcal{D}_2),$$

и нам достаточно установить, что

$$\mathbf{E}[\mathbf{P}(A_j \mid \mathcal{D}_2) \mid \mathcal{D}_1] = \mathbf{P}(A_j \mid \mathcal{D}_1).$$

Так как

$$\mathbf{P}(A_j \mid \mathcal{D}_2) = \sum_{q=1}^{n} \mathbf{P}(A_j \mid D_{2q}) \cdot I_{D_{2q}},$$

то

$$\mathbf{E}[\mathbf{P}(A_j \mid \mathcal{D}_2) \mid \mathcal{D}_1] = \sum_{q=1}^{n} \mathbf{P}(A_j \mid D_{2q}) \cdot \mathbf{P}(D_{2q} \mid \mathcal{D}_1) =$$

$$= \sum_{q=1}^{n} \mathbf{P}(A_j \mid D_{2q}) \cdot [\sum_{p=1}^{m} \mathbf{P}(D_{2q} \mid D_{1p}) \cdot I_{D_{1p}}] =$$

$$= \sum_{p=1}^{m} I_{D_{1p}} \cdot \sum_{q=1}^{n} \mathbf{P}(A_j \mid D_{2q}) \cdot \mathbf{P}(D_{2q} \mid D_{1p}) =$$

$$= \sum_{p=1}^{m} I_{D_{1p}} \cdot \sum_{q: D_{2q} \subseteq D_{1p}} \mathbf{P}(A_j \mid D_{2q}) \cdot \mathbf{P}(D_{2q} \mid D_{1p}) =$$

$$= \sum_{p=1}^{m} I_{D_{1p}} \cdot \sum_{q: D_{2q} \subseteq D_{1p}} \frac{\mathbf{P}(A_j \cdot D_{2q})}{\mathbf{P}(D_{2q})} \cdot \frac{\mathbf{P}(D_{2q})}{\mathbf{P}(D_{1p})} =$$

$$= \sum_{p=1}^{m} I_{D_{1p}} \cdot \mathbf{P}(A_j \mid D_{1p}) = \mathbf{P}(A_j \mid \mathcal{D}_1).$$

Пусть $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$ – некоторое разбиение, $\eta = \eta(\omega)$ – случайная величина. Говорят, что случайная величина η измерима относительно разбиения $\mathcal{D}$, или $\mathcal{D}$ – измерима, если

$$\mathcal{D}_\eta \preceq \mathcal{D},$$

то есть она может быть представлена в виде

$$\eta(\omega) = \sum_{i=1}^{k} y_i \cdot I_{D_i}(\omega),$$

где y_i могут быть равными.

7). Пусть случайная величина η измерима относительно разбиения $\mathcal{D}$. Тогда

$$\mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{D}) = \eta.$$

Упражнение 3. Доказать свойство 7).

Если при этом разбиение $\mathcal{D}$ порождается несколькими случайными величинами $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, то условное математическое ожидание $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D}_{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_k})$ называется условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ и обозначается $\mathbf{E}(\xi \mid \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$.

Упражнение 4. Показать, что если случайные величины ξ и η независимы, то

$$\mathbf{E}(\xi \mid \eta) = \mathbf{E}\xi.$$

Упражнение 5. Показать, что

$$\mathbf{E}(\eta \mid \eta) = \eta.$$

Пример 1.2. Для случайных величин ξ и η из примера 1.1 найти

$$\mathbf{E}(\xi + \eta \mid \eta).$$

Так как случайные величины независимы, то

$$\mathbf{E}(\xi + \eta \mid \eta) = \mathbf{E}\xi + \eta = p + \eta.$$

То же самое мы получим, исходя из определения:

$$\mathbf{E}(\xi + \eta \mid \eta) = \sum_{k=0}^{2} k\mathbf{P}(\xi + \eta = k \mid \eta) =$$

$$= q(1-\eta)\cdot 0 + [p(1-\eta) + q\eta]\cdot 1 + p\eta \cdot 2 = p + \eta.$$

8). Если случайная величина η является $\mathcal{D}$–измеримой, то

$$\mathbf{E}(\eta \cdot \xi \mid \mathcal{D}) = \eta \cdot \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D}).$$

Действительно, пусть

$$\xi = \sum_{j=1}^{l} x_j \cdot I_{A_j}, \quad \eta = \sum_{i=1}^{k} y_i \cdot I_{D_i}.$$

Тогда

$$\xi \cdot \eta = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} x_j y_i \cdot I_{A_j D_i},$$

следовательно,

$$\mathbf{E}(\xi \cdot \eta \mid \mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} x_j y_i \cdot \mathbf{P}(A_j D_i \mid \mathcal{D}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} x_j y_i \sum_{m=1}^{k} \mathbf{P}(A_j D_i \mid D_m) \cdot I_{D_m} =$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} x_j y_i \cdot \mathbf{P}(A_j D_i \mid D_i) \cdot I_{D_i} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} x_j y_i \cdot \mathbf{P}(A_j \mid D_i) \cdot I_{D_i}.$$

С другой стороны, так как $I_{D_i}^2 = I_{D_i}, \quad I_{D_i} I_{D_m} = 0 \quad (i \neq m)$, то

$$\eta \cdot \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D}) = [\sum_{i=1}^{k} y_i I_{D_i}] \cdot [\sum_{j=1}^{l} x_j \mathbf{P}(A_j \mid \mathcal{D})] =$$

$$= [\sum_{i=1}^{k} y_i I_{D_i}] \cdot \sum_{m=1}^{k} [\sum_{j=1}^{l} x_j \mathbf{P}(A_j \mid D_m)] \cdot I_{D_m} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} x_j \cdot y_i \cdot \mathbf{P}(A_j \mid D_i) \cdot I_{D_i}.$$

Пример 1.3. Пусть ξ и η – независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда

$$\mathbf{E}(\xi \mid \xi + \eta) = \mathbf{E}(\eta \mid \xi + \eta) = \frac{\xi + \eta}{2}.$$

Действительно, пусть случайные ξ и η величины принимают для простоты значения $1, 2, \ldots, m$. Тогда

$$\mathbf{P}(\xi = k \mid \xi + \eta = l) = \frac{\mathbf{P}(\xi = k, \xi + \eta = l)}{\mathbf{P}(\xi + \eta = l)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(\xi = k, \eta = l - k)}{\mathbf{P}(\xi + \eta = l)} = \frac{\mathbf{P}(\eta = k), \xi = l - k)}{\mathbf{P}(\xi + \eta = l)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(\eta = k) \cdot \mathbf{P}(\xi = l - k)}{\mathbf{P}(\xi + \eta = l)} = \mathbf{P}(\eta = k \mid \xi + \eta = l).$$

Таким образом, первое равенство доказано. Докажем второе.

$$2 \cdot \mathbf{P}(\xi \mid \xi + \eta) = \mathbf{P}(\xi \mid \xi + \eta) + \mathbf{P}(\eta \mid \xi + \eta) = \mathbf{P}(\xi + \eta \mid \xi + \eta) = \xi + \eta.$$

Вообще говоря, понятие условного математического ожидания вводится для σ–алгебр. Но в случае конечного множества алгебра и σ–алгебра — это одно и то же понятие. Каждому разбиению конечного множества соответствует алгебра, порождаемая этим разбиением, и наоборот, всякая алгебра порождается некоторым разбиением. К тому же, если $\mathcal{B}$ – некоторая алгебра подмножеств конечного множества, а $\mathcal{D}$ – такое разбиение, что $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{B}$, то

$$\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{D}) = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{B}).$$

В дальнейшем мы их различать не будем.

§2. Мартингалы

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – конечное вероятностное вероятностное пространство, $\mathcal{D}_1 \preceq \mathcal{D}_2 \preceq \ldots \preceq \mathcal{D}_n$ – некоторая последовательность разбиений.

Определение 2.1. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называется мартингалом (относительно последовательности разбиений $\mathcal{D}_1 \preceq \mathcal{D}_2 \preceq \ldots \preceq \mathcal{D}_n$), если

1) ξ_k являются $\mathcal{D}_k$–измеримыми, $\qquad 1 \le k \le n$;

2) $\mathbf{E}(\xi_{k+1} \mid \mathcal{D}_k) = \xi_k, \qquad 1 \le k \le n-1.$

Будем обозначать такой мартингал

$$\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k=1}^n.$$

В том частном случае, когда $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k}$, будем говорить, что последовательность $\xi = (\xi_k)$ образует мартингал, не уточняя, относительно какой последовательности разбиений он образуется.

Пример 2.1. Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ – независимые одинаково распределенные бернуллиевские случайные величины с распределением

$$\mathbf{P}\{\eta_k = -1\} = \mathbf{P}\{\eta_k = 1\} = \frac{1}{2},$$

Обозначим

$$S_k = \eta_1 + \cdots + \eta_k, \quad \mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_k}.$$

Структура разбиений $\mathcal{D}_k$ проста:

$$\mathcal{D}_1 = \{D^+, D^-\},$$

где $D^+ = \{\omega : \eta_1 = 1\}, \quad D^- = \{\omega : \eta_1 = -1\}$;

$$\mathcal{D}_2 = \{D^{++}, D^{+-}, D^{-+}, D^{--}\},$$

где

$$D^{++} = \{\omega : \eta_1 = 1, \eta_2 = 1\}, \ldots, D^{--} = \{\omega : \eta_1 = -1, \eta_2 = -1\},$$

и так далее. Очевидно, что $\mathcal{D}_{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_k} = \mathcal{D}_{S_1,S_2,\ldots,S_k}$, и случайные величины S_k являются $\mathcal{D}_k$–измеримыми. Покажем, что выполнено и второе свойство мартингала.

$$\mathbf{E}(S_{k+1} \mid \mathcal{D}_k) = \mathbf{E}(S_k + \eta_{k+1} \mid \mathcal{D}_k) =$$

$$= \mathbf{E}(S_k \mid \mathcal{D}_k) + \mathbf{E}(\eta_{k+1} \mid \mathcal{D}_k) = S_k + \mathbf{E}\eta_{k+1} = S_k.$$

Пример 2.2. Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ –независимые бернуллиевские случайные величины с распределением $\mathbf{P}\{\eta_k = 1\} = p, \mathbf{P}\{\eta_k = -1\} = q, (k = 1, \ldots, n)$. Если $p \neq q$, то последовательности

$$(\frac{q}{p})^{S_k}, \quad S_k - k(p-q),$$

где $S_k = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k$, образуют мартингал.

Проверим мартингальное свойство для последовательности $(\frac{q}{p})^{S_k}$.

$$\mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{S_{k+1}} \mid \mathcal{D}_k] = \mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{S_k+\eta_{k+1}} \mid \mathcal{D}_k] = \mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{S_k} \cdot (\frac{q}{p})^{\eta_{k+1}} \mid \mathcal{D}_k].$$

Так как случайная величина $(\frac{q}{p})^{S_k}$ измерима относительно разбиения $\mathcal{D}_k$, то по свойству 8) условного математического ожидания имеем:

$$\mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{S_{k+1}} \mid \mathcal{D}_k] = (\frac{q}{p})^{S_k} \cdot \mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{\eta_{k+1}} \mid \mathcal{D}_k] =$$

$$= (\frac{q}{p})^{S_k} \cdot \mathbf{E}(\frac{q}{p})^{\eta_{k+1}} = (\frac{q}{p})^{S_k} \cdot (\frac{q}{p}p + \frac{p}{q}q) = (\frac{q}{p})^{S_k}.$$

Упражнение 6. Доказать мартингальное свойство для второй последовательности из примера 2.2.

Пример 2.3. Пусть η – некоторая случайная величина, $\mathcal{D}_1 \preceq \mathcal{D}_2 \preceq \ldots \preceq \mathcal{D}_n$ – последовательность разбиений. Положим

$$\xi_k = \mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{D}_k). \qquad (*)$$

Утверждаем, что последовательность $(\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k=1}^n$ образует мартингал.

Действительно, $\mathcal{D}_k$–измеримость ξ_k очевидна. Также легко видеть, что

$$\mathbf{E}(\xi_{k+1} \mid \mathcal{D}_k) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{D}_{k+1}) \mid \mathcal{D}_k) = \mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{D}_k) = \xi_k.$$

Заметим, что если $(\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k=1}^n$ – произвольный мартингал, то из свойств условного математического ожидания легко вывести, что

$$\xi_k = \mathbf{E}(\xi_{k+1} \mid \mathcal{D}_k) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi_{k+2} \mid \mathcal{D}_{k+1}) \mid \mathcal{D}_k) =$$

$$= \mathbf{E}(\xi_{k+2} \mid \mathcal{D}_k) = \ldots = \mathbf{E}(\xi_n \mid \mathcal{D}_k)$$

Таким образом, множество всех мартингалов исчерпывается мартингалами вида $(*)$. Отметим здесь, что уже в случае бесконечных последовательностей это утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 2.4. (обращённый мартингал). Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин,

$$S_k = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_k,\, \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{S_n}, \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{S_n, S_{n-1}}, \ldots, \mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{S_n,\ldots,S_1}.$$

Покажем, что последовательность $(\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k=1}^n$, где

$$\xi_1 = \frac{S_n}{n}, \xi_2 = \frac{S_{n-1}}{n-1}, \ldots, \xi_k = \frac{S_{n-k+1}}{n-k+1}, \ldots, \xi_n = S_1,$$

является мартингалом.

В самом деле, $\mathcal{D}_k \preceq \mathcal{D}_{k+1}, \quad \xi_k - \mathcal{D}_k$-измерима. Далее, так как для всех $j \le n-k+1$

$$\mathbf{E}(\eta_j \mid \mathcal{D}_k) = \mathbf{E}(\eta_1 \mid \mathcal{D}_k),$$

то

$$(n-k+1) \cdot \mathbf{E}(\eta_1 \mid \mathcal{D}_k) = \sum_{j=1}^{n-k+1} \mathbf{E}(\eta_j \mid \mathcal{D}_k) =$$
$$= \mathbf{E}(S_{n-k+1} \mid \mathcal{D}_k) = S_{n-k+1}.$$

Следовательно,

$$\xi_k = \frac{S_{n-k+1}}{n-k+1} = \mathbf{E}(\eta_1 \mid \mathcal{D}_k),$$

и мартингальность её следует из примера 2.3.

Из определения мартингала сразу следует, что математическое ожидание $\mathbf{E}\xi_k$ одно и то же для всех k:

$$\mathbf{E}\xi_k = \mathbf{E}\xi_1.$$

Покажем, что это свойство остается справедливым, если вместо момента k взять случайный момент.

Определение 2.2. Случайная величина $\tau = \tau(\omega)$, принимающая значения $1, 2, \ldots, n$ называется моментом остановки (относительно последовательности разбиений $\mathcal{D}_1 \preceq \mathcal{D}_2 \preceq \ldots \preceq \mathcal{D}_n$), если для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ случайные величины $I_{\{\tau=k\}}(\omega)$ являются $\mathcal{D}_k$-измеримыми.

Если трактовать разбиение $\mathcal{D}_k$ как разбиение, порожденное наблюдениями за k шагов, то $\mathcal{D}_k$-измеримость случайных величин $I_{\{\tau=k\}}(\omega)$

означает, что осуществление события $\{\tau = k\}$ определяется лишь за наблюдениями за k шагов и не зависит от будущего.

Если $\mathcal{B}_k = \sigma(\mathcal{D}_k)$ – σ-алгебра, порожденная разбиением $\mathcal{D}_k$, то $\mathcal{D}_k$-измеримость случайных величин $I_{\{\tau=k\}}(\omega)$ эквивалентна утверждению

$$\{\tau = k\} \in \mathcal{B}_k.$$

Примером момента остановки может служить момент первого достижения множества A некоторой случайной последовательностью $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Теорема 2.1.*Пусть* $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k=1}^n$ – *мартингал и* $\tau = \tau(\omega)$ – *некоторый момент остановки относительно разбиений* $(\mathcal{D}_k)_{k=1}^n$. *Тогда*

$$\mathbf{E}(\xi_\tau|\mathcal{D}_1) = \xi_1,$$

где $\xi_\tau(\omega) = \sum_{k=1}^n \xi_k I_{\{\tau=k\}}(\omega)$, *и*

$$\mathbf{E}\xi_\tau = \mathbf{E}\xi_1.$$

Доказательство. Пусть $D \in \mathcal{D}_1$. Из свойств условного математического ожидания имеем

$$\mathbf{E}(\xi_\tau|D) = \frac{\mathbf{E}(\xi_\tau \cdot I_D)}{\mathbf{P}(D)} = \frac{1}{\mathbf{P}(D)} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\xi_k \cdot I_{\{\tau=k\}} \cdot I_D) =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(D)} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[\mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{D}_k) \cdot I_{\{\tau=k\}} \cdot I_D] =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(D)} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[\mathbf{E}(\xi_n \cdot I_{\{\tau=k\}} \cdot I_D|\mathcal{D}_k)] =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(D)} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\xi_n \cdot I_{\{\tau=k\}} \cdot I_D) = \frac{1}{\mathbf{P}(D)} \cdot \mathbf{E}(\xi_n \cdot I_D) = \mathbf{E}(\xi_n|D).$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}(\xi_\tau|\mathcal{D}_1) = \mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{D}_1) = \xi_1.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\xi_\tau = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi_\tau|\mathcal{D}_1)) = \mathbf{E}\xi_1.$$

Рассмотрим некоторые применения мартингалов к теории случайных блужданий.

Теорема 2.2 (теорема о баллотировке). *Пусть* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ *– последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих целые неотрицательные значения,* $S_k = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k, \quad 1 \le k \le n$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\{S_k < k,\ 1 \le k \le n | S_n\} = (1 - \frac{S_n}{n})^+,$$

где $a^+ = \max(0, a)$.

Доказательство. На множестве $\{\omega : S_n(\omega) \ge n\}$ искомая вероятность равна нулю, то есть формула верна. Докажем формулу для элементарных исходов ω, для которых $S_n(\omega) < n$.

Рассмотрим обращенный мартингал $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k=1}^n$, где

$$\xi_k = \frac{S_{n-k+1}}{n-k+1},\ \mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{S_{n-k+1}, \ldots, S_n}.$$

Обозначим
$$\tau = \min\{1 \le k \le n : \xi_k \ge 1\}.$$
Если $\xi_k < 1$ для всех $1 \le k \le n$, или, что то же самое, $\{\max_{1 \le l \le n} \frac{S_l}{l} < 1\}$, то положим $\tau = n$.

На множестве $\{\max_{1 \le l \le n} \frac{S_l}{l} < 1\}$ $\xi_\tau = \xi_n = S_1 = 0$. Следовательно,

$$\left\{\omega : \max_{1 \le l \le n} \frac{S_l(\omega)}{l} < 1\right\} \subseteq \{\xi_\tau = 0\}.$$

Рассмотрим теперь все элементарные исходы, для которых

$$\left\{\max_{1 \le l \le n} \frac{S_l}{l} \ge 1,\ S_n < n\right\}.$$

Обозначим через $\sigma = n - \tau + 1$. Очевидно, что

$$\sigma = \max\{1 \le k \le n : S_k \ge k\}.$$

Значит, $\sigma < n, S_\sigma \ge \sigma, S_{\sigma+1} < \sigma + 1$. Следовательно, $\eta_{\sigma+1} = S_{\sigma+1} - S_\sigma < (\sigma + 1) - \sigma = 1$, то есть $\eta_{\sigma+1} = 0$.

Значит,
$$\xi_\tau = \frac{S_{n-\tau+1}}{n-\tau+1} = \frac{S_\sigma}{\sigma} = 1.$$
Тем самым
$$\left\{\max_{1 \le l \le n} \frac{S_l}{l} \ge 1,\ S_n < n\right\} \subseteq \{\xi_\tau = 1\}.$$

Поэтому на множестве $S_n < n$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\le l\le n}\frac{S_l}{l}\ge 1|S_n\right\} = \mathbf{P}\{\xi_\tau = 1|S_n\} = \mathbf{E}(\xi_\tau|S_n),$$

поскольку ξ_τ принимает лишь два значения 0 и 1. Заметим, что

$$\mathbf{E}(\xi_\tau|S_n) = \mathbf{E}(\xi_\tau|\mathcal{D}_1).$$

Тогда по теореме 2.1 имеем:

$$\mathbf{E}(\xi_\tau|\mathcal{D}_1) = \xi_1 = \frac{S_n}{n}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{S_k < k,\ 1\le k\le n|S_n\} = 1 - \frac{S_n}{n}.$$

Почему эта теорема носит название теоремы о баллотировке?

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением Бернулли:

$$\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_i = -1\} = 1/2.$$

Обозначим $S_k = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k$, a и b – целые неотрицательные числа: $a - b > 0,\ a + b = n$. Покажем, что тогда

$$\mathbf{P}\{S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_n > 0|S_n = a - b\} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Действительно, в силу симметрии

$$\mathbf{P}\{S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_n > 0|S_n = a - b\} =$$
$$= \mathbf{P}\{S_1 < 0, S_2 < 0, \ldots, S_n < 0|S_n = -(a-b)\} =$$
$$= \mathbf{P}\{S_1 + 1 < 1, S_2 + 2 < 2, \ldots, S_n + n < n|S_n + n = n - (a-b)\} =$$
$$= \mathbf{P}\left\{\eta_1 < 1, \eta_1 + \eta_2 < 2, \ldots, \sum_{k=1}^{n}\eta_k < n|\sum_{k=1}^{n}\eta_k = n - (a-b)\right\} =$$
$$= \left[1 - \frac{n-(a-b)}{n}\right]^+ = \frac{a-b}{n} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Здесь $\eta_k = \xi_k + 1$. Будем интерпретировать событие $\{\xi_i = +1\}$ как голос, поданный на выборах за первого кандидата, $\{\xi_i = -1\}$ – за второго кандидата. Тогда случайная величина S_k описывает эволюцию разности числа голосов, поданных за двух кандидатов, если проголосовало k избирателей, а $\mathbf{P}\{S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_n > 0 | S_n = a - b\}$ есть вероятность того, что первый кандидат все время был впереди, при условии, что в общей сложности первый кандидат собрал a голосов, второй получил b голосов и $a - b > 0, a + b = n$. Согласно полученной формуле эта вероятность равна $(a-b)/n$.

Определение 2.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – последовательность случайных величин, $\mathcal{F}_0 \preceq \mathcal{F}_1 \preceq \dots \preceq \mathcal{F}_n$ – неубывающая последовательность алгебр. Последовательность $(\xi_k, \mathcal{F}_k)$ называется супермартингалом (субмартингалом), если:

1). $\xi_k - \mathcal{F}_k$-измеримы;

2). $\mathbf{E}|\xi_k| < \infty$ и

$$\mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k) \le \xi_k \ (\mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k) \ge \xi_k).$$

Теорема 2.3 (теорема Дуба). *Пусть $(\xi_k, \mathcal{F}_k)$ – супермартингал (или субмартингал). Тогда существуют мартингал $(\eta_k, \mathcal{F}_k)$ и предсказуемая возрастающая последовательность $(A_k, \mathcal{F}_{k-1})$ такие, что для $k \ge 1$ $\mathcal{F}$-почти наверное имеет место разложение:*

$$\xi_k = \eta_k - A_k, \quad (\textit{или} + A_k)$$

причём такое разложение единственно.

Доказательство. Положим $\eta_0 = \xi_0, A_0 = 0$ и

$$\eta_k = \eta_0 + \sum_{j=0}^{k-1} (\xi_{j+1} - \mathbf{E}(\xi_{j+1}|\mathcal{F}_j)),$$

$$-A_k = \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{E}(\xi_{j+1}|\mathcal{F}_j) - \xi_j).$$

$\mathcal{F}_k$-измеримость последовательности (A_k) очевидна из представления. Проверим мартингальное свойство последовательности η_k. Для $k \ge 1$:

$$\mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k) = \mathbf{E}[(\sum_{j=0}^{k} (\xi_{j+1} - \mathbf{E}(\xi_{j+1}|\mathcal{F}_j)|)|\mathcal{F}_k] =$$

$$= \mathbf{E}[(\sum_{j=0}^{k-1} (\xi_{j+1} - \mathbf{E}(\xi_{j+1}|\mathcal{F}_j)|)|\mathcal{F}_k] + \mathbf{E}((\xi_{k+1} - \mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k))|\mathcal{F}_k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} (\xi_{j+1} - \mathbf{E}(\xi_{j+1}|\mathcal{F}_j)) = \eta_k.$$

Проверим единственность представления. Пусть $\xi'_k = \eta'_k - A'_k$ – другое представление последовательности (ξ_k). Рассмотрим $A'_{k+1} - A'_k = (A_{k+1} - A_k) + (\eta_{k+1} - \eta_k) - (\eta'_{k+1} - \eta'_k)$. Тогда $\mathbf{E}((A'_{k+1} - A'_k)|\mathcal{F}_k) = \mathbf{E}((A_{k+1} - A_k)|\mathcal{F}_k) + \mathbf{E}((A'_{k+1} - A'_k)|\mathcal{F}_k) - \mathbf{E}((\eta'_{k+1} - \eta'_k)|\mathcal{F}_k)$. Получаем $A'_{k+1} - A'_k = A_{k+1} - A_k$ $\mathcal{F}$-почти наверное. Но $A_0 = A'_0 = 0$. Следовательно, $A_k = A'_k$, $\eta_k = \eta'_k$ $\mathcal{F}$-почти наверное.

§3. Гильбертово пространство случайных величин.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – произвольное вероятностное пространство. Обозначим через $L_2 = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ пространство случайных величин $\xi = \xi(\omega)$, обладающих свойством

$$\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty.$$

Положим для $\xi, \eta \in L_2$:

$$(\xi, \eta) = \mathbf{E}\xi\eta.$$

Из свойств интеграла Лебега очевидно, что для $\xi, \eta, \zeta \in L_2$
1). $(a\xi + b\eta, \zeta) = a(\xi, \zeta) + b(\eta, \zeta), \quad a, b - const,$
2). $(\xi, \xi) \geq 0.$

Заметим, что если $(\xi, \xi) = 0$, то это еще не значит, что $\xi \equiv 0$. Равенство нулю случайной величины ξ выполняется только почти наверное. Для того, чтобы $(\cdot, \cdot)$ было скалярным произведением, мы вместо случайных величин ξ будем рассматривать классы почти наверное совпадающих с ξ случайных величин. Итак, $(\cdot, \cdot)$ является скалярным произведением в пространстве L_2. Введем норму элемента $\xi \in L_2$, полагая

$$\|\xi\| = (\xi, \xi)^{1/2}.$$

Замечание. В общем случае для комплекснозначных случайных величин скалярное произведение задают таким образом:

$$(\xi, \eta) = \mathbf{E}\xi\overline{\eta},$$

где $(\bar{\cdot})$ означает комплексное сопряжение.

Покажем теперь, что относительно заданной нормы пространство L_2 является полным.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ элементов L_2 сходилась в среднем квадратическом к случайной величине, принадлежащей L_2, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной в среднем квадратическом.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ такова, что сходится в среднем квадратическом к некоторой случайной величине $\xi \in L_2$, то есть $\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Используя неравенство Минковского, оценим

$$\begin{aligned} \|\xi_n - \xi_m\| &= \left(\mathbf{E}|\xi_n - \xi_m|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^2\right)^{1/2} + \left(\mathbf{E}|\xi_m - \xi|^2\right)^{1/2} \to 0 \end{aligned}$$

при $n, m \to \infty$.

Обратно, пусть последовательность $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ фундаментальна, то есть $\|\xi_n - \xi_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Выберем такую подпоследовательность $\{\xi_{nk}\}$, что $\xi_{nk} \to \xi$ почти наверное, где ξ – некоторая случайная величина из L_2. Для этого положим $n_1 = 1$ и по индукции выберем n_k как тот наименьший номер $n > n_{k-1}$, для которого при всех $s \geq n, t \geq n$ выполнено неравенство $\|\xi_t - \xi_s\| < 2^{-2k}$. Обозначим

$$A_k = \{\omega : |\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| \geq 2^{-k}\}.$$

Тогда, используя неравенство Чебышёва

$$\mathbf{P}(A_k) \leq \frac{\mathbf{E}|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}|^2}{2^{-2k}} \leq \frac{2^{-4k}}{2^{-2k}} = 2^{-2k} < 2^{-k}.$$

Значит, $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) < \infty$. Оценим вероятность того, что произойдет бесконечное число событий $A_1, A_2, \ldots$:

$$\mathbf{P}\left\{|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| \geq 2^{-k}\,\text{б.ч.}\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} \{|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}|\} \geq 2^{-k}\}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k\geq n} \{|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}|\} \geq 2^{-k}\}\right\} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{n\geq k} \mathbf{P}(A_k) = 0.$$

Значит, $\mathbf{P}\left\{|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| \geq 2^{-k}\,\text{б.ч.}\right\} = 0$. Поэтому с вероятностью единица имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| < \infty.$$

Пусть $\mathcal{N} = \left\{\omega : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| = \infty\right\}$. Положим

$$\xi(\omega) = \begin{cases} \xi_{n_1}(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty}(\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}), & \omega \notin \mathcal{N}, \\ 0, & \omega \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Таким образом, $\xi_{n_k} \to \xi$ почти наверное при $n_k \to \infty$. Покажем теперь, что $\|\xi_n - \xi\| \to 0$ при $n \to \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое $N = N(\varepsilon)$, что $\|\xi_n - \xi_m\| < \varepsilon$ для $n \geq N, m \geq N$. Тогда для любого фиксированного $n \geq N$ по лемме Фату имеем:

$$\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^2 = \mathbf{E}\{\lim_{n_k\to\infty} |\xi_n - \xi_{n_k}|^2\} = \mathbf{E}\{\liminf_{n_k\to\infty} |\xi_n - \xi_{n_k}|^2\} \leq$$

$$\leq \liminf_{n_k\to\infty} \mathbf{E}|\xi_n - \xi_{n_k}|^2 = \liminf_{n_k\to\infty} \|\xi_n - \xi_{n_k}\|^2 \leq \varepsilon.$$

Значит, $\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Из тождества $\xi \equiv (\xi - \xi_n) + \xi_n$ и неравенства Минковского следует, что $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$.

Итак, в соответствии с терминологией функционального анализа пространство случайных величин, имеющих второй момент, с введенным выше скалярным произведением является гильбертовым пространством. Две случайные величины ξ и η будем называть *ортогональными* ($\xi \perp \eta$), если $(\xi, \eta) = 0$. Множество $M \subseteq L_2$ называется *системой ортогональных* случайных величин, если $\xi \perp \eta$ для любых $\xi, \eta \in M$, $\xi \neq \eta$. Если к тому же для всех $\xi \in M$ норма $\|\xi\| = 1$, то M называется *ортонормированной системой*.

Пусть $M = \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ – некоторая ортонормированная система случайных величин в L_2, и $\xi \in L_2$. В классе всех линейных оценок случайной величины ξ вида
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i$$
найдем наилучшую в среднеквадратическом.
$$\mathbf{E}|\xi - \sum_{i=1}^{n} a_i\eta_i|^2 = \|\xi - \sum_{i=1}^{n} a_i\eta_i\|^2 = (\xi - \sum_{i=1}^{n} a_i\eta_i, \xi - \sum_{i=1}^{n} a_i\eta_i) =$$
$$= (\xi, \xi) - 2\sum_{i=1}^{n} a_i(\xi, \eta_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 = \|\xi\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i(\xi, \eta_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 =$$
$$= \|\xi\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(\xi, \eta_i)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |a_i - (\xi, \eta_i)|^2 \geq \|\xi\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(\xi, \eta_i)|^2.$$

Отсюда ясно, что инфимум по всем $a_1, \ldots, a_n$ левой части достигается при $a_i = (\xi, \eta_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом оптимальной линейной среднеквадратической оценкой ξ по $\eta_1, \ldots, \eta_n$ является оценка
$$\hat{\xi} = \sum_{i=1}^{n} (\xi, \eta_i)\eta_i.$$

Рассмотрим геометрический смысл такой оценки. Обозначим ненадолго через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ линейную оболочку системы случайных величин $M = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, то есть совокупность случайных величин вида $\sum_{i=1}^{n} a_i\eta_i$, $a_i \in \mathbf{R}$. Легко видеть, что разложение $\xi = \hat{\xi} + (\xi - \hat{\xi})$ является ортогональным: $\hat{\xi} \in \mathcal{L}$, $\xi - \hat{\xi} \perp \mathcal{L}$. Поэтому естественно назвать $\hat{\xi}$ проекцией ξ на $\mathcal{L}$, а $\xi - \hat{\xi}$ – перпендикуляром к $\mathcal{L}$.

Пример 3.1. Пусть $\Omega = \mathbf{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mathbf{P}-$ гауссовская мера на $\mathcal{F}$:
$$\mathbf{P}(-\infty, a] = \int_{-\infty}^{a} \varphi(x)dx, \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-x^2/2}.$$

Обозначим через $D := \frac{d}{dx}$ оператор дифференцирования и введем следующие функции:

$$H_n = \frac{(-1)^n D^n \varphi(x)}{\varphi(x)}, \quad n \geq 0,$$

где D^n– степень оператора D.

Вычислим

$$D\varphi(x) = -x\varphi(x),\ D^2\varphi(x) = (x^2-1)\varphi(x),$$
$$D^3\varphi(x) = (3x - x^3)\varphi(x), \ldots$$

Следовательно,

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = x, H_2(x) = x^2 - 1, H_3(x) = x^3 - 3x, \ldots$$

Таким образом, функции $H_n(x)$ являются полиномами и носят название полиномов Эрмита. Легко видеть, что

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)d\mathbf{P}(x) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)\varphi(x)dx = n!\delta_{nm},$$

где δ_{nm} – символ Кронекера. Поэтому система полиномов

$$h_n(x) := \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!}}, \quad (n \geq 0)$$

является ортонормированной системой случайных величин на Ω.

Упражнение 7. Пусть $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ – семейство ортогональных случайных величин. Показать, что для него справедлива "теорема Пифагора":

$$\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2.$$

Упражнение 8. Показать, что если $\|\xi_n - \xi\|^2 \to 0, \|\eta_n - \eta\|^2 \to 0$ $(n \to \infty)$, то $(\xi_n, \eta_n) \to (\xi, \eta)$ $(n \to \infty)$.

§4. Ортогональные стохастические меры и стохастические интегралы

Целью этого параграфа будет построение стохастического интеграла.

1. Как и в случаях интегралов Лебега, Лебега-Стильтьеса начнем с определения стохастической меры.

Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P})$– произвольное вероятностное пространство, $(E, \mathcal{E})$– некоторое измеримое пространство, $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{E}_0$– подалгебра σ-алгебры $\mathcal{E}$.

Определение 4.1. Комплекснозначная функция

$$Z(\Delta) = Z(\omega; \Delta),$$

определенная для $\omega \in \Omega$ и $\Delta \in \mathcal{E}_0$, называется конечно-аддитивной стохастической мерой, если:
1). Для всех $\Delta \in \mathcal{E}_0$ выполнено свойство

$$\mathbf{E}|Z(\Delta)|^2 < \infty;$$

2). Для всех $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{E}_0, \Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ почти наверное выполнено свойство

$$Z(\Delta_1 + \Delta_2) = Z(\Delta_1) + Z(\Delta_2).$$

Определение 4.2. Конечно-аддитивная стохастическая мера $Z(\Delta)$ называется элементарной стохастической мерой, если для любых $\Delta_1, \Delta_2, \dots,$ $\Delta_n, \dots \in \mathcal{E}_0$, таких, что $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset\ (i \neq j),\ \Delta = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \in \mathcal{E}_0$, выполнено свойство

$$\mathbf{E}|Z(\Delta) - \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta_k)|^2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Замечание. В определении элементарной стохастической меры, заданной на алгебре $\in \mathcal{E}_0$, предполагается, что ее значения принадлежат гильбертову пространству $L_2 = L_2(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P})$, причем, счетная аддитивность понимается в среднеквадратическом смысле. Существуют и другие определения стохастических мер; иногда не требуют существования второго момента, а счетная аддитивность может пониматься, например, в смысле сходимости по вероятности или с вероятностью единица.

Упражнение 9. Показать, что для конечно-аддитивных стохастических мер условие счетной аддитивности (в среднеквадратическом смысле) эквивалентно непрерывности (в том же смысле) в "нуле":

$$\mathbf{E}|Z(\Delta_n)|^2 \to 0, \quad \Delta_n \downarrow \emptyset,\ \Delta_n \in \mathcal{E}_0.$$

Далее в классе всех элементарных стохастических мер особо выделим ортогональные меры.

Определение 4.3. Элементарная стохастическая мера $Z = Z(\Delta), \Delta \in \mathcal{E}_0$, называется ортогональной (или мерой с ортогональными значениями), если для любых двух непересекающихся множеств $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{E}_0$

$$\mathbf{E}Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)} = 0.$$

Обозначим

$$m(\Delta) := \mathbf{E}|Z(\Delta)|^2, \Delta \in \mathcal{E}_0.$$

Для ортогональных стохастических мер функция множеств $m = m(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{E}_0$, является конечной мерой, и, следовательно, она может быть продолжена на σ-алгебру $\mathcal{E}$ согласно теореме Каратеодори. Полученную таким образом меру на $(E, \mathcal{E})$ будем обозначать той же буквой $m = m(\Delta)$ и называть структурной функцией ортогональной стохастической меры $Z = Z(\Delta)$.

Естественно встает вопрос: так как мера $m = m(\Delta)$ допускает продолжение с алгебры $\mathcal{E}_0$ на σ-алгебру $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E}_0)$, то нельзя ли ортогональную стохастическую меру

$$Z = Z(\Delta), \Delta \in \mathcal{E}_0,$$

продолжить на множества $\Delta \in \mathcal{E}$, причем так, чтобы

$$\mathbf{E}|Z(\Delta)|^2 = m(\Delta)?$$

Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Ортогональная стохастическая мера $Z = Z(\Delta)$, определенная на алгебре $\mathcal{E}_0$, может быть продолжена с сохранением σ-аддитивности на σ-алгебру $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E}_0)$, причем значения на этих множествах будут принадлежать линейному замыканию в среднем квадратическом всевозможных случайных величин $Z = Z(\Delta), \Delta \in \mathcal{E}_0$.*

Доказательство. Возьмем множества вида

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k, \tag{1}$$

где $\Delta_k \in \mathcal{E}_0,\ \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset\ (i \neq j)$ и определим $m(\Delta)$ равенством

$$m(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} m(\Delta_k).$$

Из определения меры m и ортогональности значений $Z(\Delta)$ для любых Δ', Δ'' вида (1) имеем:

$$\mathbf{E}|Z(\Delta') - Z(\Delta'')|^2 = \mathbf{E}|Z(\sum_{k=1}^{n_1} \Delta_k) - Z(\sum_{k=1}^{n_2} \Delta_k)|^2 =$$

$$= \mathbf{E}|\sum_{k=1}^{n_1} Z(\Delta_k) - \sum_{k=1}^{n_2} Z(\Delta_k)|^2 = \mathbf{E}|Z(\Delta' \setminus \Delta'') - Z(\Delta'' \setminus \Delta')|^2 =$$

$$= \mathbf{E}|Z(\Delta' \setminus \Delta'')|^2 - 2\mathbf{E}|Z(\Delta' \setminus \Delta'')Z(\Delta'' \setminus \Delta')| + \mathbf{E}|Z(\Delta'' \setminus \Delta')|^2 =$$

$$= m(\Delta' \setminus \Delta'') + m(\Delta'' \setminus \Delta') = m(\Delta' \circ \Delta''),$$

где $\circ$ означает симметрическую разность множеств.

Для меры $m = m(\Delta)$ воспользуемся тем, что для всех $\Delta \in \mathcal{E}$ можно подобрать такую последовательность множеств Δ_n вида (1), что $m(\Delta \circ \Delta_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\mathbf{E}|Z(\Delta_n - \Delta_m)|^2 = m(\Delta_n \circ \Delta_m) \to 0$$

при $n, m \to \infty$. Отсюда следует, что существует предел в среднем квадратическом последовательности случайных величин $Z(\Delta_n)$. Таким образом, значения $Z(\Delta)$ можно определить равенством

$$Z(\Delta) = \lim_{n \to \infty} Z(\Delta_n).$$

Предел в последнем равенстве понимается в среднем квадратическом смысле. Ясно, что этот предел не зависит от выбора последовательности множеств Δ_n.

2. Обратимся теперь к наиболее важному для наших целей случаю, когда $(E, \mathcal{E}) \equiv (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$. Из основного курса теории вероятностей известно, что всякая вероятностная мера $\tilde{m} = \tilde{m}(\Delta)$ на $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ находится во взаимно однозначном соответствии с некоторой функцией распределения $G = G(x)$, и при этом $\tilde{m}(a, b] = G(b) - G(a)$. Оказывается, нечто подобное справедливо и для ортогональных стохастических мер.

Определение 4.4. Совокупность (возможно, комплекснозначных) случайных величин $\{Z_\lambda\}, \lambda \in \mathbf{R}$, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P})$ называется случайным процессом с ортогональными приращениями, если

1). $\mathbf{E}|Z_\lambda|^2 < \infty,\ \lambda \in \mathbf{R}$;

2). для любых $\lambda \in \mathbf{R}$ $\mathbf{E}|Z_\lambda - Z_{\lambda_n}|^2 \to 0$ при $\lambda_n \uparrow \lambda,\ (n \to \infty),\ \lambda_n \in \mathbf{R}$;

3). для любых $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ выполнено

$$\mathbf{E}(Z_{\lambda_4} - Z_{\lambda_3})\overline{(Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1})} = 0.$$

Условие 1) здесь означает, что $Z_\lambda \in L_2(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}),\ \lambda \in \mathbf{R}$; условие 3) означает ортогональность приращений процесса; условие 2) носит исключительно технический характер и является требованием непрерывности слева (в среднеквадратическом смысле) в каждой точке $\lambda \in \mathbf{R}$.

Пусть $Z = Z(\Delta)$ – ортогональная стохастическая мера со структурной функцией $m = m(\Delta)$, являющейся конечной мерой с обобщенной функцией распределения $G = G(\lambda)$. Положим

$$Z_\lambda = Z(-\infty; \lambda].$$

Тогда $\mathbf{E}|Z_\lambda|^2 = m(-\infty; \lambda] = G(\lambda) < \infty,\ \mathbf{E}|Z_\lambda - Z_{\lambda_n}|^2 = m(\lambda_n; \lambda] \downarrow 0$ при $\lambda_n \uparrow \lambda$. Условие ортогональности приращений процесса Z_λ выполнено автоматически, так как $Z = Z(\Delta)$ является ортогональной стохастической мерой. Таким образом, построенный по мере Z процесс Z_λ является случайным процессом с ортогональными приращениями.

Обратно, пусть $G = G(\lambda)$ – некоторая обобщенная функция распределения: $G(-\infty) = 0,\ G(+\infty) < +\infty$, и $\{Z_\lambda\}$ – процесс с ортогональными приращениями со свойством $G(\lambda) = \mathbf{E}|Z_\lambda|^2 < \infty$. Положим для $\Delta = (a; b]$

$$Z(\Delta) = Z_b - Z_a.$$

Пусть $\mathcal{B}_0(\mathbf{R})$ – алгебра, порожденная множествами вида

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} (a_k; b_k],$$

где $(a_k; b_k]$ не пересекаются. Тогда

$$Z(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} Z(a_k; b_k].$$

Ясно, что

$$\mathbf{E}|Z(\Delta)|^2 = m(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} [G(b_k) - G(a_k)],$$

и для непересекающихся множеств $\Delta_1 = (a_1; b_1],\ \Delta_2 = (a_2; b_2]$ имеем

$$\mathbf{E}Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)} = 0.$$

Так как функция $G = G(\lambda)$ непрерывна слева, то мера $Z = Z(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}_0(\mathbf{R})$, является элементарной стохастической мерой с ортогональными значениями. Ее структурная функция $m = m(\Delta)$ продолжается до меры с алгебры $\mathcal{B}_0(\mathbf{R})$ на все $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Следовательно, мера Z также продолжается на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$, и при этом

$$\mathbf{E}|Z(\Delta)|^2 = m(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

Тем самым мы показали, что между случайными процессами с ортогональными приращениями $\{Z_\lambda\}, \lambda \in \mathbf{R}$, со свойством

$$\mathbf{E}|Z_\lambda|^2 = G(\lambda) \ < \ \infty, \ G(-\infty) \ = \ 0, \ G(+\infty) \ < \ \infty,$$

и ортогональными стохастическими мерами $Z = Z(\Delta)$, где $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, со структурной функцией $m = m(\Delta)$ существует взаимно однозначное соответствие, при котором

$$Z_\lambda = Z(-\infty; \lambda], \quad G(\lambda) = m(-\infty; \lambda],$$

и

$$Z(a; b] = Z_b - Z_a, \quad m(a, b] = G(b) - G(a).$$

3. Определим теперь стохастический интеграл для неслучайных функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию

$$\int_T |\varphi(t)|^2 dt < \infty,$$

где T – конечный или бесконечный отрезок действительной прямой.

Пусть $Z = Z(\Delta)$ — ортогональная стохастическая мера, заданная для всех $\Delta \subseteq T$. Отметим, что в этом случае структурная функция меры $Z = Z(\Delta)$ есть мера Лебега на T. Рассмотрим сначала простые функции $\varphi(t)$, то есть те, которые принимают лишь конечное число отличных от нуля значений на непересекающихся полуинтервалах $\Delta_k \subseteq T$. Пусть

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k I_{\Delta_k}(t).$$

Для такой функции определим стохастический интеграл по мере Z равенством

$$\int_T \varphi(t) Z(dt) := \sum_{k=1}^{n} y_k Z(\Delta_k).$$

Очевидно, этот интеграл в силу определения обладает свойствами однородности и линейности: для любых простых функций φ_1, φ_2 и любых $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

$$\int_T [c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)]Z(dt) = c_1 \int_T \varphi_1(t)Z(dt) + c_2 \int_T \varphi_2(t)Z(dt).$$

Если учесть, что $Z(\Delta)$ – ортогональная стохастическая мера, то легко вывести следующее свойство:

$$\| \int_T \varphi(t)Z(dt)\|^2 = \int_T |\varphi(t)|^2 dt.$$

Действительно,

$$\| \int_T \varphi(t)Z(dt)\|^2 = \| \sum_{k=1}^{n} y_k Z(\Delta_k)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \|Z(\Delta_k)\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 m(\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 |\Delta_k| = \int_T |\varphi(t)|^2 dt.$$

Рассмотрим теперь произвольную неслучайную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую условию

$$\int_T |\varphi(t)|^2 dt < \infty,$$

для которой существует последовательность таких простых функций $\varphi_n(t)$, что

$$\int_T |\varphi(t) - \varphi_n(t)|^2 dt \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Покажем, что тогда последовательность соответствующих интегралов будет фундаментальной в среднем квадратическом.

$$\| \int_T \varphi_n(t)Z(dt) - \int_T \varphi_m(t)Z(dt)\|^2 = \| \int_T (\varphi_n(t) - \varphi_m(t))Z(dt)\|^2 =$$

$$= \int_T |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^2 dt \leq$$

$$\leq 2 \int_T (|\varphi_n(t) - \varphi(t)|^2 + |\varphi_m(t) - \varphi(t)|^2) dt \to 0$$

при $(n, m \to \infty)$.

Следовательно, в $L_2 = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ существует предел

$$\int_T \varphi(t)Z(dt) = \lim_{n\to\infty} \int_T \varphi_n(t)Z(dt),$$

который и определяет обозначенный слева стохастический интеграл.

Очевидно, что это определение не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\varphi_n(t)$ простых функций.

Пусть $\Delta \subseteq T$ таково, что

$$\int_\Delta |\varphi(t)|^2 dt < \infty.$$

Определим стохастический интеграл по такому множеству равенством

$$\int_\Delta \varphi(t) Z(dt) = \int_T \varphi(t) I_\Delta(t) Z(dt).$$

Упражнение 10. Для каждого множества Δ конечной лебеговой меры положим

$$Z(\Delta) := \int_\Delta Z(dt).$$

Показать, что эта формула задает ортогональную стохастическую меру.
Замечание. Ортогональную стохастическую меру $Z = Z(\Delta)$, заданную на алгебре конечных объединений полуинтервалов $(a; b]$, можно продолжить на σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ с помощью интеграла (*упражнение 11*).

§5. Стохастический интеграл Ито

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство. Обозначим через $\mathcal{F}^t, t \in T$, σ-подалгебры σ-алгебры $\mathcal{F}$, каждую из которых мы будем интерпретировать как совокупность событий, произошедших до соответствующего момента времени t. Тогда естественно предположить, что $\mathcal{F}^s \subseteq \mathcal{F}^t,\ s \leq t$. Пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}^t\}, \mathbf{P})$ называется пространством с фильтрацией.

Мы распространим понятие стохастического интеграла на случайные функции $\varphi(t)$, значения которых в каждый момент времени t суть случайные величины: $\varphi(t) = \varphi(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$. Будем считать, что функция $\varphi(t)$ измерима относительно соответствующей σ-алгебры $\mathcal{F}^t$. Такие случайные функции мы будем называть неупреждающими.

Рассмотрим ортогональную стохастическую меру $Z(\Delta)$, заданную для множеств $\Delta \subseteq T$, где T – конечный отрезок числовой прямой. Предположим, что мера $Z = Z(\Delta)$ имеет нулевое среднее:

$$\mathbf{E}Z(\Delta) \equiv 0. \tag{2}$$

Предположим далее, что для каждого $\Delta = (s; t]$ случайная величина $Z(\Delta)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}^t$ и не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}^s, s \leq t$. Относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}^t, t \geq t_0$, будем предполагать, что он непрерывен справа, то есть

$$\bigcap_{t>s} \mathcal{F}^t = \mathcal{F}^s.$$

Для простоты всюду далее мы будем рассматривать случайные величины, имеющие конечный второй абсолютный момент. Определение стохастического интеграла от неслучайной функции начнем с рассмотрения кусочно-постоянных функций $\varphi(t, \omega),\ t \in T$, принимающих лишь конечное число отличных от нуля значений на непересекающихся полуинтервалах вида $\Delta_k = (s_k; t_k]$. Положим

$$\varphi(t, \omega) = \xi_k(\omega), \quad t \in \Delta_k,$$

где каждая из случайных величин $\xi_k \in L_2$ измерима относительно соответствующей σ-алгебры $\mathcal{F}^{s_k}$. В силу непрерывности потока $\mathcal{F}^t$ это условие всегда выполнено. Значит,

$$\varphi(t, \omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) I_{\Delta_k}(t). \tag{3}$$

Для такой неупреждающей функции стохастический интеграл определим равенством

$$\int_T \varphi(t) Z(dt) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k Z(\Delta_k).$$

Здесь случайные величины ξ_k и $Z(\Delta_k)$ являются независимыми, поэтому $\mathbf{E}|\xi_k Z(\Delta_k)|^2 = \mathbf{E}|\xi_k|^2 \mathbf{E}|Z(\Delta_k)|^2$. Покажем, что

$$\mathbf{E} \int_T \varphi(t) Z(dt) = 0.$$

Действительно,

$$\mathbf{E} \sum_{k=1}^{n} \xi_k Z(\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\xi_k \mathbf{E} Z(\Delta_k) = 0.$$

Последнее равенство следует из (2). Точно также показывается, что

$$\| \int_T \varphi(t) Z(dt) \|^2 = \int_T \|\varphi(t)\|^2 dt.$$

Ясно также, что линейная комбинация функций вида (3) имеет тот же вид, значит, для интеграла выполнены свойства однородности и аддитивности.

Рассмотрим далее неупреждающую функцию $\varphi(t)$ со свойством

$$\int_T \|\varphi(t)\|^2 dt < \infty,$$

для которой существует последовательность неупреждающих кусочно-постоянных функций $\varphi_n(t)$, сходящаяся к $\varphi(t)$ в среднем квадратическом, то есть

$$\int_T \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\|^2 dt \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Соответствующая последовательность стохастических интегралов является фундаментальной. Действительно,

$$\| \int_T \varphi_n(t) Z(dt) - \int_T \varphi_m(t) Z(dt) \|^2 = \| \int_T [\varphi_n(t) - \varphi_m] Z(dt) \|^2 =$$

$$= \int_T \|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\|^2 dt \leq$$

$$\leq 2 \int_T [\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\|^2 + \|\varphi_m(t) - \varphi(t)\|^2] dt \to 0$$

при $(n, m \to \infty)$. Следовательно, в L_2 существует предел, который и определяет стохастический интеграл от функции $\varphi(t)$:

$$\int_T \varphi(t) Z(dt) := \lim_{n \to \infty} \int_T \varphi_n(t) Z(dt).$$

2. Наиболее важным для наших целей является понятие винеровского процесса. Этот процесс представляет собой приближенную модель движения частицы под воздействием хаотических ударов молекул, которое описал Р.Броун в 1827 году. Поэтому этот случайный процесс еще называют броуновским движением.

Определение 5.1. Винеровским процессом, выходящим из нуля, называется случайный процесс $(W_t),\ 0 \le t < +\infty$, обладающий свойствами:
1. $W_0 = 0$;
2. Для любых $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

независимы;
3. Случайная величина $W_t - W_s,\ 0 \le s \le t$, имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(0, t-s)$.

Рассмотрим некоторые свойства винеровского процесса.

Теорема 5.1. *Сумма квадратов приращений винеровского процесса* $(W_t),\ \ a \le t \le b$, *соответствующая разбиению* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ *отрезка* $[a; b]$, *сходится в среднем квадратическом к* $(b-a)$ *при измельчении разбиения, то есть*

$$\lim_{\max(t_i - t_{i-1}) \to 0} \mathbf{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - (b-a)\Big]^2 = 0.$$

Доказательство. Вычислим математическое ожидание суммы квадратов приращений процесса

$$\mathbf{E}\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} D(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = b - a.$$

Таким образом, мы видим, что математическое ожидание под знаком предела есть дисперсия суммы квадратов. Вычислим дисперсию

$$D\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} D(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} [\mathbf{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^4 -$$

$$-(\mathbf{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2)^2] = \sum_{i=0}^{n-1} [3(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)^2] =$$

$$= 2\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)^2 \le 2\max(t_{i+1}-t_i)\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i) =$$

$$= 2(b-a)\cdot\max(t_{i+1}-t_i).$$

По предположению $\max(t_{i+1}-t_i) \to 0$. Значит,

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})^2-(b-a)\Big]^2 = D\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})^2 \to 0.$$

Упражнение 12. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1}|W_{t_{i+1}}-W_{t_i}|,$$

где $(W_t), a \le t \le b,$ – броуновское движение.

Выпишем теперь конечномерные распределения винеровского процесса (W_t), $0 \le t < +\infty$. Для этого нам понадобится вид условного распределения случайной величины W_t при условии $W_s = x,\ s < t:$

$$p(s,x,t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\Big[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\Big], \quad -\infty < y < +\infty.$$

Для разбиения $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < +\infty$ плотность распределения случайного вектора $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ будет равна

$$\prod_{k=1}^{n}(2\pi(t_k-t_{k-1}))^{-1/2}\exp\Big[-\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2(t_k-t_{k-1})}\Big]. \tag{4}$$

Эта функция плотности называется гауссовским ядром.

Далее мы покажем, что для почти всех $\omega \in \Omega$ траектории случайного процесса (W_t), $0 \le t < +\infty$ непрерывны по t, и поэтому распределение этого процесса может быть задано на пространстве $C[0;+\infty)$ всех непрерывных на интервале $[0;+\infty)$ функций. Построим вначале измеримое пространство над $C[0;+\infty)$.

Определение 5.2. Цилиндрическим множеством A пространства непрерывных функций $C[0;+\infty)$ называется всякое подмножество вида

$$A = \{x = x(t) : (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)) \in B_n\}, \tag{5}$$

где $x = x(t) \in C[0;+\infty), B_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$.

Цилиндрические множества составляют алгебру, но не σ-алгебру. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра цилиндрических множеств $C[0;+\infty)$. Рассмотрим σ-алгебру

$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$, порожденную алгеброй $\mathcal{A}$. На ней и будет определено распределение μ винеровского процесса.

Для того, чтобы идентифицировать μ как распределение винеровского процесса $(W_t)_{t\geq 0}$ мы покажем, что
1). μ – счетно-аддитивна;
2). $\mathbf{P}\{(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n}) \in B_n\} = \mu(A)$, где A – множество вида (5).

Следующая теорема Ю.В. Прохорова доказывает, что распределение винеровского процесса сосредоточено на $C[0; +\infty)$ и совпадает с μ.

Теорема 5.2. *На измеримом пространстве* $(C[0; +\infty), \mathcal{B})$ *существует единственная вероятностная мера* μ, *такая что*

$$\mathbf{P}\{(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n}) \in B_n\} = \mu(A),$$

для всех $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Доказательство проведем в два шага. Вначале мы введем на пространстве $(C[0; +\infty), \mathcal{A})$ конечно-аддитивную меру m, а затем продолжим её до счётно-аддитивной меры μ на пространстве $(C[0; +\infty), \mathcal{B})$.

Для цилиндрического множества A вида (5) определим $m(A)$ равенством

$$m(A) = \int \ldots \int_{B_n} \prod_{k=1}^{n} p(t_{k-1}, x_{k-1}, t_k, x_k) dx_1 \ldots dx_n. \tag{6}$$

Функция множеств $m(A)$ вполне определена этим соотношением. Убедимся, что она конечно-аддитивна на алгебре $\mathcal{A}$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно непересекающиеся множества из $\mathcal{A}$. Расположим участвующие в определении множеств $A_i, (i = 1, \ldots, n)$, точки на оси времени в возрастающем порядке: $t_1 < t_2 < \ldots < t_p$. Можно предположить теперь, что каждое из $A_i, (i = 1, \ldots, n)$, определяется этими точками и некоторыми p-мерными борелевскими множествами, и что они в свою очередь не пересекаются. Тогда из определения меры $m(A)$ сразу следует, что

$$m\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i),$$

то есть m – конечно-аддитивна, причем $0 \leq m(A) \leq 1$ для всех $A \in \mathcal{A}$, и $m(C[0; +\infty)) = 1$. Таким образом, мы построили конечно-аддитивную меру m на $(C[0; +\infty), \mathcal{A})$.

Для продолжения меры m до счётно-аддитивной меры на пространство $(C[0; +\infty), \mathcal{B})$ используем следующую лемму, приводимую здесь без доказательства.

Лемма 5.1. *Пусть конечно-аддитивная мера m на пространстве $(C[0;+\infty),\mathcal{A})$ удовлетворяет следующему условию: для каждой убывающей последовательности множеств $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ из алгебры $\mathcal{A}$ из предположения о том, что $m(A_n) > \varepsilon > 0$ при каждом n, вытекает, что $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$.*

Тогда мера m единственным образом продолжается до счётно-аддитивной меры на пространство $(C[0;+\infty),\mathcal{B})$.

Проверим выполнение условий леммы. Пусть множество A_n имеет представление

$$A_n = \{x : (x(t_1^{(n)}),\ldots,x(t_{r_n}^{(n)})) \in B_n\}.$$

Мы можем предположить также, что последовательность точек $\{t_k^{(n)}\}$ обладает следующим свойством: существует такая последовательность q_n положительных целых чисел, что
i). $t_i^{(n)} \leq q_n,\ 1 \leq i \leq r_n$;
ii). Для всех $k : 1 \leq k \leq q_n 2^{q_{n+1}}$ внутри интервала $[(k-1)2^{-q_n}, k2^{-q_n}]$ лежит одна и только одна точка $t_i^{(n)}$;
iii). Все точки $k2^{-q_n}$, $0 \leq k \leq 2^{q_n}$ содержатся в множестве

$$\{t_1^{(n)},\ldots,t_{r_n}^{(n)}\}.$$

Это всегда можно сделать, добавляя где нужно новые точки. Более того, можно выбрать следующие значения: $q_n = n, r_n = n2^{n+1}, t_{2k}^{(n)} = k2^{-n}$.

Это значит, что мы сразу могли взять множество A_n в следующем виде:

$$A_n = \{x : (x(t_1^{(n)}),\ldots,x(t_{n2^{n+1}}^{(n)})) \in B_n\},$$

где B_n – борелевское множество в пространстве $\mathbf{R}^{n2^{n+1}}$,

$$\{t_1^{(n)},\ldots,t_{n2^{n+1}}^{(n)}\} \subseteq \{t_1^{(n+1)},\ldots,t_{(n+1)2^{n+2}}^{(n+1)}\},\ m(A_n) > \varepsilon > 0.$$

В качестве множества B_n возьмем компактное множество в соответствующем пространстве. Это можно сделать, используя стандартную технику теории меры в конечномерном пространстве.

Вернемся к мере m. Зафиксируем последовательность точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и образуем σ-алгебру $\mathcal{A}(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ цилиндрических множеств с основаниями в пространстве $\mathbf{R}^n$. Тогда мы получим пространство с мерой

$$(C[0,+\infty),\mathcal{A}(t_1,t_2,\ldots,t_n),m)$$

и $x \in C[0,+\infty)$ может здесь рассматриваться как случайная величина, причем случайные величины $(x(t_1),\dots,x(t_n))$ образуют случайный вектор, распределение которого задается формулой (6).

Рассмотрим частный случай $n=2, t_1=s, t_2=t$. Здесь мы имеем гауссовскую случайную величину $x(t)-x(s)$ со средним 0 и дисперсией $|t-s|$. Значит,

$$\int_{C[0,+\infty)} |x(t)-x(s)|^4 dm(x) = 3|x(t)-x(s)|^2.$$

Используем это соотношение в неравенстве Чебышёва для оценки

$$m\{|x(t_i^{(n)})-x(t_{i-1}^{(n)})|^2 \geq |t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}|^{2/5}\} \leq \frac{D(x(t_i^{(n)})-x(t_{i-1}^{(n)}))^2}{|t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}|^{4/5}} =$$

$$= \frac{3|t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}|^2}{|t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}|^{4/5}} = 3|t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}|^{6/5} = 3\cdot 2^{-6n/5}.$$

Следовательно,

$$m(\bigcup_{i=1}^{n2^{n+1}} (x : |x(t_i^{(n)})-x(t_{i-1}^{(n)})| \geq |t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}|^{1/5}) \leq 6n2^{-n/5}.$$

Так как ряд $\sum_n n2^{-n/5}$ сходится, существует такое целое m_0, что

$$6\sum_{n\geq m_0} n2^{-n/5} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всех $l > m_0$:

$$m(\bigcup_{n=m_0}^{l}\bigcup_{i=1}^{n2^{n+1}} (x : |x(t_i^{(n)})-x(t_{i-1}^{(n)})| \geq |t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}|^{1/5}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим через C_l множество

$$C_l = A_l \bigcap \overline{(\bigcup_{n=m_0}^{l}\bigcup_{i=1}^{n2^{n+1}} (x : |x(t_i^{(n)})-x(t_{i-1}^{(n)})| \geq |t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}|^{1/5})}.$$

Из предположения $m(A_l) \geq \varepsilon$ получаем, что $m(_l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, что для последовательности $\{C_l\}$ выполнено

$$C_l \neq \emptyset,\ C_l \supseteq C_{l+1},\ A_l \supseteq C_l.$$

Значит, для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\bigcap_l C_l \neq \emptyset \quad (\Rightarrow,\ \bigcap_l A_l \neq \emptyset).$$

Докажем этот факт тем, что построим непрерывную функцию, принадлежащую каждому из множеств C_l.

Пусть x_l – элемент C_l, изменяющийся линейно на интервале $[t_{i-1}^{(l)}, t_i^{(l)}]$ и удовлетворяющий условию $x_l(t_1^{(l)}) = 0$. Ясно, что такая функция существует. Так как для $m_0 \le n \le l$, $1 \le i \le n2^{n+1}$ выполнено неравенство $|x_l(t_i^{(n)}) - x_l(t_{i-1}^{(n)})| < |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}|^{1/5} \le 2^{-n/5}$, ценой некоторых усилий можно указать такую положительную константу c, что для любых $s, t \in [t_i^{(n)}, t_j^{(n)}]$ выполнено $|x_l(t) - x_l(s)| < c \cdot |t_i^{(l)} - t_j^{(l)}|^{1/5}$.

Поскольку $x_{l+p} \in C_l$ для всех $p \ge 0$, то есть точки

$$(x_{l+p}(t_1^{(l)}), \ldots, x_{l+p}(t_{l2^{l+1}}^{(l)})) \in B_l.$$

Так как все B_l – компакты, то последовательность таких точек имеет предел, принадлежащий B_l, при $p \to \infty$. Используя диагональный процесс, перейдем к подпоследовательности, скажем, $\{x_n\}$, для которой $\{x_n(t_i^{(l)})\}$ сходится при $n \to \infty$ для всех i и l.

Вспомним, что для всех $s, t \in [t_i^{(l)}, t_j^{(l)}]$ $|x_l(t) - x_l(s)| < c \cdot |t_i^{(l)} - t_j^{(l)}|^{1/5}$. Значит, предельная функция x^* является непрерывной. Так как при каждом l $(x^*(t_1^{(l)}), \ldots, x^*(t_{l2^{l+1}}^{(l)})) \in B_l$, то

$$\bigcap_l C_l \ne \emptyset.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 5.3. *Почти все траектории броуновского движения нигде не дифференцируемы.*

Замечание. Приведем доводы в пользу истинности утверждения теоремы. При $h > 0$ приращение броуновского движения $W_{t+h} - W_t$ есть гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией h, следовательно, $(W_{t+h} - W_t)/\sqrt{h} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Поэтому, сколь бы малым ни было $h > 0$, приращение $(W_{t+h} - W_t)/\sqrt{h}$ принимает конечные значения.

Если же мы рассмотрим отношение $(W_{t+h} - W_t)/h$, то при $h \to 0$ дисперсия этого отношения, равная $1/h$, стремится к бесконечности. Так что и не стоит ожидать существования предела для всех ω, как это было бы в случае существования производной W_t.

Докажем теорему для $t \in [0, 1]$. В общем случае доказательство нужно несколько изменить, следуя методу Дворецкого, Эрдеша и Какутани. Мы этого делать не будем.

Предположим, что броуновское движение $W_t(\omega)$ дифференцируемо в некоторой точке $s \in [0,1]$. Так как оно дифференцируемо в этой точке и справа, то $\exists\ \varepsilon > 0$ и целое $l \geq 1$, такие, что при $0 < t - s < \varepsilon$

$$|W_t(\omega) - W_s(\omega)| < l(t-s).$$

Возьмем достаточно большое n и положим $i = [ns]+1$. Пусть j пробегает значения $i+1, i+2, i+3$. Тогда при $n > 4/\varepsilon$

$$|W_{\frac{j}{n}}(\omega) - W_{\frac{j-1}{n}}(\omega)| < \frac{7l}{n}, \quad j = i+1, i+2, i+3. \tag{7}$$

Пусть $A_{i,j}^{l,n}$ есть множество всех ω, удовлетворяющих последнему неравенству. Рассмотрим множество

$$A = \bigcup_{l\geq 1} \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} \bigcup_{0<i\leq n} \bigcap_{i<j\leq i+3} A_{i,j}^{l,n}.$$

Это событие состоит в том, что существует такое целое l, что при всех достаточно больших n в некоторой точке $\frac{i}{n}$ справедливы неравенства (7). Таким образом, событие A включает в себя все те элементарные исходы ω, для которых $W_t(\omega)$ дифференцируема в некоторой точке t. Поэтому, если мы покажем, что $\mathbf{P}(A) = 0$, то доказательство теоремы будет завершено. Итак,

$$\mathbf{P}(\bigcap_{n\geq m} \bigcup_{0<i\leq n} \bigcap_{i<j\leq i+3} A_{i,j}^{l,n}) \leq \liminf_{n\to\infty} n[\mathbf{P}\{|W_{\frac{1}{n}}| < \frac{7l}{n}\}]^3 =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} n[\mathbf{P}\{|W_1| < \frac{7l}{\sqrt{n}}\}]^3 \leq \lim_{n\to\infty} n \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{14l}{\sqrt{n}} \right\}^3 = 0.$$

Значит, множество A есть объединение счетного числа множеств нулевой вероятности, следовательно, $\mathbf{P}(A) = 0$.

Перейдем к непосредственному построению стохастического интеграла Ито. Пусть стохастическая мера $Z(dt)$ задается с помощью винеровского процесса W_t:

$$Z(\Delta) = W_t - W_s, \quad \Delta = (s,t].$$

В этом случае стохастический интеграл, определенный посредством стохастической меры $Z(dt)$ называют стохастическим интегралом Ито, и вместо $Z(dt)$ пишут $dZ(t)$. Напомним, что тогда

$$\mathbf{E}dZ(t) = 0,\ \mathbf{E}|dZ(t)|^2 = dt.$$

Далее вместо $dZ(t)$ будем писать dW_t.

Подчеркнем специфику стохастического интеграла Ито следующим примером.

Пример 5.1. Пусть $(W_t)_{t\geq 0}$ – винеровский процесс. Вычислим

$$\int_0^T W_t dW_t.$$

Исходя из определения стохастического интеграла, мы можем вычислить данный интеграл по формуле:

$$\int_0^T W_t dW_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}} \cdot [W_{t_k} - W_{t_{k-1}}],$$

где предел берется в среднеквадратическом смысле по всем разбиениям $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ при условии, что $\max_k (t_k - t_{k-1}) \to 0$. Очевидно

$$W_{t_{k-1}} \cdot [W_{t_k} - W_{t_{k-1}}] = \frac{1}{2}[W_{t_k}^2 - W_{t_{k-1}}^2] - \frac{1}{2}[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}]^2.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}} \cdot [W_{t_k} - W_{t_{k-1}}] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[W_{t_k}^2 - W_{t_{k-1}}^2] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}]^2.$$

По Теореме 5.1 существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}]^2 = T.$$

Значит,

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T.$$

Замечание. Очевидно, если $f(t)$ – непрерывная дифференцируемая на отрезке $[0, T]$ функция и $f(0) = 0$, то

$$\int_0^T f(t) df(t) = \frac{1}{2} f^2(T).$$

Введем понятие стохастического дифференциала. Если для случайного процесса ξ_t, измеримого при каждом t относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t$, существуют такие функции $b(t) \in L_2[0,T]$, и измеримая при каждом t относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ функция $a(t)$, имеющая с вероятностью 1 конечный интеграл $\int_0^T a(t)dt < \infty$, что для всех $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ выполнено равенство

$$\xi_{t_2} = \xi_{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t)dW_t,$$

то будем говорить, что

$$a(t)dt + b(t)dW_t$$

является стохастическим дифференциалом случайного процесса ξ_t и записывать

$$d\xi_t = a(t)dt + b(t)dW_t.$$

Предположим, что случайный процесс ξ_t имеет стохастический дифференциал $d\xi_t = a(t)dt + b(t)dW_t$, неслучайная функция $u(t,x)$ определена при всех $t \in [0,T], x \in \mathbf{R}$, нерпрерывна и имеет непрерывные частные производные u'_t, u'_x, u''_{xx}. Тогда случайный процесс

$$\eta(t) = u(t,\xi_t)$$

также имеет стохастический дифференциал и справедлива формула Ито (формула замены переменных):

$$d\eta(t) = \left[u'_t(t,\xi_t) + u'_x(t,\xi_t)a(t) + \frac{1}{2}u''_{xx}(t,\xi_t)b^2(t)\right]dt +$$

$$+ u'_x(t,\xi_t)b(t)dW_t.$$

Приведем здесь лишь схему доказательства этой формулы. Нужно показать, что для любых $s < t$

$$u(t,\xi_t) - u(s,\xi_s) = \int_s^t u'_x(y,\xi_y)b(y)dW_y +$$

$$+ \int_s^t \left[u'_t(y,\xi_y) + u'_x(y,\xi_y)a(y) + \frac{1}{2}u''_{xx}(y,\xi_y)b^2(y)\right]dy.$$

1). Возьмем последовательность таких ступенчатых функций

$$a^{(n)}(t), b^{(n)}(t),$$

чтобы при каждом n существовал соответствующий дифференциал. Положим

$$\xi_t^{(n)} = \xi_0 + \int_0^t b^{(n)}(y)dW_y + \int_0^t a^{(n)}(y)dy.$$

2). Покажем, что последовательность $\xi_s^{(n)}$ сходится к ξ_s равномерно по вероятности при $n \to \infty$, то есть

$$\mathbf{P}\{\max_{0 \le s \le t} |\xi_s^{(n)} - \xi_s| \ge \varepsilon\} \to 0, \ (n \to \infty).$$

Представляя для некоторого разбиения

$$0 \ \le \ t_1 \ < \ t_2 \ < \ \ldots \ < \ t_n \ \le \ t$$

разность

$$u(t, \xi_t) - u(s, \xi_s) = \sum_{i=1}^{n-1} [u(t_{i+1}, \xi_{t_{i+1}}) - u(t_i, \xi_{t_i})],$$

мы можем доказывать формулу только для одной ступеньки: $a = const$, $b = const$.

3). Воспользуемся разложением Тейлора функции $u(t_{i+1}, \xi_{t_{i+1}})$ в окрестности точки (t_i, ξ_{t_i}):

$$u(t_{i+1}, \xi_{t_{i+1}}) = u(t_i, \xi_{t_i}) + u'_t(\tilde{t}_i, \xi_{t_{i+1}})(t_{i+1} - t_i) +$$

$$+ u'_x(t_i, \tilde{\xi_{t_i}})(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i}) + \frac{1}{2} u''_{xx}(t_i, \tilde{\xi_{t_i}})(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i})^2.$$

Здесь $\tilde{t}_i \in (t_i, t_{i+1})$, $\tilde{\xi_{t_i}} \in (\xi_{t_i}, \xi_{t_{i+1}})$.

4). Вспоминая, что $\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i} = b \cdot (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + a \cdot (t_{i+1} - t_i)$, приведем последнюю формулу к виду, когда ее можно интерпретировать как соответствующую интегральную сумму.

Упражнение 13. Пусть $(W_t)_{t \ge 0}$ – винеровский процесс. Показать, что случайный процесс $\xi_t = W_t^2$ имеет стохастический дифференциал

$$d\xi_t = dt + 2W_t dW_t.$$

Глава 2. Стохастический анализ финансового рынка.

§6. Постановка задач инвестирования и хеджирования. Опционы

Будем рассматривать модель (B, S)–рынка, функционирующего в моменты времени $n = 1, 2, \ldots, N \quad (N < \infty)$, состоящего из двух активов – банковского счёта $B = (B_n)$ и акции $S = (S_n)$. Терминология финансовой математики, используемая здесь, предложена Коксом, Россом и Рубинштейном (CRR–модель финансового рынка). Согласно этой модели, динамика банковского счёта подчинена следующим рекуррентным соотношениям:

$$B_n = (1 + r) \cdot B_{n-1}, \qquad B_0 > 0,$$

где $r > 0$ – процентная ставка.
Стоимость акции $S = (S_n)$ эволюционирует по закону

$$S_n = (1 + \rho_n) \cdot S_{n-1}, \qquad S_0 > 0,$$

где $\rho = (\rho_n)$ – случайная последовательность, причём ρ_n может принимать только два значения a и b, такие что $-1 < a < r < b$.

Введем новые случайные величины ε_n, δ_n посредством следующих формул:

$$\rho_n = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\varepsilon_n, \quad \rho_n = a + (b-a)\delta_n.$$

Очевидно, что

$$\varepsilon_n = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \Leftrightarrow \delta_n = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \rho = \begin{cases} b \\ a \end{cases}.$$

Поэтому, нам будет неважно, о какой именно из этих последовательностей идет речь. Уточним постановку. Предполагается, что последовательность $\rho = (\rho_n)$ задана на некотором измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$. В дальнейшем положим $\Omega = \{+1; -1\}^N$, то есть Ω – это пространство реализаций последовательности $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N)$, $\mathcal{F}$ – алгебра всех подмножеств множества Ω.

Будем далее считать, что на $\mathcal{F}$ задано семейство $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}\}$ вероятностных мер $\mathbf{P}$, причем относительно любой вероятности из этого семейства последовательность $(\rho_n) = (\rho_n(\omega))$ является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин:

$$\mathbf{P}\{\rho_n = a\} = q, \quad \mathbf{P}\{\rho_n = b\} = p.$$

Предположение о вероятностном характере изменения последовательности $(\rho_n)_{n=1}^N$, определяющей изменение цены акции (S_n), с финансовой точки зрения является естественным. Причём, если о значениях a, b мы можем выдвигать правдоподобные гипотезы, то относительно априорных значений p сделать это бывает затруднительно. Поэтому мы не будем фиксировать определённую вероятность $\mathbf{P}$ из семейства $\mathcal{P}$, но считать, что $\mathbf{P}$ – некоторое распределение из $\mathcal{P}$.

Пусть у инвестора имеется начальный капитал $X_0 = x > 0$, и он хочет увеличить его, пользуясь возможностями (B, S)–рынка.

Если он помещает свой капитал $X_0 = x$ на банковский счёт с процентной ставкой $r \geq 0$, то в момент времени n его капитал составит $(1 + r)^n \cdot X_0$. Таким образом, чтобы получить в момент времени N определённую сумму f_N, начальный капитал должен быть равен

$$x = (1 + r)^{-N} f_N.$$

Инвестор также может поместить весь капитал в акции. Если вероятность p известна, то для того, чтобы капитал в момент времени N достиг значения f_N, нужно, чтобы начальный капитал составлял

$$x = [1 + (bp + aq)]^{-N} f_N.$$

Наконец, у инвестора есть третья возможность – поместить часть капитала на банковский счет, а часть – в акции.

Обозначим через B_0 цену одной облигации, S_0 – цену одной акции в момент времени $n = 0$. Пусть у инвестора в момент времени $n = 0$ имеется β_0 облигаций и γ_0 акций. Здесь допускаются произвольные значения β_0 и γ_0 (дробные и отрицательные). Тогда начальный капитал X_0 равен

$$X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0.$$

Пара $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ образует, как принято говорить, портфель инвестора в момент времени $n = 0$. Предположим, что в промежутке времени $(0, 1)$ инвестор перераспределяет содержание портфеля. Пусть к моменту $n = 1$, то есть перед тем, как станет известна новая цена акции, инвестор преобразовал портфель $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ в новый $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$, основываясь только на информации о значениях (B_0, S_0) и не допуская при этом притока капитала „со стороны“, и его оттока „на сторону“. Тогда

$$X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0$$

В момент времени $n = 1$ становятся известны значения пары (B_1, S_1) и капитал становится равным

$$X_1 = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1.$$

Приращение капитала $\Delta X_1 = X_1 - X_0$ записывается в виде

$$\Delta X_1 = \beta_1 \Delta B_1 + \gamma_1 \Delta S_1.$$

Точно также получаем для произвольного $n \quad (n = 1, 2, \ldots, N)$

$$X_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$$

и

$$X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n.$$

Предполагается, что портфель $\pi = (\beta_n, \gamma_n)$ составляется лишь на основе предшествующей информации о ценах. Формально это означает, что β_n и γ_n являются $\mathcal{F}_{n-1}$–измеримыми, где $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_{n-1})$.

Приращение $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ представляется в виде

$$\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n,$$

а суммарный капитал – в виде

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k).$$

Смысл этой формулы таков: формирование капитала X_n осуществляется только за счёт изменений $(\Delta B_k, \Delta S_k)$ в ценах облигаций и акций без какого-либо его оттока или притока.

Запишем это условие в виде

$$B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n = 0.$$

Это условие означает, что значения портфелей $\pi_k = (\beta_k, \gamma_k), \ \ (k \leq n)$, таковы, что изменение капитала на банковском счёте $B_{n-1} \Delta \beta_n$ может происходить только в результате соответствующего изменения капитала в акциях $S_{n-1}\Delta\gamma_n$ и наоборот. Оно выражает, что стратегия $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n), \quad n \le N$, основывается на принципе самофинансирования, а сама стратегия (π_n) называется самофинансируемой.

Запишем приращение ΔX_n в виде

$$\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n = \beta_n r B_{n-1} + \gamma_n \rho_n S_{n-1} =$$

$$= r X_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r).$$

Чтобы подчеркнуть зависимость последовательности $X = (X_n)$ от стратегии $\pi = (\pi_n), \quad 0 \le n \le N$, которая далее всегда будет предполагаться самофинансируемой, будем писать $X^\pi = (X_n^\pi)$. Класс всех самофинансируемых стратегий обозначается SF.

Пусть теперь инвестор, используя (B, S)–рынок, хочет решить следующую задачу ("инвестиционная проблема"): в некоторый заранее определённый момент времени $N < \infty$ в будущем довести свой капитал до величины, не меньшей, чем $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$, где функция f_N зависит, вообще говоря, от всей случайной реализации $(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ цен акции.

Ясно, что осуществление этой цели зависит как от величины начального капитала, так и от соответствующей стратегии в классе SF.

Определение 6.1. Говорят, что для данного $x > 0$ и неотрицательной функции $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ самофинансируемая стратегия $\pi = (\pi_n)$ является (x, f_N)–хеджем, если для $\forall \omega \in \Omega$

$$X_0^\pi = x, \qquad X_N^\pi(\omega) \ge f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)),$$

где $(S_n(\omega))_{n=0}^N$ подчиняется соотношениям

$$S_n(\omega) = (1 + \rho_n(\omega)) S_{n-1}(\omega), \quad n \ge 1,$$

$S_0(\omega) = S_0$ – константа, $S_0 > 0$. В том случае, когда в неравенстве для всех $\omega \in \Omega$ выполнено равенство, говорят, что стратегия $\pi = (\pi_n)$ является минимальным (x, f_N)–хеджем.

Пусть $\Pi(x, f_N)$ – совокупность всех (x, f_N)–хеджей $\pi \in SF$.

Определение 6.2. Величина

$$\mathbf{C}_N = \inf\{x > 0 : \Pi(x, f_N) \ne \emptyset\}$$

называется инвестиционной стоимостью (ценой), гарантирующей получение капитала, не меньшего, чем f_N для всех $\omega \in \Omega$.

Замечание. В случае конечного (B, S)–рынка всегда существует такой начальный капитал $x > 0$, что $\Pi(x, f_N) \neq \emptyset$, и, следовательно, $\mathbf{C}_N < \infty$.

Величина $\mathbf{C}_N$ представляет интерес в связи с проблемой "справедливой цены"так называемых Европейских опционов, или контрактов с опционами Европейского типа. Поясним суть подобных контрактов на примере так называемого стандартного опциона купли Европейского типа. На (B, S)–рынке эмитент (участник) может выпустить ценную бумагу, дающую право ее покупателю приобрести у него в некоторый фиксированный момент времени N в будущем акции по оговоренной цене K. Эта ценная бумага называется опционом купли Европейского типа.

Если в оговоренный момент времени ситуация на (B, S)–рынке будет такой, что $S_N > K$, то владелец опциона предъявляет его к исполнению, то есть покупает акции по цене K. После этого он может сразу же продать их по текущей цене S_N и получить прибыль $f_N = S_N - K$. Если окажется, что $S_N \leq K$, то покупателю опциона нет резона предъявлять его к исполнению. Таким образом, в рассматриваемом случае функция платежа f_N, которую можно мыслить как выплату продавцом опциона его покупателю, есть $(S_N - K)^+ = \max(S_N - K, 0)$.

Далее будем считать, что предлагаемые эмитентом контракты с опционами гарантируют выплату некоторой оговариваемой в контракте функцией $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$. За приобретение подобного контракта надо заплатить эмитенту некоторую "премию которая компенсирует возможные потери эмитента. Ясно, что если эта премия будет "слишком большой то она либо отпугнет всех потенциальных покупателей, либо (в случае покупки опциона) может создать на рынке арбитражную ситуацию, то есть получение прибыли продавцом без риска. Если же премия будет "слишком маленькой то продавец опциона будет не в состоянии выплатить предусмотренную контрактом сумму (имеется ввиду средствами (B, S)–рынка).

Тем самым встаёт вопрос о том, что́ естественно назвать справедливой стоимостью опциона и как его рассчитывать. Нетрудно понять, что такой ценой будет как раз $\mathbf{C}_N$.

В теории и практике опционов особую роль играют два стандартных опциона Европейского типа:

1). Опцион купли с функцией платежа $f_N = (S_N - K)^+$;

2). Опцион продажи с функцией платежа $f_N = (K - S_N)^+$.

На финансовых рынках встречаются самые разнообразные опционы. Наибольшее распространение получили опционы Американского типа, характеризующиеся тем, что момент их исполнения, в отличии от опционов Европейского типа, может быть произвольным из оговариваемого заранее множества моментов $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$.

Пусть $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ суть моменты времени, когда опцион может быть предъявлен к исполнению. Предположим, что задана (оговорена контрактом) последовательность функций $f = (f_n)_{n=0}^N$, где $f_n = f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ – выплата покупателю опциона в момент времени n с соответствующей реализацией цен акции $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. Момент исполнения опциона $\tau = \tau(\omega)$ выбирается произвольно в зависимости от "истории"(B, S)-рынка. Так как решение вопроса о предъявлении опциона к исполнению в момент времени n, то есть принять $\tau = n$, или продолжения его действия (то есть $\tau > n$) должно определяться лишь имеющейся информацией до момента n включительно, то естественно считать, что τ является моментом остановки. Другими словами, $\tau = \tau(\omega)$ – случайная величина, не зависящая от будущего и принимающая значения в множестве $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$, причем

$$\{\tau < n\} \in \mathcal{F}_n,$$

где $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n),\ 0 \leq n \leq N$. Пусть $\tau = \tau(\omega)$ – момент предъявления опциона к исполнению. Согласно контракту продавец опциона должен быть готов к платежу $f_\tau = f_\tau(S_0, S_1, \ldots, S_\tau)$, и, следовательно, он должен выбрать такую стратегию $\pi = (\pi_n)$, чтобы в любой момент $\tau = \tau(\omega)$ соответствующий капитал $X_\tau^\pi \geq f_\tau$.

Определение 6.3. Для данного $x > 0$ и заданного набора неотрицательных функций платежа $f = (f_n)_{n=0}^N,\ f_n = f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ стратегия $\pi = (\pi_n)_{n=0}^N$ называется (x, f, N)-хеджем американского типа, если для $\forall \omega \in \Omega$

$$X_0^\pi(\omega) = x,$$

и для всех $0 \leq n \leq N$

$$X_n^\pi(\omega) \geq f_n(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega));$$

если к тому же для некоторого момента остановки $\tau = \tau(\omega)$ в неравенстве выполнено равенство

$$X_\tau^\pi(\omega) = f_{\tau(\omega)}(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_{\tau(\omega)}(\omega)),\ \omega \in \Omega,$$

то хедж называется минимальным.
Обозначим через $\Pi(x, f, N)$ совокупность всех (x, f, N)-хеджей.

Определение 6.4. Величина $\mathbf{C}_N^* = \mathbf{C}_N^*(f, N)$ определяемая формулой

$$\mathbf{C}_N^* = \inf\{x > 0 : \Pi(x, f, N) \neq \emptyset\}$$

называется справедливой (рациональной) стоимостью опциона американского типа.

Каковы те рациональные моменты $\tau = \tau(\omega)$, в которые разумно предъявить опцион к исполнению?

Определение 6.5. Момент остановки $\tau^* = \tau^*(\omega)$ будем называть рациональным моментом исполнения опциона американского типа, если при начальном капитале $\mathbf{C}_N^*$ для любой стратегии $\pi \in SF$ со свойством

$$X_{\tau^*}^{\pi}(\omega) \geq f_{\tau^*(\omega)}(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_{\tau^*(\omega)}(\omega)),\ \omega \in \Omega,$$

на самом деле имеет место равенство

$$X_{\tau^*}^{\pi}(\omega) = f_{\tau^*(\omega)}(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_{\tau^*(\omega)}(\omega)),\ \omega \in \Omega,$$

§7. Теория расчёта стоимости и хеджирующих стратегий для опционов Европейского типа (дискретное время)

Пусть (B,S)–рынок задан соотношениями

$$B_n = (1+r)B_{n-1}, \quad B_0 > 0,$$

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}, \quad S_0 > 0,$$

где $-1 < a < r < b$, причём ρ_n – независимые одинаково распределённые случайные величины, заданные на $\Omega = \{-1;+1\}^N$, и ρ_n являются таковыми для любой вероятности $\mathbf{P} \in \mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}\{\rho_1 = a\} = q, \quad \mathbf{P}\{\rho_1 = b\} = p, \quad p+q=1, \quad 0<p<1.$$

Пусть $\pi = (\pi_n) \in SF$ и $X^\pi = X_n^\pi$ – соответствующий ей капитал, состоящий из средств, помещенных на банковский счет $B = (B_n)$ и находящийся в акциях $S = (S_n)$, $\quad n = 0,1,2,\ldots,N$. Заметим, что значения p *apriori* неизвестны. Но условие хеджирования сформулировано как свойство для всех $\omega \in \Omega$, которое в силу конечности Ω и условия $0 < p < 1$ равносильно тому, что условие хеджирования имеет место $\mathbf{P}$–почти наверное для всех $\mathbf{P} \in \mathbf{P}$. Поэтому, если для стратегии π свойство хеджирования выполнено $\mathbf{P}^*$–почти наверное относительно некоторой меры $\mathbf{P}^* \in \mathbf{P}$, то оно будет выполнено для всех $\mathbf{P} \in \mathbf{P}$, и всех $\omega \in \Omega$.

Перейдем к задаче отыскания справедливой стоимости опциона $\mathbf{C}_N$. Итак, пусть $\pi = (\pi_n) \in SF$ и $X^\pi = X_n^\pi$ – отвечающий ей капитал, $X_0^\pi = x$. Положим

$$M_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n}, 0 \le n \le N.$$

Вычислим

$$\Delta M_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}} = \frac{X_n^\pi - (1+r)X_{n-1}^\pi}{B_n} =$$

$$= \frac{X_n^\pi - X_{n-1}^\pi - rX_{n-1}^\pi}{B_n} = \frac{\Delta X_n^\pi - rX_{n-1}^\pi}{B_n} = \frac{\gamma_n S_{n-1}}{B_n}(\rho_n - r).$$

Обозначим

$$m_n = \sum_{k=1}^n (\rho_k - r), \qquad \Delta m_n = (\rho_n - r).$$

Тогда

$$M_n^\pi = M_0^\pi + \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k S_{k-1}}{B_k}\Delta m_k.$$

Пусть $\mathbf{E}$ означает усреднение по мере $\mathbf{P}$. Тогда

$$\mathbf{E}(\rho_1 - r) = a(1-p) + bp - r = (b-a)p - (r-a).$$

Значит, если

$$p = p^* = \frac{r-a}{b-a},$$

и $\mathbf{P}^*$ – соответствующая этому значению мера из $\mathbf{P}$, то последовательность $(m_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$ образует мартингал:

$$\mathbf{E}^*(m_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E}^*[(\rho_n - r) + \sum_{k=1}^{n-1}(\rho_k - r) \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$$

$$= \mathbf{E}^*[(\rho_n - r) \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbf{E}^*[\sum_{k=1}^{n-1}(\rho_k - r) \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$$

$$= \mathbf{E}^*(\rho_n - r) + \sum_{k=1}^{n-1}(\rho_k - r) = \mathbf{E}^*\rho_n - r + \sum_{k=1}^{n-1}(\rho_k - r) =$$

$$= a(1-p^*) + bp^* - r + \sum_{k=1}^{n-1}(\rho_k - r) =$$

$$= a(1 - \frac{r-a}{b-a}) + b\frac{r-a}{b-a} - r + \sum_{k=1}^{n-1}(\rho_k - r) = \sum_{k=1}^{n-1}(\rho_k - r) = m_{n-1}.$$

Итак,

$$\mathbf{E}^*(m_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = m_{n-1}.$$

Так как случайная величина $(\gamma_k S_{k-1})/B_k$ является $\mathcal{F}_{k-1}$–измеримой, то из представления M_n^π видно, что последовательность $(M_n^\pi, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$ также является мартингалом, следовательно,

$$\mathbf{E}^* M_n^\pi = M_0^\pi$$

для всех $\pi \in SF$. Значит,

$$\mathbf{E}^*(1+r)^{-N} X_N^\pi = M_0^\pi B_0 = X_0^\pi = x.$$

Поэтому, если стратегия $\pi \in \Pi(x, f_N)$, то из определения (x, f_N)–хеджа и последнего равенства получаем, что

$$x \geq \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N.$$

Если к тому же хедж π является минимальным, то

$$x = \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N. \qquad (**)$$

Сформулируем эти выводы в виде леммы.

Лемма 7.1. (необходимость) Пусть на (B, S)–рынке самофинансируемая стратегия π является (x, f_N)–хеджем. Тогда

$$x \geq \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N.$$

Если к тому же хедж является минимальным, то

$$x = \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N,$$

где $\mathbf{E}^*$ – усреднение по мере такой $\mathbf{P}^*$, что

$$\mathbf{P}^*(\rho_n = b) = p^*, \quad \mathbf{P}^*(\rho_n = a) = 1 - p^*, \quad p^* = \frac{r-a}{b-a}.$$

Структура рассматриваемого финансового (B, S)–рынка такова, что условие $(**)$ на x и f_N является и достаточным для существования минимального хеджа.

Лемма 7.2. (достаточность) Пусть начальный капитал $x > 0$ и функция выплаты $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ таковы, что выполнено условие $(**)$. Тогда в классе $\Pi(x, f_N)$ существует минимальный (x, f_N)–хедж $\pi^* \in SF$.

Действительно, определим случайную величину

$$M_n^* = \mathbf{E}^*(\frac{f_N}{B_N} \mid \mathcal{F}_n), \quad 0 \leq n \leq N,$$

где $\mathbf{E}^*$ – усреднение по мере $\mathbf{P}^*$, определенной выше. Ясно, что

$$M_0^* = \mathbf{E}^*(\frac{f_N}{B_N}), \qquad M_N^* = \frac{f_N}{B_N}.$$

Также очевидно, что последовательность $(M_n^*, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)_{n=0}^N$ образует мартингал. Последовательность алгебр

$$(\mathbf{P}_n)_{n=1}^N = (\sigma(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n))_{n=1}^N$$

порождена случайными величинами, принимающими два значения. По лемме о представлении мартингалов (будет доказана ниже) , мартингал $(M_n^*, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)_{n=1}^N$ представляется в виде

$$M_n^* = M_0^* + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^*(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1}) \Delta m_k,$$

где $\alpha_k^* = \alpha_k^*(\rho_1, \dots, \rho_{k-1})$, $(k \geq 2)$ – некоторые неупреждающие (то есть $\mathcal{F}_{k-1}$–измеримые) функции, $\alpha_1 = const, \Delta m_k = \rho_k - r$. Если обозначить

$$\gamma_k^* = \frac{\alpha_k^* B_k}{S_{k-1}}, \quad k \geq 1,$$

то для M_n^* естественна запись

$$M_n^* = M_0^* + \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k^* S_{k-1}}{B_k} \Delta m_k.$$

Пусть выполнено условие $(**)$. Запишем его в следующем виде

$$\frac{x}{B_0} = \mathbf{E}^* (\frac{f_N}{B_N}).$$

Покажем, что тогда найдется такая стратегия $\pi_* \in SF$, что отвечающий ей нормированный капитал

$$M_n^{\pi^*} \equiv \frac{X_n^{\pi^*}}{B_n}$$

будет совпадать с $M_n^*, \quad 0 \leq n \leq N$.

Действительно, пусть начальный капитал равен x. Имея значение $\gamma_1^* = (\alpha_1^* B_1)/S_0$, определим значение β_1^* из равенства

$$x = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0.$$

Тогда

$$\beta_1^* = \frac{x - \gamma_1^* S_0}{B_0}.$$

Положим $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$. Тогда для этого портфеля капитал будет равен

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1.$$

Значит,

$$M_1^{\pi^*} = \frac{X_1^{\pi^*}}{B_1} = \beta_1^* + \gamma_1^* \frac{S_1}{B_1} = \frac{x}{B_0} - \gamma_1^* \frac{S_0}{B_0} + \gamma_1^* \frac{S_1}{B_1} =$$

$$= \frac{x}{B_0} + \gamma_1^* (\frac{S_1}{B_1} - \frac{S_0}{B_0}) \frac{x}{B_0} + \frac{\alpha_1^* B_1}{S_0} (\frac{S_1}{B_1} - \frac{S_0}{B_0}) = \frac{x}{B_0} +$$

$$+ \alpha_1^* (\frac{S_1}{S_0} - \frac{B_1}{B_0}) = \frac{x}{B_0} + \alpha_1^* (\rho_1 - r) = M_0^* + \alpha_1^* (\rho_1 - r) = M_1^*.$$

Аналогично, имея значения γ_2^*, определяем β_2^* :

$$\beta_2^* = \frac{X_1^{\pi^*} - \gamma_1^* S_1}{B_1},$$

и полагаем $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$. Построение стратегии $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ производим по индукции.

Получаем тогда для всех n

$$M_n^{\pi^*} = M_n^*.$$

Следовательно,

$$\frac{X_n^{\pi^*}}{B_n} = M_n^{\pi^*} = M_n^* = \mathbf{E}^*(\frac{f_N}{B_N} \mid \mathcal{F}_n),$$

или, что одно и то же,

$$X_n^{\pi^*} = \mathbf{E}^*((1+r)^{-(N-n)} f_N \mid \mathcal{F}_n).$$

В частности, $X_n^{\pi^*} \geq 0$ для всех n и $X_N^{\pi^*} = f_N \quad \mathbf{P}^*$-п.н. Как было отмечено выше, условие $\mathbf{P}^*$-п.н равносильно условию, выполняемому для всех $\omega \in \Omega$. Значит, стратегия π^* является минимальным (x, f_N)–хеджем, а то, что $\pi^* \in SF$, следует из ее конструкции. Лемма 2 доказана.

Итак, на основании леммы 1 и леммы 2 сформулируем результат относительно расчета стоимости опционов Европейского типа, структуры оптимальной стратегии и эволюции соответствующего ей капитала.

Теорема 7.1. *1). В условиях (B,S)–рынка справедливая стоимость $\mathbf{C}_N$ опционов с исполнением в момент времени N, функцией платежа $f_N = f_N(S_0, S_1, \dots, S_N)$ и использованием самофинансируемых стратегий определяется формулой*

$$\mathbf{C}_N = \mathbf{E}^*[(1+r)^{-N} f_N],$$

где $\mathbf{E}^*$–усреднение по такой мере $\mathbf{P}^*$, что

$$\mathbf{P}^*(\rho_1 = b) = p^* = \frac{r-a}{b-a}.$$

2). Существует минимальный самофинансируемый $(\mathbf{C}_N, f_N)$–хедж $\pi^* = (\pi_n^*)_{n=1}^N$ такой, что эволюция соответствующего капитала $(X_n^{\pi^*})_{n=1}^N$ задаётся формулами

$$X_n^{\pi^*} = \mathbf{E}^*[(1+r)^{-(N-n} f_N \mid \mathcal{F}_n].$$

При этом неупреждающие компоненты $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ определяются равенствами

$$\gamma_n^* = \frac{\alpha_n^* B_n}{S_{n-1}}, \quad \beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}}.$$

Доказательство. 1). По определению

$$\mathbf{C}_N = \inf\{x > 0 : \Pi(x, f_N) \neq \emptyset\}.$$

При фиксированных значениях N и f_N класс $\Pi(x, f_N)$ не пуст по крайней мере для больших x. Отсюда следует, что $\mathbf{C}_N < \infty$. Из леммы 1 имеем: $\mathbf{C}_N^* \geq \mathbf{E}^*[(1+r)^{-N} f_N]$. С другой стороны, по лемме 2 существует (x, f_N)–хедж с начальным капиталом $x = \mathbf{E}^*[(1+r)^{-N} f_N]$. Значит,

$$\mathbf{C}_N^* = \mathbf{E}^*[(1+r)^{-N} f_N].$$

2). Следует непосредственно из леммы 2.

Лемма о представлении мартингалов

Рассмотрим упомянутую выше лемму общего характера.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, принимающих два значения b и a с вероятностями p и $1-p$ соответственно. Будем предполагать, что $\mathbf{E}\rho_1 = r$, причем, $-1 < a < r < b$, и, следовательно, $p = (r-a)/(b-a)$. Положим

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} (\rho_k - r), \quad \mathcal{F}_n = \sigma(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n).$$

Выше было показано, что $m = (m_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})$ является мартингалом.

Лемма 7.3. *Всякий мартингал $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})_{n=1}^N$ с $\mathbf{E}M_n = 0$ допускает следующее представление по „базисному“мартингалу m:*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta m_k,$$

где α_k – $\mathcal{F}_{k-1}$-измеримы, $k \geq 1$.

Доказательство. Так как M_n – $\mathcal{F}_n$-измеримы, то существуют такие функции $f_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где каждая координата x_i принимает два значения b и a, что

$$M_n(\omega) = f_n(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Поскольку $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})$ – мартингал, то $\mathbf{P}$-почти наверное

$$\mathbf{E}[f_n(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_n(\omega))-$$

$$-f_{n-1}(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega))|\mathcal{F}_{n-1}] = 0,$$

что равносильно тому, что $\mathbf{P}$-почти наверное

$$pf_n(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b)+$$

$$+(1-p)f_n(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a) =$$
$$= f_{n-1}(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)).$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\frac{f_n(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b) - f_{n-1}(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega))}{1-p} =$$

$$= \frac{f_{n-1}(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)) - f_n(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a)}{p}.$$

Учитывая, что $p = (r-a)/(b-a)$, получим

$$\frac{f_n(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b) - f_{n-1}(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega))}{b-r} =$$

$$= \frac{f_n(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a) - f_{n-1}(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega))}{a-r}.$$

Положим $\alpha_n(\omega)$ равным любому из выражений в последнем равенстве. Тогда

$$f_n(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b) - f_{n-1}(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)) =$$

$$= \alpha_n(\omega)(b-r),$$

$$f_n(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a) - f_{n-1}(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)) =$$
$$= \alpha_n(\omega)(a-r),$$

или

$$\Delta M_n(\omega) = \alpha_n(\omega)\Delta m_k.$$

Европейские опционы с $f_N = f(S_N)$.

Везде ранее мы предполагали, что функция выплаты f_N зависит от всех значений $S_0, S_1, \dots, S_N$. Для стандартных Европейских опционов предполагается, что

$$f_N = f(S_N).$$

Более конкретно, для опциона купли

$$f_N = (S_N - K)^+,$$

где K – некоторая заранее оговариваемая цена акции в момент времени N.

В этих предположениях формулы справедливой стоимости опциона и расчета хеджирующих стратегий выглядят достаточно просто. Рассмотрим величину

$$X_n^{\pi^*} = \mathbf{E}^*((1+r)^{-(N-n)} f_N \mid \mathcal{F}_n).$$

Введем функцию

$$F_n(x;p) = \sum_{k=0}^{n} f(x(1+b)^k(1+a)^{n-k}) C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Заметим, что

$$\prod_{n<k\le N}(1+\rho_k) = (1+b)^{\Delta_N - \Delta_n}(1+a)^{(N-n)-(\Delta_N-\Delta_n)},$$

где $\Delta_n = \delta_1 + \dots + \delta_n$. Поэтому

$$\mathbf{E}^* f(x \prod_{n<k\le N}(1+\rho_k)) = F_{N-n}(x;p^*),$$

где $p^* = (r-a)/(b-a)$, и

$$X_n^{\pi^*} = \mathbf{E}^*((1+r)^{-(N-n)} f(S_N) \mid \mathcal{F}_n) =$$

$$= \mathbf{E}^*((1+r)^{-(N-n)} f(S_N) \mid S_n) = (1+r)^{-(N-n)} F_{N-n}(S_n;p^*).$$

В частности,

$$\mathbf{C}_N = X_0^* = (1+r)^{-N} F_N(S_0;p^*).$$

Учитывая вид функции выплаты, имеем

$$F_N(S_0;p^*) = \sum_{k=0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \times$$

$$\times max(0; S_0(1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k - K).$$

Пусть $k_0 = k_0(a, b, S_0, K)$ – наименьшее целое число, для которого

$$S_0(1+a)_N\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{k_0} > K.$$

Если $k_0 > N$, то $F_N(S_0; p^*) = 0$ и, следовательно, $\mathbf{C}_N{}^* = 0$.

Предположим, что $k_0 \leq N$. Тогда

$$\mathbf{C}_N = (1+r)^{-N} F_N(S_0; p^*) =$$

$$= S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k -$$

$$-K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k},$$

где k_0 вычисляется по формуле

$$k_0 = 1 + [\ln \frac{K}{S_0(1+a)^N} / \ln \frac{1+b}{1+a}].$$

Точно также выводятся формулы для определения вида минимального хеджа $\pi_n^* = (\gamma_n^*, \beta_n^*)$. Заметим здесь, что $\gamma_n^* = \gamma_n^*(S_{n-1}), \beta_n^* = \beta_n^*(S_{n-1})$. Итак,

$$\gamma_n^* = (1+r)^{-(N-n)} \cdot \frac{F_{N-n}(S_{n-1}(1+b); p^*) - F_{N-n}(S_{n-1}(1+a); p^*)}{S_{n-1}(b-a)};$$

$$\beta_n^* = \frac{F_{N-n+1}(S_{n-1}; p^*)}{B_N} - (1+r)^{-(N-n)} \times$$

$$\times \frac{F_{N-n}(S_{n-1}(1+b); p^*) - F_{N-n}(S_{n-1}(1+a); p^*)}{B_{n-1}(b-a)}.$$

Этот результат был впервые получен Коксом, Россом, Рубинштейном (см. [6]).

Пример расчета стоимости опционов и минимального хеджа

Предположим, что ситуация на (B, S)–рынке такова, что цена одной акции равна 100 рублей, одной облигации – 10 рублей. Эмитент выпускает опцион купли, то есть покупатель опциона получает право купить в определенный момент времени N акцию по оговоренной цене $K = 110$ рублей. Предположим, что $N = 2$, $r = 0.1$, $a = -0.3$, $b = 0.4$.

Упрощая постановку, будем считать, что продавец опциона выплачивает в момент времени $N = 2$ покупателю при исполнении опциона сумму $f_2 = (S_2 - K)^+$.

Подсчитаем по выведенным формулам "рациональную"(с точки зрения продавца) стоимость опциона. Она равна 23.21 рубля. Итак, имея эту сумму, продавец опциона должен выстроить на (B, S)–рынке свою стратегию так, чтобы в момент исполнения быть в состоянии принять опцион к исполнению, то есть определить структуру минимального хеджа. Имеем

$$\gamma_1 = 0.64, \quad \beta_1 = -4.06.$$

Это значит, что продавец опциона должен взять в долг облигации по текущей цене на сумму 40.6 рубля и всю имеющуюся сумму вложить в акции. В момент времени $n = 1$ объявляется новая цена акции. Согласно нашим данным она может стать

А) в случае понижения курса 70 рублей;

В) 140 рублей – в случае повышения.

А). Пусть цена акции упала. Тогда

$$\gamma_2 = 0, \quad \beta_2 = 0,$$

то есть продавец опциона продает свои акции по новой цене и возвращает долг: $0.64 \cdot 70 = 40.6 \cdot 1.1$. Даже если при $n = 2$ произойдет повышение курса акций, то стоимость акции станет равной 98 рублей, и в этом случае продавец опциона ничего не платит покупателю.

В). Если при $n = 1$ произошло повышение курса акции, то

$$\gamma_2 = 0.88, \quad \beta_2 = -7.11.$$

Таким образом, продавец опциона берет в долг еще 3.05 облигаций по новой цене 11 рублей на сумму 33.55 рублей и вкладывает их в акции. В момент $n = 2$ объявляется следующая цена акции. Здесь может быть опять два случая: понижение курса или его повышение.

В случае понижения цена акции равна 98 рублей, и в этом случае продавец ничего не платит покупателю. На возвращение долга у него имеются акции: $0.88 \cdot 98 = 86.24$.

В случае повышения курса цена акции равна 196 рублей. Тогда продавец должен выплатить покупателю 86 рублей, и именно такой капитал у него и остаётся после возвращения долга:

$$X_2 = 0.88 \cdot 196 - 7.11 \cdot 12.1.$$

Таким образом, продавец опциона всегда может принять опцион к исполнению. Покупатель в случае "везения"может получить чистую прибыль 62.79 рублей, вложив в опцион 23.21 рубля.

§8. Теория расчета стоимости, хеджирующих стратегий, и моментов исполнения опционов американского типа (дискретное время)

Пусть (B,S) – финансовый рынок, описываемый следующими соотношениями: $B=(B_n)_{n=0}^N,\ S=(S_n)_{n=0}^N$,

$$B_n=(1+r)B_{n-1},\ B_0>0,$$

$$S_n=(1+\rho_n)S_{n-1},\ S_0>0.$$

Пусть $f=(f_0,f_1,\dots,f_N)$ – набор неотрицательных функций платежа $f_n=f_n(S_0,S_1,\dots,S_n)$, $0\le n\le N<\infty$. Напомним, что опцион американского типа может быть предъявлен к исполнению в любой момент $\tau=\tau(\omega), 0\le\tau(\omega)\le N, \omega\in\Omega$, основываясь лишь на "информации" $\mathcal{F}_n$, то есть $\{\omega:\tau(\omega)=n\}\in\mathcal{F}_n$.

Если в момент времени τ опцион предъявлен к исполнению, то продавец выплачивает предъявителю опциона сумму

$$f_\tau=f_\tau(S_0,S_1,\dots,S_\tau).$$

Будем предполагать, что после этой выплаты все средства продавца опциона находятся лишь на банковском счете, то есть его стратегия является самофинансируемой.

Пусть $\pi=(\beta_n,\gamma_n)$ – некоторая самофинансируемая стратегия. Обозначим как и прежде

$$X_n^\pi=\beta_nB_n+\gamma_nS_n$$

капитал в момент времени n. Мы видели, что

$$X_n^\pi=X_0^\pi+\sum_{k=1}^n(\beta_k\Delta B_k+\gamma_k\Delta S_k).$$

Рассмотрим величины

$$M_n^\pi=\frac{X_n^\pi}{B_n}.$$

Выше пы показали, что последовательность $(M_n^\pi,\mathcal{F}_n,\mathbf{P}^*)$ является мартингалом и, так как $N<\infty$, то для любого $\tau,\tau(\omega)\le N$

$$\mathbf{E}^*M_\tau^\pi=M_0^\pi,$$

или

$$X_0^\pi=\mathbf{E}^*\alpha^\tau X_\tau^\pi,$$

где $\alpha = (1+r)^{-1}$. Предположим далее, что стратегия π является (x, f, N)-хеджем: $X_0^\pi = x,\ X_n^\pi \geq f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n), n = 1, 2, \ldots, N$. Тогда (усредняя последнее неравенство по мере $\mathbf{P}^*$) имеем:

$$x \geq \sup_{0 \leq \tau \leq N} \mathbf{E}^* \alpha^\tau f_\tau.$$

Если к тому же хедж π является минимальным, то есть существует момент остановки $\sigma : \forall\ \omega \in \Omega \quad X_\sigma^\pi = f_\sigma$, то

$$x = \sup_{0 \leq \tau \leq N} \mathbf{E}^* \alpha^\tau f_\tau. \tag{$*$}$$

Оказывается, что условие (*) является также и достаточным для существования минимального (x, f, N)-хеджа.

Лемма 8.1. *Пусть начальный капитал $x > 0$ и последовательность функций платежа $f = (f_0, f_1, \ldots, f_N)_{n=0}^N$ таковы, что выполнено условие (*). Тогда в классе $\Pi(x, f, N)$ существует минимальный хедж американского типа.*

Доказательство. Обозначим $Y = (Y_n)_{n=0}^N$, где

$$Y_n = \sup_{n \leq \tau \leq N} \mathbf{E}^* (\frac{f_\tau}{B_\tau} | \mathcal{F}_n).$$

Отметим, что в силу дискретности вероятностного пространства $Y_n - \mathcal{F}_n$-измеримы. Имеем

$$Y_N = \frac{f_N}{B_N},$$

и для всех $0 \leq n \leq N-1$ верно равенство

$$Y_n = \max\left\{\frac{f_n}{B_n}, \mathbf{E}^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n)\right\}.$$

Последнее равенство следует из общей теории оптимальной остановки. Отсюда видно, что

$$Y_n \geq \frac{f_n}{B_n} \quad (n = 0, 1, \ldots, N),$$

$$Y_n \geq \mathbf{E}^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Последние неравенства выполнены $\mathbf{P}^*$– почти наверное. Значит, последовательность $(Y_n^\pi, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$ является супермартингалом, мажорирующим последовательность f_n / B_n.

Обозначим момент остановки

$$\tau_n^* = \min\left\{n \le k \le N : Y_k = \frac{f_k}{B_k}\right\}.$$

Он является оптимальным в том смысле, что

$$\mathbf{E}^*(\frac{f_{\tau_n^*}}{B_{\tau_n^*}}|\mathcal{F}_n) = \sup_{n\le\tau\le N}\mathbf{E}^*(\frac{f_\tau}{B_\tau}|\mathcal{F}_n).$$

Так как $\mathbf{P}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, то

$$Y_0 = \sup_{0\le\tau\le N}\mathbf{E}^*(\frac{f_\tau}{B_\tau}|\mathcal{F}_0) = \sup_{0\le\tau\le N}\mathbf{E}^*\frac{f_\tau}{B_\tau} = \mathbf{E}^*\frac{f_{\tau_0}}{B_{\tau_0}}.$$

Используя теперь разложение супермартингала по теореме Дуба, имеем

$$Y_n = M_n - A_n,$$

где $M_0 = Y_0, A_0 = 0$, последовательность $M = (M_n)_{n=0}^N$ является мартингалом, а последовательность $A = (A_n)_{n=0}^N$ – неубывающая и предсказуема. Для этого разложения достаточно положить

$$M_n = \sum_{k=1}^n [Y_k - \mathbf{E}^*(Y_k|\mathcal{F}_{k-1})],$$

$$A_n = \sum_{k=1}^n [Y_{k-1} - \mathbf{E}^*(Y_k|\mathcal{F}_{k-1})].$$

Мартингал $M = (M_n)_{n=0}^N$ может быть представлен как и выше в следующем виде:

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k^* \cdot S_{k-1}}{B_k}\Delta m_k.$$

Значит,

$$Y_n = Y_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k^* \cdot S_{k-1}}{B_k}\Delta m_k - A_n.$$

Имея значения $M_0, \beta_n^*, \gamma_n^*$, как и для опционов европейского типа, построим стратегию $\pi^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$. Точно так же, как и в случае опциона Европейского типа, показывается, что соответствующие капиталы совпадают:

$$M_n = M_n^{\pi^*}.$$

Значит,

$$X_n^{\pi^*} = M_n^{\pi^*}B_n = M_nB_n = (Y_n + A_n)B_n \ge Y_nB_n =$$

$$= \sup_{n\le\tau\le N} \mathbf{E}^*(\frac{f_\tau}{B_\tau}|\mathcal{F}_n) = \sup_{n\le\tau\le N} \mathbf{E}^*(\alpha^{\tau-n} f_\tau|\mathcal{F}_n).$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$X_0^{\pi^*} = \sup_{0\le\tau\le N} \mathbf{E}^*(\alpha^\tau f_\tau)$$

и

$$X_n^{\pi^*} \ge f_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N).$$

Значит, стратегия π^* является (x, f, N)-хеджем с начальным капиталом

$$x = \sup_{0\le\tau\le N} \mathbf{E}^*(\alpha^\tau f_\tau).$$

Заметим, что в силу своих свойств последовательность Y_n на множестве $\{(n,\omega) : 0 \le n < \tau^*(\omega)\ \}$ удовлетворяет мартингальному свойству:

$$Y_n(\omega) = \mathbf{E}^*(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)(\omega),$$

и поскольку на этом множестве $A_n(\omega) = 0$, то имеем

$$X_n^{\pi^*} = \sup_{n\le\tau\le N} \mathbf{E}^*(\alpha^{\tau-n} f_\tau|\mathcal{F}_n).$$

Из определения момента $\tau^* = \tau_0^* = \min\{0 \le n \le N : Y_n = f_n/B_n\}$, мартингального свойства и приведенной выше формулы

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} [Y_{k-1} - \mathbf{E}^*(Y_k|\mathcal{F}_{k-1})].$$

следует, что $A_{\tau^*(\omega)}(\omega) = 0$. Значит,

$$X_{\tau^*(\omega)}^{\pi^*}(\omega) = Y_{\tau^*(\omega)}(\omega) B_{\tau^*(\omega)} = f_{\tau^*(\omega)}.$$

Таким образом, (x, f, N)-хедж π^* является минимальным.

Подытожим полученные результаты.

Теорема 8.1. *1). В условиях (B, S)-рынка справедливая стоимость $\mathbf{C}_N^*$ опциона американского типа с крайней датой исполнения N и системой неотрицательных функций платежа $f = (f_n)_{n=0}^N$ определяется формулой:*

$$\mathbf{C}_N^* = \sup_{0\le\tau\le N} \mathbf{E}^*(\alpha^\tau f_\tau),$$

где супремум берется по всем моментам остановки $\tau = \tau(\omega)$ таким, что $0 \le \tau(\omega) \le N$ и достигается при некотором τ^*.

2). Момент τ^* является рациональным тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}^*(\alpha^{\tau^*} f_{\tau^*}) = \sup_{0\le\tau\le N} \mathbf{E}^*(\alpha^\tau f_\tau).$$

3). Множество $\Pi(\mathbf{C}_N^*, f, N)$ *непусто и состоит из минимальных хеджей.*

Замечание. Величина $\mathbf{C}_N^*$ и рациональный момент остановки τ^* находятся в результате решения *одной и той же* задачи об оптимальной остановке "$\sup_\tau \mathbf{E}^*(\alpha^\tau f_\tau)$".

Доказательство. 1) и 3) следуют из леммы 5.1.

2). Пусть стратегия π^* является $(\mathbf{C}_N^*, f, N)$-хеджем. Тогда, если τ^* – рациональный момент исполнения опциона, то $X_{\tau^*}^{\pi^*} = f_{\tau^*}$ и, значит,

$$\mathbf{C}_N^* = X_0^{\pi^*} = \mathbf{E}^*(\alpha^{\tau^*} X_{\tau^*}^{\pi^*}) = \mathbf{E}^*(\alpha^{\tau^*} f_{\tau^*}).$$

Обратно, пусть σ – некоторый момент остановки со свойством

$$\mathbf{E}^*(\alpha^\sigma f_\sigma) = \sup_\tau \mathbf{E}^*(\alpha^\tau f_\tau).$$

Пусть π – некоторая самофинансируемая стратегия с начальным капиталом $\mathbf{C}_N^*$ такая, что $X_\sigma^\pi \ge f_\sigma$. Тогда

$$X_0^\pi = \mathbf{E}^*(\alpha^\sigma X_\sigma^\pi) \ge \mathbf{E}^*(\alpha^\sigma f_\sigma) = \sup_\tau \mathbf{E}^*(\alpha^\tau f_\tau) = \mathbf{C}_N^*.$$

Но $X_0^\pi = \mathbf{C}_N^*$, значит, $\mathbf{P}^*\{X_\sigma^\pi > f_\sigma\} = 0$. Другими словами, момент σ является рациональным: $X_\sigma^\pi = f_\sigma$.

Примеры расчётов опционов американского типа.

Как мы видели выше, отыскание рациональной стоимости $\mathbf{C}_N^*$ опциона американского типа с системой функций платежа $f = (f_0, f_1, \dots, f_N)$ сводится к решению одной и той же задачи об оптимальной остановке:

$$\sup_\tau \mathbf{E}^*((1+r)^{-\tau} f_\tau).$$

Предположим, что функции выплаты $f = (f_0, f_1, \dots, f_N)$ имеют следующую структуру:

$$f_n(S_0, S_1, \dots, S_n) = \beta^n g(S_n),$$

где $0 < \beta \le 1$.

Положим в случае опциона купли $g(x) = (x - K)^+$, в случае опциона продажи $g(x) = (K - x)^+,\ K > 0$.

Напомним, что усреднение $\mathbf{E}^*$ берется по вероятности, соответствующей $p^* = (r - a)/(b - a)$. В дальнейшем, имея ввиду эту вероятность, будем опускать "*".

Одно из основных предположений будет состоять в следующем:

$$1 + b = \lambda,\ 1 + a = \frac{1}{\lambda},\ \lambda > 1.$$

В этих предположениях последовательность $(S_n)_{n\geq 0}$ с начальным значением $S_0 = x$ совершает случайное блуждание по множеству состояний $E_x = \{x\lambda^k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$. Предположим, что начальное состояние $x \in E = \{\lambda^k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$. Тогда понятно, что последовательность $S = (S_n)_{n\geq 0}$ будет блуждать по множеству состояний

$$E = \{\lambda^k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}.$$

Будем предполагать далее, что на пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ задано семейство вероятностных мер $\mathbf{P}_x,\ x \in E$, таких, что

$$\mathbf{P}_x\{S_0 = x\} = 1$$

и относительно вероятности $\mathbf{P}_x$ все случайные величины $\rho_1,\ \rho_2, \ldots, \rho_N$ являются независимыми и одинаково распределёнными:

$$\mathbf{P}_x\{\rho_1 = b\} = p,\ \mathbf{P}_x\{\rho_1 = a\} = 1 - p$$

при всех $x \in E$.

При сделанных предположениях случайное блуждание
$(S_n)_{n\geq 0}$ с

$$S_n = S_0\lambda^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n},$$

где $\varepsilon_i = 1$, если $\rho_i = b$, и $\varepsilon_i = -1$, если $\rho_i = a$, есть симметричное геометрическое блуждание по множеству состояний $E = \{\lambda^k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$.

Обозначим для $n \geq 0$

$$V_n(x) = \sup_{0\leq\tau\leq n} \mathbf{E}_x(\alpha\beta)^\tau g(S_\tau),$$

где $\alpha = (1 + r)^{-1}, \beta > 0$. Предположим также, что $\beta \leq 1$.

Если a priori предположить, что $S_0 = x$, то $\mathbf{C}_N^* = V_n(x)$.

Обозначим

$$Tg(x) = \mathbf{E}_x g(S_1),$$

то есть

$$Tg(x) = p \cdot g(\lambda \cdot x) + (1-p) \cdot g(\frac{x}{\lambda}),$$

где $p = (\lambda - \alpha)/(\alpha(\lambda^2 - 1))$.

Положим

$$Q_{\alpha\beta} g(x) = \max\{g(x), \alpha\beta T g(x)\}.$$

Тогда

a). функции $V_n(x)$ могут быть представлены в виде:

$$V_n(x) = Q^n_{\alpha\beta} g(x),$$

где $Q^n_{\alpha\beta}$ – степень опреатора $Q_{\alpha\beta}$;

b). функции $V_n(x)$ удовлетворяют соотношениям:

$$V_n(x) = \max\{g(x), \alpha\beta T V_{n-1}(x)\},$$

при этом $V_0 = g(x)$.

c). момент остановки

$$\tau_n = \min\{0 \leq m \leq n : V_{n-m}(S_m) = g(S_m)\}$$

является оптимальным:

$$\mathbf{E}_x (\alpha\beta)^{\tau_n} g(S_{\tau_n}) = V_n(x), \quad x \in E.$$

Обозначим для $m \geq 0$

$$D_m = \{x : V_m(x) = g(x)\},$$

$$C_m = E \setminus D_m = \{x : V_m(x) > g(x)\}.$$

Заметим, что

$$C_n \supseteq C_{n-1} \supseteq \cdots \supseteq C_0 = \emptyset, \quad D_n \subseteq D_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq D_0 = E.$$

Из последних соотношений следует, что

$$\tau_n = \min\{0 \leq m \leq n : S_m \in D_{n-m}\}.$$

Поэтому естественно назвать множества D_i областью остановки, а множества C_i – областью продолжения наблюдений.

Рассмотрим далее стандартный опцион купли американского типа с

$$f_n(x) = \beta^n g(x),$$

где $g(x) = (x-1)^+, 0 < \beta \leq 1, 0 \leq n \leq N < \infty$.

Заметим, что при $\beta = 1$ опцион американского типа "совпадает"с соответствующим опционом европейского типа со временем исполнения N. Действительно, в этом случае последовательность $\{\alpha^n (S_n - 1)^+\}$ является субмартингалом (относительно вероятности $\mathbf{P}_x$). Поэтому для любого $0 \leq \tau \leq N$

$$\mathbf{E}_x \alpha^\tau (S_\tau - 1)^+ \leq \mathbf{E}_x \alpha^N (S_N - 1)^+,$$

следовательно, в качестве оптимального момента остановки может быть взят момент $\tau^* = N$.

Рассмотрим теперь общий случай $0 < \beta \leq 1$.

Пусть вначале $x = \lambda^0 = 1$. Тогда

$$Tg(1) = pg(\lambda) + (1-p)g(\frac{1}{\lambda}) = p(\lambda - 1)^+ + (1-p)(\frac{1}{\lambda} - 1)^+ =$$

$$= p(\lambda - 1) > 0.$$

Таким образом оператор $Q_{\alpha\beta}$ „поднимает“ значение $g(1) = 0$ до значения $\alpha\beta p(\lambda - 1) > 0$.

Пусть теперь $x = \lambda$. Тогда

$$Tg(\lambda) = pg(\lambda^2) + (1-p)g(1) = p(\lambda^2 - 1)^+ = p(\lambda^2 - 1).$$

Значит,

$$Q_{\alpha\beta} g(\lambda) = \max\{g(\lambda), \alpha\beta Tg(\lambda)\} = \max\{\lambda - 1, \alpha\beta p(\lambda^2 - 1)\} =$$

$$= (\lambda - 1)\max\{1, \beta\frac{\lambda - \alpha}{\lambda - 1}\}.$$

Отсюда видно, что если $\beta \leq (\lambda - 1)/(\lambda - \alpha)$, то оператор $Q_{\alpha\beta}$ не меняет значения $g(\lambda)$, то есть $Q_{\alpha\beta} g(\lambda) = g(\lambda) = \lambda - 1$. Если же $\beta > (\lambda - 1)/(\lambda - \alpha)$, то оператор $Q_{\alpha\beta}$ „поднимает“ значение $g(\lambda)$ до значения $\beta(\lambda - \alpha) > \lambda - 1$.

Далее положим $x = \lambda^k, k > 1$. Тогда

$$Tg(\lambda^k) = pg(\lambda^{k+1}) + (1-p)g(\lambda^{k-1}) = \lambda^k[\lambda p + \frac{1}{\lambda}(1-p)] - 1 =$$

$$= \frac{\lambda^k - \alpha}{\alpha},$$

$$Q_{\alpha\beta}g(\lambda^k) = \max\{\lambda^k - 1, \beta(\lambda^k - \alpha)\}.$$

Наконец, если $x = \lambda^k, k \leq -1$, то

$$Tg(x) = 0, \quad Q_{\alpha\beta}g(x) = 0.$$

Таким образом, области C_1 и D_1 имеют следующую структуру:

$$C_1 = \{x = \lambda^k : 0 \leq k \leq k_1^*(\beta)\},$$

$$D_1 = \{x = \lambda^k : k < 0, \ k \geq k_1^*(\beta)\}.$$

Значит,

$$\tau_1^* = \min\{0 \leq m \leq 1 : S_m \in D_{1-m}\}$$

с $D_0 = E$, то есть если $S_0 \in D_1$, то сразу останавливаемся, а если $S_0 \in C_1$, то продолжаем наблюдения.

Аналогично находим $k_2^*(\beta), k_3^*(\beta), \ldots, k_n^*(\beta)$ так, что $k_2^*(\beta) \leq k_3^*(\beta) \leq \ldots \leq k_n^*(\beta)$, и оптимальный момент остановки τ_n^* имеет вид:

$$\tau_n^* = \min\{0 \leq m \leq 1 : S_m \in [\lambda^{k_{n-m}^*(\beta)}, +\infty)\}.$$

Здесь $k_0^*(\beta) = -\infty$.

В случае, когда $0 \leq n \leq N < \infty$, функции $V_n(x)$ могут быть найдены из соотношения

$$V_n(x) = Q_{\alpha\beta}^n g(x)$$

"индукцией назад"по виду функции $g(x)$.

§9. Диффузионная модель (B, S)–рынка.

Будем предполагать, что рынок с двумя активами – банковским счетом $B = (B_t)_{t \geq 0}$ и акцией $S = (S_t)_{t \geq 0}$ – функционирует непрерывно по времени.

Относительно банковского счета B предполагается, что $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – детерминированная функция

$$B_t = B_0 e^{rt}, \quad B_0 > 0, \quad r \geq 0.$$

Эта функция очевидно подчинена уравнению

$$dB_t = rB_t dt.$$

Для описания эволюции стоимости $S = (S_t)_{t \geq 0}$ акции предположим, что функция S_t задана в пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F})_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, где Ω – пространство всех непрерывных функций $\omega = (\omega_t)_{t \geq 0}$, $\omega_0 = 0, \mathcal{F}$ – σ- алгебра, порожденная цилиндрическими множествами, $\mathbf{P}$ – вероятность на $\mathcal{F}$, $\mathbf{F} = (\mathcal{F})_{t \geq 0}$ – фильтрация, то есть поток σ-алгебр $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s^0$, где $\mathcal{F}_s^0$ есть σ-алгебра $\sigma(\omega_u, u \leq s)$, пополненная относительно вероятности $\mathbf{P}$.

Пусть $(W_t)_{t \geq 0}$ – стандартный винеровский процесс относительно вероятности $\mathbf{P}$, такой что

$$W_t(\omega) = \omega_t,$$

и для $0 \leq s < t$ $\mathbf{P}$-почти наверное выполняются условия

$$\mathbf{E}(W_t | \mathcal{F}_s) = W_s, \quad \mathbf{E}((W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s) = t - s,$$

то есть $(W_t)_{t \geq 0}$ является мартингалом относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ и вероятности $\mathbf{P}$.

Рассмотрение здесь броуновского движения обусловлено хаотическим изменением цен акций. Л.Башелье еще в 1900 году заметил, что при малых Δt приращения ΔS_t в ценах акций ведут себя как $\sqrt{\Delta t}$. Поэтому он предложил использовать винеровский процесс для описания эволюции цен акций:

$$S_t = W_t$$

или

$$S_t = \mu t + \sigma W_t.$$

П.Самуэльсон отметил, что такая модель описывает поведение цен акций не совсем удовлетворительно, так как W_t или $\mu t + \sigma W_t$ могут быть и отрицательными, тогда как $S_t \geq 0$. В этой связи он модель „геометрического" броуновского движения, согласно которой

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\},$$

где $(W_t)_{t\geq 0}$ – обычное броуновское движение, $\sigma > 0, \mu \in \mathbf{R}$.

Используя формулу Ито, найдем стохастический дифференциал dS_t:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$

или, что то же самое

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u(\mu du + \sigma dW_u).$$

Это и есть „диффузионная" модель (B, S)-рынка, при этом σ – коэффициент диффузии, μ – коэффициент сноса. В дальнейшем будем предполагать, что процентная ставка $r \geq 0$ фиксирована.

Таким образом, наша модель будет зависеть от трёх параметров: „случайности" ω; коэффициента изменчивости (волатильности) $\sigma > 0$; коэффициента роста (норма возврата) $\mu \in \mathbf{R}$. Коэффициент σ при этом может быть оценен по сколь угодно малому интервалу времени, поэтому мы будем предполагать, что σ известно и фиксировано. Несколько иная ситуация с коэффициентом μ. Мы не будем его фиксировать, а считать неизвестным параметром модели. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, мы будем писать иногда $S(\mu) = (S_t(\mu))_{t\geq 0}$. Наличие меры $\mathbf{P}$ и параметра $\mu \in \mathbf{R}$ порождает семейство вероятностных распределений цены акции.

Введем семейство таких вероятностных мер $\{\mathbf{P}^{\mu-r}\}_{\mu\in\mathbf{R}}$, что сужение

$$\mathbf{P}_t^{\mu-r} = \mathbf{P}^{\mu-r}|\mathcal{F}_t$$

есть распределение процесса

$$W_t^{\mu-r} = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t.$$

На алгебре $\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$ определим функцию множеств

$$\mathbf{P}^{\mu-r}(A) = \mathbf{P}_t^{\mu-r}(A),$$

если $A \in \mathcal{F}_t$. Так как совокупность мер $\{\mathbf{P}_t^{\mu-r}\}_{t\geq 0}$ образует согласованное семейство, то есть

$$\mathbf{P}_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s = \mathbf{P}_s^{\mu-r}, \quad s \leq t,$$

то мера $\mathbf{P}^{\mu-r}$ определяется на алгебре $\bigcup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$ однозначно и является конечно-аддитивной мерой. Можно показать, что она является и $\sigma-$аддитивной мерой и ее можно единственным образом продолжить на $\sigma-$алгебру $\sigma(\bigcup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t)$.

Так как $\mathbf{E}W_t = 0$, то $\mathbf{E}^{\mu-r}W_t^{\mu-r} = 0$, где $\mathbf{E}^{\mu-r}$ – усреднение по мере $\mathbf{P}^{\mu-r}$, и

$$\mathbf{E}^{\mu-r}[(W_t^{\mu-r} - W_s^{\mu-r})^2|\mathcal{F}_s] = t - s.$$

Итак, мы можем заключить, что

$$Law(W^{\mu-r}|\mathcal{F}^{\mu-r}) = Law(W|\mathcal{F}),$$

где $W = (W_t)_{t\geq 0}$, $W^{\mu-r} = (W_t^{\mu-r})_{t\geq 0}$. При этом $W^0 = W$, $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}$.

Тогда

$$dS_t(\mu) = S_t(\mu)(\mu dt + \sigma dW_t) = S_t(\mu)[\mu dt + \sigma(dW_t^{\mu-r} - \frac{\mu - r}{\sigma}dt)] =$$

$$= S_t(\mu)[rdt + \sigma dW_t^{\mu-r}].$$

Значит,

$$Law(S(\mu)|\mathcal{F}^{\mu-r}) = Law(S(r)|\mathcal{F}),$$

то есть, для любого $\mu \in \mathbf{R}$ вероятностные свойства процесса $S(\mu)$, рассматриваемые относительно вероятности $\mathbf{P}^{\mu-r}$, такие же, как и свойства процесса $S(r)$ относительно исходной вероятности $\mathbf{P}$.

Замечание. Семейство вероятностных мер $\{\mathbf{P}^{\mu-r}\}_{\mu\in\mathbf{R}}$ мы могли ввести следующим образом: если $\mathcal{F}_t = \mathbf{P}|\mathcal{F}_t$, то

$$\mathbf{P}_t^{\mu-r}(d\omega) = Z_t^{\mu-r} \cdot \mathbf{P}_t(d\omega),$$

где

$$Z_t^{\mu-r} = \exp\left\{-\frac{\mu - r}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma})^2 t\right\},$$

и показать, что в этом случае $\mathbf{P}_t^{\mu-r}$ есть в точности распределение процесса $W^{\mu-r}$.

Упражнение 14. Для процесса $Z_t^{\mu-r}$, введенного в предыдущем замечании, найти $dZ_t^{\mu-r}$.

§10. Задача инвестирования. Портфель ценных бумаг.

Пусть на $(B, S)-$рынке появился инвестор, имеющий начальный капитал $X_0 = x$, находящийся в момент времени $t = 0$ на банковском счете B и в акциях S соответственно портфелю $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$:

$$X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0.$$

Аналогично, если $\beta_t, \gamma_t - \mathcal{F}_t$-измеримые функции, то пара $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ будет описывать состояние портфеля ценных бумаг инвестора в момент времени $t > 0$:

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t. \tag{1}$$

Будем предполагать в дальнейшем, что:
во-первых, все операции происходят непрерывно во времени, к тому же, отсутствуют издержки, налоги и т.д. Значения β_t, γ_t могут принимать произвольные значения, отрицательные в том числе;
во-вторых, будем рассматривать только самофинансируемые стратегии $(\pi_t)_{t \geq 0}$, то есть такие, что для капитала $(X_t)_{t \geq 0}$ имеет место интегральное представление

$$X_t = \int_0^t \beta_u dB_u + \int_0^t \gamma_u dS_u(\mu) \tag{2}$$

со следующими условиями: для всех $\mu \in \mathbf{R}$, $t > 0$ $\mathbf{P}$-почти наверное выполняются неравенства

$$\int_0^t |\beta_u| dB_u < \infty, \quad \int_0^t (\gamma_u S_u(\mu))^2 du < \infty.$$

Это технические условия, означающие, что при каждом $t > 0$ существует интеграл Лебега $\int_0^t |\beta_u| dB_u$ и для $\mathbf{P}$-почти наверное всех ω существует стохастический интеграл $\int_0^t \gamma_u dS_u(\mu)$.

В дифференциальной форме условие (2) перепишется в виде

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t. \tag{3}$$

Если предположить, что функции β_t, γ_t дифференцируемы по t, то из (1) по формуле Ито имеем:

$$dX_t = (\beta_t dB_t + \gamma_t dS_t) + (B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t).$$

Тогда вместе с (3) получаем условие "самофинансируемости"портфеля:

$$B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = 0.$$

Обозначим как и прежде класс самофинансируемых стратегий через SF.

Пусть далее $\pi = (\beta, \gamma)$ – некоторая самофинансируемая стратегия, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ – отвечающий ей капитал. Чтобы подчеркнуть зависимость $(X_t)_{t\geq 0}$ от π, μ, ω будем писать, когда это необходимо

$$X^\pi(\mu) = (X_t^\pi(\mu))_{t\geq 0}, \quad X^\pi(\mu, \omega) = (X_t^\pi(\mu, \omega))_{t\geq 0}.$$

Вспоминая, что

$$dB_t = rB_t dt, \quad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$

из (1) получаем, преобразовывая:

$$dX^\pi(\mu) = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t = \beta_t r B_t dt + \gamma_t S_t(\mu dt + \sigma dW_t) =$$

$$= \beta_t r B_t dt + \gamma_t r S_t dt - \gamma_t r S_t dt + \gamma_t \mu S_t dt + \gamma_t S_t \sigma dW_t =$$

$$= r(\beta_t B_t + \gamma_t S_t)dt + \sigma\gamma_t S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t = dW_t^{\mu - r},$$

получаем

$$dX^\pi(\mu) = rX^\pi(\mu)dt + \sigma\gamma_t S_t dW_t^{\mu - r}.$$

Рассмотрим дисконтируемый капитал $Y^\pi(\mu) = (Y_t^\pi(\mu))_{t\geq 0}$, отвечающий стратегии π:

$$Y_t^\pi(\mu) = \frac{X_t^\pi(\mu)}{B_t}, \quad t \geq 0.$$

По формуле Ито имеем:

$$dY_t^\pi = [-\frac{X_t^\pi(\mu)\cdot r}{B_t} + \frac{1}{B_t}\cdot rX_t^\pi]dt + \frac{\sigma\cdot\gamma_t S_t}{B_t} dW_t^{\mu - r}.$$

Значит,

$$dY_t^\pi(\mu) = \frac{\sigma\cdot\gamma_t S_t}{B_t} dW_t^{\mu - r},$$

или

$$Y_t^\pi(\mu) = Y_0^\pi(\mu) + \int_0^t \frac{\sigma\cdot\gamma_u S_u(\mu)}{B_u} dW_u^{\mu - r}.$$

Наложим теперь на стратегию $\pi \in SF$ дополнительные ограничения. Для некоторого $\mu \in \mathbf{R}$ рассмотрим такую неотрицательную $\mathcal{F}$-измеримую случайную величину $\xi = \xi(\omega)$, что $\mathbf{E}^{\mu - r}\xi < \infty$.

Скажем, что стратегия $\pi \in SF$ принадлежит классу $SF^{\xi}(\mu)$, если $\mathbf{P}^{\mu-r}$-почти наверное

$$Y_t^{\pi}(\mu) \geq -\mathbf{E}^{\mu-r}(\xi|\mathcal{F}_t), \quad t \geq 0.$$

При этом процесс $Y_t^{\pi}(\mu)$ является супермартингалом, то есть для произвольных марковских моментов $\tau_1 < \tau_2$, таких, что $\mathbf{P}^{\mu-r}(\tau_1 < \tau_2) = 1$, выполняется

$$\mathbf{E}^{\mu-r}(Y_{\tau_2}^{\pi}(\mu)|\mathcal{F}_{\tau_1}) \leq Y_{\tau_1}^{\pi}(\mu).$$

В частности, если $X_0^{\pi} = x, \pi \in SF^{\xi}(\mu)$, то

$$\mathbf{E}^{\mu-r}(e^{-r\tau}X_{\tau}^{\pi}(\mu)) \leq x. \tag{4}$$

Замечание. В случае, когда $\pi \in SF^{\xi}(\mu)$ и $\xi \equiv 0$, будем писать $\pi \in SF^{+}(\mu)$. Вообще, это означает неотрицательность процесса $Y_t^{\pi}(\mu)$.

Оказывается, что класс $SF^{\xi}(\mu)$ является интересным с точки зрения экономической сущности задачи.

Определение 10.1. Стратегия $\pi \in SF(\mu)$ называется арбитражной на отрезке $[0, T]$, если $\mathbf{P}^{\mu-r}$-почти наверное

$$X_0^{\pi}(\mu) \leq 0, \qquad X_T(\mu, \omega) \geq 0,$$

причем $\mathbf{P}(X_T(\mu, \omega) > 0) > 0$.

Легко видеть, что всякая стратегия $\pi \in SF^{\xi}(\mu)$ с $\mathcal{F}$-измеримой случайной величиной $\xi = \xi(\omega)$ такой, что $\mathbf{E}^{\mu-r}\xi < \infty$, не является арбитражной. Это сразу следует из условия (4). В дальнейшем мы будем изучать в основном стратегии $\pi \in SF^{+}(\mu)$.

Определение 10.2. Стратегия $\pi \in SF(\mu)$ называется (μ, x, f_T)–хеджем европейского типа, если

$$X_0^{\pi}(\mu) = x$$

и $\mathbf{P}^{\mu-r}$– почти наверное

$$X_T^{\pi}(\mu, \omega) \geq f_T(\omega).$$

Говорят, что $(\mu, x, f_T)-$хедж $\pi^* \in SF(\mu)$ является минимальным, если для всякого (μ, x, f_T)-хеджа π

$$X_T^{\pi}(\mu, \omega) \geq X_T^{\pi^*}(\mu, \omega).$$

Определение 10.3. Пусть $\Pi_T(\mu, x, f_T)$ – множество всех (μ, x, f_T)– хеджей из класса $SF^{+}(\mu)$. Величина

$$\mathbf{C}_T(\mu, f_T) = \inf\{x \geq 0 : \Pi_T(\mu, x, f_T) \neq \emptyset\}$$

называется инвестиционной стоимостью или ценой опциона.

§11. Расчет стоимости и хеджирующих стратегий для опционов европейского типа (непрерывное время)

Пусть $\pi \in SF^{+}(\mu)$. Тогда

$$X_0^{\pi}(\mu,\omega) \geq \mathbf{E}^{\mu-r} e^{-rT} X_T^{\pi}(\mu,\omega).$$

Значит, если π является к тому же $(\mu, x, f_T)-$хеджем, то начальный капитал $x = X_0$ и функция выплаты $f_T = f_T(\omega)$ оказываются такими, что

$$x \geq \mathbf{E}^{\mu-r} e^{-rT} f_T(\omega).$$

Отсюда получается условие на справедливую стоимость опциона $\mathbf{C}_T(\mu, f_T)$:

$$\mathbf{C}_T(\mu, f_T) \geq \mathbf{E}^{\mu-r} e^{-rT} f_T(\omega).$$

Выше мы получили, что

$$Law(f_T(S(\mu,\omega))|\mathcal{F}^{\mu-r}) = Law(f_T(S(r,\omega))|\mathcal{F}).$$

Отсюда для всякого $\mu \in \mathbf{R}$ имеем:

$$\mathbf{C}_T(\mu, f_T) \geq \mathbf{E} e^{-rT} f_T(S(r,\omega)).$$

Интересно, что правая часть в последнем неравенстве не зависит от μ. Более того, мы покажем, что

$$\mathbf{C}_T(\mu, f_T) = \mathbf{C}_T(f_T) = \mathbf{E} e^{-rT} f_T(S(r,\omega)).$$

С этой целью мы зафиксируем $\mu \in \mathbf{R}$ и рассмотрим $\mathcal{F}_t$-измеримую неотрицательную такую функцию $f_T = f_T(\omega)$, что

$$\mathbf{E}^{\mu-r} f_T(\omega) < \infty.$$

Рассмотрим величины

$$Y_t(\mu,\omega) = \mathbf{E}^{\mu-r}\Big(\frac{f_T(\omega)}{B_T}|\mathcal{F}_t^{W^{\mu-r}}\Big), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\mathcal{F}_t^{W^{\mu-r}}$ – σ-алгебра, порожденная процессом $(W_t^{\mu-r})$.

По мере $\mathbf{P}^{\mu-r}$ относительно потока $(\mathcal{F}_t^{W^{\mu-r}})_{t\geq 0}$ процесс

$$(Y_t(\mu,\omega))_{0\leq t\leq T}$$

является неотрицательным мартингалом, и по теореме Ито-Кларка о представлении мартингалов имеем:

$$Y_t(\mu,\omega) = Y_0(\mu,\omega) + \int_0^t \alpha_u(\omega) dW_u^{\mu-r},$$

где величины $\alpha_u(\omega), 0 \le t \le T$, являются ${\mathcal{F}_u}^{W^{\mu-r}}$-измеримыми при каждом u, и такими, что $\mathbf{P}$-почти наверное

$$\int_0^t {\alpha_u}^2(\omega) du < \infty.$$

Поскольку ${\mathcal{F}_u}^{W^{\mu-r}} = {\mathcal{F}_u}^{S(\mu)}$, то величины $\alpha_u(\omega)$ являются функционалами от $S(\mu,\omega)$, то есть существуют такие неупреждающие функционалы $\alpha_u^*(\omega)$, что

$$\alpha_u(\omega) = \alpha_u^*(S(\mu,\omega)).$$

Положим

$$\gamma_u(S(\mu,\omega)) = \frac{\alpha_u^*(S(\mu,\omega)) \cdot B_u}{\sigma \cdot S(\mu,\omega)}.$$

Так как $Y_u(\mu,\omega)$ является ${\mathcal{F}_u}^{S(\mu)}$-измеримой функцией от ω, положим далее

$$\beta_u(S(\mu,\omega)) = Y_u(\mu,\omega) - \gamma_u(S(\mu,\omega)) \cdot \frac{S(\mu,\omega)}{B_u}.$$

Образуем стратегию $\pi^* = (\pi_u^*)_{0\le t\le T}, \quad \pi_u^* = (\beta_u^*, \gamma_u^*)$, где

$$\beta_u^* = \beta_u(S(\mu,\omega)), \gamma_u^* = \gamma_u(S(\mu,\omega)).$$

Утверждаем теперь, что

1). Стратегия π^* является самофинансируемой;

2). Имеет место равенство

$$Y_u(\mu,\omega) = Y_u^{\pi^*}(\mu,\omega),$$

где $Y_u^{\pi^*}(\mu,\omega) = X_u^{\pi^*}(\mu,\omega)/B_u$.

Докажем вначале первое утверждение. Заметим, что

$$X_u^{\pi^*}(\mu,\omega) = \beta_u^* B_u + \gamma_u^* S_u(\mu),$$

и, следовательно, по определению (β_u^*, γ_u^*):

$$X_u^{\pi^*}(\mu,\omega) = Y_u(\mu,\omega) \cdot B_u.$$

Поэтому

$$dX_u^{\pi^*}(\mu,\omega) = d(Y_u(\mu,\omega)\cdot B_u) = B_u dY_u(\mu,\omega) + Y_u(\mu,\omega)dB_u =$$

$$= \alpha_u(\mu,\omega)B_u dW^{\mu-r}(\omega) + Y_u(\mu,\omega)dB_u =$$

$$(Y_u - \frac{\alpha_u(\mu,\omega)}{\sigma})dB_u + \frac{\alpha_u(\mu,\omega)}{\sigma}\cdot rB_u du + \alpha_u(\mu,\omega)B_u dW^{\mu-r} =$$

$$= (Y_u - \frac{\alpha_u(\mu,\omega)}{\sigma})dB_u + \frac{\alpha_u(\mu,\omega)}{\sigma}\cdot(rdu + \sigma dW^{\mu-r}) =$$

$$= \beta_u^* dB_u + \gamma_u^* dS_u(\mu).$$

Значит, стратегия $\pi^* \in SF^+(\mu)$, при этом $(Y_t(\mu,\omega))_{0\le t\le T}$ является дисконтируемым капиталом построенной стратегии π^*, и

$$X_u^{\pi^*}(\mu,\omega) = Y_u(\mu,\omega)B_u = \mathbf{E}^{\mu-r}(e^{-r(T-u)}f_T(\omega)|\mathcal{F}_u^{W^{\mu-r}}) =$$

$$= \mathbf{E}^{\mu-r}(e^{-r(T-u)}f_T(\omega)|\mathcal{F}_u^{S(\mu)}).$$

Из последнего равенства очевидно, что

$$X_0^{\pi^*} = \mathbf{E}^{\mu-r}e^{-rT}f_T(\omega), \quad X_T^{\pi^*} = f_T(\omega).$$

Эти равенства выполняются $\mathbf{P}$-почти наверное. Это означает, что стратегия π^* является (μ, x, f_T)-хеджем с начальным капиталом

$$x = \mathbf{E}^{\mu-r}e^{-rT}f_T(\omega).$$

Более того, этот хедж является минимальным.

Итак, мы доказали следующую теорему о расчете опционов европейского типа.

Теорема 11.1. *а). Пусть функция $f_T(\omega)$ – $\mathcal{F}_T$-измерима, $\mu \in \mathbf{R}$ и выполнено условие*

$$\mathbf{E}^{\mu-r}f_T(\omega) < \infty.$$

Тогда рациональная стоимость $\mathbf{C}_T(\mu, f_T)$ определяется формулой

$$\mathbf{C}_T(\mu, f_T) = \mathbf{E}^{\mu-r}e^{-rT}f_T(\omega).$$

Существует минимальный хедж $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$, где
$\gamma^* = (\gamma_u^*)_{0\le u\le T}$ с

$$\gamma_u^*(S(\mu,\omega)) = \frac{\alpha_u^*(S(\mu,\omega))\cdot B_u}{\sigma\cdot S(\mu,\omega)},$$

причем α^*_u *определяется из теоремы о представлении мартингалов, и* $\beta^* = (\beta^*_u)_{0\le u\le T}$ *с*

$$\beta^*_u = Y_u(\mu,\omega) - \frac{\gamma^*_u \cdot S(\mu,\omega)}{B_u}.$$

b). Если к тому же $f_T(\omega) = f_T(S(\mu,\omega))$, *то рациональная стоимость* $\mathbf{C}_T(\mu, f_T)$ *не зависит от* μ *и*

$$\mathbf{C}_T(f_T) = \mathbf{E}^{\mu-r} e^{-rT} f_T(S(r,\omega)).$$

Европейские опционы с функцией выплаты $f_T = f_T(S_T)$.

Будем предполагать, что функция выплаты для опциона европейского типа в момент исполнения $T > 0$ имеет вид

$$f_T(\omega) = f(S_T(\mu,\omega)).$$

В соответствии с теоремой 11.1 рациональная стоимость опциона не зависит от параметра μ и равна

$$\mathbf{C}_T(f_T) = \mathbf{E}(e^{-rT} f(S_T(r,\omega)).$$

Динамика капитала $X^{\pi^*}_0 = (X^{\pi^*}_t(r,\omega))_{0\le t\le T}$ минимального хеджа π^* определяется по формуле

$$X^{\pi^*}_t(r,\omega) = \mathbf{E}(e^{-r(T-t)} f(S_T(r))|\mathcal{F}_t),$$

где $dS_t(r,\omega) = S_t(r,\omega)(rdt + \sigma dW_t)$.

Отсюда получаем для $S_t = S_t(r,\omega)$:

$$S_t = S_0 e^{rT} \exp\{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\}.$$

Тогда

$$X^{\pi^*}_t = \mathbf{E}(e^{-r(T-t)} f_T(S_T)|\mathcal{F}_t) = $$
$$= \mathbf{E}(e^{-r(T-t)} f_T(S_T)|S_t) = e^{-r(T-t)} F_{T-t}(S_t),$$

где

$$F_{T-t}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\cdot \exp\{\sigma y\sqrt{T-t} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\}) e^{-y^2/2} dy.$$

Выше мы видели, что для дисконтируемого капитала $Y_t(\mu, \omega)$ имеет место равенство

$$dY_t = \frac{\sigma \cdot \gamma_t S_t(\mu, \omega)}{B_t} dW_t^{\mu - r}.$$

Здесь $S_t(\mu, \omega) = S_t(r, \omega)$, следовательно, при $\mu = r$ получаем

$$dY_t = \frac{\sigma \cdot \gamma_t S_t(r, \omega)}{B_t} dW_t.$$

Для $\gamma_t \equiv 1$ имеем

$$d(\frac{S_t}{B_t}) = \sigma \cdot \frac{S_t}{B_t} dW_t.$$

Далее, так как

$$Y_t(r, \omega) = Y_0(r, \omega) + \int_0^t \alpha_u^*(\omega) dW_u, \quad \alpha_u^* = \frac{\sigma \cdot \gamma_u^* S_u}{B_u},$$

то

$$Y_t(r, \omega) = Y_0(r, \omega) + \int_0^t \frac{\sigma \cdot \gamma_u^* S_u}{B_u} dW_u.$$

Тогда

$$e^{-rT} X_t^*(r) = \mathbf{C}_T(f_T) + \int_0^t \gamma_u^* d(e^{-ru} S_u(r)). \qquad (*)$$

Следовательно,

$$d(e^{-rt} X_t^*(r)) = \gamma_t^* d(e^{-rt} S_t(r)).$$

Это равенство даёт удобное выражение для отыскания γ_t^*. Для этого обозначим

$$H(t, x) = F_{T-t}(e^{rt} x).$$

В этих обозначениях

$$X_t^{\pi^*}(r, \omega) e^{-rt} = e^{-rT} H(t, e^{-rt} S_t).$$

Применяя формулу Ито, получаем

$$d(X_t^{\pi^*}(r, \omega) e^{-rt}) =$$

$$= e^{-rT} dH(t, e^{-rt} S_t) = e^{-rT} [\frac{\partial H}{\partial x}(t, e^{-rt} S_t) d(e^{-rt} S_t) +$$

$$+ (\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 e^{-2rt}) dt].$$

Так как процессы $(e^{-rt}X_t^{\pi^*}(r,\omega))_{0\le t\le T}$ и $(e^{-rt}S_t(r))_{0\le t\le T}$ являются непрерывными мартингалами, то

$$e^{-rt}X_t^{\pi^*}(r) - X_0^{\pi^*}(r) - e^{-rT}\int_0^t \frac{\partial H}{\partial x}(u, e^{-ru}S_u)d(e^{-ru}S_u) =$$

$$= e^{-rT}\int_0^t \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\sigma^2 S_u^2 e^{-2ru}\right)du.$$

В силу единственности разложения мартингала, мартингал в левой части последнего равенства равен нулю, то есть

$$e^{-rt}X_t^{\pi^*}(r) = X_0^{\pi^*}(r) + e^{-rT}\int_0^t \frac{\partial H}{\partial x}(u, e^{-ru}S_u)d(e^{-ru}S_u). \qquad (**)$$

Сравнивая равенства (*) и (**), получаем

$$\gamma_t^* = e^{-rT}\frac{\partial H}{\partial x}(t, e^{-rt}S_t) = e^{-r(T-t)}\frac{\partial F_{T-t}}{\partial s}(S_t).$$

Тогда

$$\beta_t^* = \frac{e^{-rT}}{B_0}\left[F_{T-t}(S_t) - S_t\cdot\frac{\partial F_{T-t}}{\partial s}(S_t)\right] =$$
$$= \frac{1}{B_T}\left[F_{T-t}(S_t) - S_t\cdot\frac{\partial F_{T-t}}{\partial s}(S_t)\right].$$

При $t=0$ из представления капитала мы получаем рациональную стоимость опциона

$$\mathbf{C}_T = e^{-rT}F_T(S_0).$$

Из доказанного выше немедленно следует известный результат Блэка и Шоулса.

Теорема 11.2. а). *Для стандартного опциона купли европейского типа с функцией выплаты*

$$f_T = (S_T - K)^+$$

рациональная стоимость опциона определяется формулой Блэка-Шоулса:

$$\mathbf{C}_T = S_0\Phi(y_1) - Ke^{-rT}\Phi(y_2),$$

где

$$y_1 = \frac{\ln(S_0/K) + T(r+\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}},\ y_2 = \frac{\ln(S_0/K) + T(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2} dx.$$

b). В минимальном хедже $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ *компоненты вычисляются по формуле*

$$\gamma_t^* = \Phi\left(\frac{\ln(S_t/K) + (T-t)(r+\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

$$\beta_t^* = -\frac{K}{B_T}\Phi\left(\frac{\ln(S_t/K) + (T-t)(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Соответствующий капитал равен

$$X_t^{\pi^*} = S_t\Phi\left(\frac{\ln(S_t/K) + (T-t)(r+\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) -$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(S_t/K) + (T-t)(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Литература

1. Ширяев А.Н.Вероятность, [Кн. 2]. Суммы и последовательности случайных величин - стационарные, мартингалы, марковские цепи, 2004 г.

2. Ширяев А. Н. Вероятность - 2. - [В 2-х кн.], Москва: МЦНМО, 2007. - 416 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9449

3. Ширяев А.Н.Вероятность, [Кн. 1]. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы, 2004 г.

4. Ширяев А. Н. Вероятность - 1. - [В 2-х кн.], Москва: МЦНМО, 2007. - 552 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9448

5. П.Н. Брусов, Т.В. Филатова. Финансовая математика: Учебное пособие для магистров / - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 480 с.: http://znanium.com/bookread.php?book=363567

6. Бочаров П.П., Касимов Ю. Ф. Финансовая математика. - М.: Физматлит, 2007. - 576 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2116

7. Хуснутдинов Р.Ш., Жихарев В.А. Математика для экономистов в примерах и задачах. - М.: Лань, 2012. - 656 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4233

8.Свешников А.А. Прикладные методы теории вероятностей.- СПб.: Лань, 2012. - 480 с. ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3184

9.Свешников А.А. Прикладные методы теории марковских процессов.- СПб.: Лань, 2007. - 192 с. ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=590

10.Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций.- СПб.: Лань, 2011. - 464с ЭБС "Лань": http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=656