

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**И.Я. Заботин, Я.И. Заботин**

**МЕТОДЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРИЕМЫ  
В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ**



**КАЗАНЬ  
2014**

**УДК 519.85**  
**ББК 22.18**  
**312**

*Печатается по решению  
Редакционно-издательского совета  
Казанского федерального университета*

**Научный редактор**

доктор физико-математических наук, профессор кафедры  
вычислительной математики КФУ **И.Б. Бадриев**

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой  
прикладной математики КФУ **Н.Б. Плещинский**;  
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного  
анализа и информационных технологий КФУ **А.А. Андрианова**

**Заботин И.Я., Заботин Я.И.**

**312 Методы и вычислительные приемы в линейном программировании:**  
учебное пособие для студентов вузов. – Казань: Изд-во Казан. ун-та,  
2014. – 116 с.

**ISBN 978-5-00019-272-6**

В пособии излагаются конечные методы решения задач линейного программирования, основанные на целенаправленном поиске оптимального базиса и соответствующего ему оптимального плана.

Пособие предназначается для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», «Бизнес-информатика», и может быть использовано при изучении курсов «Методы оптимизации», «Исследование операций», «Дополнительные главы исследования операций» и других.

**УДК 519.85**  
**ББК 22.18**

**ISBN 978-5-00019-272-6**

© **Заботин И.Я., Заботин Я.И., 2014**  
© **Издательство Казанского университета, 2014**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>Глава 1. Симплексный метод (метод последовательного улучшения плана)</b> .....	7
§ 1. Постановка задачи и основные определения.....	7
§ 2. Основные леммы.....	12
§ 3. Симплексный метод (метод последовательного улучшения плана).....	18
§ 4. Способы приведения задач линейного программирования к каноническому виду. Метод дополнительных переменных.....	34
§ 5. Сходимость симплексного метода.....	41
§ 6. Модификация симплексного метода для задач с заикливанием.....	43
<b>Глава 2. Методы искусственных базисов (искусственных переменных)</b> ...	51
§ 1. Выбор базиса с использованием искусственных переменных.....	52
§ 2. Двухэтапный метод искусственного базиса.....	60
§ 3. Одноэтапный метод искусственного базиса.....	64
§ 4. Геометрическая интерпретация симплексного метода.....	74
<b>Глава 3. Вычислительные приемы и алгоритмы, основанные на симплексных переходах к новым базисам</b> .....	82
§ 1. Алгоритмы с целочисленными операциями.....	82
§ 2. Вычислительные приемы без использования искусственных переменных .....	94
§ 3. Метод последовательного присоединения неравенств .....	110
<b>Литература</b> .....	114

## ВВЕДЕНИЕ

Методы линейного программирования часто используются при решении прикладных задач исследования операций. Раздел «Линейное программирование», в котором главное место уделяется методам решения задач линейного программирования, присутствует во многих математических, экономико-математических и технических курсах лекций. В частности, он включается в университетские курсы «Методы оптимизации», «Математические методы и модели исследования операций», а алгоритмы линейного программирования используются на практических занятиях при изучении курсов «Теория игр», «Исследование операций», «Дополнительные главы исследования операций» и других.

Методы решения задач линейного программирования в том или ином объёме изложены как в специальной литературе по линейному программированию, так и в качестве разделов книг по методам оптимизации или исследованию операций (см., напр., [1] – [7], см. также библиографию в [3]). Однако из этой литературы непросто отобрать необходимые сведения, чтобы в жестких временных рамках лекционных курсов изложить методы линейного программирования с их полным обоснованием, и при этом согласовать по времени порядок изложения материала с проведением практических занятий. Этими обстоятельствами и обусловлены как выбор представленного в данном пособии материала, так и последовательность его изложения.

По некоторым причинам, например, предназначенный для решения задач линейного программирования симплексный метод удобнее излагать на основе теории двойственности. Но от такого изложения приходится отказываться, поскольку знакомство с элементами теории двойственности займет определенное время, и будет задерживаться проведение практических занятий, посвященных симплексному методу. Поэтому порядок изложения материала в пособии выбран таким, чтобы можно было провести полное теоретическое обоснование симплексного метода и в то же время уже на третьем практическом занятии приступить к решению задач этим методом.

Заметим также, что в связи с указанными выше обстоятельствами пришлось не включать в пособие ряд заслуживающих внимания теоретических сведений и алгоритмов линейного программирования. В частности, отсутствуют теоремы, характеризующие структуру выпуклых многогранников, на основе которых можно дать более подробную геометрическую интерпретацию методов, не описываются двойственный симплексный метод, модифицированный симплексный метод, и т. д.

Данное учебное пособие сложилось в результате чтения авторами лекций и проведения практических занятий в течение многих лет в Казанском государственном университете, ныне Казанском (Приволжском) федеральном университете. Оно опирается на некоторые из разделов изданного ранее пособия [5]. Материал этих разделов здесь существенно переработан и дополнен. Кроме некоторых известных методов линейного программирования, основанных на целенаправленном переборе базисов и соответствующих им планов, в пособие включены новые вычислительные приемы и конечные алгоритмы решения задач линейного программирования, которые могут быть полезны с практической точки зрения. В частности, один из предлагаемых алгоритмов в случае целочисленности исходных данных задачи позволяет получить ее решение, проделав все промежуточные вычисления в целых числах. Два других предлагаемых алгоритма для задачи линейного

программирования в канонической форме позволяют обходиться без использования искусственных переменных.

Изложение ведется с полным обоснованием всех описываемых методов. При этом предполагается, что читатель знаком с основами общего курса линейной алгебры. Приводятся примеры использования методов. Обсуждаются особенности их реализаций.

Номера определений, утверждений, таблиц, примеров и формул в пособии задаются тремя числами, и для ссылок на них в тексте используется та же тройная нумерация. Первое из тройки чисел означает главу, в которой изложен материал, второе число – параграф в этой главе, а третье – номер, соответственно, определения, утверждения, таблицы, примера или формулы в этом параграфе.

# ГЛАВА 1

## СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД (МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА)

### § 1. Постановка задачи и основные определения

Раздел математики, в котором разрабатываются теория и методы отыскания решения системы линейных равенств и (или) неравенств, придающего минимальное или максимальное значение заданной линейной функции, называют линейным программированием. Требование отыскания такого решения называют задачей линейного программирования.

Под  $R_n$  будет пониматься  $n$ -мерное евклидово пространство. Элемент  $x \in R_n$  называют, в зависимости от геометрической интерпретации, точкой или вектором. Через  $x_1, x_2, \dots, x_k$  будут обозначаться различные элементы пространства  $R_n$ , а для обозначения координат векторов будут использоваться буквы греческого алфавита. Так, координаты вектора  $x \in R_n$  обозначаются через  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Под вектором  $x \in R_n$  понимается вектор-столбец или, что то же самое, матрица с одним столбцом и  $n$  строками, т. е.  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$  или  $x^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , где символ  $T$  означает транспонирование. Скалярное произведение элементов  $a$  и  $b$  из  $R_n$  будет обозначаться через  $a^T b$ . Неравенство  $x \geq 0$  означает, что имеют место неравенства  $\xi_i \geq 0$  для всех  $i = 1, \dots, n$ .



(1.1.2), но не удовлетворяет ограничениям (1.1.3), то он называется псевдопланом.

Целью дальнейших обсуждений является описание и обоснование методов отыскания оптимального плана.

Будем считать, что ранг матрицы системы (1.1.2) равен  $m$ . Практически интересен только случай, когда  $n > m$ , так как лишь в этом случае система (1.1.2) – (1.1.3) может иметь бесконечное множество решений, среди которых и требуется отыскать оптимальный план.

Для задачи (1.1.1) – (1.1.3) будут использоваться также следующие, более краткие, формы записи. Пусть

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда в этих обозначениях задача (1.1.1) – (1.1.3) приобретает вид

$$\begin{aligned} c^T x &= \min, \\ Ax &= P_0, \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

а ограничения (1.1.2) можно представить в форме

$$\xi_1 P_1 + \xi_2 P_2 + \dots + \xi_n P_n = P_0. \quad (1.1.4)$$

Заметим, что запись основных ограничений в виде равенства (1.1.4) будет использоваться особенно часто.

**Определение 1.1.3.** Будем говорить, что число  $c_i$ , переменная  $\xi_i$  и вектор  $P_i$ , имеющие одинаковые индексы, соответствуют друг другу.

**Определение 1.1.4.** План или псевдоплан  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$  называется опорным, если его ненулевым координатам  $\xi_i$  соответствуют линейно-независимые векторы  $P_i$ . Опорный план или опорный псевдоплан называется невырожденным, если число его ненулевых координат равно  $m$ , и вырожденным – в противном случае.

Так как по принятому соглашению ранг матрицы  $A$  равен  $m$ , то среди векторов-столбцов этой матрицы имеется  $m$  и только  $m$  линейно-независимых. Следовательно, опорные планы и псевдопланы не могут содержать более, чем  $m$ , ненулевых координат. Поясним смысл введенных определений на следующем примере.

**Пример 1.1.1.** Пусть основные ограничения в некоторой задаче линейного программирования имеют вид

$$\begin{aligned} 2\xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3 &= 4, \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 &= 2. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Для такой задачи, согласно определению 1.1.2, вектор  $x_1 = (3, -1, -1)^T$ , является псевдопланом, поскольку он удовлетворяет ограничениям (1.1.5), и при этом у него имеются отрицательные координаты. Вектор  $x_2 = (1, 1, 1)^T$  является планом, так как удовлетворяет и основным, и дополнительным ограничениям задачи. Отметим, что псевдоплан  $x_1$  и план  $x_2$  не являются опорными, поскольку соответствующие их ненулевым координатам векторы  $P_1 = (2, 1)^T$ ,  $P_2 = (-1, 2)^T$ ,  $P_3 = (3, -1)^T$  линейно зависимы. План  $x_3 = (0, 2, 2)^T$  является опорным, так как векторы  $P_2, P_3$ , которые соответствуют положительным координатам  $\xi_2, \xi_3$  этого плана, являются линейно-независимыми. Опорный план  $x_3$  является невырожденным, потому что число ненулевых координат в нем совпадает с рангом матрицы  $A$ . Наконец, вектор  $x_4 = (2, 0, 0)^T$ , очевидно, является вырожденным опорным планом.

Приведем теперь важное замечание, касающееся способа построения опорных псевдопланов и опорных планов. Для простоты обозначений будем считать, что первые  $m$  векторов-столбцов

$$P_1, P_2, \dots, P_m \quad (1.1.6)$$

матрицы  $A$  линейно независимы, т. е. образуют базис пространства  $R_m$ . Это предположение не ограничивает общности рассуждений, так как всегда можно сделать соответствующую перенумерацию переменных  $\xi_i$ .

Опорный псевдоплан или опорный план может быть построен следующим образом. Пусть вектор  $P_0$  раскладывается по выбранному базису (1.1.6) в виде

$$P_0 = \xi_{10} P_1 + \xi_{20} P_2 + \dots + \xi_{m0} P_m. \quad (1.1.7)$$

Равенство (1.1.7) означает, что  $n$ -мерный вектор

$$x_0 = (\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{m0}, 0, \dots, 0)^T$$

удовлетворяет условию (1.1.4), а значит, и основным ограничениям задачи (1.1.1) – (1.1.3). Тогда по определению 1.1.2 вектор  $x_0$  является либо планом, либо псевдопланом задачи (1.1.1) – (1.1.3). Если выбранный базис (1.1.6) оказался таким, что все коэффициенты разложения в (1.1.7) неотрицательны, то  $x_0$  – план задачи, в противном случае  $x_0$  – псевдоплан.

**Определение 1.1.5.** Если  $P_0 = \xi_{10} P_1 + \xi_{20} P_2 + \dots + \xi_{m0} P_m$ , то план или псевдоплан  $x_0 = (\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{m0}, 0, \dots, 0)^T$  будем называть соответствующим базису (1.1.6), а его координаты  $\xi_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , соответствующие базисным векторам, – базисными.

Поскольку ненулевые координаты в векторе  $x_0$  могут быть только среди чисел  $\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{m0}$ , а им соответствуют линейно-независимые векторы из

системы (1.1.6), то план или псевдоплан  $x_0$  согласно определению 1.1.4 является опорным.

В силу единственности разложения вектора по базису каждому базису, выбранному среди векторов-столбцов матрицы  $A$ , соответствует единственный опорный план или опорный псевдоплан. Однако, если опорный план или опорный псевдоплан вырожден, то он может соответствовать разным базисам. Так, в примере 1.1.1 опорный план  $x_4$  соответствует базисам  $P_1, P_2$  и  $P_1, P_3$ , поскольку имеют место разложения  $P_0 = 2P_1 + 0P_2$  и  $P_0 = 2P_1 + 0P_3$ .

## § 2. Основные леммы

В настоящем параграфе приводятся вспомогательные утверждения, которые будут использованы при обосновании так называемого симплексного метода решения задач линейного программирования.

**Определение 1.2.1.** Если  $t$ -мерные векторы  $P_1, P_2, \dots, P_m$  образуют базис пространства  $R_m$ , то матрицу

$$B = (P_1, P_2, \dots, P_m),$$

столбцами которой являются векторы базиса, будем называть базисной, а сам набор этих векторов – базисом  $B$ .

Следующая лемма напоминает читателю способ отыскания коэффициентов разложения вектора по базису.

**Лемма 1.2.1.** Пусть  $P_1, P_2, \dots, P_m$  – базис в пространстве  $R_m$ ,  $B$  – базисная матрица,

$$a = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i, \quad (1.2.1)$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$ . Тогда

$$\alpha = B^{-1} a.$$

**Доказательство.** Так как условие (1.2.1) в матричном виде представляет собой равенство  $a = B\alpha$ , то отсюда с очевидностью следует доказываемое утверждение.

**Лемма 1.2.2.** Пусть векторы

$$P_1, P_2, \dots, P_k \tag{1.2.2}$$

из  $R_m$  линейно независимы, и вектор  $a \in R_n$  раскладывается по этой системе векторов в виде

$$a = \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i. \tag{1.2.3}$$

Для того, чтобы совокупность векторов

$$P_1, \dots, P_{s-1}, a, P_{s+1}, \dots, P_k, \tag{1.2.4}$$

полученная путем замены вектора  $P_s$  в системе (1.2.2) вектором  $a$ , была линейно-независимой системой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha_s \neq 0.$$

**Доказательство.** Пусть  $B$  и  $B'$  – матрицы, столбцами которых являются, соответственно, векторы (1.2.2) и (1.2.4). Так как векторы (1.2.2) линейно независимы, то в матрице  $B$  найдется отличный от нуля минор  $M$   $k$ -го порядка. Пусть, для определенности, он образован из первых  $k$  строк матрицы  $B$ . Пусть минор  $M'$  образован из первых  $k$  строк матрицы  $B'$ . Тогда имеет место равенство

$$M' = \alpha_s M, \tag{1.2.5}$$

что нетрудно проверить, разлагая определитель  $M'$  в сумму определителей по слагаемым  $s$ -го столбца. Если  $\alpha_s \neq 0$ , то в силу (1.2.5)  $M' \neq 0$ , и, следовательно, векторы (1.2.4) линейно независимы. Если же  $\alpha_s = 0$ , то все миноры  $k$ -го

порядка матрицы  $B'$  будут равны нулю. А тогда векторы (1.2.4) линейно зависимы. Лемма доказана.

**Замечание 1.2.1.** При  $k=m$  система (1.2.2) представляет собой базис пространства  $R_m$ . Лемма 1.2.2 дает правило формирования новых базисов на основе некоторого исходного базиса путем замены в этом базисе одного и только одного вектора на новый вектор.

**Замечание 1.2.2.** Если в разложении (1.2.3)  $\alpha_i \neq 0$  для всех  $i=1, 2, \dots, k$ , то согласно лемме 1.2.2 любые  $k$  векторов в системе  $P_1, P_2, \dots, P_k, a$  являются линейно-независимыми. Такие системы называются  $k$ -мерными симплексами.

Хотя для замены в базисе  $P_1, P_2, \dots, P_m$  одного из векторов на вектор  $a \in R_n$  не требуется, чтобы система  $P_1, P_2, \dots, P_k, a$  была симплексом, примем следующее определение.

**Определение 1.2.2.** Если переход от одного базиса пространства  $R_m$  к другому базису произведен путем замены одного и только одного базисного вектора на какой-либо другой вектор, то такой переход будем называть симплексным.

Следующая лемма дает правило пересчета коэффициентов разложения вектора при симплексном переходе от одного базиса к другому.

**Лемма 1.2.3.** Пусть разложения векторов  $a$  и  $b$  по базису  $P_1, P_2, \dots, P_m$  имеют вид

$$a = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i, \quad b = \sum_{i=1}^m \beta_i P_i, \quad (1.2.6)$$

и новый базис

$$P_1, \dots, P_{s-1}, a, P_{s+1}, \dots, P_m \quad (1.2.7)$$

получен путем замены вектора  $P_s$  на вектор  $a$ . Тогда разложение вектора  $b$  по базису (1.2.7) имеет вид

$$b = \sum_{i \neq s}^m \beta'_i P_i + \beta'_s a,$$

где

$$\beta'_i = \beta_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_s} \beta_s, \quad i \neq s, \quad \beta'_s = \frac{\beta_s}{\alpha_s}. \quad (1.2.8)$$

**Доказательство.** Так как система векторов (1.2.7) по условиям леммы линейно независима, то  $\alpha_s \neq 0$  в силу леммы 1.2.2. Тогда согласно первому из равенств (1.2.6)

$$P_s = \frac{1}{\alpha_s} a - \sum_{i \neq s}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_s} P_i.$$

Подставляя найденный вектор  $P_s$  во второе из равенств (1.2.6), получим формулы (1.2.8). Лемма доказана.

**Определение 1.2.3.** Формулы (1.2.8) называются формулами исключения Жордана-Гаусса (чаще формулами Гаусса). При этом число  $\alpha_s$  будем называть ведущим коэффициентом (среди коэффициентов разложения вектора  $a$ ) или ведущим элементом.

Формулы (1.2.8) трудны для запоминания. Далее их использование будет сформулировано в виде алгоритмов пересчета координат. Для формулировки таких алгоритмов составим две таблицы координат векторов  $a$  и  $b$  в исходном базисе  $B$  (см. табл. 1.2.1) и в новом базисе (1.2.7), который обозначим через  $\tilde{B}$  (см. табл. 1.2.2). В этих таблицах в соответствии с леммой 1.2.1 через  $B^{-1}a$ ,  $B^{-1}b$ ,  $\tilde{B}^{-1}a$ ,  $\tilde{B}^{-1}b$  обозначены координаты векторов  $a$  и  $b$  в базисах  $B$  и  $\tilde{B}$  соответственно. В последнем столбце таблицы 1.2.2 записаны формулы (1.2.8).

**Таблица 1.2.1**

Базис $B$	$B^{-1}a$	$B^{-1}b$
$P_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$
.....	.....	.....
$P_{s-1}$	$\alpha_{s-1}$	$\beta_{s-1}$
$P_s$	$\alpha_s$	$\beta_s$
$P_{s+1}$	$\alpha_{s+1}$	$\beta_{s+1}$
.....	.....	.....
$P_m$	$\alpha_m$	$\beta_m$

**Таблица 1.2.2**

Базис $\tilde{B}$	$\tilde{B}^{-1}a$	$\tilde{B}^{-1}b$
$P_1$	0	$\beta_1 - \alpha_1 / \alpha_s \beta_s$
.....	....	.....
$P_{s-1}$	0	$\beta_{s-1} - \alpha_{s-1} / \alpha_s \beta_s$
$a$	1	$\beta_s / \alpha_s$
$P_{s+1}$	0	$\beta_{s+1} - \alpha_{s+1} / \alpha_s \beta_s$
.....	....	.....
$P_m$	0	$\beta_m - \alpha_m / \alpha_s \beta_s$

Правило исключений Жордана-Гаусса сформулируем теперь в виде двух алгоритмов перехода от таблицы 1.2.1 к таблице 1.2.2. Алгоритмы формулируются для случая, когда в исходном базисе вектор  $P_s$  заменяется вектором  $a$ .

**Алгоритм 1**

1. В первый столбец таблицы 1.2.2 вписывается новый базис  $\tilde{B}$ , который получен из исходного базиса  $B$  путем замены вектора  $P_s$  на вектор  $a$ .
2. Элементы  $s$ -ой строки таблицы 1.2.1 делятся на ведущий коэффициент (ведущий элемент)  $\alpha_s$  и результат записывается в  $s$ -ую строку таблицы 1.2.2.

3. При  $i \neq s$  из  $i$ -ой строки таблицы 1.2.1 вычитается новая  $s$ -ая строка таблицы 1.2.2, умноженная на  $\alpha_i$ , и результат записывается в  $i$ -ую строку таблицы 1.2.2.

Заметим, что алгоритмом 1 удобно пользоваться, когда нужно пересчитать координаты многих векторов  $B^{-1}b_1, B^{-1}b_2, \dots, B^{-1}b_k$  одновременно. В этом случае в таблице 1.2.1 вместо одного столбца  $B^{-1}b$  следует записать  $k$  столбцов  $B^{-1}b_j, j=1, \dots, k$  и преобразовывать строки таблицы 1.2.1 по алгоритму 1.

## А л г о р и т м 2 (Правило прямоугольника)

1-ый и 2-ой пункты повторяют, соответственно, 1-ый и 2-ой пункты алгоритма 1.

3. В незаполненные строки столбца  $\tilde{B}^{-1}a$  таблицы 1.2.2 проставляются нули.

4. Элементы  $\beta'_i, i \neq s$ , таблицы 1.2.2 подсчитываются по следующему правилу. Из элементов таблицы 1.2.1 мысленно строится прямоугольник, у которого ведущий элемент  $\alpha_s$  и пересчитываемый элемент  $\beta_i$  являются вершинами, т. е. строится прямоугольник с вершинами  $\alpha_s, \beta_i, \alpha_i, \beta_s$ . Из произведения  $\alpha_s \beta_i$  элементов, стоящих на диагонали с ведущим элементом  $\alpha_s$ , вычитается произведение  $\alpha_i \beta_s$  элементов, стоящих на другой диагонали, и результат делится на ведущий элемент. Полученное число вписывается в  $i$ -ую строку столбца  $\tilde{B}^{-1}b$ .

Алгоритмом 2 удобно пользоваться в том случае, когда нужно вычислить одну какую-либо координату  $\beta_i'$  или проверить, верно ли она вычислена по алгоритму 1.

### **§ 3. Симплексный метод** **(метод последовательного улучшения плана)**

Описываемый здесь метод, который называется симплексным методом или методом последовательного улучшения плана, основан на симплексных переходах от одного базиса к другому путем замены одного базисного вектора на другой вектор-столбец матрицы  $A$  системы уравнений (1.1.2).

#### **П.1. Симплексная таблица**

Будем считать, как и раньше, что выбранный базис  $B$  состоит из первых  $m$  векторов-столбцов  $P_1, P_2, \dots, P_m$  матрицы  $A$  основных ограничений,  $B = (P_1, P_2, \dots, P_m)$  – базисная матрица, и основные ограничения задачи (1.1.1) – (1.1.3) имеют вид

$$\xi_1 P_1 + \xi_2 P_2 + \dots + \xi_n P_n = P_0. \quad (1.3.1)$$

Обратим внимание на то, что система линейных алгебраических уравнений

$$B^{-1} P_1 \xi_1 + B^{-1} P_2 \xi_2 + \dots + B^{-1} P_n \xi_n = B^{-1} P_0 \quad (1.3.2)$$

является эквивалентной системе (1.3.1).

Пусть разложения векторов-столбцов матрицы  $A$  имеют вид

$$P_k = \xi_{1k} P_1 + \xi_{2k} P_2 + \dots + \xi_{mk} P_m, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.3.3)$$

Тогда согласно лемме 1.2.1

$$B^{-1}P_k = (\xi_{1k}, \xi_{2k}, \dots, \xi_{mk})^T, \quad k=0,1, \dots, n.$$

Равенство (1.3.3) при  $k=0$  показывает, что  $n$ -мерный вектор

$$x_0 = (\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{m0}, 0, \dots, 0)^T \quad (1.3.4)$$

удовлетворяет системе уравнений (1.3.2).

Пусть к тому же выбранный базис  $B$  таков, что для него выполняется неравенство

$$B^{-1}P_0 \geq 0,$$

т. е.  $\xi_{i0} \geq 0$  для всех  $i=1, \dots, m$ . Тогда вектор (1.3.4) – план, соответствующий базису  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . При этом план  $x_0$  является опорным, поскольку его ненулевым координатам соответствуют линейно независимые векторы-столбцы матрицы  $A$ .

Составим таблицу 1.3.1, в которой столбцами являются коэффициенты разложений  $B^{-1}P_j$  векторов  $P_j$  по базису  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , т. е. столбцы образуют матрицу системы уравнений (1.3.2).

Эту матрицу окаймляют дополнительные строки и столбцы. Верхняя строка содержит коэффициенты целевой функции (1.1.1). В первый из столбцов записаны векторы базиса  $B$ , во второй –  $m$ -мерный вектор  $c_B$ , координатами которого являются коэффициенты функции (1.1.1), соответствующие векторам базиса  $B$ .

В последнюю строку таблицы 1.3.1, которую называют строкой критериев, вписаны числа

$$\Delta_j = c_B^T B^{-1}P_j - c_j = \sum_{i=1}^m c_i \xi_{ij} - c_j, \quad j=0, \dots, n. \quad (1.3.5)$$

Для единообразия записи чисел  $\Delta_j$ , вычисленных по формуле (1.3.5), считается, что

$$c_0 = 0.$$

**Таблица 1.3.1**

		0	$c_1$	$c_2$	...	$c_s$	...	$c_m$	...	$c_j$	...	$c_n$
$B$	$c_B$	$B^{-1}P_0$	$B^{-1}P_1$	$B^{-1}P_2$	...	$B^{-1}P_s$	...	$B^{-1}P_m$	...	$B^{-1}P_j$	...	$B^{-1}P_n$
$P_1$	$c_1$	$\xi_{10}$	1	0	...	0	...	0	...	$\xi_{1j}$	...	$\xi_{1n}$
$P_2$	$c_2$	$\xi_{20}$	0	1	...	0	...	0	...	$\xi_{2j}$	...	$\xi_{2n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$P_s$	$c_s$	$\xi_{s0}$	0	0	...	1	...	0	...	$\xi_{sj}$	...	$\xi_{sn}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$P_m$	$c_m$	$\xi_{m0}$	0	0	...	0	...	1	...	$\xi_{mj}$	...	$\xi_{mn}$
Оценки		$\Delta_0$	0	0	...	0	...	0	...	$\Delta_j$	...	$\Delta_n$

**Определение 1.3.1.** Числа  $\Delta_j$ , найденные согласно (1.3.5), при  $j=1, \dots, n$  называются оценками.

Заметим, что число

$$\Delta_0 = c_B^T B^{-1} P_0 = c^T x_0$$

является значением целевой функции (1.1.1) при опорном плане (1.3.4).

**Определение 1.3.2.** Таблица 1.3.1 называется симплексной для задачи (1.1.1) – (1.1.3). Расширенную матрицу системы уравнений (1.3.2) назовем основной симплексной таблицей для этой задачи. Симплексную таблицу 1.3.1 будем называть соответствующей базису  $B$ .

Поскольку разложение любого вектора по базису единственно, то выбор базиса единственным образом определяет соответствующую этому базису симплексную таблицу.

Обратим внимание на то, что принципом выбора базиса  $B$  является требование  $B^{-1}P_0 \geq 0$ , так как только в этом случае вектор (1.3.4) является планом задачи линейного программирования. Заметим, что способы выбора базиса  $B$ , удовлетворяющего указанному выше требованию, будут описаны позже.

Выведем теперь правила симплексного перехода от исходного базиса  $B$  к новому базису, которые гарантируют, что, во-первых, новому базису также будет соответствовать некоторый опорный план, и, во-вторых, этот новый план будет не хуже предыдущего по значению целевой функции. Затем с учетом этих правил будет показано, как на основе симплексной таблицы, соответствующей базису  $B$ , можно построить симплексную таблицу, которая соответствует новому базису.

## **П.2. Правила перехода к новому базису и пересчета симплексной таблицы**

Симплексный метод предполагает отыскание оптимального плана среди опорных планов задачи линейного программирования. Напомним, что базисными координатами опорного плана  $x_0 = (\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{m0}, 0, \dots, 0)^T$ , соответствующего выбранному базису  $B$ , являются координаты вектора  $B^{-1}P_0$ . Поскольку целью решения задачи линейного программирования является отыскание плана, придающего минимальное значение целевой функции, то переход от выбранного базиса  $B$  и соответствующей ему симплексной таблицы к новому базису  $\tilde{B}$  и новой симплексной таблице целесообразно осуществлять на основе следующих двух требований.

**Требование 1.** Для нового базиса  $\tilde{B}$  должно выполняться условие

$$\tilde{B}^{-1}P_0 \geq 0,$$

т. е. новому базису должен соответствовать новый опорный план.

Обозначим новый опорный план, соответствующий базису  $\tilde{B}$ , через  $\tilde{x}$ .

**Требование 2.** Для значения  $\tilde{\Delta}_0$  линейной формы (1.1.1) на опорном плане  $\tilde{x}$  должно выполняться неравенство

$$\tilde{\Delta}_0 \leq \Delta_0,$$

т. е.  $c^T \tilde{x} \leq c^T x_0$ .

**Определение 1.3.3.** Если выполняется неравенство  $\tilde{\Delta}_0 \leq \Delta_0$ , то говорят, что план  $\tilde{x}$  не хуже, а если знак этого неравенства является строгим, то лучше плана  $x_0$ .

Симплексный метод и дает возможность путем последовательного улучшения опорных планов найти оптимальный план.

Пусть в базисе  $B$  базисный вектор  $P_s$  заменяется вектором  $P_j$ , не содержащимся в этом базисе. Полученный после такой замены набор векторов обозначим символом  $\tilde{B}$ . В силу леммы 1.2.2 набор векторов  $\tilde{B}$  будет базисом, если коэффициент при векторе  $P_s$  в разложении вектора  $P_j$  по базису  $B$  (см. (1.3.3) при  $k = j$ ) отличен от нуля, т. е. если  $\xi_{sj} \neq 0$ .

Дальнейшие рассуждения направлены на то, чтобы выяснить те условия выбора векторов  $P_j, P_s$ , при которых Требования 1, 2 будут выполнены.

Напомним, что  $k$ -ый столбец симплексной таблицы, соответствующей базису  $B$ , представляет собой набор коэффициентов разложения вектора  $P_k, k = 0, 1, \dots, n$ , по этому базису. Согласно лемме 1.2.3 при замене вектора  $P_s$

в базисе  $B$  на вектор  $P_j$  коэффициенты разложения по новому базису любого из векторов  $P_k$  пересчитываются по формулам исключений Жордана-Гаусса с ведущим элементом  $\xi_{sj}$ . Значит, симплексная таблица, соответствующая новому базису  $\tilde{B}$ , должна быть получена пересчетом предыдущей таблицы по схеме исключений Жордана-Гаусса с ведущим элементом  $\xi_{sj}$ .

Итак, приступим к выполнению Требования 1 перехода к новому базису. Согласно лемме 1.2.3,  $s$ -ая строка симплексной таблицы при пересчете делится на ведущий элемент  $\xi_{sj}$ . При этом, для элементов столбца  $\tilde{B}^{-1}P_0$  должны выполняться условия

$$\tilde{\xi}_{j0} = \frac{\xi_{s0}}{\xi_{sj}} \geq 0, \quad (1.3.6)$$

$$\tilde{\xi}_{i0} = \xi_{i0} - \frac{\xi_{s0}}{\xi_{sj}} \xi_{ij} \geq 0, \quad \text{при } i \neq j. \quad (1.3.7)$$

Так как

$$\xi_{s0} \geq 0, \quad (1.3.8)$$

то из требования (1.3.6) следует неравенство

$$\xi_{sj} > 0. \quad (1.3.9)$$

(Заметим, что если

$$\xi_{s0} = 0,$$

то, независимо от знака ведущего элемента  $\xi_{sj}$ , условия (1.3.6), (1.3.7) будут выполнены, так как план  $x_0 = (\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{m0}, 0, \dots, 0)^T$  не изменится при переходе к новому базису).

Теперь найдем условия, при которых будут выполнены неравенства (1.3.7). С учетом (1.3.9) эти неравенства заведомо выполняются для тех  $i$ , для которых  $\xi_{ij} \leq 0$ . Для тех  $i$ , для которых  $\xi_{ij} > 0$ , условия (1.3.7) можно записать в виде

$$\frac{\xi_{s0}}{\xi_{sj}} \leq \frac{\xi_{i0}}{\xi_{ij}}.$$

Отсюда вытекает, что искомый индекс  $s$  должен удовлетворять следующему условию:

$$\frac{\xi_{s0}}{\xi_{sj}} = \min_{i/\xi_{ij}>0} \xi_{i0}/\xi_{ij}. \quad (1.3.10)$$

Таким образом, если для ввода в новый базис выбран вектор  $P_j$ , а номер  $s$  выводящегося из базиса вектора удовлетворяет условиям (1.3.10), то новому базису  $\tilde{B}$  также будет соответствовать план, поскольку для всех номеров  $i$ , соответствующих новым базисным векторам, будут выполняться неравенства  $\tilde{\xi}_{i0} \geq 0$ .

Выполним теперь Требование 2 формирования нового базиса  $\tilde{B}$ . Для этого найдем правило выбора вводящегося в базис  $\tilde{B}$  вектора  $P_j$ . Напомним, что согласно этому требованию для значений целевой функции на новом опорном плане и исходном опорном плане должно выполняться неравенство  $\tilde{\Delta}_0 \leq \Delta_0$ .

Убедимся сначала, что оценки при переходе к базису  $\tilde{B}$  тоже пересчитываются по схеме исключений Жордана-Гаусса.

Действительно, учитывая равенства (1.3.6), (1.3.7), а также то обстоятельство, что в столбце  $c_B$  новой симплексной таблицы коэффициент  $c_s$  будет заменен коэффициентом  $c_j$ , найдем

$$\tilde{\Delta}_k = \sum_{i \neq j}^m c_i \tilde{\xi}_{ik} + c_j \frac{\xi_{sk}}{\xi_{sj}} - c_k = \sum_{i \neq j}^m c_i (\xi_{ik} - \xi_{ij} \frac{\xi_{sk}}{\xi_{sj}}) + c_j \frac{\xi_{sk}}{\xi_{sj}} - c_k,$$

$k = 0, \dots, n$ . Заметим, что в последней сумме суммирование можно распространить на все индексы, так как выражение в скобках при  $i = s$  равно нулю. Тогда, произведя в этой сумме элементарную перегруппировку слагаемых, получим

$$\tilde{\Delta}_k = \sum_{i=1}^m c_i \xi_{ik} - c_k - \frac{\xi_{sk}}{\xi_{sj}} (\sum_{i=1}^m c_i \xi_{ij} - c_j).$$

Отсюда в силу формул (1.3.5) имеем

$$\tilde{\Delta}_k = \Delta_k - \frac{\xi_{sk}}{\xi_{sj}} \Delta_j, \quad k = 0, \dots, n. \quad (1.3.11)$$

Это и есть формулы исключений Жордана-Гаусса для пересчета оценок симплексной таблицы.

Заметим, что оценки в новой симплексной таблице могут быть вычислены и по правилам (1.3.5). Совпадение результатов вычислений по двум разным формулам является хорошим критерием проверки правильности найденных оценок.

Далее, формула (1.3.11) при  $k = 0$  имеет вид

$$\tilde{\Delta}_0 = \Delta_0 - \frac{\xi_{s_0}}{\xi_{s_j}} \Delta_j. \quad (1.3.12)$$

Из (1.3.12), учитывая неравенства (1.3.8) и (1.3.9) следует, что значение целевой функции  $c^T x$  при переходе к новому базису изменится в зависимости от знака оценки  $\Delta_j$ . Ясно, что для уменьшения значения линейной формы нужно выбирать вводящийся в базис вектор  $P_j$  соответствующим любой из оценок

$$\Delta_j > 0. \quad (1.3.13)$$

Таким образом, способ выбора вектора  $P_j$ , входящего в новый базис, указан.

Ситуацию, при которой нет оценок, удовлетворяющих условиям (1.3.13), описывает следующая теорема.

**Теорема 1.3.1 (оптимальности).** Пусть для базиса

$$P_1, P_2, \dots, P_m \quad (1.3.14)$$

выполняются неравенства

$$\xi_{i_0} \geq 0$$

для всех  $i = 1, \dots, t$  и неравенства

$$\Delta_j \leq 0$$

для всех  $j = 1, \dots, n$ . Тогда опорный план соответствующий базису (1.3.14), оптимален.

**Доказательство.** Пусть  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$  – произвольный план задачи

(1.1.1) – (1.1.3). Тогда  $\eta_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ , и  $\sum_{j=1}^n \eta_j P_j = P_0$ . Так как  $P_j = \sum_{k=1}^m \xi_{kj} P_k$

(см. табл. 1.3.1), то

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \xi_{kj} \eta_j P_k = P_0.$$

С другой стороны, по условию выполняется равенство

$$P_0 = \sum_{k=1}^m \xi_{k0} P_k.$$

Но разложение вектора по базису единственно. Значит,

$$\xi_{k0} = \sum_{j=1}^m \xi_{kj} \eta_j, \quad \kappa = 1, \dots, m. \quad (1.3.15)$$

Далее, так как  $\Delta_j \leq 0$ , для всех  $j = 1, \dots, n$ , то из формулы (1.3.5) следуют неравенства  $\sum_{k=1}^m c_k \xi_{kj} \leq c_j$  для всех  $j = 1, \dots, n$ . Отсюда с учетом, что  $\eta_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , имеем

$$c^T y = \sum_{j=1}^n c_j \eta_j \geq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_k \xi_{kj} \eta_j.$$

Сменим в последнем неравенстве порядок суммирования, и, учитывая (1.3.15), получим

$$c^T y \geq \sum_{k=1}^m c_k \sum_{j=1}^n \xi_{kj} \eta_j = \sum_{k=1}^m c_k \xi_{k0} = c^T x_0.$$

Это неравенство, в силу произвольности плана  $y$ , и означает, что опорный план  $x_0$  оптимален. Теорема доказана.

**Определение 1.3.4.** *Базис  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , для которого выполняются неравенства  $\Delta_j \leq 0$  при всех  $j=1, \dots, n$  и только такой, будем называть оптимальным.*

Обратим внимание на то, что теорема 1.3.1 указывает лишь достаточные условия оптимальности плана. Эти условия не являются необходимыми. Если оптимальный план вырожден, то он может соответствовать такому базису, при котором в симплексной таблице есть и положительные оценки. В этом случае базис не будет называться оптимальным.

Разберёмся теперь с ситуацией, при которой воспользоваться формулой (1.3.10) нельзя. Эта ситуация возникает в том случае, когда среди оценок есть такая, что  $\Delta_j > 0$ , но при этом  $\xi_{ij} \leq 0$  для всех  $i = 1, \dots, m$ . Такую ситуацию описывает

**Теорема 1.3.2.** Пусть базису (1.3.14) соответствует опорный план  $x_0 = (\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{m0}, 0, \dots, 0)^T$ , и для этого плана вычислены оценки  $\Delta_j$ . Если для какого-либо  $j$  выполняется неравенство

$$\Delta_j > 0,$$

но при этом имеют место неравенства

$$\xi_{ij} \leq 0$$

для всех  $i = 1, \dots, m$ , то линейная форма  $c^T x$  задачи (1.1.1) – (1.1.3) не ограничена снизу на множестве ограничений, т. е. задача линейного программирования не имеет решения.

**Доказательство.** Так как по условиям теоремы выполняется равенство

$$P_0 = \xi_{10} P_1 + \xi_{20} P_2 + \dots + \xi_{m0} P_m,$$

то, вычитая из него равенство (1.3.3) при  $k = j$ , умноженное на произвольное положительное число  $\theta$ , получим

$$P_0 = \sum_{i=1}^m (\xi_{i0} - \theta \xi_{ij}) P_i + \theta P_j.$$

Это равенство показывает, что  $n$ -мерный вектор

$$\tilde{x} = (\xi_{10} - \theta \xi_{1j}, \dots, \xi_{m0} - \theta \xi_{mj}, 0, \dots, \theta, \dots, 0)^T,$$

где  $\theta$  является его  $j$ -ой координатой, удовлетворяет основным ограничениям (1.1.4) при любом положительном  $\theta$ . Кроме того, поскольку  $\xi_{i0} \geq 0$  для всех  $i = 1, \dots, m$ , в силу условий теоремы, имеет место неравенство  $\tilde{x} \geq 0$  и, следовательно, точка  $\tilde{x}$  является планом задачи (1.1.1) – (1.1.3) при любом  $\theta > 0$ . Тогда из равенства

$$c^T \tilde{x} = \sum_{i=1}^m c_i (\xi_{i0} - \theta \xi_{ij}) + \theta c_j = c^T x_0 - \theta \Delta_j,$$

полученного с учетом формул (1.3.5), в силу произвольности  $\theta > 0$  следует неограниченность снизу на допустимом множестве линейной формы  $c^T x$ . Теорема доказана.

Итак, выяснено, что при симплексном переходе от одного базиса к другому справедливо следующее.

1. При использовании условия (1.3.10) выбора выводющегося из базиса вектора план, соответствующий одному базису, переходит в план, соответствующий новому базису.

2. Только при соблюдении условия (1.3.13) выбора входящего в новый базис вектора значение целевой функции на новом плане может быть уменьшено.

3. Теорема 1.3.1 позволяет определить является ли опорный план, соответствующий выбранному базису, оптимальным.

4. Теорема 1.3.2 указывает условия, при которых задача не имеет решения.

На основе проведенных рассуждений и сделанных выводов сформулируем далее метод решения задачи (1.1.1) – (1.1.3).

### II. 3. Симплексный метод

Симплексный метод, называемый также симплекс-методом, заключается в следующем.

1. Выбирается базис  $B$  из векторов-столбцов матрицы  $A$ .

2. Вычисляется вектор  $B^{-1}P_0$ . Если условие

$$B^{-1}P_0 \geq 0$$

не выполняется, то следует возвращение к пункту 1. В противном случае следует переход к пункту 3.

3. Составляется соответствующая этому базису симплексная таблица. Для этого выписывается расширенная матрица системы

$$B^{-1}P_1\xi_1 + B^{-1}P_2\xi_2 + \dots + B^{-1}P_n\xi_n = B^{-1}P_0,$$

и вычисляются значения

$$\Delta_j = c_B^T B^{-1}P_j - c_j = \sum_{i=1}^m c_i \xi_{ij} - c_j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где  $c_0 = 0$ .

4. Если

$$\Delta_j \leq 0$$

для всех  $j = 1, \dots, n$ , то задача решена, соответствующий базису  $B$  план является оптимальным, а элементы  $\xi_{i0}$  столбца  $B^{-1}P_0$  таблицы являются базисными координатами (см. определение 1.1.5) оптимального плана. В противном случае выполняется пункт 5 метода.

5. Просматриваются столбцы  $B^{-1}P_j$  симплексной таблицы для тех  $j$ , для которых  $\Delta_j > 0$ . Если хотя бы для одного из таких столбцов  $\xi_{ij} \leq 0$  для всех  $i$ , то процесс решения задачи прекращается, так как линейная форма является неограниченной снизу и задача линейного программирования не имеет решения. Иначе следует переход к пункту 6.

6. Выбирается любая оценка  $\Delta_j > 0$ , и тем самым фиксируется вектор  $P_j$ , который вводится в новый базис.

7. Отыскивается минимальное из отношений  $\xi_{i0} / \xi_{ij}$  для тех  $i$ , для которых  $\xi_{ij} > 0$ . Если этот минимум достигается при  $i = s$ , то базисный вектор  $P_s$  выводится из базиса. Если минимум достигается сразу для нескольких индексов  $i$ , то выбирается любой из них.

8. Строится симплексная таблица, соответствующая новому базису. Для этого в окаймляющих столбцах «В» и « $c_B$ » симплексной таблицы 1.3.1 вектор  $P_s$  и число  $c_s$  заменяются, соответственно, на  $P_j$  и  $c_j$ . Элемент  $\xi_{sj}$  принимается за ведущий, и проводится процесс исключений элементов  $j$ -го столбца по

одному из алгоритмов из § 2 (см. табл. 1.2.1 и 1.2.2). В строку критериев заносятся значения  $\Delta_j, j=0, \dots, n$ , вычисленные по формулам (1.3.5) или (1.3.11). Для вновь полученной таблицы процесс повторяется с пункта 4.

Сделаем относительно построенного метода некоторые вычислительные замечания.

**Замечание 1.3.1.** Учитывая формулу (1.3.12) заметим, что значение линейной формы возрастет, если в базис вводить тот вектор  $P_j$ , для которого выполняется неравенство  $\Delta_j < 0$ . Поэтому при решении задачи максимизации функции  $c^T x$  с ограничениями (1.1.2) – (1.1.3) можно использовать тот же алгоритм с той лишь разницей, что в новый базис следует вводить вектор  $P_j$ , для которого  $\Delta_j < 0$ . Оптимальный план задачи максимизации будет получен, когда выполнятся неравенства  $\Delta_j \geq 0$  для всех  $j=1, \dots, n$ . Вывод о неограниченности сверху на допустимом множестве функции  $c^T x$  может быть сделан, если хотя бы для одного  $j$  выполнятся одновременно неравенства  $\Delta_j < 0, \xi_{ij} \leq 0, i=1, \dots, m$ .

**Замечание 1.3.2.** Формула (1.3.12) показывает, что значение  $\Delta_0$  не изменится, если в базис вводить вектор  $P_j$ , для которого  $\Delta_j = 0$ . Значит, если в заключительной симплексной таблице среди небазисных векторов  $P_j$  есть такой, для которого  $\Delta_j = 0$ , то, вводя его в базис, можно получить еще один оптимальный план.

**Замечание 1.3.3.** Согласно пункту 6 симплексного метода возможен произвол в выборе вводящегося в базис вектора. Это случается, когда число положительных оценок в симплексной таблице больше единицы. Согласно пункту 7 симплексного алгоритма выбор выводящегося из базиса вектора тоже

может быть альтернативным. Если задача линейного программирования имеет неединственное решение, то различные пути перехода к новым базисам могут привести к различным оптимальным планам. Однако значения целевой функции на этих планах будут совпадать.

Описанную в замечании 1.3.3 ситуацию рассмотрим на следующем примере.

**Пример 1.3.1.** Пусть требуется минимизировать симплексным методом линейную функцию

$$2\xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3 - 2\xi_4$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_4 + \xi_5 &= 4, \\ -3\xi_1 + \xi_3 + \xi_4 &= 2, \\ \xi_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Выберем начальный базис из векторов  $P_5 = (1, 0)^T$  и  $P_3 = (0, 1)^T$  (но можно в качестве начального базиса выбрать и векторы  $P_2 = (1, 0)^T$ ,  $P_3 = (0, 1)^T$ ).

Образует из выбранных векторов базисную матрицу

$$B = (P_5, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При выбранном порядке записи векторов в базисной матрице эта матрица является единичной. Тогда обратная к ней матрица также является единичной. Следовательно,  $B^{-1}P_j = P_j$ , и для данного примера симплексной является таблица 1.3.2, основой которой является расширенная матрица системы основных ограничений.

Так как положительными являются оценки  $\Delta_2, \Delta_4$ , то в базис может вводиться вектор  $P_2$  или вектор  $P_4$ . Пусть решено ввести в базис вектор  $P_4$ , соответствующий наибольшей оценке 5.

**Таблица 1.3.2**

		$c_0 \equiv 0$	2	-1	3	-2	0
B	$c_B$	$B^{-1}P_0$	$B^{-1}P_1$	$B^{-1}P_2$	$B^{-1}P_3$	$B^{-1}P_4$	$B^{-1}P_5$
$P_5$	0	4	1	1	0	1	1
$P_3$	3	2	-3	0	1	<u>1</u>	0
Оценки	$\Delta_j$	6	-11	1	0	<u>5</u>	0

Наименьшее из отношений 4:1, 2:1 элементов столбца  $B^{-1}P_0$  к положительным элементам столбца  $B^{-1}P_4$  находится в строке, соответствующей базисному вектору  $P_3$ . Поэтому из базиса  $B$  выводится вектор  $P_3$ , и образуется новый базис  $B_1 = (P_5, P_4)$ . После исключения элементов в столбце  $B^{-1}P_4$  с помощью ведущего элемента 1 получается таблица 1.3.3, в которой столбцами являются коэффициенты разложений тех же самых векторов  $P_j, j = 0, 1, \dots, n$ , по новому базису  $B_1 = (P_5, P_4)$ .

**Таблица 1.3.3**

		$c_0 \equiv 0$	2	-1	3	-2	0
$B_1$	$c_{B_1}$	$B_1^{-1}P_0$	$B_1^{-1}P_1$	$B_1^{-1}P_2$	$B_1^{-1}P_3$	$B_1^{-1}P_4$	$B_1^{-1}P_5$
$P_5$	0	2	4	<u>1</u>	-1	0	1
$P_4$	-2	2	-3	0	1	1	0
Оценки	$\Delta_j$	-4	4	1	-5	0	0

Если теперь ввести в базис вектор  $P_2$ , соответствующий положительной оценке  $\Delta_2 = 1$ , то он заменит в базисе вектор  $P_5$ . Новая симплексная таблица 1.3.4, соответствующая новому базису  $B_2 = (P_2, P_4)$ , получается после процесса

исключений с помощью ведущего элемента (подчеркнутой в таблице 1.3.3 единицы).

**Таблица 1.3.4**

		$c_0 \equiv 0$	2	-1	3	-2	0
$B_2$	$c_{B_2}$	$B_2^{-1}P_0$	$B_2^{-1}P_1$	$B_2^{-1}P_2$	$B_2^{-1}P_3$	$B_2^{-1}P_4$	$B_2^{-1}P_5$
$P_2$	-1	2	4	1	-1	0	1
$P_4$	-2	2	-3	0	1	1	0
Оценки	$\Delta_j$	-6	0	0	-4	0	-1

В таблице 1.3.4 нет положительных оценок. Процесс решения окончен. Оптимальным планом является вектор  $x^* = (0, 2, 0, 2, 0)^T$ , а  $\Delta_0 = -6$  является минимальным значением линейной формы  $c^T x$ .

Получим теперь оптимальный план, изменив порядок введения векторов в базис. Так как в таблице 1.3.3 оценка  $\Delta_1$  тоже положительна, то на этом этапе вычислений в базис можно ввести и вектор  $P_1$ . В таком случае получается таблица 1.3.5.

**Таблица 1.3.5**

		$c_0 \equiv 0$	2	-1	3	-2	0
$B_4$	$c_{B_4}$	$B_4^{-1}P_0$	$B_4^{-1}P_1$	$B_4^{-1}P_2$	$B_4^{-1}P_3$	$B_4^{-1}P_4$	$B_4^{-1}P_5$
$P_1$	2	1/2	1	1/4	-1/4	0	1/4
$P_4$	-2	7/2	0	3/4	1/4	1	3/4
Оценки	$\Delta_j$	-6	0	0	-4	0	-1

Так как положительных оценок в таблице 1.3.5 нет, то задача решена, и оптимальным планом является вектор  $x_1^* = (1/2, 0, 0, 7/2, 0)$ , отличный от плана

$x^*$ , но, естественно, с тем же оптимальным значением  $c^T x_1^* = -6$  линейной формы.

Заметим, что из таблицы 1.3.5 можно получить и оптимальный план  $x^*$ . Для этого нужно ввести в базис вектор  $P_2$ , соответствующий нулевой оценке, вместо вектора  $P_1$ . Тогда новый базис будет образован из векторов  $P_2, P_4$ , и совпадет с базисом из таблицы 1.3.4. А поскольку базису соответствует единственная симплексная таблица, то таблица 1.3.5 преобразуется в таблицу 1.3.4.

## **§ 4. Способы приведения задач линейного программирования к каноническому виду. Метод дополнительных переменных**

В практике возникают задачи линейного программирования в форме, отличной от канонической. Но оказывается, что решение задачи линейного программирования, заданной в другой форме, всегда может быть сведено к решению такой задачи, которая имеет каноническую форму. Данный параграф и посвящен изложению правил сведения любой задачи линейного программирования к виду (1.1.1) – (1.1.3).

1) Пусть в практике возникла задача максимизации линейной функции  $c^T x$  при ограничениях (1.1.2), (1.1.3). Для решения такой задачи можно применить следующий способ. У функции (1.1.1) изменяется знак на противоположный. Вместо задачи (1.1.1) – (1.1.3) решается вспомогательная задача минимизации функции  $-c^T x$  при ограничениях (1.1.2), (1.1.3). Такая вспомогательная задача будет иметь форму (1.1.1) – (1.1.3). Легко понять, что оптимальные планы исходной и вспомогательной задач совпадут, а значения

целевых функций этих задач для оптимальных планов будут отличаться по знаку.

Второй способ решения задачи максимизации указан фактически в замечании 1.3.1 к алгоритму. А именно. задачу максимизации можно решать симплексным методом и не изменяя знак линейной формы. Для этого на каждой итерации следует вводить в базис вектор, соответствующий отрицательной оценке, а счет останавливать в том случае, когда в строке критериев симплексной таблицы отрицательных оценок нет.

2) Пусть теперь в задаче линейного программирования не наложены ограничения по знаку на все или хотя бы на некоторые переменные  $\xi_i$ . Тогда применяется следующий прием.

Пусть

$$I = \{1, 2, \dots, n\}, I' \subset I,$$

и на переменные  $\xi_i, i \in I'$ , и только на них не наложены ограничения по знаку.

Введем новые переменные  $\xi'_i, \xi_{n+1}$ , положив

$$\xi_i = \xi'_i - \xi_{n+1} \text{ для } i \in I', \quad \xi_i = \xi'_i \text{ для } i \in I \setminus I', \quad (1.4.1)$$

и поставим на основе исходной задачи (1.1.1) – (1.1.3) вспомогательную задачу в новых переменных следующим образом.

В целевой функции и основных ограничениях исходной задачи делается замена переменных по формулам (1.4.1), а дополнительные ограничения новой задачи записываются в виде

$$\xi'_i \geq 0, \xi_{n+1} \geq 0, i \in I', \xi_i \geq 0, i \notin I'.$$

В поставленной таким образом вспомогательной задаче линейного программирования все переменные ограничены по знаку. Следовательно, она имеет каноническую форму, и для ее решения можно применить симплексный метод.



Введем дополнительно переменные  $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{n+m}$ , число которых равно числу неравенств основных ограничений, и поставим задачу минимизации функции

$$c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_n \xi_n + 0 \xi_{n+1} + \dots + 0 \xi_{n+m} \quad (1.4.5)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + \dots + a_{1n} \xi_n + \xi_{n+1} &= a_{10}, \\ a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + \dots + a_{2n} \xi_n + \xi_{n+2} &= a_{20}, \\ \dots & \\ a_{m1} \xi_1 + a_{m2} \xi_2 + \dots + a_{mn} \xi_n + \xi_{n+m} &= a_{m0}, \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

$$\xi_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n + m. \quad (1.4.7)$$

Переменные  $\xi_{n+k}$ ,  $k = 1, \dots, m$ , называются дополнительными. Если в системе (1.4.3) для некоторого индекса  $i$  выполняется равенство

$$a_{i1} \xi_1 + a_{i2} \xi_2 + \dots + a_{in} \xi_n = a_{i0},$$

то в задаче (1.4.5) – (1.4.7) полагается  $\xi_{n+i} = 0$ .

Обратим внимание на то, что линейные формы (1.4.2) и (1.4.5) в поставленных задачах совпадают.

Задачу (1.4.5) – (1.4.7) будем называть вспомогательной для задачи (1.4.2) – (1.4.4).

Вспомогательная задача имеет каноническую форму, поэтому к ней можно применять симплексный метод. Причем заметим, что если все свободные члены в системе ограничений (1.4.6) неотрицательны, то в этом и только в этом случае при решении вспомогательной задачи за исходный можно выбрать базис из векторов-столбцов  $P_j$ , соответствующих дополнительным переменным.

Для упрощения изложений запишем задачу (1.4.2) – (1.4.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} c^T x & - \min, \\ Ax & \leq P_0, \\ x & \geq 0. \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

Аналогично, положив

$$\begin{aligned} y & = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{n+m})^T, \\ C & = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots, 0)^T \in R_{n+m}, \\ X & = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

запишем задачу (1.4.5) – (1.4.7) в виде

$$\begin{aligned} C^T X & - \min, \\ Ax + y & = P_0, \\ x \geq 0, \quad y & \geq 0. \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Установим связи между решениями задач (1.4.8) и (1.4.9). Вектор, удовлетворяющий всем ограничениям задачи (1.4.8) будем, как и для задачи в канонической форме, называть допустимым решением или планом задачи (1.4.8).

**Лемма 1.4.1.** Если вектор  $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  – допустимое решение задачи (1.4.9), то вектор  $x'$  является допустимым решением задачи (1.4.8). Обратно, если вектор  $x'$  – допустимое решение задачи (1.4.8), то вектор  $X'$  при  $y' = P_0 - Ax'$  является допустимым решением задачи (1.4.9).

**Доказательство.** Первое из утверждений доказывается подстановкой векторов  $x', y'$  в ограничения задачи (1.4.9) и затем вычеркиванием из равенства  $Ax' + y' = P_0$  вектора  $y'$ , имеющего неотрицательные координаты. Обратно, если  $x'$  является допустимым решением задачи (1.4.8), то выполняются неравенства  $x' \geq 0, Ax' \leq P_0$ . Обозначим  $P_0 - Ax' = y'$ . Тогда  $y' \geq 0$ , и выполняются равенства  $Ax' + y' = Ax' + (P_0 - Ax') = P_0$ . Следовательно,  $X'$  является планом задачи (1.4.9). Лемма доказана.

Алгоритм решения задачи (1.4.2) – (1.4.4) основывается на следующей теореме.

**Теорема 1.4.1.** *Задачи (1.4.8), (1.4.9) связаны следующими утверждениями.*

1) *Если линейная форма одной из задач (1.4.8), (1.4.9) не ограничена снизу, то неограниченной снизу является линейная форма и в другой задаче*

2) *Если вектор*

$$X^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*, \xi_{n+1}^*, \dots, \xi_{n+m}^*)^T$$

*является решением задачи (1.4.9), то вектор*

$$x^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)^T$$

*является решением задачи (1.4.8).*

**Доказательство.** Докажем утверждение 1). Пусть линейная форма в задаче (1.4.9) не ограничена снизу. Тогда каково бы ни было число  $M < 0$  найдется план

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

задачи (1.4.9) такой, что будет выполнено неравенство  $c^T x' + 0^T y' < M$ . В силу леммы 1.4.1 вектор  $x'$  является допустимым решением задачи (1.4.8), для которого  $c^T x' < M$ . А так как минимальное значение линейной формы  $c^T x$  может быть только меньше, чем  $c^T x'$ , то в силу произвольности числа  $M < 0$  это и означает, что линейная форма в задаче (1.4.8) не ограничена снизу.

Докажем обратное утверждение. Пусть теперь функция  $c^T x$  на множестве планов задачи (1.4.8) не ограничена снизу. Тогда для любого числа  $m < 0$  найдется допустимое решение  $x'$  задачи (1.4.8) такое, что  $c^T x' < m$ . В силу леммы 1.4.1 вектор  $X' = \begin{pmatrix} x' \\ P_0 - A x' \end{pmatrix}$  является допустимым решением задачи (1.4.9), а из неравенства  $c^T x' < m$  следует, что  $c^T x' + 0^T (P_0 - A x') < m$ . Это

неравенство в силу произвольности числа  $m < 0$  и завершает доказательство утверждения 1).

Докажем утверждение 2). Так как оптимальный план задачи (1.4.9)  $X^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*, \xi_{n+1}^*, \dots, \xi_{n+m}^*)^T$  является и ее допустимым решением, то в силу леммы 1.4.1 вектор  $x^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)^T$  является допустимым решением задачи (1.4.8).

Если  $x^*$  – единственное допустимое решение задачи (1.4.8), то оно является оптимальным, и тогда утверждение 2) доказано. Поэтому будем считать, что допустимое множество задачи (1.4.8) состоит не из единственной точки. Возьмем любое допустимое решение  $x'$  задачи (1.4.8). Тогда в силу леммы 1.4.1 вектор  $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , где  $y' = P_0 - Ax'$ , является допустимым решением задачи (1.4.9). А так как план  $X^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ , где  $y^* = (\xi_{n+1}^*, \dots, \xi_{n+m}^*)^T$ , оптимален, то  $c^T x^* + 0^T y^* \leq c^T x' + 0^T y'$ , т. е.  $c^T x^* \leq c^T x'$ . Последнее неравенство в силу произвольности плана  $x'$  задачи (1.4.8) и означает, что план  $x^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)^T$  является оптимальным для задачи (1.4.8). Теорема доказана.

Теорема 1.4.1 является фактически формулировкой следующего алгоритма для решения задачи минимизации линейной функции при ограничениях в форме неравенств и ограничениях на знак переменных:

1. Для решения задачи (1.4.2) – (1.4.4) строится и решается вспомогательная задача (1.4.5) – (1.4.7).
2. Если задача (1.4.5) – (1.4.7) не имеет решения, то не имеет решения и задача (1.4.2) – (1.4.4).
3. Если  $X^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*, \xi_{n+1}^*, \dots, \xi_{n+m}^*)^T$  – оптимальный план задачи (1.4.5) – (1.4.7), то  $x^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$  – решение исходной задачи (1.4.2) – (1.4.4).

**Замечание 1.4.1.** Метод дополнительных переменных описан для задач, в которых основные ограничения имеют вид " $\leq$ ". Если же среди ограничений задачи линейного программирования имеются ограничения вида

$$a_{i1} \xi_1 + \dots + a_{in} \xi_n \geq a_{io}, \quad (1.4.10)$$

то вместо них следует во вспомогательной задаче записывать условия

$$a_{i1} \xi_1 + \dots + a_{in} \xi_n - \xi_{n+i} = a_{io}, \quad \xi_{n+i} \geq 0. \quad (1.4.11)$$

Действительно, умножив неравенство (1.4.10) на  $-1$ , приведем его к виду " $\leq$ ". Затем согласно правилу построения вспомогательной задачи прибавим к левой части неравенства дополнительную переменную  $\xi_{n+i} \geq 0$ , и получим условия (1.4.11).

Результаты данного параграфа показывают, что для решения задач линейного программирования различного вида достаточно уметь решать задачи вида (1.1.1) – (1.1.3).

## § 5. Сходимость симплексного метода

Пусть решается задача линейного программирования (1.1.1) – (1.1.3) симплексным методом. Обозначим исходный базис через  $B_0$ . Пусть уже построен базис  $B_{k-1}$ ,  $k \geq 1$ . Тогда базис, полученный из него симплексным переходом, будем обозначать через  $B_k$ , а соответствующий ему опорный план – через  $x_k$ .

**Определение 1.5.1.** *Процедуру симплексного перехода от одного базиса к другому и построение симплексной таблицы, соответствующей новому базису, будем называть итерацией. Итерацию, в результате которой*

построен базис  $B_k$  и соответствующая ему симплексная таблица, будем называть  $k$ -ой.

**Лемма 1.5.1.** Если при решении задачи (1.1.1) – (1.1.3) симплексным методом на  $k$ -ой итерации произошло строгое уменьшение линейной формы (1.1.1) по сравнению с предыдущей итерацией, и процесс решения задачи не окончен, то ни один из базисов  $B_0, \dots, B_{k-1}$  в результате выполнения дальнейших итераций не повторится.

**Доказательство** проведем способом от противного. Допустим, что на некоторых итерациях с номерами  $i, j$ , такими, что  $i < k < j$ , построенные  $i$ -ый и  $j$ -ый базисы совпадают. Поскольку каждому базису соответствует единственный опорный план, то  $x_i = x_j$ , и, следовательно,  $c^T x_i = c^T x_j$ . Так как при решении задачи симплексным методом значение линейной функции (1.1.1) на каждой итерации может только убывать, то, учитывая условия леммы, получим следующие неравенства:

$$c^T x_0 \geq \dots \geq c^T x_i \geq \dots \geq c^T x_{k-1} > c^T x_k \geq \dots \geq c^T x_j .$$

Отсюда  $c^T x_i > c^T x_j$ , что противоречит равенству  $c^T x_i = c^T x_j$ . Полученное противоречие завершает доказательство.

Докажем теперь теорему сходимости симплексного метода.

**Теорема 1.5.1 (сходимости).** Если все опорные планы задачи (1.1.1) – (1.1.3) являются невырожденными, то симплексным методом за конечное число итераций либо будет получен оптимальный план, либо будет установлено, что линейная форма (1.1.1) является неограниченной снизу на множестве ограничений задачи.

**Доказательство.** Напомним, что согласно симплексному методу переход от базиса  $B$  к новому базису  $\tilde{B}$  происходит тогда, когда найдутся одновременно оценка  $\Delta_j > 0$  и в соответствующем ей столбце симплексной

таблицы положительный элемент. Если при этом опорный план, соответствующий базису  $B$  является невырожденным, то согласно формуле (1.3.12) для значения  $\tilde{\Delta}_0$  линейной формы на опорном плане, соответствующем новому базису  $\tilde{B}$  будет выполняться строгое неравенство  $\tilde{\Delta}_0 < \Delta_0$ . Если описанная ситуация будет иметь место на каждой итерации, то в силу леммы 1.5.1 все предыдущие базисы при дальнейших итерациях не смогут повторяться. Но из векторов-столбцов матрицы  $A$  задачи (1.1.1) – (1.1.3) можно построить лишь конечное число различных базисов. Таким образом, поскольку все опорные планы задачи (1.1.1) – (1.1.3) согласно условию теоремы не вырождены, то процесс построения новых базисов может прекратиться либо в случае  $\Delta_j \leq 0$  для всех  $j=1, \dots, n$ , либо когда существует оценка  $\Delta_j > 0$ , но все элементы соответствующего этой оценке столбца симплексной таблицы являются неположительными. А это и означает, что найден оптимальный план или, соответственно, что целевая функция не ограничена снизу. Теорема доказана.

## **§ 6. Модификация симплексного метода для задач с заикливанием**

### **П.1. Возможность заикливания в симплексном методе**

Обратим внимание на то, что теорема 1.5.1 справедлива, если в задаче линейного программирования, решаемой симплексным методом, все опорные планы являются невырожденными. Если же среди опорных планов задачи есть вырожденные, то при ее решении возможно возникновение ситуации, когда на некоторой итерации найдутся такие номера  $j$  и  $s$ , что одновременно выполняются следующие три условия:

$$\Delta_j > 0, \quad \xi_{s_j} > 0, \quad \xi_{s_0} = 0. \quad (1.6.1)$$

В этом случае после замены в базисе вектора  $P_s$  вектором  $P_j$  в силу формул (1.3.8), (1.3.9), (1.3.12) ни опорный план, ни значение  $\Delta_0$  целевой функции не изменятся при переходе к новой симплексной таблице. Если при решении задачи описанные переходы, связанные с ситуацией (1.6.1) будут происходить систематически, то ввиду конечности числа различных базисов, которые можно построить из векторов-столбцов матрицы ограничений, использованные базисы начнут повторяться. Повторяться будут при этом и симплексные таблицы, так как симплексная таблица единственным образом определяется базисом. Такой бесконечный процесс повторения базисов и называется зацикливанием.

Зацикливания очень редко встречаются на практике. Приведем один из примеров с зацикливанием.

**Пример 1.6.1** (см. [1], с. 147 или [2], с.141). Требуется с использованием симплексного метода найти минимум линейной функции

$$\xi_3 - \xi_4 + \xi_5 - \xi_6$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \xi_1 &+ \xi_3 - 2\xi_4 - 3\xi_5 + 4\xi_6 &= 0, \\ \xi_2 &+ 4\xi_3 - 3\xi_4 - 2\xi_5 + \xi_6 &= 0, \\ \xi_3 &+ \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 + \xi_7 &= 1, \\ \xi_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Пусть начальный базис выбран так, что базисная матрица  $B_0 = (P_1, P_2, P_7)$  является единичной. Тогда матрица  $B_0^{-1}$  также является единичной, и основа начальной симплексной таблицы совпадает с расширенной матрицей системы основных ограничений, а строка оценок в начальной таблице имеет следующий вид:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_7 = 0, \quad \Delta_3 = -1, \quad \Delta_4 = 1, \quad \Delta_5 = -1, \quad \Delta_6 = 1.$$

Это означает, что в базис может быть введен либо вектор  $P_4$ , либо вектор  $P_6$ . Если ввести вектор  $P_6$ , то можно последовательно в соответствии с симплексным методом в процессе решения задачи построить следующую совокупность базисов:

$$B_0 = (P_1, P_2, P_7), \quad B_1 = (P_1, P_6, P_7), \quad B_2 = (P_5, P_6, P_7), \quad B_3 = (P_5, P_4, P_7), \\ B_4 = (P_3, P_4, P_7), \quad B_5 = (P_3, P_2, P_7), \quad B_6 = (P_1, P_2, P_7).$$

Видим, что последний базис совпал с исходным. Значит, при продолжении вычислительного процесса все базисы могут повторяться, т. е. произойдет заикливание. Однако пути перехода к новым базисам могут быть изменены. В частности, уже на первой же итерации в базис мог вводиться не вектор  $P_6$ , а вектор  $P_4$ . В этом случае из базиса  $B_0$  был бы выведен вектор  $P_7$ , и сразу получен оптимальный план  $x^* = (2, 3, 0, 1, 0, 0, 0)^T$ .

Пример 1.6.1 показал, что от заикливания удалось избавиться изменением порядка выбора новых базисов. Это не случайный факт. На этом принципе построена следующая общая процедура предотвращения заикливания.

## П.2. Прием против заикливания вычислительного процесса

Для изложения приема против заикливания введем некоторые определения и обозначения.

**Определение 1.6.1.** *Говорят, что вектор  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$  лексикографически больше вектора  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$  или вектор  $y$  предшествует вектору  $x$ , если  $x \neq y$ , и  $\xi_k > \eta_k$ , где  $k = \min \{i : \xi_i \neq \eta_i\}$ .*

Указанное в определении 1.6.1 соотношение векторов  $x, y$  записывают в виде  $x \succ y$  или в виде  $y \prec x$ .

Например, если  $x = (2, 1, 4, 4)^T$ ,  $y = (2, 1, 3, 2)^T$ , то  $x \succ y$ , так как  $\xi_1 = \eta_1 = 2$ ,  $\xi_2 = \eta_2 = 1$ , но  $\xi_3 = 4 > 3 = \eta_3$ .

Строке симплексной таблицы, независимо от того, где она записана в симплексной таблице, будем присваивать номер базисного вектора, стоящего в этой строке. Пусть

$$B = (P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m})$$

– базис, возникший на некоторой итерации. Все элементы симплексной таблицы, соответствующей этому базису и стоящие в строке с номером  $i_k$ , будем для простоты написания формул обозначать  $\xi_{kj}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, n$ . Так, строку таблицы с номером  $i_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , будем обозначать через  $\theta_k$ , т. е.

$$\theta_k = (\xi_{k0}, \xi_{k1}, \dots, \xi_{kn}),$$

строку критериев – через  $\theta_{m+1}$ , т. е.

$$\theta_{m+1} = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n),$$

опорный план, соответствующий базису  $B$ , – через  $x_0$ , а его базисные компоненты – через  $\xi_{k0}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

**Определение 1.6.2.** Пусть  $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$  –  $(n+1)$  – мерный вектор. Опорный план  $x_0$ , соответствующий базису  $B = (P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m})$ , назовем обобщенно-положительным, если

$$\theta_k \succ \bar{0}$$

для всех  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Заметим, что каждый невырожденный опорный план задачи линейного программирования является обобщенно-положительным, так как согласно определению 1.1.4 для невырожденного плана его базисные компоненты  $\xi_{k0}$  положительны для всех  $k$ , а значит,  $\theta_k > \bar{0}$  для всех  $k$ . Очевидно, что опорный план, соответствующий симплексной таблице 1.3.1, обобщенно-положителен, причем независимо от того, является он вырожденным или невырожденным. Отметим также, что перенумерацией векторов-столбцов матрицы  $A$  можно добиться, чтобы любой опорный план задачи линейного программирования был обобщенно-положительным, поскольку в каждой строке симплексной таблицы есть единица – координата одного из базисных векторов.

Далее, базис, к которому совершен симплексный переход от базиса  $B$ , будем обозначать через  $\tilde{B}$ . Все строки таблицы, соответствующей базису  $\tilde{B}$ , будем отмечать волной сверху.

**Теорема 1.6.1.** Пусть базису

$$B = (P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m})$$

соответствует обобщенно-положительный опорный план  $x_0$ . Если при переходе от базиса  $B$  к новому базису  $\tilde{B}$  выбрана оценка  $\Delta_j > 0$ , а индекс  $s$  выводящегося из базиса вектора  $P_{i_s}$  выбран из множества  $\{i : \xi_{ij} > 0\}$  так, что выполняется соотношение

$$\frac{1}{\xi_{sj}} \theta_s < \frac{1}{\xi_{ij}} \theta_i, \quad i \neq s, \quad (1.6.1)$$

то имеет место и лексикографическое неравенство

$$\tilde{\theta}_{m+1} < \theta_{m+1},$$

а новый опорный план  $\tilde{x}_0$ , соответствующий базису

$$\tilde{B} = (P_{i_1}, \dots, P_{i_{s-1}}, P_j, P_{i_{s+1}}, \dots, P_{i_m}),$$

будет обобщенно-положительным.

**Доказательство.** При указанном в условиях теоремы способе перехода от базиса  $B$  к новому базису  $s$ -ая строка в новой симплексной таблице приобретает номер  $j$ , и согласно симплексному методу, а также условиям теоремы имеем

$$\tilde{\theta}_j = \frac{1}{\xi_{sj}} \theta_s > \bar{0}. \quad (1.6.2)$$

Согласно формулам исключений Жордана-Гаусса справедливы следующие равенства:

$$\tilde{\theta}_i = \theta_i - \frac{\xi_{ij}}{\xi_{sj}} \theta_s, \quad i \neq s, \quad (1.6.3)$$

где  $\xi_{sj} > 0$ .

Далее, для тех номеров  $i$ , для которых  $\xi_{ij} \leq 0$ , выполняются соотношения  $\tilde{\theta}_i > \bar{0}$  в силу равенств (1.6.3). Для тех  $i$ , для которых  $\xi_{ij} > 0$ , то же лексикографическое неравенство  $\tilde{\theta}_i > \bar{0}$  выполняется в силу (1.6.1) и (1.6.3). Отсюда с учетом (1.6.2) новый опорный план  $\tilde{x}_0$  является обобщенно-положительным. Кроме того, согласно тем же формулам исключений Жордана-Гаусса

$$\tilde{\theta}_{m+1} = \theta_{m+1} - \frac{\Delta_j}{\xi_{sj}} \theta_s, \quad (1.6.4)$$

и лексикографическое неравенство  $\tilde{\theta}_{m+1} < \theta_{m+1}$  следует из (1.6.4), (1.6.2) и неравенства  $\Delta_j > 0$ . Теорема доказана.

Сделаем практические выводы из теоремы 1.6.1. Считая исходный опорный план задачи обобщенно-положительным, покажем, что если на каждой итерации симплексного метода выбирать выводящийся из базиса вектор, руководствуясь правилом (1.6.1), то заикливание станет невозможным. Предположение о том, что исходный опорный план является обобщенно-положительным, не ограничивает общности рассуждений, поскольку, как

отмечено выше, этого всегда можно добиться за счет перенумерации переменных.

**Теорема 1.6.2.** Пусть исходный опорный план для задачи (1.1.1)–(1.1.3) является обобщенно-положительным, и при решении этой задачи симплексным методом правило выбора выводящегося из базиса вектора на каждой итерации заменено правилом (1.6.1). Тогда через конечное число итераций будет либо найден оптимальный план, либо установлено, что линейная форма (1.1.1) не ограничена снизу.

**Доказательство.** Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда согласно теоремам 1.3.1 и 1.3.2 на каждой итерации для каждой оценки  $\Delta_j > 0$  найдется индекс  $i$  такой, что  $\xi_{ij} > 0$ . Следовательно, всегда возможен выбор выводящегося из базиса вектора в соответствии с формулой (1.6.1), и тогда согласно теореме 1.6.1 при переходе от одного базиса к другому вектор  $\theta_{m+1}$  будет лексикографически убывать. Но тогда ни один из базисов, полученных на предыдущих итерациях, не может повторяться, так как базис единственным образом определяет симплексную таблицу, и разным базисам будут соответствовать разные векторы  $\theta_{m+1}$ . Но число базисов, которые можно построить из векторов-столбцов матрицы  $A$ , конечно. Полученное противоречие завершает доказательство.

Разбор ситуации заикливания завершим следующими двумя замечаниями.

**Замечание 1.6.1** Заикливание может возникнуть только в задачах линейного программирования, имеющих вырожденные опорные планы. Если какой-либо базис  $B$  повторился, то для выхода из цикла можно применить следующий прием. В столбце  $B^{-1}P_0$  можно заменить нулевые элементы малыми положительными числами и продолжить решение задачи, используя

обычный симплексный алгоритм. Конечно, этот прием может применяться, если вычислитель готов довольствоваться приближенным решением задачи.

*Замечание 1.6.2.* Поскольку заикливание при решении задач линейного программирования практически не встречается, вряд ли следует применять описанный в данном параграфе прием против заикливания, как только в процессе решение задачи появится вырожденный опорный план. Можно продолжить решать задачу симплексным методом, и начать применение приема против заикливания только тогда, когда повторится один из ранее построенных базисов.

## ГЛАВА 2

### МЕТОДЫ ИСКУССТВЕННЫХ БАЗИСОВ (ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ)

При изложении теории симплексного метода в главе 1 был сформулирован принцип выбора исходного базиса. А именно, при решении задачи симплексным методом исходный базис должен выбираться так, чтобы для соответствующей базисной матрицы  $B$  выполнялось неравенство  $B^{-1}P_0 \geq 0$ . Только при нахождении такого базиса (см. пп. 1, 2 метода) строится соответствующая ему начальная симплексная таблица и начинается процесс решения.

Отметим, что если выполняется неравенство  $P_0 \geq 0$ , и среди векторов-столбцов матрицы  $A$  основных ограничений (1.1.2) есть  $m$  единичных векторов, то выбор нужного исходного базиса не вызывает труда. В этом случае можно задать базис так, чтобы его базисная матрица  $B$  была единичной, и тогда неравенство  $B^{-1}P_0 \geq 0$  выполнится.

Кроме того, заметим, что при использовании метода дополнительных переменных для задач с основными ограничениями в виде неравенств при введении  $m$  дополнительных переменных естественным образом возникает набор единичных векторов-столбцов. Тогда в случае  $P_0 \geq 0$  эти единичные векторы и составят нужный базис для решения вспомогательной задачи.

Однако в большинстве задач линейного программирования выбрать требующийся исходный базис трудно. Путь перебора множеств, составленных из векторов  $P_j$ , малоэффективен в связи с проверками линейной

независимости векторов и необходимостью нахождения матриц  $B^{-1}$ . Причем, даже если нужный базис все-таки подобран, то построение основы начальной симплексной таблицы также требует определенных вычислительных затрат. Поэтому в случае, когда среди векторов-столбцов матрицы  $A$  задачи (1.1.1) – (1.1.3) нет единичного базиса, используются приемы, которые позволяют за счет введения новых переменных сводить исходную задачу к некоторой вспомогательной задаче с искусственно созданным базисом из единичных векторов. Приступим к изложению этих приемов.

## **§ 1. Выбор базиса с использованием искусственных переменных**

В данном параграфе излагается метод построения исходного базиса и соответствующей ему симплексной таблицы для решения задачи (1.1.1) – (1.1.3). Будем предполагать, что в решаемой задаче

$$P_0 \geq 0.$$

Это условие не является ограничительным, так как, если в системе (1.1.2) есть уравнения с отрицательными правыми частями, то требуемое условие достигается умножением таких равенств на  $-1$ .

Введем  $m$  новых переменных  $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{n+m}$ , и поставим следующую вспомогательную задачу.

Требуется минимизировать линейную функцию

$$\xi_{n+1} + \xi_{n+2} + \dots + \xi_{n+m} \tag{2.1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
 a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + \dots + a_{1n} \xi_n + \xi_{n+1} &= a_{10}, \\
 a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + \dots + a_{2n} \xi_n + \xi_{n+2} &= a_{20}, \\
 \dots & \dots \\
 a_{m1} \xi_1 + a_{m2} \xi_2 + \dots + a_{mn} \xi_n + \xi_{n+m} &= a_{m0},
 \end{aligned}
 \tag{2.1.2}$$

$$\xi_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m.
 \tag{2.1.3}$$

**Определение 2.1.1.** Переменные  $\xi_j$  и векторы-столбцы  $P_j$  в задаче (2.1.1) – (2.1.3) будем называть при  $j \leq n$  основными, а при  $j = n+1, \dots, n+m$  – искусственными. Базис из единичных векторов  $P_{n+1}, \dots, P_{n+m}$ , называется искусственным.

Для решения вспомогательной задачи (2.1.1) – (2.1.3) симплексным методом в качестве начального базиса выбирается тот, которому соответствует базисная матрица

$$B = (P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}).$$

При таком выборе базиса матрицы  $B$  и  $B^{-1}$  являются единичными. Тогда  $B^{-1}P_j = P_j$  при всех  $j = 0, 1, \dots, n+m$ , причем  $B^{-1}P_0 = P_0 \geq 0$ . Следовательно, выбранный базис  $B$  удовлетворяет принципу выбора начального базиса для решения задачи (2.1.1) – (2.1.3) симплексным методом. При этом расширенная матрица системы (2.1.2) будет основой начальной симплексной таблицы для решения вспомогательной задачи.

Выясним некоторые свойства решений вспомогательной задачи (2.1.1) – (2.1.3).

**Теорема 2.1.1.** Пусть в задаче (1.1.1) – (1.1.3) ограничения (1.1.2), (1.1.3) совместны. Тогда справедливы следующие два утверждения.

1) Если

$$X^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*, \xi_{n+1}^*, \xi_{n+2}^*, \dots, \xi_{n+m}^*)^T$$

– решение задачи (2.1.1) – (2.1.3), то

$$\xi_{n+1}^* = 0, \xi_{n+2}^* = 0, \dots, \xi_{n+m}^* = 0.$$

2) Если оптимальный базис  $\tilde{B}$  задачи (2.1.1) – (2.1.3) такой, что все координаты вектора  $\tilde{B}^{-1}P_0$  строго положительны, то базис  $\tilde{B}$  не содержит искусственных векторов.

**Доказательство.** Докажем первое утверждение теоремы.

Пусть

$$C = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)^T$$

–  $(n+m)$ -мерный вектор, составленный из коэффициентов функции (2.1.1), а

$x' = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)^T$  – какой-либо план задачи (1.1.1) – (1.1.3). Тогда  $(n+m)$ -

мерный вектор

$$X' = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n, 0, 0, \dots, 0)^T$$

имеет неотрицательные координаты и удовлетворяет уравнениям (2.1.2), что проверяется подстановкой его координат в эти уравнения. Значит,  $X'$  – план задачи (2.1.1) – (2.1.3). Но тогда  $C^T X' \geq C^T X^*$  в силу оптимальности плана  $X^*$ .

А так как  $C^T X' = 0$ , то  $C^T X^* = \xi_{n+1}^* + \xi_{n+2}^* + \dots + \xi_{n+m}^* \leq 0$ . Отсюда, в силу неотрицательности всех слагаемых в этой сумме, следуют равенства  $\xi_{n+1}^* = 0, \xi_{n+2}^* = 0, \dots, \xi_{n+m}^* = 0$ , и первое утверждение теоремы доказано.

Докажем утверждение 2) методом от противного.

Допустим, что оптимальный базис  $\tilde{B}$  содержит искусственный вектор  $P_{n+k}$ . Тогда в соответствующем этому базису оптимальном плане координата  $\xi_{n+k}^*$  согласно первому утверждению теоремы равна нулю. Но по условию все координаты вектора  $\tilde{B}^{-1}P_0$  строго положительны, т. е. оптимальный план является невырожденным, и нулевой базисной координаты в нем нет. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 2). Теорема доказана.

Сделаем далее три вычислительных замечания, касающихся решения задачи (2.1.1) – (2.1.3).

**Замечание 2.1.1.** Если среди векторов столбцов матрицы ограничений системы (1.1.2) есть единичный вектор, например,  $P_k$  с единицей на  $k$ -ом месте, то при построении задачи (2.1.1) – (2.1.3) можно полагать  $\xi_{n+k} = 0$  и включить в исходный базис вектор  $P_k$ . В связи с этим замечанием столбец симплексной таблицы, соответствующий искусственному вектору, выведенному из базиса в процессе вычислений, можно вычеркивать из таблицы, так как в таблице появился единичный вектор из числа основных векторов.

**Замечание 2.1.2.** Если в решении  $X^*$  вспомогательной задачи оказалось  $\xi_{n+k}^* \neq 0$  хотя бы для одного  $k \geq 1$ , то это значит, что не выполнены условия теоремы, и система ограничений в задаче (2.1.1) – (2.1.3) не совместна.

**Замечание 2.1.3.** В случае вырожденности оптимального плана  $X^*$  в заключительном базисе могут остаться искусственные векторы. Им в соответствии с утверждением 1) теоремы будут соответствовать нулевые координаты вырожденного оптимального плана  $X^*$ .

Далее, если в результате решения вспомогательной задачи (2.1.1) – (2.1.3) оптимальный базис будет состоять только из основных векторов, то его можно будет принять за исходный базис для решения симплексным методом основной задачи (1.1.1) – (1.1.3). В случае, когда при решении задачи (2.1.1) – (2.1.3) в оптимальном базисе остаются искусственные векторы (см. замечание 2.1.3), можно провести следующую процедуру целенаправленного вывода из оптимального базиса всех оставшихся искусственных векторов.

Пусть в  $s$ -ой строке заключительной симплексной таблицы остался искусственный вектор  $P_{n+k}$ , и  $\xi_{n+k}^* = 0$ . В  $s$ -ой строке выберем элемент  $\xi_{sj} \neq 0$  с любым  $1 \leq j \leq n$  (такой элемент найдется, так как в противном случае ранг матрицы  $A$  был бы меньше, чем  $m$ ). Заменяем теперь в базисе заключительной симплексной таблицы вектор  $P_{n+k}$  вектором  $P_j$ . Согласно лемме 1.2.2 при такой замене получившаяся система векторов останется линейно-независимой, т. е. базисом.

Получим традиционным пересчетом основу симплексной таблицы, соответствующей новому базису. Отметим, что в силу леммы 1.2.3 этот пересчет произойдет по схеме исключений Жордана-Гаусса с ведущим элементом  $\xi_{sj}$ , который был выбран отличным от нуля. Так как по договоренности в  $s$ -ой строке заключительной симплексной таблицы стоит элемент  $\xi_{n+k}^* = 0$ , то при выполнении процесса исключений элементы нулевого столбца (столбца  $B^{-1}P_0$ ) не изменятся. Значит, в нулевом столбце полученной таблицы будут стоять базисные координаты плана, соответствующего новому базису, в котором искусственный вектор  $P_{n+k}$  уже отсутствует.

Обеспечив таким способом выведение из заключительного базиса всех искусственных векторов, получим не содержащий искусственных векторов базис и соответствующую ему основу симплексной таблицы.

Продемонстрируем описанный процесс исключения искусственных векторов из базиса на следующем примере.

**Пример 2.1.1.** Пусть требуется получить исходный базис  $B$  такой, что  $B^{-1}P_0 \geq 0$ , и соответствующую ему основу симплексной таблицы для решения задачи минимизации линейной функции

$$3\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_5$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
& \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_4 + \xi_5 = 2, \\
& -2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - 3\xi_4 + \xi_5 = 1, \\
& 2\xi_1 + 3\xi_2 + 2\xi_4 - 2\xi_5 = 4, \\
& \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2.1.4}$$

Вводятся искусственные переменные  $\xi_6, \xi_7$ , и вспомогательная задача (2.1.1) – (2.1.3) приобретает следующий вид.

Требуется минимизировать функцию

$$\xi_6 + \xi_7 \tag{2.1.5}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
& \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 = 2, \\
& -2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - 3\xi_4 + \xi_5 = 1,
\end{aligned}
\tag{2.1.6}$$

$$\begin{aligned}
& 2\xi_1 + 3\xi_2 + 2\xi_4 - 2\xi_5 + \xi_7 = 4, \\
& \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2.1.7}$$

Для решения вспомогательной задачи (2.1.5) – (2.1.7) выбирается исходный базис, в котором единичные базисные векторы расположены так, что соответствующая базисная матрица  $B_1 = (P_6, P_3, P_7)$  является единичной. Тогда исходному для задачи (2.1.5) – (2.1.7) базису  $B_1$  соответствует симплексная таблица 2.1.1.

Задача (2.1.5) – (2.1.7) еще не решена, поскольку среди оценок строки критериев есть положительные. Так как  $\Delta_1 > 0$ , то введем в базис вектор  $P_1$ . Нетрудно видеть, что вектор  $P_1$  войдет в новый базис вместо вектора  $P_6$ . Результат перехода к очередному базису  $B_2$  с помощью ведущего элемента **1** приведен в таблице (2.1.2).

Таблица 2.1.1

Базис	$c_{B_1}$	0	0	0	0	0	0	1	1
		$B_1^{-1}P_0$	$B_1^{-1}P_1$	$B_1^{-1}P_2$	$B_1^{-1}P_3$	$B_1^{-1}P_4$	$B_1^{-1}P_5$	$B_1^{-1}P_6$	$B_1^{-1}P_7$
$P_6$	1	2	<b>1</b>	2	0	1	1	1	0
$P_3$	0	1	-2	-1	1	-3	1	0	0
$P_7$	1	4	2	3	0	2	-2	0	1
$\Delta_j$		6	3	5	0	3	-1	0	0

Так как в таблице 2.1.2 нет положительных оценок, то вспомогательная задача (2.1.5) – (2.1.7) решена, однако не достигнута поставленная цель, поскольку в базисе остался искусственный вектор  $P_7$ . Дело в том, что оптимальный план  $X^* = (2, 0, 5, 0, 0, 0, 0)^T$  является вырожденным, а теорема 2.1.1 не гарантирует в этом случае удаления всех искусственных векторов из базиса. Приходится применить описанный выше прием целенаправленного вывода вектора  $P_7$  из базиса.

Таблица 2.1.2

Базис	$c_{B_2}$	0	0	0	0	0	0	1	1
		$B_2^{-1}P_0$	$B_2^{-1}P_1$	$B_2^{-1}P_2$	$B_2^{-1}P_3$	$B_2^{-1}P_4$	$B_2^{-1}P_5$	$B_2^{-1}P_6$	$B_2^{-1}P_7$
$P_1$	0	2	1	2	0	1	1	1	0
$P_3$	0	5	0	3	1	-1	3	2	0
$P_7$	1	0	0	-1	0	0	-4	-2	1
$\Delta_j$		0	0	-1	0	0	-4	-3	0

Так как вектор  $P_7$  стоит в третьей строке симплексной таблицы 2.1.2, то выбираем в третьей строке, исключая столбцы  $c_{B_2}$ ,  $B_2^{-1}P_0$ , ненулевой элемент.

Выберем, например число  $-1$ , соответствующее основному столбцу, и согласно этому выбору введем вектор  $P_2$  в новый базис вместо вектора  $P_7$ . Как уже отмечено, ввиду леммы 1.2.2 получившаяся система векторов останется линейно независимой, а следовательно, останется базисом. Согласно лемме 1.2.3 разложения векторов по новому базису находятся по схеме исключений Жордана-Гаусса. Используя выбранное число  $-1$  в качестве ведущего элемента, перейдем теперь от таблицы 2.1.2 к таблице 2.1.3.

Отметим, что, как и положено, элементы нулевого столбца при таком переходе не изменились. Итак, получен базис  $B_3$ , который не содержит искусственных векторов. Этот базис и может быть принят за начальный базис  $B$  при решении симплексным методом исходной задачи линейного программирования, приведенной в примере 2.1.1. При этом симплексная таблица 2.1.3 уже содержит в столбцах коэффициенты разложения векторов  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  по этому базису.

**Таблица 2.1.3**

Базис	$c_{B_3}$	0	0	0	0	0	0		
		$B_3^{-1}P_0$	$B_3^{-1}P_1$	$B_3^{-1}P_2$	$B_3^{-1}P_3$	$B_3^{-1}P_4$	$B_3^{-1}P_5$		
$P_1$	0	2	1	0	0	1	-7		
$P_3$	0	5	0	0	1	-1	-9		
$P_2$	0	0	0	1	0	0	4		
$\Delta_j$		0	0	0	0	0	0		

Столбцы, соответствующие искусственным векторам  $P_6, P_7$ , вычеркнуты из таблицы 2.1.3, так как они более не нужны. Заметим, что согласно вычислительному замечанию 2.1.1 столбцы, которые соответствуют

выведенным из базиса искусственным векторам, можно было вычеркивать и ранее.

## **§ 2. ДВУХЭТАПНЫЙ МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА**

Излагающийся в данном параграфе метод решения задачи (1.1.1) – (1.1.3) применяется, как уже отмечено выше, когда среди векторов-столбцов матрицы  $A$  нет единичного базиса. Он называется двухэтапным методом искусственного базиса или двухэтапным методом искусственных переменных. На первом этапе метода находится исходный базис  $B$  из векторов-столбцов матрицы ограничений (1.1.2) такой, что  $B^{-1}P_0 \geq 0$ , а также соответствующая ему симплексная таблица. Это делается с использованием вспомогательной задачи (2.1.1) – (2.1.3) способом, изложенным в § 1 настоящей главы. На втором этапе, используя найденный базис и соответствующую ему симплексную таблицу, решается задача (1.1.1) – (1.1.3) симплексным методом.

Опишем этот метод, считая, что для решаемой задачи (1.1.1) – (1.1.3) выполняется условие  $P_0 \geq 0$ . Если данное условие не выполняется, то проводится подготовительный шаг метода – равенства (1.1.2), у которых свободные члены отрицательны, умножаются на  $-1$ .

### **А л г о р и т м**

1. На основе задачи (1.1.1) – (1.1.3) с помощью введения искусственных переменных, строится вспомогательная задача (2.1.1) – (2.1.3). При этом, если среди векторов-столбцов матрицы ограничений системы (1.1.2) есть единичный

с единицей на  $k$ -м месте, то можно полагать  $\xi_{n+k} = 0$  (т. е. в  $k$ -ое равенство искусственную переменную можно не вводить).

2. Вспомогательная задача (2.1.1) – (2.1.3) решается симплексным методом. При этом как только искусственный вектор в процессе решения выводится из базиса, так столбец симплексной таблицы, соответствующий этому вектору, вычеркивается. Пусть

$$X^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*, \xi_{n+1}^*, \xi_{n+2}^*, \dots, \xi_{n+m}^*)^T$$

– решение задачи (2.1.1) – (2.1.3).

3. Решение  $X^*$  анализируется следующим образом.

а) Если в нулевом столбце (столбце, соответствующем вектору  $P_0$ ) последней симплексной таблицы  $\xi_{n+k}^* \neq 0$  хотя бы для одного  $k \geq 1$ , то ограничения задачи (1.1.1) – (1.1.3) не совместны, т. е. исходная задача не имеет решения, и процесс заканчивается.

в) Если  $\xi_{n+1}^* = 0, \xi_{n+2}^* = 0, \dots, \xi_{n+m}^* = 0$ , и в столбце «Базис» последней таблицы нет искусственных векторов, то следует переход к шагу 6 алгоритма.

с) Если  $\xi_{n+1}^* = 0, \xi_{n+2}^* = 0, \dots, \xi_{n+m}^* = 0$ , но в столбце «Базис» остались искусственные векторы, то следует переход к шагу 4 алгоритма.

4. Среди векторов базиса последней таблицы выбирается любой искусственный вектор. В соответствующей ему строке выбирается любой ненулевой элемент, стоящий в одном из первых  $n$  столбцов. Он принимается за ведущий элемент. Строится очередной базис и очередная симплексная таблица следующим образом. Выбранный искусственный вектор заменяется соответствующим ведущему элементу вектором  $P_j$ , и с помощью ведущего элемента проводится процесс исключений Жордана-Гаусса.

5. Если в базисе последней таблицы больше нет искусственных векторов, то следует переход к шагу 6 алгоритма. В противном случае следует переход к шагу 4.

6. В последней таблице (заметим, что в ней все искусственные векторы вычеркнуты) коэффициенты целевой функции вспомогательной задачи заменяются коэффициентами  $c_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , функции (1.1.1), а оценки в строке критериев заменяются новыми оценками  $\Delta_j$ ,  $j=0, 1, \dots, n$ , вычисленными с использованием коэффициентов  $c_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , функции (1.1.1). Построенная таким образом симплексная таблица принимается за исходную для задачи (1.1.1) – (1.1.3), и следует решение этой задачи симплексным методом.

Подводя итог сказанному в этом параграфе, подчеркнем, что изложенный метод подразделяется на два самостоятельных процесса минимизации. На первом этапе приемом, описанным в предыдущем параграфе, с помощью первого процесса минимизации находят одновременно такой базис, назовем его  $\tilde{B}$ , что  $\tilde{B}^{-1}P_0 \geq 0$ , и соответствующая ему симплексная таблица. На втором этапе решается уже исходная задача минимизации с использованием базиса и соответствующей ему основы симплексной таблицы, которые найдены на первом этапе.

**Пример 2.2.1.** Требуется решить исходную задачу линейного программирования из примера 2.1.1.

В результате произведенных на первом этапе для примера 2.1.1 вычислений (см. предыдущий параграф) в таблице 2.1.3 построен базис  $B$ , который удовлетворяет неравенству  $B^{-1}P_0 \geq 0$ , а также найдены коэффициенты разложения по этому базису всех векторов-столбцов матрицы ограничений (2.1.4).

В соответствии с пунктом 6 алгоритма на основе этих данных строится симплексная таблица 2.2.1. В связи с этим в окаймляющие строки таблицы 2.1.3 вместо нулей вписываются коэффициенты линейной функции исходной задачи и соответствующие найденному базису оценки.

Таблица 2.2.1

Базис	$c_{B_3}$	0	3	1	1	0	1
		$B_3^{-1}P_0$	$B_3^{-1}P_1$	$B_3^{-1}P_2$	$B_3^{-1}P_3$	$B_3^{-1}P_4$	$B_3^{-1}P_5$
$P_1$	3	2	1	0	0	<u>1</u>	-7
$P_3$	1	5	0	0	1	-1	-9
$P_2$	1	0	0	1	0	0	4
$\Delta_j$		11	0	0	0	2	-27

Согласно правилам замены векторов в симплексном методе, вектор  $P_1$  должен быть заменен в базисе вектором  $P_4$ . Пользуясь традиционной схемой исключений, получим из таблицы 2.2.1 таблицу 2.2.2.

Таблица 2.2.2

Базис	$c_{B_4}$	0	3	1	1	0	1
		$B_4^{-1}P_0$	$B_4^{-1}P_1$	$B_4^{-1}P_2$	$B_4^{-1}P_3$	$B_4^{-1}P_4$	$B_4^{-1}P_5$
$P_4$	0	2	1	0	0	1	-7
$P_3$	1	7	1	0	1	0	-16
$P_2$	1	0	0	1	0	0	4
$\Delta_j$		7	-2	0	0	0	-13

Так как в таблице 2.2.2 среди оценок нет положительных, то задача решена. Оптимальным является план  $x^* = (0, 0, 7, 2, 0)^T$ , а минимальным значением целевой функции является  $c^T x^* = 11$ .



$$\xi_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m, \quad (2.3.3)$$

где  $\omega$  – как угодно большое положительное число.

Как и в двухэтапном методе, *переменные*  $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{n+m}$ , *соответствующие им векторы*  $P_{n+k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , и *базис из этих векторов называются искусственными*.

Если для решения вспомогательной задачи в качестве начального выбрать базис, составленный из векторов  $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ , то матрицы

$$B = (P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m})$$

и  $B^{-1}$  будут единичными,  $B^{-1}P_j = P_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n+m$ , и при этом  $B^{-1}P_0 = P_0 \geq 0$ .

Такой базис удовлетворяет принципу выбора начального базиса в симплексном методе, а расширенная матрица системы (2.3.2) будет основой симплексной таблицы для решения вспомогательной задачи.

**Теорема 2.3.1.** Пусть в задаче (1.1.1) – (1.1.3) ограничения (1.1.2), (1.1.3) совместны. Тогда справедливы следующие два утверждения.

1) Если

$$X^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*, \xi_{n+1}^*, \xi_{n+2}^*, \dots, \xi_{n+m}^*)^T$$

– решение задачи (2.3.1) – (2.3.3), то  $\xi_{n+1}^* = 0$ ,  $\xi_{n+2}^* = 0$ , ...,  $\xi_{n+m}^* = 0$ , и вектор

$$x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*)^T$$

является решением задачи (1.1.1) – (1.1.3).

2) Если задача (2.3.1) – (2.3.3) не имеет решения, то не имеет решения и задача (1.1.1) – (1.1.3).

**Доказательство.** Обоснуем утверждение 1). Положим

$$X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{n+m})^T,$$

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n, \omega, \omega, \dots, \omega)^T \in R_{n+m}.$$

По условиям теоремы задача (1.1.1) – (1.1.3) имеет хотя бы один план.

Пусть  $x' = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)^T$  – произвольный план этой задачи. Тогда вектор

$$X' = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n, 0, 0, \dots, 0)^T \in R_{n+m}$$

имеет неотрицательные координаты, и простой подстановкой его в равенства (2.3.2) убеждаемся, что он этим равенствам удовлетворяет. Значит,  $X'$  является планом задачи (2.3.1) – (2.3.3). Так как для этой задачи план  $X^*$  является оптимальным, то  $C^T X' \geq C^T X^*$ . Отсюда

$$\sum_{i=1}^n c_i \xi'_i \geq \sum_{i=1}^n c_i \xi_i^* + \omega \sum_{i=n+1}^{n+m} \xi_i^*. \quad (2.3.4)$$

Если допустить, что  $\sum_{i=n+1}^{n+m} \xi_i^* > 0$ , то неравенство (2.3.4) становится противоречивым, поскольку  $\omega$  – как угодно большое положительное число.

Значит,  $\sum_{i=n+1}^{n+m} \xi_i^* = 0$ . А так как  $\xi_i^* \geq 0$  для всех  $i$ , то последнее равенство возможно лишь при  $\xi_i^* = 0, i = n+1, \dots, n+m$ .

Итак, показано, что  $X^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*, 0, 0, \dots, 0)^T$ . Подстановкой  $X^*$  в ограничения задачи (2.3.1) – (2.3.3) убеждаемся, что вектор  $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*)^T$  является планом задачи (1.1.1) – (1.1.3). Но, так как по доказанному  $\sum_{i=n+1}^{n+m} \xi_i^* = 0$ , то неравенство (2.3.4) имеет вид  $c^T x' \geq c^T x^*$ . Отсюда

в силу произвольности плана  $x' = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)^T$  следует, что план  $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*)^T$  задачи (1.1.1) – (1.1.3) оптимален. Утверждение 1) доказано.

Докажем теперь утверждение 2), считая, что задача (2.3.1) – (2.3.3) не имеет решения. Доказательство проведем способом от противного.

Допустим, что задача (1.1.1) – (1.1.3) имеет решение  $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*)^T$ .

Тогда вектор

$$X^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*, 0, 0, \dots, 0)^T$$

является допустимым решением задачи (2.3.1) – (2.3.3).

Пусть

$$X' = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n, \xi'_{n+1}, \xi'_{n+2}, \dots, \xi'_{n+m})^T$$

– любое допустимое решение задачи (2.3.1) – (2.3.3). Если в этом допустимом решении  $\xi'_{n+k} = 0$  для всех  $k=1, \dots, m$ , то точка  $x' = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)^T$  будет допустимым решением задачи (1.1.1) – (1.1.3). А так как  $x^*$  – по предположению оптимальный план задачи (1.1.1) – (1.1.3), то  $c^T x' \geq c^T x^*$ , что равносильно неравенству  $C^T X' \geq C^T X^*$ . Если же в векторе  $X'$  хотя бы одно из чисел  $\xi'_{n+k}$ ,  $k=1, \dots, m$ , положительно, то при достаточно большом числе  $\omega > 0$  будет выполняться то же неравенство  $C^T X' \geq C^T X^*$ . Таким образом, неравенство  $C^T X' \geq C^T X^*$  выполняется для любого допустимого плана  $X'$  задачи (2.3.1) – (2.3.3). Значит,  $X^*$  – ее оптимальный план, тогда как по условию задача (2.3.1) – (2.3.3) не имеет решения. Полученное противоречие доказывает, что предположение о наличии решения задачи (1.1.1) – (1.1.3) не справедливо. Теорема доказана.

## П.2. Вычислительные приемы и особенности

Сделаем некоторые замечания, касающиеся построения и решения вспомогательной задачи (2.3.1) – (2.3.3).

**Замечание 2.3.1.** Если среди векторов-столбцов матрицы ограничений системы (1.1.2) есть единичный с единицей на  $k$ -ом месте, то во вспомогательной задаче (2.3.1) – (2.3.3) можно полагать  $\xi_{n+k} = 0$ , и при ее решении в исходный базис включать основной вектор  $P_k$ , а не вектор  $P_{n+k}$ .

**Замечание 2.3.2.** При решении вспомогательной задачи симплексным методом в качестве исходной базисной матрицы  $B$  удобно выбрать единичную

матрицу. Тогда единичной является матрица  $B^{-1}$ , и для любого  $j=0, \dots, n$  выполняются равенства  $B^{-1}P_j = P_j$ . Поэтому основой начальной симплексной таблицы будет расширенная матрица системы линейных уравнений (2.3.2).

**Замечание 2.3.3.** При решении вспомогательной задачи (2.3.1) – (2.3.3) нельзя реально указать, насколько большим нужно выбирать параметр  $\omega$ . Поэтому при решении задач одноэтапным методом искусственного базиса применяется следующий прием. Параметру  $\omega$  не придают конкретного значения. Пока искусственные векторы будут присутствовать в базисе, в столбце  $c_B$  будут присутствовать символы  $\omega$ , и оценки будут иметь вид

$$\Delta_j = \alpha_j \omega + \beta_j,$$

где  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  – какие-то конкретные числа. В силу того, что  $\omega$  – как угодно большое положительное число, знак оценки  $\Delta_j$  совпадает со знаком коэффициента  $\alpha_j$ , если он отличен от нуля. Поэтому строка оценок разбивается на две строки. В одну из этих строк вписываются числа  $\alpha_j$ , а в другую – числа  $\beta_j$ , и за знак оценки  $\Delta_j$  принимается знак числа  $\alpha_j$ . Поэтому в базис вводится вектор  $P_j$ , соответствующий  $\alpha_j > 0$ . Если для некоторого номера  $1 \leq i_0 \leq n$  выполняется равенство  $\alpha_{i_0} = 0$ , но при этом  $\beta_{i_0} > 0$ , то в базис можно вводить и вектор  $P_{i_0}$ .

Заметим, что если все искусственные векторы будут выведены из базиса, то потребность в строке, содержащей значения  $\alpha_j$ , отпадет, так как она будет состоять из нулей.

**Замечание 2.3.4.** Как только в процессе вычислений какой-либо искусственный вектор  $P_{n+k}$  будет выведен из базиса, соответствующий столбец  $B^{-1}P_{n+k}$  симплексной таблицы можно вычеркнуть. Это делается в соответствии

с замечанием 1), так как в симплексной таблице появился единичный вектор из числа основных векторов.

**Замечание 2.3.5.** При окончании решения в оптимальном плане может присутствовать ненулевая компонента, относящаяся к искусственной переменной. Эта ситуация не противоречит теореме 2.3.1, а означает, что не выполнены условия, при которых в оптимальном плане вспомогательной задачи все искусственные переменные должны быть равны нулю. А именно, это обстоятельство означает, что ограничения задачи (1.1.1) – (1.1.3) не совместны.

### **П.3. Алгоритм одноэтапного метода искусственного базиса**

Алгоритм описывается для решения задачи линейного программирования вида (1.1.1) – (1.1.3) с условием, что

$$P_0 \geq 0.$$

Поэтому, если решаемая задача не имеет канонической формы, то для неё перед применением методов искусственных переменных должна быть построена вспомогательная задача канонического вида по правилам, описанным в § 4 главы 1. Если в задаче среди основных ограничений имеются равенства, у которых свободные члены отрицательны, то такие равенства умножаются на  $-1$ . Итак, алгоритм одноэтапного метода искусственного базиса выглядит следующим образом.

1) Вводится столько искусственных переменных, сколько равенств имеется среди ограничений исходной задачи (1.1.1) – (1.1.3), и с их использованием строится вспомогательная задача (2.3.1) – (2.3.3). При этом, если среди основных векторов  $P_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) есть единичный вектор, например, с единицей на  $s$ -ом месте, то можно положить  $\xi_{n+s} = 0$ .

2) Вспомогательная задача (2.3.1) – (2.3.3) решается симплексным методом. При этом в симплексные таблицы для внесения оценок вида  $\Delta_j = \alpha_j \omega + \beta_j$  вместо одной строки критериев вводятся две строки. В одну из них вписываются коэффициенты  $\alpha_j$ , в другую – коэффициенты  $\beta_j$ . До тех пор, пока среди коэффициентов  $\alpha_j$  имеются отличные от нуля, знак оценки считается совпадающим со знаком коэффициента  $\alpha_j$ .

3) Если на некоторой итерации выполнится критерий, согласно которому целевая функция задачи (2.3.1) – (2.3.3) не ограничена снизу на множестве ограничений, то процесс прекращается, и исходная задача (1.1.1) – (1.1.3) не имеет решения.

4) Пусть симплексным методом найдено решение  $X^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*, \xi_{n+1}^*, \xi_{n+2}^*, \dots, \xi_{n+m}^*)^T$  вспомогательной задачи. Если среди значений  $\xi_{n+1}^*, \xi_{n+2}^*, \dots, \xi_{n+m}^*$  есть хотя бы одно, отличное от нуля, то исходная задача не имеет решения, так как ее система ограничений не совместна. Если же  $\xi_{n+1}^* = \xi_{n+2}^* = \dots = \xi_{n+m}^* = 0$ , то вектор  $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*)^T$  является решением исходной задачи.

Рассмотрим некоторые ситуации, которые могут возникать при решении задач одноэтапным методом искусственных переменных на следующих двух примерах.

**Пример 2.3.1.** Требуется минимизировать линейную функцию

$$3\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$$

при ограничениях

$$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_4 + \xi_5 = 2,$$

$$-2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 3\xi_5 = 1,$$

$$2\xi_1 + 3\xi_2 - 2\xi_4 + 2\xi_5 = 4,$$

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5 \geq 0.$$

После введения искусственных переменных в первое и третье равенства строится вспомогательная задача, для которой начальной симплексной таблицей является таблица 2.3.1.

**Таблица 2.3.1**

Базис	$c_{B_1}$	0	3	1	1	1	0	$\omega$	$\omega$
		$B_1^{-1}P_0$	$B_1^{-1}P_1$	$B_1^{-1}P_2$	$B_1^{-1}P_3$	$B_1^{-1}P_4$	$B_1^{-1}P_5$	$B_1^{-1}P_6$	$B_1^{-1}P_7$
$P_6$	$\omega$	2	1	2	0	1	<u>1</u>	1	0
$P_3$	1	1	-2	-1	1	1	-3	0	0
$P_7$	$\omega$	4	2	3	0	-2	2	0	1
$\beta_j$		1	-5	-2	0	0	-3	0	0
$\alpha_j$		6	3	5	0	-1	3	0	0

В таблице 2.3.1 оценки имеют вид  $\Delta_j = \alpha_j \omega + \beta_j$ . Знак оценки определяется знаком коэффициента  $\alpha_j$ , а если  $\alpha_j=0$ , знаком коэффициента  $\beta_j$ . В таблице 2.3.1 положительными являются первая, вторая и пятая оценки. Введем в базис вектор  $P_5$ . Тогда вывести из базиса можно как вектор  $P_6$ , так и вектор  $P_7$ . Выведем из базиса вектор  $P_6$ . Тогда ведущим элементом будет число 1. После проведения процесса исключений получим таблицу 2.3.2.

Так как все оценки в таблице 2.3.2 неположительные, то задача решена. Обсудим полученный результат. Оптимальным планом вспомогательной задачи является вектор  $x^* = (0, 0, 7, 0, 2, 0, 0)^T$ . Как и утверждает теорема 2.3.1, искусственные переменные  $\xi_6^*, \xi_7^*$  в оптимальном плане  $x^*$  равны нулю. В силу этой теоремы  $x^* = (0, 0, 7, 0, 2)^T$  – оптимальный план исходной задачи.

Таблица 2.3.2

Базис	$c_{B_2}$	0	3	1	1	1	0	$\omega$	$\omega$
		$B_2^{-1}P_0$	$B_2^{-1}P_1$	$B_2^{-1}P_2$	$B_2^{-1}P_3$	$B_2^{-1}P_4$	$B_2^{-1}P_5$	$B_2^{-1}P_6$	$B_2^{-1}P_7$
$P_5$	0	2	1	2	0	1	1	1	0
$P_3$	1	7	1	5	1	4	0	3	0
$P_7$	$\omega$	0	0	-1	0	-4	0	-2	1
$\beta_j$		7	-2	4	0	3	0	3	0
$\alpha_j$		0	0	-1	0	-4	0	-3	0

Обратим внимание на то, что искусственный вектор остался в оптимальном базисе  $B_2$ . В двухэтапном методе оставшийся в базисе на первом этапе искусственный вектор выводился операциями, не предусмотренными симплексным методом. Там это делалось потому, что задачей первого этапа было получение исходного базиса, необходимого для применения симплексного метода к исходной задаче. В одноэтапном методе такая задача не ставится. Оставшийся в базисе искусственный вектор не помешал выполнить основную цель – получение оптимального плана исходной задачи, поскольку соответствующая этому вектору искусственная переменная в решении вспомогательной задачи приняла нулевое значение.

Если в примере 2.3.1 в оптимальном базисе остался искусственный вектор, но при этом исходная задача решена, то в следующем примере при оставшемся в оптимальном базисе искусственном векторе в оптимальном плане вспомогательной задачи останется соответствующая ему ненулевая искусственная переменная.

**Пример 2.3.2.** Требуется найти минимум функции

$$2\xi_1 + 4\xi_2 - 2\xi_3 + \xi_4 \quad (2.3.5)$$

при ограничениях

$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + 2\xi_4 = 1, \quad (2.3.6)$$

$$2\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 2,$$

и

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \geq 0. \quad (2.3.7)$$

Введем искусственные переменные  $\xi_5, \xi_6 \geq 0$ , и построим вспомогательную задачу, начальной симплексной таблицей которой является таблица 2.3.3.

**Таблица 2.3.3**

Базис	$c_{B_1}$	0	2	4	-2	1	$\omega$	$\omega$
		$B_1^{-1}P_0$	$B_1^{-1}P_1$	$B_1^{-1}P_2$	$B_1^{-1}P_3$	$B_1^{-1}P_4$	$B_1^{-1}P_5$	$B_1^{-1}P_6$
$P_5$	$\omega$	1	<u>2</u>	1	1	2	1	0
$P_6$	$\omega$	2	2	-1	-2	0	0	1
$\Delta_j$	$\beta_j$	0	-2	-4	2	-1	0	0
	$\alpha_j$	3	4	0	-1	2	0	0

Введем в базис вектор  $P_1$  вместо вектора  $P_5$ . Симплексной таблицей, соответствующей новому базису, будет таблица 2.3.4.

Вспомогательная задача решена. Заметим, что оптимальный план вспомогательной задачи  $X^* = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 1\right)^T$  содержит ненулевую искусственную координату  $\xi_6^* = 1$ . Это означает, что не выполнены условия теоремы 2.3.1, при которых справедливы ее утверждения, а значит, система ограничений (2.3.6), (2.3.7) не совместна, и исходная задача не имеет решения.

В этом легко убедиться. Вычитая первое равенство (2.3.6) из второго, получим равенство  $-2\xi_1 - 3\xi_2 - 2\xi_3 = 1$ , которое не может быть выполнено при условии (1.3.7).

**Таблица 2.3.4**

Базис	$c_B$	0	2	4	-2	1	$\omega$	$\omega$
		$B_2^{-1}P_0$	$B_2^{-1}P_1$	$B_2^{-1}P_2$	$B_2^{-1}P_3$	$B_2^{-1}P_4$	$B_2^{-1}P_5$	$B_2^{-1}P_6$
$P_1$	2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
$P_6$	$\omega$	1	0	-2	-3	-2	-1	1
$\Delta_j$	$\beta_j$	1	0	-3	3	1	1	0
	$\alpha_j$	1	0	-2	-3	-2	-2	0

Отметим, что в обоих примерах после выведения из базиса искусственных векторов соответствующие им столбцы таблиц можно было вычеркнуть с целью облегчения пересчетов.

## § 4. Геометрическая интерпретация симплексного метода

Знание геометрического смысла задач линейного программирования, а также методов их решения помогает иногда предсказывать результат решения задач, позволяет проводить на интуитивном уровне рассуждения, касающиеся процедур решения, и т. д. Однако нарисовать что-либо можно лишь в пространствах размерности 2 или 3. Попробуем представить себе множество  $D$  допустимых решений и сами решения задачи линейного программирования в случае, когда задача имеет только две переменные.

Поскольку задача (1.1.1) – (1.1.3) с основными ограничениями в виде равенств представляет интерес лишь при  $m < n$ , а  $n=2$ , то условие (1.1.2) состоит из единственного уравнения. Множество точек, удовлетворяющих этому уравнению, является прямой на двумерной плоскости. Ограничения (1.1.3) высекают из этой прямой либо отрезок, либо луч, исходящий из точки, лежащей на одной из координатных осей. Таким образом, вид множества  $D$  выяснен.

Больше возможностей для геометрической интерпретации имеется в случае, когда при  $n = 2$  основные ограничения имеют форму неравенств. Тогда множество точек, удовлетворяющих каждому из неравенств, представляет собой полуплоскость, и множество  $D$  допустимых решений задачи линейного программирования, являясь пересечением полуплоскостей, будет многоугольным.

Выясним, где достигает минимального значения функция (1.1.1) на множестве допустимых решений в случае  $n = 2$ . В результате для конкретной двумерной целевой функции можно будет легко найти ее точку минимума или убедиться в отсутствии таковой.

**Определение 1.4.1.** Пусть в  $R_2$  определена функция  $f(x)$ . Множество точек, удовлетворяющих равенству  $f(x) = t$ , называют линией уровня функции  $f(x)$ , соответствующей числу  $t$ .

Согласно этому определению для линейной функции  $c^T x$  ее линией уровня, соответствующей числу  $t$ , является прямая  $c^T x = t$ . Вектор  $c$  является нормалью этой прямой. Если уменьшать значение параметра  $t$ , то линия уровня будет перемещаться в сторону, противоположную направлению вектора  $c$ . Если линии уровней при любом сколь угодно большом по абсолютной величине отрицательном значении  $t$  будут иметь общую точку с множеством  $D$ , то это будет означать что функция  $c^T x$  является неограниченной снизу на

допустимом множестве, и задача линейного программирования не имеет решения. Если же линия уровня  $c^T x = m^*$  будет иметь хотя бы одну общую точку с множеством  $D$ , а при значениях  $m < m^*$  соответствующие линии уровней не будут иметь общих с  $D$  точек, то  $m^*$  будет минимальным значением функции  $c^T x$  на множестве  $D$ , а принадлежащая прямой  $c^T x = m^*$  точка  $x^*$  из  $D$  будет решением задачи.

Ясно, что когда множество допустимых решений является многоугольником, минимум линейной функции достигается в вершине многоугольника или на целой грани, если у множества  $D$  есть участок границы, параллельный прямой  $c^T x = m^*$ .

Напомним некоторые определения геометрического характера, которые понадобятся в дальнейшем.

**Определение 2.4.2.** Множество точек  $x \in R_n$ , которые удовлетворяют системе линейных уравнений (1.1.2), называют плоскостью размерности  $n - t$ , если ранг матрицы  $A$  этой системы равен  $t$ . Плоскость размерности  $n - 1$  называют гиперплоскостью.

**Определение 2.4.3.** Множество точек  $x \in R_n$ , удовлетворяющих неравенству  $a^T x \leq b$ , где  $a \in R_n$ ,  $b \in R_1$ , называют полупространством пространства  $R_n$ .

Границей этого полупространства является гиперплоскость, задаваемая равенством  $a^T x = b$ .

**Определение 2.4.4.** Множество точек  $x \in R_n$ , удовлетворяющих системе линейных равенств и неравенств, называется многогранным. Если многогранное множество является ограниченным, то его называют многогранником.

Таким образом, множество допустимых решений задачи (1.1.1) – (1.1.3) является многогранным или многогранником, и представляет собой пересечение плоскости размерности  $n - m$  с полупространствами  $\xi_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ .

**Определение 2.4.5.** *Линейная комбинация точек  $x_1, x_2, \dots, x_k \in R_n$  вида  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$  называется выпуклой, если  $\lambda_i \geq 0$  для всех  $i = 1, \dots, k$ , и  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .*

Выпуклую комбинацию двух точек будем записывать с помощью одного параметра  $\lambda$ , а именно, в виде  $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ , где  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

**Определение 2.4.6.** *Множество  $G \subset R_n$  называется выпуклым, если для любых точек  $x_1, x_2 \in G$  и для любого числа  $\lambda \in (0, 1)$  выполняется включение  $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in G$ . Выпуклыми считаются также пустое множество и множество, состоящее из единственной точки.*

По геометрическому смыслу множество  $G \subset R_n$  является выпуклым, если любая точка отрезка, соединяющего любые две точки  $x_1, x_2 \in G$ , принадлежит этому множеству.

Легко доказываются следующие два утверждения.

1) Пересечение выпуклых множеств также является выпуклым множеством.

2) Множества

$$D_1 = \{ x : x \in R_n, Ax \leq b \},$$

$$D_2 = \{ x : x \in R_n, Ax = b \},$$

где  $A$  – матрица, имеющая  $m$  строк и  $n$  столбцов,  $b \in R_m$ , являются выпуклыми и замкнутыми.

Из этих утверждений следует, что множества допустимых решений в задачах линейного программирования являются многогранными, выпуклыми и замкнутыми.

**Определение 2.4.7.** Пусть  $G \subset R_n$  – выпуклое множество, точка  $x \in G$  называется крайней, если ее нельзя представить в виде выпуклой линейной комбинации двух других точек  $x_1, x_2 \in G$ ,  $x_1 \neq x_2$ .

Например, все граничные точки множества  $G = \{x : x \in R_n, \|x\| \leq 1\}$  являются крайними. Но понятия крайней точки и граничной не совпадают. Так, крайними точками выпуклого многогранного множества являются только его вершины.

Основой для геометрической интерпретации симплексного метода может служить следующая

**Теорема 2.4.1.** Пусть  $n$ -мерный вектор

$$x_0 = (\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{k0}, 0, \dots, 0)^T,$$

где  $\xi_{i0} > 0$  для всех  $i = 1, \dots, k$ , является планом задачи (1.1.1) – (1.1.3). Для того, чтобы этот план был опорным, необходимо и достаточно, чтобы он был крайней точкой множества допустимых решений задачи (1.1.1) – (1.1.3).

**Доказательство.** Необходимость. Допустим, что план  $x_0$  является опорным, но не является крайней точкой множества  $D$  допустимых решений задачи (1.1.1) – (1.1.3). Тогда согласно определению 2.4.7 найдутся две отличные друг от друга точки  $x_1, x_2 \in D$  и число  $\lambda \in (0, 1)$  такие, что выполнится равенство

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2. \tag{2.4.1}$$

Пусть

$$x_1 = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)^T, \quad x_2 = (\xi''_1, \xi''_2, \dots, \xi''_n)^T.$$

Так как  $\xi'_i, \xi''_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ , то из равенства (2.4.1) вытекают равенства

$$\xi'_i = \xi''_i = 0 \quad \forall i = k+1, \dots, n. \quad (2.4.2)$$

Поскольку выполняется включение  $x_1, x_2 \in D$ , то векторы  $x_1, x_2$  удовлетворяют условию (1.1.4). Подставляя их координаты в (1.1.4), получим равенства

$$\sum_{i=1}^k \xi'_i P_i = P_0, \quad \sum_{i=1}^k \xi''_i P_i = P_0. \quad (2.4.3)$$

Так как по условию план  $x_0$  является опорным, то векторы  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , соответствующие его ненулевым координатам, линейно независимы. Тогда в силу единственности разложения вектора  $P_0$  по линейно независимой системе векторов  $P_1, P_2, \dots, P_k$  из равенств (2.4.3) следует, что  $\xi'_i = \xi''_i \quad \forall i = 1, \dots, k$ . Отсюда и из (2.4.2) вытекает равенство  $x_1 = x_2$ , тогда как по принятому предположению эти векторы различны. Значит, сделанное предположение не справедливо, и опорный план  $x_0$  является крайней точкой множества  $D$ .

Достаточность. Допустим, что вектор  $x_0$  является крайней точкой множества  $D$ , но не является опорным планом задачи (1.1.1) – (1.1.3). Тогда векторы  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , соответствующие положительным координатам плана  $x_0$ , линейно зависимы, и, значит, найдутся такие числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , не все равные нулю, что будет выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i P_i = 0. \quad (2.4.4)$$

Так как по условию вектор  $x_0$  удовлетворяет равенству (1.1.4), то справедливо

$$\sum_{i=1}^k \xi_i P_i = P_0. \quad (2.4.5)$$

Умножая равенство (2.4.4) на число  $\theta > 0$ , величиной которого распорядимся несколько позже, и, учитывая равенство (2.4.5), сформируем два следующих равенства:

$$\sum_{i=1}^n (\xi_{i0} - \theta \alpha_i) P_i = P_0, \quad \sum_{i=1}^n (\xi_{i0} + \theta \alpha_i) P_i = P_0 \quad (2.4.6)$$

Далее, поскольку  $\xi_{i0} > 0$  для всех  $i = 1, \dots, k$ , то выберем число  $\theta > 0$  настолько малым, что все коэффициенты в формулах (2.4.6) будут неотрицательными. Построим  $n$ -мерные векторы

$$X_1 = (\xi_{10} - \theta \alpha_1, \xi_{20} - \theta \alpha_2, \dots, \xi_{k0} - \theta \alpha_k, 0, 0, \dots, 0)^T,$$

$$X_2 = (\xi_{10} + \theta \alpha_1, \xi_{20} + \theta \alpha_2, \dots, \xi_{k0} + \theta \alpha_k, 0, 0, \dots, 0)^T.$$

Равенства (2.4.6) показывают, что векторы  $X_1$  и  $X_2$  удовлетворяют ограничениям (1.1.4), и, следовательно, с учетом выбора  $\theta$  являются планами задачи (1.1.1) – (1.1.3), причем различными планами, так как по построению хотя бы одно из чисел  $\alpha_i$  отлично от нуля. Но поскольку очевидно, что имеет место равенство

$$x_0 = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2,$$

то крайняя точка  $x_0$  множества  $D$  оказалась выпуклой комбинацией двух других отличных друг от друга точек из  $D$ , а это противоречит определению 2.4.7. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 2.4.1 позволяет обсудить геометрический смысл процесса решения задачи линейного программирования симплексным методом. Множество  $D$  допустимых решений задачи (1.1.1) – (1.1.3), как говорилось ранее, является выпуклым многогранным. В процессе решения задачи симплексным методом на каждой итерации совершается переход от одного опорного плана к другому с последовательным уменьшением значений линейной формы. Таким образом, согласно теореме 2.4.1 в методе заложен целенаправленный перебор крайних точек многогранного множества  $D$ , и в случае существования решения задачи симплексный метод позволяет найти

через конечное число шагов ту крайнюю точку множества  $D$ , в которой достигается минимум. Найденная крайняя точка может быть не единственной точкой минимума. Выбирая другой порядок вводящихся и выводящихся из базиса векторов, т. е. выбирая другой порядок перебора крайних точек множества  $D$ , можно найти другой оптимальный опорный план.

**Теорема 2.4.2.** *Если задача линейного программирования имеет хотя бы два различных оптимальных плана, то число оптимальных планов в этой задаче бесконечно.*

**Доказательство.** Пусть точки  $x_1, x_2, \dots, x_k \in D$  являются оптимальными планами задачи (1.1.1) – (1.1.3), и  $m^*$  – минимальное значение функции (1.1.1). Убедимся, что вектор

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$$

при любых  $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ , таких, что  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , также является оптимальным планом задачи (1.1.1) – (1.1.3). Тогда теорема будет доказана.

Действительно, согласно выбору точек  $x_1, x_2, \dots, x_k$  выполняются соотношения

$$A x_i = P_0, \quad x_i \geq 0, \quad c^T x_i = m^*$$

для всех  $i = 1, \dots, k$ . Тогда имеют место равенства

$$A \bar{x} = A \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i A x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_0 = P_0 \sum_{i=1}^k \lambda_i = P_0, \quad (2.4.7)$$

$$c^T \bar{x} = c^T \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i m^* = m^* \sum_{i=1}^k \lambda_i = m^*. \quad (2.4.8)$$

Так как по построению  $\bar{x} \geq 0$ , то в силу (2.4.7) вектор  $\bar{x}$  является планом задачи (1.1.1) – (1.1.3), а в силу (2.4.8) – ее оптимальным планом. Теорема доказана.

## Г Л А В А 3

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРИЕМЫ И АЛГОРИТМЫ, ОСНОВАННЫЕ НА СИМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕХОДАХ К НОВЫМ БАЗИСАМ

### § 1. Алгоритм с целочисленными операциями

Практическое применение симплексного метода иногда приводит к следующим трудностям. При проведении процесса исключений Жордана-Гаусса приходится производить операции деления чисел. Поэтому вычислительные процедуры построения симплексных таблиц происходят с приближенными числами. Накопление погрешностей округления может, в частности, привести к тому, что оценки, которые при точных вычислениях являются нулевыми, могут стать положительными при приближенных вычислениях. Это, например, становится сигналом для построения нового базиса и новой симплексной таблицы даже в том случае, когда уже получен оптимальный план. Таким образом, процесс вычислений может привести к ошибочным выводам.

Предлагаемый в данном параграфе алгоритм предназначен для решения задачи линейного программирования в канонической форме (1.1.1) – (1.1.3) с условием, что все числа, определяющие задачу (1.1.1) – (1.1.3), являются целыми. Алгоритм характерен тем, что позволяет получить решение задачи, проделав все промежуточные вычисления в целых числах.

Получим сначала некоторые вспомогательные результаты.

Без ограничения общности будем считать, как всегда, что исходным базисом для решения задачи служит набор векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , базисной матрицей, соответствующей выбранному базису, является подматрица

$$B = (P_1, P_2, \dots, P_m)$$

матрицы  $A$ , и  $B^{-1}P_0 \geq 0$ . Набор векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , образующих матрицу  $B$ , будем, как и раньше, называть для краткости базисом  $B$ .

Обозначим через  $|B|$  определитель матрицы  $B$ . Ясно, что он отличен от нуля. Будем считать, что

$$|B| > 0.$$

Это условие не является ограничительным, так как добиться его выполнения можно, переставив местами два уравнения в системе равенств (1.1.2) или перенумеровав переменные.

**Определение 3.1.1.** Матрицу

$$\tilde{B} = |B| B^{-1} \tag{3.1.1}$$

будем называть присоединенной для  $B$ .

Отметим, что элементами матрицы  $\tilde{B}$  являются числа  $\tilde{a}_{ij} = A_{ji}$ , где  $A_{ji}$  – алгебраические дополнения элементов  $a_{ji}$  матрицы  $B$ .

В силу (3.1.1) выполняется равенство

$$\tilde{B} P_j = B^{-1} |B| P_j.$$

Согласно лемме 1.2.1 это равенство означает, что вектор  $\tilde{B} P_j$  является набором коэффициентов разложения вектора  $|B| P_j$  по базису  $B$ .

Заметим, также, что система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n \xi_j \tilde{B} P_j = \tilde{B} P_0 \tag{3.1.2}$$

имеет своими коэффициентами целые числа. Кроме того, она эквивалентна системе (1.1.4), а значит, и системе основных ограничений (1.1.2), причем ее

расширенная матрица получается умножением основы симплексной таблицы, соответствующей базису  $B$ , на число  $|B|$ .

Как обычно, используем далее следующие обозначения:

$$B^{-1}P_j = (\xi_{1j}, \xi_{2j}, \dots, \xi_{mj})^T,$$

$$\Delta_j = c_B^T B^{-1}P_j - c_j, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad c_0 = 0.$$

Положим также

$$\tilde{B}P_j = (\eta_{1j}, \eta_{2j}, \dots, \eta_{mj})^T, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (3.1.3)$$

где

$$\eta_{ij} = |B| \xi_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (3.1.4)$$

$$\delta_j = |B| \Delta_j = c_B^T \tilde{B}P_j - |B| c_j, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (3.1.5)$$

Заметим, что если вектор  $P_j$  является базисным, то  $B^{-1}P_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ , где единица стоит на  $j$ -ом месте. Тогда в силу (3.1.4) выполняются равенства

$$\eta_{ij} = 0$$

при  $i \neq j$ , и

$$\eta_{jj} = |B|.$$

**Определение 3.1.2.** *Таблицу, все числа которой совпадают с соответствующими числами симплексной таблицы, умноженными на определитель  $|B|$ , будем называть присоединенной симплекс-таблицей, соответствующей базису  $B$ .*

Напомним, что базис  $B$  является оптимальным, если  $\Delta_j \leq 0$  для всех  $j = 1, 2, \dots, n$ . Равенства (3.1.5) показывают, что базис  $B$  оптимален, когда  $\delta_j = |B| \Delta_j \leq 0$  для всех  $j = 1, \dots, n$ . Отметим также, что если базис  $B$  оптимален,

то согласно равенствам (3.1.3), (3.1.4) базисные компоненты соответствующего ему оптимального плана задачи (1.1.1) – (1.1.3) могут быть получены путем деления координат столбца  $\tilde{B}P_0$  присоединенной симплекс-таблицы на число  $|B|$ . Оптимальное значение целевой функции согласно (3.1.5) получается делением элемента строки критериев, стоящего в том же столбце  $\tilde{B}P_0$ , на то же число  $|B|$ .

Таким образом, для построения алгоритма с указанной выше особенностью должны учитываться следующие соображения. Поскольку присоединенные симплекс-таблицы, соответствующие любому базису, содержат только целые числа, то надо найти правило пересчета присоединенных симплекс-таблиц, которые соответствуют возникающим в процессе использования симплексного метода базисам. Тогда все промежуточные вычисления будут производиться в целых числах, а погрешности округления могут возникнуть лишь тогда, когда уже найден оптимальный базис  $B^*$ , и для построения оптимального плана задачи (1.1.1) – (1.1.3) координаты вектора  $\tilde{B}^*P_0$  делятся на определитель  $|B^*|$ . Впрочем, можно получить и точное решение в рациональных дробях.

***Лемма 3.1.1.** Пусть новый базис  $B_1$  получен путем замены в исходном базисе  $B$  вектора  $P_s$  вектором  $P_j$  согласно правилам симплексного метода. Тогда выполняются соотношения*

$$|B_1| = \eta_{sj} > 0.$$

**Доказательство.** По условию теоремы после замены в базисе  $B$  вектора  $P_s$  вектором  $P_j$  система векторов  $B_1$  осталась линейно-независимой. Тогда по лемме 1.2.2 ведущий элемент  $\xi_{sj}$  соответствующей базису  $B$  симплексной таблицы отличен от нуля, причем согласно способу его выбора в симплексном методе выполняется неравенство  $\xi_{sj} > 0$ .

Далее, с учетом равенства  $P_j = \sum_{i=1}^m \xi_{ij} P_i$  определитель матрицы  $B_1$

имеет вид

$$|B_1| = \left| P_1, \dots, P_{s-1}, \sum_{i=1}^m \xi_{ij} P_i, P_{s+1}, \dots, P_m \right| = \sum_{i=1}^m \xi_{ij} |P_1, \dots, P_{s-1}, P_i, P_{s+1}, \dots, P_m|.$$

Так как определители, имеющие одинаковые столбцы равны нулю, то из последнего равенства с учетом (3.1.4) и положительности числа  $\xi_{sj}$  вытекают соотношения

$$|B_1| = \xi_{sj} |P_1, \dots, P_{s-1}, P_s, P_{s+1}, \dots, P_m| = \xi_{sj} |B| = \eta_{sj} > 0.$$

Лемма доказана.

Получим теперь формулы перехода от одной присоединенной симплекса-таблицы к следующей.

Пусть везде далее  $B_1$  – базис, полученный путем замены в базисе  $B$  вектора  $P_s$  вектором  $P_j$ , т. е. базисом  $B_1$  является набор векторов  $P_1, \dots, P_{s-1}, P_j, P_{s+1}, \dots, P_m$ . Положим

$$B_1^{-1} P_k = \left( \xi'_{1k}, \dots, \xi'_{s-1k}, \xi'_{jk}, \xi'_{s+1k}, \dots, \xi'_{mk} \right)^T.$$

Согласно правилу исключений Жордана–Гаусса новые коэффициенты разложения векторов и новые оценки будут выглядеть следующим образом:

$$\xi'_{sk} = \xi_{sk} / \xi_{sj}, \quad \xi'_{ik} = \xi_{ik} - \xi_{ij} \xi_{sk} / \xi_{sj}, \quad \text{если } i \neq s, \quad (3.1.6)$$

$$\Delta'_k = c_B^T B_1^{-1} P_k - c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.1.7)$$

С учетом формул (3.1.3) – (3.1.5) элементами присоединенной симплекса-таблицы, соответствующей базису  $B_1$ , будут числа  $\eta'_{sk} = |B_1| \xi'_{sk}$ ,  $\eta'_{ik} = |B_1| \xi'_{ik}$  при  $i \neq s$ ,  $\delta'_k = |B_1| \Delta'_k$  при  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Тогда, привлекая равенства (3.1.6), найдем

$$\eta'_{sk} = |B_1| \frac{\xi'_{sk}}{\xi_{sj}} = |B_1| \frac{\frac{\xi_{sk}|B|}{\xi_{sj}|B|}}{\xi_{sj}} = |B_1| \frac{\eta_{sk}}{\eta_{sj}} = \eta_{sk}, \quad k=0,1,2,\dots,n, \quad (3.1.8)$$

$$\eta'_{ik} = |B_1| \xi'_{ik} = |B_1| \frac{\xi_{ik}\xi_{sj} - \xi_{sk}\xi_{ij}}{\xi_{sj}} \quad k=0,1,2,\dots,n \text{ при } i \neq s.$$

Умножив числитель и знаменатель дроби в последнем равенстве на величину  $|B|^2$ , получим

$$\eta'_{ik} = |B_1| \frac{\eta_{ik}\eta_{sj} - \eta_{sk}\eta_{ij}}{\eta_{sj}|B|} = \frac{\eta_{ik}\eta_{sj} - \eta_{sk}\eta_{ij}}{|B|}, \quad k=0,1,2,\dots,n \text{ при } i \neq s. \quad (3.1.9)$$

Так как элементы присоединенной симплексной таблицы являются числами целыми, то числитель правой части равенства (3.1.9) заведомо кратен числу  $|B|$ .

После аналогичных действий с использованием равенств (3.1.7) получим

$$\delta'_k = |B_1| \Delta'_k = |B_1| \frac{\Delta_k \xi_{sj} - \xi_{sk} \Delta_j}{\xi_{sj}} = \frac{\delta_k \eta_{sj} - \eta_{sk} \delta_j}{|B|}, \quad k=0,1,2,\dots,n. \quad (3.1.10)$$

Итак, формулы (3.1.8) – (3.1.10) дают правило пересчета присоединенных симплекс-таблиц при симплексном переходе от одного базиса к другому.

Выясним, наконец, правило выбора вектора, вводящегося в базис, и вектора, выводящегося из базиса, руководствуясь только данными присоединенных симплекс-таблиц.

Так как согласно лемме 3.1.1 все определители базисных матриц при симплексных переходах к новым базисам являются положительными, то  $\text{sign } \delta_k = \text{sign } \Delta_k$  для всех  $k$ . Значит, вводящийся в базис вектор  $P_j$  должен соответствовать числу  $\delta_j > 0$ , а оптимальным является базис, для которого выполняются неравенства  $\delta_k \leq 0, k=1, \dots, n$ .

Согласно правилам симплексного метода из базиса выводится вектор  $P_s$ , если выполнено равенство (1.3.10). Умножая в этом равенстве числители и знаменатели дробей на  $|B|$  и учитывая, что  $\text{sign } \eta_{ik} = \text{sign } \xi_{ik}$  для всех  $i, k$ ,

получим следующее правило. Из базиса должен выводиться вектор  $P_s$  с индексом  $s$ , для которого справедливо равенство

$$\eta_{s,0}/\eta_{s,j} = \min_{i/\eta_{i,j} > 0} \eta_{i,0}/\eta_{i,j}. \quad (3.1.11)$$

Если же найдется такая оценка  $\delta_j > 0$ , что для всех элементов соответствующего ей столбца таблицы выполняются неравенства  $\eta_{i,j} \leq 0$ , то задача (1.1.1) – (1.1.3) не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу на множестве ограничений.

На основе проведенных исследований сформулируем

### Алгоритм с вычислениями в целых числах

0. Подготовительный шаг. Выбирается базис  $B$ , для которого базисная матрица  $B$  такова, что ее определитель положителен и

$$B^{-1}P_0 \geq 0.$$

Для удобства описания алгоритма будем считать, что выбранный базис  $B$  и его базисная матрица состоят из векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$ .

1. Строится присоединенная симплекс-таблица, соответствующая базису  $B$ . Для этого все элементы, включая коэффициенты  $c_j$  и оценки  $\Delta_j$ , симплексной таблицы, соответствующей базису  $B$ , умножаются на число  $|B|$  (см. обозначения (3.1.4), (3.1.5)).

2. Если  $\delta_j \leq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , то итерационный процесс заканчивается, и выписывается оптимальный план

$$x^* = \left( \frac{\eta_{1,0}}{|B|}, \dots, \frac{\eta_{m,0}}{|B|}, 0, \dots, 0 \right)^T \in R_n,$$

причем точный с координатами в виде рациональных чисел, либо приближенный с координатами в виде десятичных дробей. Оптимальное

значение целевой функции решаемой задачи получается делением на  $|B|$  числа  $\delta_0$ .

3. Если найдется такое число  $\delta_k > 0$ , что  $\eta_{ik} \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , то задача не имеет решения, так как линейная форма  $c^T x$  не ограничена снизу на множестве ограничений.

4. Выбирается любой вектор  $P_j$ , для которого  $\delta_j > 0$ . Он будет введен в новый базис.

5. Выбирается вектор  $P_s$ , для которого выполняется равенство (3.1.11) (если таких векторов более одного, то выбирается любой из них). Этот вектор удаляется из текущего базиса.

6. Составляется присоединенная симплекс-таблица, соответствующая новому базису. Для этого в столбце «Базис» вектор  $P_s$  заменяется вектором  $P_j$ , в столбце  $C_B$  число  $|B|c_s$  заменяется числом  $|B|c_j$ , все остальные элементы  $\eta'_{ij}$ ,  $\delta'_j$  новой присоединенной симплекс-таблицы вычисляются по формулам

$$\eta'_{sk} = \eta_{sk}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (3.1.12)$$

$$\eta'_{ik} = \frac{\eta_{ik} \eta_{sj} - \eta_{sk} \eta_{ij}}{|B|}, \quad k = 0, 1, \dots, n \text{ при } i \neq s, \quad (3.1.13)$$

$$\delta'_k = \frac{\delta_k \eta_{sj} - \eta_{sk} \delta_j}{|B|}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (3.1.14)$$

считая ведущим элементом число  $\eta_{sj}$ .

Одна итерация метода описана. После ее выполнения следует безусловный переход к шагу 2 алгоритма с целью анализа очередной присоединенной симплекс-таблицы, считая при этом, что  $\delta_j = \delta'_j$ ,  $\eta_{ij} = \eta'_{ij}$ .

Опишем специально алгоритм пересчета присоединенной симплекс-таблицы по формулам (3.1.12) – (3.1.14), удобный для вычислений. При этом не

забываем, что по договоренности таблица, от которой делается переход к новой присоединенной симплекс-таблице, соответствует базисным векторам  $P_1, P_2, \dots, P_m$ .

Ведущая строка исходной таблицы, т. е. строка, в которой стоит ведущий элемент  $\eta_{s,j}$ , переносится без изменения в  $s$ -ую строку новой таблицы (отметим, что теперь в столбце «Базис» в этой строке вместо вектора  $P_s$  стоит вектор  $P_j$ ).

Опишем правило вычисления любой из остальных строк новой таблицы. Чтобы получить  $i$ -ую ( $i \neq s$ ) строку новой присоединенной симплекс-таблицы следует проделать следующие элементарные преобразования:

- 1) строка с номером  $i$  исходной присоединенной симплекс-таблицы умножается на ведущий элемент  $\eta_{s,j}$ ;
- 2) из полученной строки вычитается ведущая строка, умноженная на  $\eta_{i,j}$ ;
- 3) все элементы, полученные в  $i$ -ой строке, делятся на определитель  $|B|$ .

В результате этих трех операций над строками и будет получена  $i$ -ая строка новой присоединенной симплекс-таблицы.

Обратим внимание на то, что в силу леммы 3.1.1 определитель  $|B_1|$  новой базисной матрицы равен ведущему элементу  $\eta_{s,j}$  таблицы, соответствующей базису  $B$ . Именно такое число и будет получаться на тех местах, где стояли значения  $|B|$ .

**Пример 3.1.1.** Требуется предложенным алгоритмом решить задачу минимизации функции

$$-2\xi_1 + 3\xi_2 - 4\xi_3 + 5\xi_4$$

при ограничениях

$$3\xi_1 - 3\xi_2 + 7\xi_3 + \xi_4 \leq 2,$$

$$8\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + 4\xi_4 \leq 3,$$

и

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \geq 0.$$

Применяя метод дополнительных переменных, построим вспомогательную задачу минимизации функции

$$-2\xi_1 + 3\xi_2 - 4\xi_3 + 5\xi_4 + 0\xi_5 + 0\xi_6 \quad (3.1.15)$$

при ограничениях

$$3\xi_1 - 3\xi_2 + 7\xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = 2 \quad (3.1.16)$$

$$8\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + 4\xi_4 + \xi_6 = 3$$

и

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6 \geq 0. \quad (3.1.17)$$

Отметим, что вид задачи (3.1.15) – (3.1.17) позволяет применить для ее решения описанный алгоритм.

Для решения задачи (3.1.15) – (3.1.17) предложенным алгоритмом выберем, в качестве исходного, базис, составленный из векторов  $P_5, P_6$ . Тогда базисная матрица  $B_0 = (P_5, P_6)$  является единичной,  $|B_0| = 1 > 0$ , и справедливо неравенство  $B_0^{-1}P_0 \geq 0$ , т. е. все высказанные в алгоритме требования к выбору начального базиса выполнены.

Согласно равенству (3.1.1), присоединенная матрица  $\tilde{B}_0$  также будет единичной, и расширенная матрица системы (3.1.2) для примера 3.1.1 совпадет с расширенной матрицей системы (3.1.16). Начальная присоединенная симплекс-таблица, таким образом, запишется в виде таблицы 3.1.1.

Пусть решено ввести в базис вектор  $P_3$ , соответствующий положительной оценке  $\delta_3 = 4$ . Тогда ведущим элементом будет число 7, а ведущей строкой – первая. Вектор  $P_3$  заменит в базисе вектор  $P_5$ . Определитель  $|B_1|$  базисной матрицы  $B_1 = (P_3, P_6)$  согласно лемме 3.1.1 будет равен ведущему элементу, т. е. числу 7. Потому при построении присоединенной симплекс-таблицы,

соответствующей базису  $B_1 = (P_3, P_6)$ , все коэффициенты линейной функции (3.1.15) должны быть умножены на 7.

**Таблица 3.1.1**

$\tilde{B}_0$	$C_{\tilde{B}_0}$	0	-2	3	-4	5	0	0
		$\tilde{B}_0 P_0$	$\tilde{B}_0 P_1$	$\tilde{B}_0 P_2$	$\tilde{B}_0 P_3$	$\tilde{B}_0 P_4$	$\tilde{B}_0 P_5$	$\tilde{B}_0 P_6$
$P_5$	0	2	3	-3	<u>7</u>	1	1	0
$P_6$	0	3	8	2	-1	4	0	1
$\delta_k$		0	2	-3	4	-5	0	0

Базисная строка переносится в таблицу 3.1.2 без изменений.

Вторая строка новой таблицы вычисляется по описанному ранее правилу пересчета. А именно, элементы второй строки таблицы 3.1.1 умножаются на ведущий элемент 7. Получается набор

$$(21, 56, 14, -7, 28, 0, 7). \quad (3.1.18)$$

Затем ведущая строка умножается на элемент, стоящий в том же столбце во второй строке, т. е. на -1. Получается набор

$$(-2, -3, 3, -7, -1, -1, 0). \quad (3.1.19)$$

Теперь из набора (3.1.18) вычитается по правилу вычитания векторов набор (3.1.19). Получившийся набор

$$(23, 59, 11, 0, 29, 1, 7)$$

следует поделить на определитель  $|B_0|=1$ . Такой будет вторая строка таблицы 3.1.2.

Аналогично получается строка оценок новой таблицы. А именно, из строки оценок, умноженной на 7, т. е. из набора

$$(0, 14, -21, 28, -35, 0, 0),$$

вычитается ведущая строка, умноженная на 4, т. е. набор

$$(8, 12, -12, 28, 4, 4, 0).$$

В результате получаем строку оценок в таблице 3.1.2.

**Таблица 3.1.2**

$\tilde{B}_1$	$C_{\tilde{B}_1}$	0	-14	21	-28	35	0	0
		$\tilde{B}_1 P_0$	$\tilde{B}_1 P_1$	$\tilde{B}_1 P_2$	$\tilde{B}_1 P_3$	$\tilde{B}_1 P_4$	$\tilde{B}_1 P_5$	$\tilde{B}_1 P_6$
$P_3$	-4	2	3	-3	7	1	1	0
$P_6$	0	23	<u>59</u>	11	0	29	1	7
$\delta_k$		-8	2	-9	0	-39	-4	0

Поскольку в таблице 3.1.2  $\delta_2 = 2 > 0$ , то в очередной базис вводится вектор  $P_1$ , а так как выполняется неравенство  $\frac{2}{3} > \frac{23}{59}$ , то из базиса выводится вектор  $P_6$ . Таким образом, ведущим элементом таблицы 3.1.2 является число 59, ведущей строкой – вторая, а определитель базисной матрицы  $|B_2| = |(P_3, P_1)| = 59$  согласно лемме 3.1.1.

Таблица 3.1.3 строится следующим образом. Базисная строка таблицы 3.1.2 переписывается во вторую строку таблицы 3.1.3. Чтобы получить первую строку таблицы 3.1.3 по правилу перехода к новой присоединенной симплекса-таблице, соответствующей базису  $B_2$ , производятся следующие действия. Первая строка таблицы 3.1.2 умножается на ведущий элемент 59, т. е. получается строка

$$(118, 177, -177, 413, 59, 59, 0).$$

Из нее вычитается ведущая строка, умноженная на 3, т. е. строка

$$(69, 177, 33, 0, 87, 3, 21),$$

и результирующая строка

$$(49, 0, -210, 413, -28, 56, -21)$$

делится на определитель  $|B_1| = 7$ .

Аналогично последовательно вычисляются наборы для отыскания строки оценок:

$$\begin{aligned} &(-472, 118, -531, 0, -2301, -236, 0); \\ &(46, 118, 22, 0, 58, 2.14); \\ &(-518, 0, -553, 0, -2359, -238, -14). \end{aligned}$$

Поделив на 7 элементы последней строки, найдем строку оценок в таблице 3.1.3.

**Таблица 3.1.3**

$\tilde{B}_2$	$C_{\tilde{B}_2}$	0	-118	177	-236	295	0	0
		$\tilde{B}_2 P_0$	$\tilde{B}_2 P_1$	$\tilde{B}_2 P_2$	$\tilde{B}_2 P_3$	$\tilde{B}_2 P_4$	$\tilde{B}_2 P_5$	$\tilde{B}_2 P_6$
$P_3$	-4	7	0	-30	59	-4	8	-3
$P_1$	-2	23	59	11	0	29	1	7
$\delta_k$		-74	0	-79	0	-337	-34	-2

Поскольку в строке критериев таблицы 3.1.3 положительных оценок нет, то вспомогательная задача (3.1.15) – (3.1.17) решена, и ее решение имеет вид  $x^* = (23/59, 0, 7/59, 0, 0, 0)^T$ . Тогда решением исходной задачи является вектор  $x^* = (23/59, 0, 7/59, 0)^T$ , а минимальное значение линейной формы  $c^T x^* = -74/59$ .

## **§ 2. Вычислительные приемы**

### **без использования искусственных переменных**

В параграфе излагаются два вычислительных приема без использования искусственных переменных применительно к решению задачи линейного

программирования в форме (1.1.1) – (1.1.3). Эти приемы были предложены одним из авторов в работе [11].

Заметим, что при изложении материала этого параграфа используются некоторые понятия и утверждения из теории двойственности в линейном программировании. Кроме того, в предлагаемых здесь алгоритмах участвует так называемый двойственный симплексный метод решения задач линейного программирования, использующий введенные в главе 1 понятия псевдоплана и опорного псевдоплана. Основы теории двойственности, а также двойственный симплексный метод были изложены авторами этого пособия ранее в [10], и потому в данном учебном пособии этот материал опускается. Отметим, что обозначения и определения, используемые здесь, специально полностью совпадают с обозначениями и определениями, принятыми в [10]. Поэтому при необходимости ознакомления с названным разделом линейного программирования читателю, по-видимому, будет удобно воспользоваться пособием [10].

Как и ранее, для удобства изложения будем предполагать, что начальным базисом является совокупность векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Если для базисной подматрицы  $B = (P_1, P_2, \dots, P_m)$  матрицы  $A$  выполняются одновременно условия

$$B^{-1}P_0 \geq 0 \quad (3.2.1)$$

и

$$\Delta_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (3.2.2)$$

то в силу теоремы 1.3.1 координаты вектора  $B^{-1}P_0$  являются базисными координатами оптимального плана задачи (1.1.1) – (1.1.3). Если базис  $B$  выбран так, что условие (3.2.1) выполняется, а условие (3.2.2) не выполняется, то для решения задачи (1.1.1) – (1.1.3) далее применяется симплексный метод. Если же выполняется условие (3.2.2), а неравенство (3.2.1) не выполняется, то для решения задачи (1.1.1) – (1.1.3) применяется двойственный симплексный метод.

При произвольном выборе исходного базиса  $B$ , обычно не выполняются оба условия (3.2.1), (3.2.2). Именно для такого случая предлагаются в данном параграфе два алгоритма решения задачи (1.1.1) – (1.1.3), использующие последовательно симплексный и двойственный симплексный методы, и позволяющие обходиться без использования искусственных переменных.

## II.1. Метод условного плана

Получим некоторые вспомогательные утверждения, на которых будет базироваться излагаемый в данном пункте вычислительный прием.

*Лемма 3.2.1.* Пусть ранг матрицы  $A$  размерности  $m \times n$  равен  $m$ . Тогда имеют место следующие условия существования неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = P_0. \quad (3.2.3)$$

1. Если

$$B = (P_1, P_2, \dots, P_m)$$

– базисная подматрица матрицы  $A$ , и

$$Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)^T \geq 0,$$

то система (3.2.3) при выполнении равенства  $P_0 = BQ$  имеет неотрицательное решение. При этом вектор

$$\bar{x} = (q_1, \dots, q_m, 0, \dots, 0)^T \in R_n$$

является крайней точкой множества допустимых решений задачи (1.1.1) – (1.1.3).

2. Если система уравнений (3.2.3) имеет неотрицательное решение, то существуют такая базисная подматрица  $B$  матрицы  $A$  и такой вектор  $Q \geq 0$ , что

$$P_0 = BQ.$$

**Доказательство.** Докажем первое утверждение. Умножив (3.2.3) на матрицу  $B^{-1}$  слева и учитывая, что  $P_0 = BQ$ , получим равенство

$$B^{-1}Ax = Q. \quad (3.2.4)$$

Столбцами матрицы системы (3.2.4) являются векторы  $B^{-1}P_j$ ,  $j=1, \dots, n$ . Поскольку они представляют собой набор коэффициентов разложения векторов  $P_j$  по базису  $B$ , а векторы  $P_j$  при  $j=1, \dots, m$  входят в состав базиса  $B$ , то  $B^{-1}P_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in R_m$ , где единица стоит на  $j$ -ом месте. Значит,  $n$  - мерный вектор

$$\bar{x} = (q_1, q_2, \dots, q_m, 0, \dots, 0)^T$$

удовлетворяет равенству (3.2.4), и в силу условия  $Q \geq 0$  является неотрицательным решением системы (3.2.4), эквивалентной системе (3.2.3).

Далее, по построению ненулевые координаты вектора  $\bar{x}$  могут быть только среди чисел  $q_j$ ,  $j=1, \dots, m$ . Поэтому ненулевые координаты вектора  $\bar{x}$  соответствуют векторам  $P_j$  из базиса  $B$ . Следовательно, вектор  $\bar{x}$  является опорным планом задачи (1.1.1) – (1.1.3) по определению 1.1.3, а по теореме 2.4.1 он является крайней точкой множества допустимых решений задачи (1.1.1) – (1.1.3).

Докажем второе утверждение. Так как по условиям леммы допустимое множество  $D = \{x \in R_n : Ax = P_0, x \geq 0\}$  задачи (1.1.1) – (1.1.3) не пусто, то оно имеет хотя бы одну крайнюю точку ([3], с. 61). Тогда согласно теореме 2.4.1 задача (1.1.1) – (1.1.3) имеет опорный план. Любой план вида  $\bar{x} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_r, 0, \dots, 0)^T \in R_n$ , где  $\bar{\xi}_j \geq 0$ ,  $j=1, \dots, r \leq m$ , является опорным, поскольку его ненулевым координатам соответствуют линейно-независимые векторы  $P_1, P_2, \dots, P_r$ .

Если  $r = m$ , то система векторов  $P_1, P_2, \dots, P_r$  образует базис, если же  $r < m$ , то дополним ее до базиса  $P_1, P_2, \dots, P_r, \dots, P_m$ . Так как точка  $\bar{x} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_r, 0, \dots, 0)^T$  является решением системы (3.2.3), то она является и

решением эквивалентной системы  $B^{-1}Ax = B^{-1}P_0$ , где  $B = (P_1, P_2, \dots, P_r, \dots, P_m)$ . Векторы  $B^{-1}P_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , являются единичными ортами. Подставляя  $x = \bar{x}$  в эту систему, убеждаемся, что вектор  $B^{-1}P_0$  совпадает с набором первых  $m$  координат вектора  $\bar{x}$ . А так как  $\bar{x} \geq 0$ , то  $B^{-1}P_0 \geq 0$ . Положим  $Q = B^{-1}P_0$ . Тогда  $P_0 = BQ$ . Лемма доказана.

**Теорема 3.2.1.** *Если задача (1.1.1) – (1.1.3) имеет решение, то разрешима и задача*

$$c^T x - \min, \quad Ax = BQ, \quad x \geq 0 \quad (3.2.5)$$

*с любой базисной подматрицей  $B$  матрицы  $A$  и вектором  $Q \geq 0$ .*

**Доказательство.** Поскольку задача (1.1.1) – (1.1.3) разрешима, то согласно основной теореме двойственности (напр., [4], с. 109, [5], с. 44, или [10], с. 20) разрешима и двойственная к ней задача

$$u^T P_0 - \max, \quad u^T A \leq c^T. \quad (3.2.6)$$

Двойственной к (3.2.5) является задача

$$u^T BQ - \max, \quad u^T A \leq c^T. \quad (3.2.7)$$

Так как множества допустимых решений задач (3.2.6) и (3.2.7) совпадают, а первая из них разрешима, то множество допустимых решений второй из этих задач не пусто.

Заметим, что множество допустимых решений задачи (3.2.5) также не пусто в силу леммы 3.2.1. Кроме того, линейная функция  $c^T x$  в задаче (3.2.5) ограничена снизу, так как в противном случае согласно основной теореме двойственности множество допустимых решений двойственной задачи (3.2.7) было бы пустым. Следовательно, задача (3.2.5) разрешима (напр., [1], с. 88). Теорема доказана.

**Следствие.** *Если найдутся базисная подматрица  $B$  матрицы  $A$  и вектор  $Q \geq 0$ , для которых задача (3.2.5) не имеет решения, то неразрешима и задача (1.1.1) – (1.1.3).*

Следствие не требует доказательства, так как оно является импликацией, эквивалентной высказыванию, сформулированному в теореме 3.2.1.

Заметим, что утверждение, обратное теореме 3.2.1, не верно. А именно, если задача (1.1.1) – (1.1.3) не имеет решения, то при определенном выборе подматрицы  $B$  и вектора  $Q$  задача (3.2.5) может быть разрешимой. Подтверждает это следующий

**Пример 3.2.1.** Пусть задача (1.1.1) – (1.1.3) имеет вид

$$\xi_1 + 2\xi_2 + 5\xi_3 - \min, \quad (3.2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} 3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 2 \\ 2\xi_1 + \xi_2 &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (3.2.9)$$

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0. \quad (3.2.10)$$

Требуется показать, что она не имеет решения, и в то же время соответствующая ей задача (3.2.5) разрешима при некоторых  $B$  и  $Q$ .

Выберем базис, состоящий из векторов  $P_1, P_2$ . Тогда базисной подматрицей матрицы  $A$  основных ограничений задачи является матрица  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , а ее обратная матрица имеет вид  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ . Умножая расширенную матрицу системы (3.2.9) слева на  $B^{-1}$ , получим эквивалентную с (3.2.9) систему

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 - \xi_3 &= 1 \\ \xi_2 + 2\xi_3 &= -1 \end{aligned} \right\}. \quad (3.2.11)$$

Очевидно, что в системе (3.2.11) второе из уравнений не может выполняться для неотрицательных значений переменных. Значит, задача (3.2.8) – (3.2.10) не имеет решения.

Выберем теперь  $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Тогда  $BQ = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ , а задача (3.2.5) будет иметь

вид

$$\xi_1 + 2\xi_2 + 5\xi_3 - \min \quad (3.2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} 3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 4 \\ 2\xi_1 + \xi_2 &= 3 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.13)$$

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0. \quad (3.2.14)$$

Согласно лемме 3.2.1 система (3.2.13) имеет неотрицательное решение, а так как коэффициенты минимизируемой линейной функции  $\xi_1 + 2\xi_2 + 5\xi_3$  положительны, то в силу условий (3.2.14) она ограничена снизу. Значит, задача (3.2.12) – (3.2.14) имеет решение, а задача (3.2.8) – (3.2.10), как уже показано выше, решения не имеет. Можно и непосредственно убедиться в том, что вектор  $x^* = (1, 1, 0)^T$  является оптимальным планом задачи (3.2.12) – (3.2.14).

Приведем теперь первую схему решения задачи (1.1.1) – (1.1.3) без использования искусственных переменных, которая названа выше методом условного плана.

1. Произвольно выбирается базис из векторов-столбцов матрицы  $A$ . Будем считать, что таковым является набор  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Отыскивается матрица  $B^{-1}$ , обратная к базисной матрице

$$B = (P_1, P_2, \dots, P_m),$$

и задача (1.1.1) – (1.1.3) записывается в эквивалентной ей форме

$$\sum_{j=1}^n c_j \xi_j - \min, \quad (3.2.15)$$

$$\sum_{j=1}^n \xi_j B^{-1} P_j = B^{-1} P_0, \quad (3.2.16)$$

$$\xi_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.2.17)$$

Выписывается симплексная таблица, соответствующая базису  $B$ . Эта таблица представляет собой расширенную матрицу системы (3.2.16) с вычисленными значениями

$$\Delta_j = c_j^T B^{-1} P_j - c_j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где  $c_0 = 0$ .

2. В системе (3.2.16) столбец  $B^{-1}P_0$  заменяется каким-либо вектором  $Q \geq 0$ . Задачу, полученную в результате такой замены, назовем *вспомогательной*.

Обозначим  $\bar{P}_0 = BQ$ . Так как  $Q = B^{-1}\bar{P}_0$ , то замена вектора  $B^{-1}P_0$  на вектор  $Q \geq 0$  в системе (3.2.16) означает замену вектора  $P_0$  в задаче (1.1.1) – (1.1.3) вектором  $\bar{P}_0$ . Таким образом, симплексная таблица вспомогательной задачи будет представлять собой расширенную матрицу системы

$$\sum_{j=1}^n \xi_j B^{-1}P_j = B^{-1}\bar{P}_0 \quad (3.2.18)$$

с теми же оценками  $\Delta_j = c_B^T B^{-1}P_j - c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Вектор  $B^{-1}P_0$  приписывается в качестве дополнительного столбца к симплексной таблице вспомогательной задачи.

3. Поскольку

$$Q = B^{-1}\bar{P}_0 \geq 0,$$

то выполнены условия применимости к вспомогательной задаче симплексного метода. Вспомогательная задача решается симплексным методом. Если в ходе решения обнаруживается, что вспомогательная задача не разрешима, то согласно следствию к теореме 3.2.1 исходная задача (1.1.1) – (1.1.3) также является неразрешимой, и процесс завершается. В противном случае симплексным методом находится решение вспомогательной задачи. При этом последняя симплексная таблица будет содержать заключительный базис  $\bar{B}$ , векторы

$$\bar{B}^{-1}\bar{P}_0, \bar{B}^{-1}P_0, \bar{B}^{-1}P_1, \dots, \bar{B}^{-1}P_n \quad (3.2.19)$$

и оценки

$$\bar{\Delta}_j = c_B^T \bar{B}^{-1}P_j - c_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (3.2.20)$$

(заметим, что вектор  $\bar{B}^{-1}P_0$  будет найден, поскольку в симплексной таблице вспомогательной задачи был сохранен столбец  $B^{-1}P_0$ ).

4. Если после решения вспомогательной задачи оказалось, что

$$\bar{B}^{-1}P_0 \geq 0,$$

то задача (1.1.1) – (1.1.3) решена в силу условий (3.2.20), и координаты вектора  $\bar{B}^{-1}P_0$  в этом случае представляют собой набор базисных координат оптимального плана задачи (1.1.1) – (1.1.3). В противном случае столбец  $\bar{B}^{-1}P_0$  вычеркивается из заключительной таблицы. Оставшиеся после такого вычеркивания векторы (3.2.19) и оценки (3.2.20) образуют симплексную таблицу, соответствующую базису  $\bar{B}$ , для задачи (1.1.1) – (1.1.3). Поскольку в этой симплексной таблице при всех  $j = 1, \dots, n$  выполняются неравенства  $\bar{\Delta}_j \leq 0$  то задача (1.1.1) – (1.1.3) готова для решения двойственным симплексным методом.

5. Полученная в пункте 4 соответствующая базису  $\bar{B}$  симплексная таблица используется далее как начальная для решения задачи (1.1.1) – (1.1.3) двойственным симплексным методом. В процессе решения двойственным методом либо обнаружится, что задача (1.1.1) – (1.1.3) не разрешима, либо будет найден ее оптимальный план.

**Замечание 3.2.1.** Возможна и несколько другая схема вычислений. А именно, столбец  $B^{-1}P_0$  можно не присоединять к симплексной таблице вспомогательной задачи и не преобразовывать его в процессе решения, как это предписано делать в предложенной схеме. После решения вспомогательной задачи будет определен заключительный базис  $\bar{B}$ . Поэтому вектор  $\bar{B}^{-1}P_0$  можно вычислить непосредственным умножением слева вектора  $P_0$  на матрицу  $\bar{B}^{-1}$ . При этом базисную матрицу  $\bar{B}$  не требуется обращать специально. Матрица  $\bar{B}^{-1}$  будет находиться в заключительной симплексной таблице на том месте, где стояла в исходной симплексной таблице единичная подматрица матрицы системы (3.2.18).

**Замечание 3.2.2.** Вектор  $Q \geq 0$  целесообразно строить путем замены отрицательных координат вектора  $B^{-1}P_0$  положительными числами. Тогда

вектор  $Q = B^{-1}\bar{P}_0$  в некоторых случаях может мало отличаться от вектора  $B^{-1}P_0$ , и решение вспомогательной задачи может оказаться одновременно и решением основной задачи. Ниже (в п. 3 данного параграфа) это будет подтверждено примером.

Отметим, что решение конкретной задачи предложенным здесь методом условного плана будет приведено в п. 3 настоящего параграфа.

## П.2. Метод условной целевой функции

Предлагаемый в этом пункте параграфа прием решения задачи (1.1.1) – (1.1.3), который также не использует искусственных переменных, обосновывает следующая теорема.

**Теорема 3.2.2.** Пусть задача линейного программирования

$$\bar{c}^T x - \min, \quad Ax = P_0, \quad x \geq 0 \quad (3.2.21)$$

такова, что выполняется неравенство  $\bar{c} \geq c$ , где вектор  $c$  определяет целевую функцию задачи (1.1.1) – (1.1.3). Если задача (3.2.21) не имеет решения, то не имеет решения и задача (1.1.1) – (1.1.3).

**Доказательство.** Докажем теорему методом от противного. Пусть задача (3.2.21) не имеет решения. Допустим, что  $x^*$  – решение задачи (1.1.1) – (1.1.3), т. е.

$$c^T x^* \leq c^T x$$

для любого допустимого решения  $x$  этой задачи. Так как по условию  $\bar{c} \geq c$ , и  $x \geq 0$ , то  $c^T x \leq \bar{c}^T x$ . Следовательно,

$$c^T x^* \leq \bar{c}^T x \quad (3.2.22)$$

для любого допустимого решения задачи (1.1.1) – (1.1.3).

Поскольку множества допустимых решений задач (1.1.1) – (1.1.3) и (3.2.21) совпадают, то неравенство (3.2.22) выполняется для любого допустимого решения  $x$  задачи (3.2.21). Таким образом, на множестве допустимых решений задачи (3.2.21) функция  $\bar{c}^T x$  в силу неравенства (3.2.22) ограничена снизу. Как уже отмечалось при обосновании теоремы 3.2.1, в этом случае задача (3.2.21) разрешима, что противоречит сделанному предположению. Теорема доказана.

Следующий простой пример показывает, что обратное утверждение теоремы 3.2.2, не справедливо. А именно, если задача (3.2.21) разрешима, то задача (1.1.1) – (1.1.3) может и не иметь решения.

**Пример 3.2.2.** Пусть задача (1.1.1) – (1.1.3) имеет вид

$$\begin{aligned} -\xi_1 - \xi_2 &= \min, \\ 2\xi_1 - \xi_2 &= 2, \quad \xi_1, \xi_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Точка  $x = (1+t, 2t)^T$  является допустимым решением этой задачи при любом  $t \geq 0$ . Но для таких точек значения целевой функции задачи имеют вид  $c^T x = -1 - 3t$ . Следовательно, линейная форма  $c^T x$  на множестве допустимых решений не ограничена снизу, и задача (1.1.1) – (1.1.3) не имеет решения.

Построим теперь на основе задачи (1.1.1) – (1.1.3) задачу (3.2.21), выбрав  $\bar{c}^T = (-1, 1) \geq c^T = (-1, -1)$ . Легко убедиться, что задача (3.2.21), полученная путем замены в исходной задаче целевой функции  $c^T x$  на функцию  $\bar{c}^T x = -\xi_1 + \xi_2$  при тех же ограничениях имеет решение  $x^* = (1, 0)^T$ .

Сформулируем теперь метод решения задачи (1.1.1) – (1.1.3), названный выше методом условной целевой функции.

1. Выбирается произвольно базис  $B$ . Пусть для простоты обозначений он будет состоять из векторов  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Составляется соответствующая этому базису симплексная таблица.

2. Если среди оценок построенной таблицы нет положительных, то следует решение задачи двойственным симплексным методом. В противном случае выполняется пункт 3 метода.

3. На основе задачи (1.1.1) – (1.1.3) следующим образом строится вспомогательная задача. Коэффициенты  $c_j$  целевой функции исходной задачи заменяются числами

$$\bar{c}_j \geq c_j$$

так, чтобы выполнялись неравенства  $\Delta_j \leq 0$  для всех  $j = 1, \dots, n$ , а ограничения вспомогательной задачи остаются прежними, т. е. совпадают с ограничениями исходной задачи.

4. Вспомогательная задача решается двойственным симплексным методом. Если при этом обнаруживается, что вспомогательная задача не имеет решения, то процесс прекращается, так как в силу теоремы 3.2.2 исходная задача (1.1.1) – (1.1.3) также не разрешима. В противном случае в результате решения вспомогательной задачи будет построен базис  $\tilde{B}$  и векторы  $\tilde{B}^{-1}P_j$  для всех  $j = 0, 1, \dots, n$  (причем  $\tilde{B}^{-1}P_0 \geq 0$ , и все оценки в последней таблице не положительны). Таким образом, построена основа симплексной таблицы для задачи (1.1.1) – (1.1.3).

5. В полученной симплексной таблице, соответствующей базису  $\tilde{B}$ , восстанавливаются все значения коэффициентов  $c_j$ , т. е. все числа  $\bar{c}_j$  заменяются числами  $c_j$ .

6. Вычисляются заново оценки, и с помощью построенной таблицы задача (1.1.1) – (1.1.3) решается симплексным методом. В результате будет найдено её решение, либо будет обнаружено, что линейная форма в задаче (1.1.1) – (1.1.3) не ограничена снизу.

**Замечание 3.2.3.** При выполнении пункта 3 метода можно, например, положить  $\bar{c}_j = c_j$  для тех номеров  $j$ , для которых  $\Delta_j \leq 0$ , а в остальных случаях заменить  $c_j$  такими числами  $\bar{c}_j > c_j$ , при которых соответствующие оценки станут отрицательными.

### **П.3. Анализ предложенных методов без искусственных переменных**

Проведем сравнение предложенных в данном параграфе методов решения задачи (1.1.1) – (1.1.3) с изложенными в главе 2 методами искусственных переменных, и сделаем некоторые выводы.

1. Предложенные методы особенно удобны при решении задач линейного программирования, в которых все основные ограничения имеют форму неравенств вида  $a_i^T x \leq b_i$ . В этом случае по описанным выше правилам (см. § 4 главы 1) вводятся дополнительные переменные, и вспомогательная задача приобретает вид (1.1.1) – (1.1.3). Тогда для ее решения независимо от знаков чисел  $b_i$  в качестве начальных базисных векторов можно взять векторы, соответствующие дополнительным переменным. Базисная матрица  $B$  будет в этом случае совпадать с единичной матрицей  $E$ , и, кроме того, будет выполняться равенство  $B^{-1} = E$ . Вводить искусственные переменные при решении вспомогательной задачи не потребуется даже, если среди чисел  $b_i$  есть отрицательные, так как для ее решения можно применять один из построенных в данном параграфе алгоритмов.

2. Симплексные таблицы в предлагаемых алгоритмах имеют меньшую размерность, и не редко существенно меньшую, чем в случаях, когда при

решении задачи линейного программирования приходится применять не только дополнительные, но и искусственные переменные.

3. Напомним, что в двухэтапном методе искусственного базиса (см. §§ 1, 2 главы 2) линейная форма (2.1.1) на первом этапе вычислений никак не связана с минимизируемой функцией  $c^T x$  исходной задачи. Поэтому ожидать, что решение задачи первого этапа в каком-либо смысле будет близко к решению исходной задачи (1.1.1) – (1.1.3) нельзя. Кроме того, в случае вырожденной задачи линейного программирования на первом этапе применения двухэтапного метода искусственного базиса случается, что не все искусственные векторы выводятся из базиса. Таким образом, часто после первого этапа исходный базис для решения задачи (1.1.1) – (1.1.3) не находится. Для замены каждого оставшегося в базисе искусственного вектора приходится применять дополнительные особые процедуры, не укладывающиеся в схему симплексного метода. Такая ситуация описана в § 1 главы 2, и там же приведен соответствующий пример 2.1.1. Подчеркнем, что в предлагаемых здесь алгоритмах на первом этапе всегда, в случае разрешимости исходной задачи, будет найден необходимый базис.

4. В обоих предложенных алгоритмах при построении вспомогательной задачи есть возможность частично сохранять исходные данные решаемой задачи (1.1.1) – (1.1.3). Поэтому в некоторых случаях вспомогательная задача может мало отличаться от исходной задачи (1.1.1) – (1.1.3). В связи с этим при использовании предложенных алгоритмов в результате решения вспомогательной задачи может одновременно на первом этапе оказаться решенной и основная задача (1.1.1) – (1.1.3). Приведем для подтверждения этого тезиса следующий простой пример, который будет решаться методом условного плана.

**Пример 3.2.3.** Пусть методом условного плана требуется найти минимум линейной функции

$$-6\xi_1 - \xi_2 + \xi_3$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 1, \\ 2\xi_1 - \xi_3 &= 1, \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

и

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0.$$

Включим в начальный базис, например, векторы  $P_2, P_3$ . Тогда

$$B = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая расширенную матрицу системы (3.2.23) слева на матрицу  $B^{-1}$ , получим для данного примера эквивалентную систему (3.2.16) в виде

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &= 2, \\ -2\xi_1 + \xi_3 &= -1. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Построим теперь согласно п. 2 метода вспомогательную задачу. Для этого заменим в системе (3.2.24) вектор  $B^{-1}P_0 = (2, -1)^T$ , например, вектором  $B^{-1}\bar{P}_0 = (2, \alpha)^T$ , где  $0 \leq \alpha \leq 6$ . Тогда в результате замены система примет вид

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &= 2, \\ -2\xi_1 + \xi_3 &= \alpha. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Запишем для построенной вспомогательной задачи симплексную таблицу, соответствующую выбранному начальному базису  $P_2, P_3$ . При этом основой такой симплексной таблицы будет расширенная матрица системы (3.2.25). К полученной симплексной таблице припишем, как и рекомендовано в п. 2 метода, дополнительный столбец  $B^{-1}P_0 = (2, -1)^T$ .

Далее, вспомогательную задачу со столбцом  $B^{-1}\bar{P}_0 = (2, \alpha)^T$  решаем симплексным методом, преобразуя одновременно и приписанный столбец  $B^{-1}P_0 = (2, -1)^T$ . В результате проведения первой же итерации вектор  $P_2$  будет заменен вектором  $P_1$ , и заключительной базисной матрицей окажется матрица  $\bar{B} = (P_1, P_3)$ . В столбцах  $\bar{B}^{-1}\bar{P}_0 = (2, 4 + \alpha)^T$ ,  $\bar{B}^{-1}P_0 = (2, 3)^T$  новой таблицы будут получены одновременно базисные координаты оптимальных планов

$$\bar{x}^* = (2, 0, 4 + \alpha)^T, x^* = (2, 0, 3)^T$$

вспомогательной и основной задач соответственно.

Поскольку при решении задачи линейного программирования методом условной целевой функции также может изменяться только часть исходных данных задачи, то не редко возникает аналогичная ситуация, когда одновременно с решением вспомогательной задачи получается и решение основной задачи.

5. Проводилось численное сравнение предложенного метода условного плана с двухэтапным методом искусственного базиса. Было решено большое число тестовых задач. Задачи составлялись случайным образом. Ограничения в них выбирались в форме равенств, причем без наличия базиса из единичных векторов-столбцов. Количество переменных в тестовых задачах не превышало десяти, а число равенств в ограничениях не превышало семи.

Каждая из задач решалась методом условного плана и двухэтапным методом искусственного базиса. При решении задач методом условного плана начальный базис выбирался произвольно. Исходная задача вида (1.1.1) – (1.1.3) сводилась к задаче (3.2.15) – (3.2.17) с помощью процесса исключений Жордана-Гаусса. При проведении экспериментов почти 90 % задач было решено быстрее методом условного плана. При этом во многих задачах предложенным методом решение находилось в 1,5–2 раза быстрее, чем двухэтапным методом искусственного базиса.

### § 3. Метод последовательного присоединения неравенств

В параграфе излагается метод решения общей задачи линейного программирования, который целесообразно применять в том случае, когда в задаче число основных ограничений, имеющих форму неравенств, значительно больше размерности пространства переменных.

Описываемый ниже метод основывается на следующем вспомогательном утверждении.

*Лемма 3.3.1.* Пусть множества  $M$  и  $D$  из  $R_n$  таковы, что

$$M \supset D.$$

Если  $x^*$  – решение задачи минимизации функции  $c^T x$  на множестве  $M$ , и при этом выполняется включение

$$x^* \in D,$$

то точка  $x^*$  одновременно является решением и задачи минимизации функции  $c^T x$  на множестве  $D$ .

**Доказательство.** По условию для всех точек  $x \in M$  справедливо неравенство

$$c^T x \geq c^T x^*. \quad (3.3.1)$$

Но согласно условию леммы имеет место включение  $D \subset M$ , значит, неравенство (3.3.1) выполняется и для всех  $x \in D$ . Отсюда с учетом, что  $x^* \in D$ , следует утверждение леммы.

Пусть решается задача минимизации функции  $c^T x$  на множестве  $D$ , которое имеет следующий вид:

$$D = \{x \in R_n : A_1 x = P'_0, A_2 x \leq P''_0, x \geq 0\}.$$

Будем считать, что система ограничений задачи совместна, и множество  $D$  ограничено. Опишем алгоритм решения такой задачи.

## Алгоритм

Из системы основных и дополнительных ограничений исходной задачи строится в виде ее подсистемы выпуклое ограниченное замкнутое множество  $M_0$  таким образом, чтобы в эту подсистему вошли ограничения  $A_1 x = P'_0, x \geq 0$  (заметим, что построенное таким образом множество  $M_0$  заведомо содержит область  $D$ ).

Пусть уже построено множество  $M_k$ , где  $k \geq 0$ . Тогда  $k$ -й шаг алгоритма выглядит следующим образом.

1. Решается задача минимизации целевой функции  $c^T x$  на множестве  $M_k$ . Эту задачу будем называть *вспомогательной задачей  $k$ -ой итерации*. Пусть  $x_k^*$  – ее решение. Если выполняется включение  $x_k^* \in D$ , то согласно лемме 3.3.1 точка  $x_k^*$  является решением поставленной задачи, и процесс прекращается.

2. Среди ограничений

$$A_2 x \leq P''_0 \quad (3.3.2)$$

выбирается любое нарушенное в точке  $x_k^*$ .

3. Строится множество  $M_{k+1}$  путем присоединения к ограничениям вспомогательной задачи  $k$ -й итерации выбранного в пункте 2 нарушенного неравенства, и следует переход к пункту 1 алгоритма при  $k$ , увеличенном на единицу.

Заметим, что процесс присоединения неравенств конечен хотя бы потому, что исходная задача имеет конечное число ограничений. Таким образом, в процессе решения за конечное число итераций будет найден оптимальный план исходной задачи.

Обсудим теперь некоторые вычислительные аспекты, которые касаются описанного принципиального алгоритма решения поставленной задачи.

**Замечание 3.3.1.** Основная трудность применения алгоритма состоит в построении начального погружающего множества  $M_0$ , поскольку оно, согласно требованию, должно быть ограниченным. Множество  $M_0$  строится легко, если среди равенств

$$A_1 x = P'_0 \quad (3.3.3)$$

или неравенств (3.3.2) найдется хотя бы одно такое, у которого все коэффициенты неотрицательны. Тогда в первом случае можно, например, положить

$$M_0 = \left\{ x \in R_n : A_1 x = P'_0, x \geq 0 \right\},$$

а во втором случае в качестве начального погружающего множества можно взять

$$M_0 = \left\{ A_1 x = P'_0, \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \leq \beta, x \geq 0 \right\},$$

где неравенство  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \leq \beta$  выбрано из системы ограничений (3.3.2), и все его коэффициенты неотрицательны.

**Замечание 3.3.2.** Если ограничения (3.3.3) в исходной задаче отсутствуют, то множество  $M_0$  строится только на основе неравенства  $x \geq 0$  и части неравенств (3.3.2).

**Замечание 3.3.3.** Если среди основных ограничений нет неравенств(3.3.2), то оптимальный план исходной задачи будет получен в результате решения первой же вспомогательной задачи, т. е. применять описанный метод в таком случае не имеет смысла.

**Замечание 3.3.4.** Первую из задач линейного программирования в пункте 1 (вспомогательную задачу 0-ой итерации) целесообразно решать симплексным методом. Поясним эту рекомендацию. Заметим, что после

решения указанной задачи все оценки в строке критериев заключительной симплексной таблицы будут неположительными. Предположим, что далее, согласно пункту 3 алгоритма, потребуется добавить к ограничениям решенной задачи нарушенное неравенство и, соответственно, решить новую вспомогательную задачу с этим добавленным ограничением. Тогда при решении новой задачи с учетом отмеченной выше неотрицательности оценок последней симплексной таблицы удобно применять двойственный симплекс-метод, используя процедуру, описанную, например, в ([5], сс. 62–65). Дело в том, что эта процедура позволяет при решении новой задачи с одним добавленным неравенством после введения дополнительной переменной использовать заключительную симплексную таблицу предыдущей задачи. Это существенно сокращает время решения новой задачи. Понятно, что тогда и на следующих итерациях можно привлекать к решению вспомогательных задач с целью сокращения времени их решения двойственный симплекс-метод.

Заметим, что симплексный метод при решении задач линейного программирования с указанной выше спецификой использует одновременно все неравенства системы ограничений. В то же время при использовании предложенного здесь метода размерности решаемых последовательно вспомогательных задач (с учетом дополнительных переменных) могут быть существенно меньшими по сравнению с размерностью исходной задачи.

Численные эксперименты показали, что при решении методом последовательного присоединения неравенств тех тестовых задач, в которых число основных ограничений-неравенств существенно превышало число переменных, многие из этих ограничений оказывались неиспользованными.

## ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. – М.: Наука, 1981. – 304 с.
2. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. В 2-х книгах. Кн. 1. – М.: МЦНМО, 2011. – 620 с.
3. *Васильев Ф.П., Ивануцкий А.Ю.* Линейное программирование. – М.: Факториал, 2003. – 176 с.
4. *Еремин И.И.* Теория линейной оптимизации. – Екатеринбург: УрО РАН, 1998. – 247 с.
5. *Заботин Я.И.* Лекции по линейному программированию. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. – 97 с.
6. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. – М.: Наука, 1986. – 285 с.
7. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 326 с.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

8. *Булавский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А.* Численные методы линейного программирования. – М.: Наука, 1977. – 367 с.
9. *Гасс С.* Линейное программирование. – М.: Физматгиз, 1961. – 303 с.
10. *Заботин И.Я., Заботин Я.И.* Двойственность и двойственный метод в линейном программировании: учебное пособие. – Набережные Челны: Филиал Казан. гос. ун-та в г. Набережные Челны, 2007. – 43 с.
11. *Заботин Я.И.* Вычислительные приемы в линейном программировании без использования искусственных векторов // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 1. – С. 20–26.

12. *Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б.* Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980. – 302 с.
13. *Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 528 с.
14. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. – М.: Мир, 1984. – 224 с.
15. *Ногин В.Д., Протодьяконов И.О., Евлампиев И.И.* Основы теории оптимизации. – М.: Высшая школа, 1986. – 384 с.

*Учебное издание*

**Заботин Игорь Ярославич**

**Заботин Ярослав Иванович**

**МЕТОДЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРИЕМЫ  
В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ**

Учебное пособие для студентов вузов

Корректор

***Г.Т. Гилязова***

Компьютерная верстка

***А.И. Галиуллиной***

Дизайн обложки

***М.А. Ахметова***

Подписано в печать 09.10.2014.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 6,74.

Уч.-изд. л. 3,56. Тираж 102 экз. Заказ 115/9.

**Казанский университет**

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37

тел. (843) 233-73-59, 233-73-28