Е.Н. СОСОВ

Введение в метрическую геометрию

Часть 2

Некоторые приложения метрической геометрии

КАЗАНЬ – 2008

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.Н. СОСОВ

Введение в метрическую геометрию

Часть 2

Некоторые приложения метрической геометрии

УДК 515.124.4

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
механико-математического факультета КГУ

Сосов Е.Н.

Введение в метрическую геометрию. Часть 2.: Учебное пособие — Казань: Казанский государственный университет, 2008. 29 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов-математиков IV и V курсов.

Введение.

Данное учебное пособие является продолжением части 1 вводного курса по метрической геометрии и предназначено для студентов математиков старших курсов университетов. Часть 2 рассчитана на 20 часов аудиторной нагрузки и включает некоторые приложения метрической геометрии, связанные с теорией приближений, метрической проекцией, квазирешениями операторных уравнений. Все задачи в пособии служат для контроля правильного усвоения основных понятий.

В пособии приняты следующие обозначения.

$|xy| = \rho(x, y)$ — расстояние между точками x, y в метрическом пространстве (X, ρ).

$\odot$ — символ начала (конца) доказательства.

Т.1.2 (**Л.1.2**, **З.1.2**, **Пр.1.2**, **С.1.2**) обозначает теорему 2 (лемму 2, задачу 2, пример 2, следствие 2) лекции 1.

1. β-непрерывность многозначного отображения метрических пространств. Метрическая δ-проекция. Множество существования и чебышевское множество. Аппроксимативная компактность.

Отображение $f : (X, \rho) \to (B(Y), d)$ называется *β-непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для каждой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty} \beta(f(x_n), f(x)) = 0.$$

β-непрерывное в каждой точке области определения отображение называется *β-непрерывным* отображением. При замене в этом определении β на α, мы получим определение непрерывности этого отображения относительно псевдометрики α Хаусдорфа.

Л.1.1 *β-непрерывное в каждой точке отображение*

$f : (X, \rho) \to (B(Y), d)$ *является β-непрерывным на любом компакте $M \subset X$, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, M) > 0$, что $\beta(f(W), f(M)) \leq \varepsilon$ для каждого $W \subset B(M, \delta)$.*

$\odot$ По определению β-непрерывности в произвольной точке $x \in X$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что $\beta(f(x'), f(x)) < \varepsilon$ для каждого $x' \subset B(x, \delta)$. Из покрытия M такими $\delta(\varepsilon, x)$-шарами выбираем конечное покрытие

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta(\varepsilon, x_i)),$$

где $x_i \in M$ для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Множество G — открыто, следовательно, множество $X \backslash G$ — замкнуто, причем $\rho(M, X\backslash G) > 0$. Пусть $\delta(\varepsilon, M) = \rho(M, X\backslash G)$ и $W \subset B(M, \delta(\varepsilon, M)) \subset G$ — произвольное подмножество. Тогда по свойствам отклонения Хаусдорфа установленным в первой части пособия

$$\beta(f(W), f(M)) \leq \sup\{\inf\{\beta(f(y), f(x)) : x \in M\} : y \in W\} \leq$$

$$\sup\{\min\{\beta(f(y), f(x_i)) : i \in \{1, \ldots, n\}\} : y \in W\} \leq \varepsilon. \odot$$

С.1.1 *Суперпозиция двух β-непрерывных отображений, в первом из которых любой точке отвечает бикомпакт, является β-непрерывным отображением.*

Пусть $\delta \geq 0$, $x \in X$, $M \subset X$, $M \neq \emptyset$.

$$x_M^\delta = \{y \in M : |xy| \leq |xM| + \delta\} \, (x_M = x_M^0)$$

— *метрическая δ-проекция* (*метрическая проекция*) точки x на множество M.

$$P : X \times 2^X \times \mathbb{R}_+ \to 2^X, \; P(x, M, \delta) = x_M^\delta$$

— *оператор метрического δ-проектирования* (*оператор метрического проектирования*, если $\delta \equiv 0$). Мы будем использовать также следующие обозначения:

$$P_M(x) = P(M, x) = x_M.$$

Множество $M \subset X$ называется *множеством существования* (*чебышевским множеством*), если для каждого $x \in X$ $x_M \neq \emptyset$ (x_M — одноточечно). Чебышевское множество M называется *сильно чебышевским*, если отображение P_M — непрерывно.

Последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в множестве $M \subset X$ называется *минимизирующей последовательностью* для точки $x \in X$, если

$$\lim_{n\to\infty} |xy_n| = |xM|.$$

Множество $M \subset X$ называется *аппроксимативно компактным*, если для каждой точки $x \in X$ любая минимизирующая последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M.

Л.1.2

(i) Если M — множество существования, то $M \neq \varnothing$ — замкнутое множество и для каждого $x \in X$ x_M — замкнутое множество.

(ii) Если M — аппроксимативно компактное множество, то M — множество существования и для каждого $x \in X$ x_M — компактное множество.

(iii) Если M — аппроксимативно компактное множество, то метрическая проекция $P_M : X \to 2^X$ является β-непрерывным отображением.

$\odot$ (i) Пусть $x \in \overline{M}$ и $y \in x_M$. Тогда $|xy| = |xM| = 0$. Следовательно, $\overline{M} = M$. Пусть $x \in X$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность в x_M, сходящаяся к точке $y \in X$. Тогда

$$|xy| = \lim_{n\to\infty} |xy_n| = |xM|$$

и $y \in \overline{M} = M$. Таким образом, $y \in x_M$ и x_M — замкнутое множество.
(ii) Пусть $x \in X$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — минимизирующая последовательность для точки $x \in X$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} |xy_n| = |xM|.$$

Тогда найдется подпоследовательность такая $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что

$$\lim_{m\to\infty} y_m = y \in M.$$

Кроме того,

$$|xy| = \lim_{m\to\infty} |xy_m| = |xM|.$$

Следовательно, $y \in x_M$ и M — множество существования. В силу доказанного утверждения (i), множества M, x_M замкнуты. Следовательно, x_M — компактное множество.
(iii) Докажем методом от противного. Пусть последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $x \in X$, но

$$\beta(P_M(x_n), P_M(x))$$

не сходится к нулю. Тогда найдутся число $a > 0$, подпоследовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, точка $z_m \in P_M(x_m)$ для каждого $m \in \mathbb{N}$ такие, что начиная с некоторого номера $m_0 \in \mathbb{N}$ $|z_m P_M(x)| > a$. Докажем, что последовательность $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ минимизирующая для точки x. Переходя в неравенствах

$$|xM| \le |xz_m| \le |xx_m| + |x_m z_m| = |xx_m| + |x_m M| \le 2|xx_m| + |xM|$$

к пределу при $m \to \infty$, получим, что

$$\lim_{m\to\infty} |xz_m| = |xM|.$$

В силу аппроксимативной компактности множества M, найдется подпоследовательность $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (z_m)_{m\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторой точке $z \in P_M(x)$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} |z_k P_M(x)| \le \lim_{k\to\infty} |z_k z| = 0.$$

Получили противоречие. $\odot$

С.1.2 *Метрическая проекция на аппроксимативно компактное чебышевское множество непрерывна.*

З.1.1 *Пусть M — непустое замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве $(X, ||\cdot||)$. Тогда метрическая проекция произвольной точки $x \in X$ на множество M состоит не более чем из одной точки.*

З.1.2 *Используя задачу 1.1, докажите, что непустое замкнутое выпуклое множество M в гильбертовом пространстве $(X, ||\cdot||)$ является чебышевским множеством.*

2. Непрерывность метрической δ-проекции и β-непрерывность обратного отображения.

Установим сначала факт непрерывности метрической δ-проекции.

Л.2.1 *Пусть $x \in (X, \rho)$, $M \subset X$ — компактно,*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n x| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0,\ \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0,$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\delta_n \geq 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \beta(P_n(x_n, M_n, \delta_n), P(x, M)) = 0.$$

В случае, когда $\delta_n \equiv 0$ считается, что для каждого

$$n \in \mathbb{N} \quad P_n(x_n, M_n, \delta_n) \neq \oslash.$$

$\odot$ Докажем методом от противного. Пусть утверждение неверно. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для бесконечной последовательности индексов n (можно считать, для всех индексов) найдутся такие

$$q_n \in P_n(x_n, M_n, \delta_n) \cap (X \backslash B(P(x, M), \varepsilon)),$$

что множество предельных точек последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не пересекается с открытым шаром $B(P(x, M), \varepsilon)$. С другой стороны, для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $z_n \in M$, что $|z_n q_n| \leq 2\alpha(M_n, M)$. Следовательно, множество предельных точек последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ совпадает с непустым множеством предельных точек последовательности $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$q_n \in B[x_n, |x_n M_n| + \delta_n] \subset B[x_n, |xM| + \alpha(M_n, M) + |x x_n| + \delta_n]$$

$$\subset B[x, |xM| + \alpha(M_n, M) + 2|x x_n| + \delta_n].$$

Тогда непустое множество предельных точек последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ принадлежит шару $B[x,|xM|]$, а следовательно и множеству

$$P(x,M) = M \cap B[x,|xM|].$$

Получили противоречие. $\odot$

Пр.2.1 При выполнении условий леммы 2.1 сходимость по Хаусдорфу может отсутствовать. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $M_n = M$, $\delta_n \equiv 0$,

$$X = \mathbb{R}^2,\ M = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x \leq 0\},$$

$x_0 = (0;0)$, $x_n = (1/n;0)$. Тогда

$$P(x_n, M) = \{(0;1),(0;-1)\},\ P(x_0,M) = M$$

и для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\beta(P(x_n,M),P(x,M)) = \beta(\{(0;1),(0;-1)\},M) = 0$,

$$\alpha(P(x_n,M),P(x,M)) = \beta(M,P(x_n,M)) = \sqrt{2}.$$

В случае, когда X — линейное нормированное пространство, приведем без доказательства один из результатов А. В. Маринова о непрерывности метрической δ-проекции. Для геодезических пространств специального типа существуют аналогичные результаты, но их описание выходит за рамки этого пособия.

Т.2.1 *Пусть M — выпуклое множество линейного нормированного пространства X, $x,\ y \in X$, $N \subset X$, $\varepsilon,\ \delta > 0$. Тогда выполняется неравенство :*

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq (\frac{2|xM|\}}{\varepsilon} + 1)(|\varepsilon - \delta| + 2|xy| + 3\alpha(M,N)).$$

Если оба множества M, N выпуклы, $\varepsilon,\ \delta \geq 0$, $\mu = \max(\varepsilon,\delta) > 0$, то

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq (\frac{2\min\{|xM|,|yN|\}}{\mu} + 1)(|\varepsilon - \delta| + 2|xy| + 3\alpha(M,N)).$$

В следующей лемме рассмотрена β-непрерывность обратного отображения.

Л.2.2 *Пусть $A : (X\rho) \to (Y,d)$ — замкнутый оператор с областью определения $D(A)$, $\hat{M} \subset X$ компакт, $M = D(A) \cap \hat{M} \neq \oslash$, $y \in A(M)$,*

$$\lim_{n\to\infty} |y_n y| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \beta(M_n, M) = 0,$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ $M_n \subset D(A)$ *и* $y_n \in A(M_n)$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \beta(B_n(y_n), B(y)) = 0,$$

где $B : A(M) \to M$, $B_n : A(M_n) \to M_n$ *— обратные отображения для* A *и* $A|_{M_n}$ *соответственно.*

$\odot$ Докажем методом от противного. Пусть утверждение неверно. Тогда найдутся такие $y \in A(M)$, $\varepsilon > 0$ и бесконечные последовательности объектов, удовлетворяющих условиям леммы 2.2, для которых

$$B_n(y_n) \cap (X \backslash B(B(y), \varepsilon)) \neq \oslash$$

при $n \geq 1$. Взяв прообразы при $n \geq 1$

$$x_n \in B_n(y_n) \backslash B(B(y), \varepsilon),$$

убеждаемся, что множество предельных точек последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не принадлежит шару $B(B(y), \varepsilon)$. С другой стороны, $x_n \in M_n \subset B(M, 2\beta(M_n, M))$. Следовательно, можно найти $z_n \in M \cap B(x_n, 2\beta(M_n, M)) \subset \hat{M}$. В силу компактности $\hat{M}$, множество предельных точек последовательности $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ непусто. Тогда непусто и множество предельных точек последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \beta(M_n, M) = 0$. Пусть x — предельная точка последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Упрощая обозначения, можно считать, что

$$\lim_{n\to\infty} |x_n x| = 0,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A).$$

Тогда $A(x_n) = y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но оператор A замкнут, следовательно, $x \in D(A)$ и $x \in M$. Таким образом, $A(x) = y$ и $x \in B(y)$. Получили противоречие. $\odot$

С.2.1 *Если оператор* A *биективен на* M*, то при выполнении остальных условий леммы 2.2*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(B_n(y_n), B(y)) = 0.$$

Если же оператор A *биективен на* X*, то имеет место обычная сходимость.*

3. Метрическая δ-проекция и ε-квазирешение операторного уравнения первого рода.

Операторным уравнением первого рода называется уравнение вида $Ax = y$, $x \in X$, $y \in (Y, d)$, где X — топологическое пространство. Требуется по заданному элементу y найти решение — элемент x.

Если обратный оператор A^{-1} неограничен, то решение x неустойчиво относительно погрешности задания элемента y, т.е. малые изменения правой части приводят к большим изменениям решения.

Пусть $M \subset X$. Элемент $x' \in M$ назавается *ε-квазирешением* операторного уравнения первого рода на множестве $M \subset X$ при $\varepsilon \geq 0$, если

$$d(Ax', y) \leq \inf\{d(Au, y) + \varepsilon : u \in M\}.$$

Если $\varepsilon = 0$, то ε-квазирешение называется *квазирешением или обобщенным решением*, при этом неравенство можно заменить равенством. Другими словами, элемент x' минимизирует *невязку* $d(Au, y)$ уравнения первого рода на множестве M с погрешностью, не превосходящей заданного $\varepsilon \geq 0$. Совокупность всех ε-квазирешений уравнения первого рода на множестве M обозначается $Q(y, A, M, \varepsilon)$. Найдем связь между совокупностью всех ε-квазирешений уравнения первого рода, метрической ε-проекцией и обратным оператором.

Л.3.1 *Пусть $Ax = y$ — операторное уравнение первого рода, где $x \in X$, $y \in (Y, d)$ и X — топологическое пространство. Тогда для всех $\oslash \neq M \subset X$, $\varepsilon \geq 0$ имеет место равенство*

$$Q(y, A, M, \varepsilon) = R_M \circ P(y, A(M), \varepsilon),$$

где $R_M : A(M) \to 2^M$, $R_M = M \cap A^{-1}(y)$. В частности, при $X = (Y, d)$

$$Q(x, id, M, \varepsilon) = P(x, M, \varepsilon).$$

$\odot$ Утверждение следует из следующих импликаций

$$z \in Q(y, A, M, \varepsilon) \Leftrightarrow z \in M,\ d(Az, y) \leq \inf\{d(Au, y) + \varepsilon : u \in M\} \Leftrightarrow$$

$$Az \in B[y, \inf\{d(Au, y) + \varepsilon : u \in M\}] \cap A(M) \Leftrightarrow z \in R_M \circ P(y, A(M), \varepsilon). \odot$$

Замечание 3.1 *Преимуществом ε-квазирешений является их существование и эффективная вычислимость.*

Пусть каждому элементу $y \in (Y, d)$ отвечает единственное решение $x = R_M(y) = M \cap A^{-1}(y)$. Задача опеределения решения $x = R_M(y)$ из X

по исходным данным $y \in Y$ называется *устойчивой на пространствах* (X, ρ), (Y, d), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $|x_1 x_2| \leq \varepsilon$ при $d(y_1, y_2) \leq \delta$, где $x_i = R_M(y_i)$, $y_i \in Y$, $x_i \in X$, $i = 1, 2$. Эта задача называется *корректно поставленной по Адамару на паре метрических пространств* $((X, \rho), (Y, d))$, если удовлетворяются требования :

(i) для каждого $y \in Y$ существует единственное решение $x \in X$, т.е. $Ax = y$;

(ii) задача устойчива на пространствах (X, Y).

Если одно из этих условий не выполнено, то задача называется некорректно поставленной.

Эта же задача называется *корректной по Тихонову*, если

(i) известно, что для точного значения $y = y_T$ существует единственное решение x_T уравнения $Ax_T = y_T$, принадлежащее заданному компакту $M \subset X$ (т.е. $x_T \in M$);

(ii) и если вместо элемента y_T известен такой элемент y_δ, что $d(y_T, y_\delta) \leq \delta$ и $y_\delta \in A(M)$ при $\delta \geq 0$, то в качестве приближенного решения операторного уравнения с правой частью $y = y_\delta$ можно взять $x_\delta = A^{-1}(y_\delta)$ (т.е. при $\delta \to 0$ $y_\delta \in A(M)$ и $x_\delta \to x_T$).

Т.3.1 *Если уравнение $Ax = y$ может иметь на компакте M не более одного решения и проекция каждого элемента $y \in Y$ на множество $A(M)$ единственна, то квазирешение этого уравнения единственно и непрерывно зависит от правой части y.*

$\odot$ Пусть $\hat{x}$ — квазирешение и $\hat{y} = A\hat{x}$. Тогда

$$d(A\hat{x}, y) \leq \inf\{d(Au, y) : u \in M\}.$$

Следовательно, $\hat{y} = y_{A(M)}$. В силу биективности $A : M \to A(M)$, квазирешение $\hat{x} = A^{-1}\hat{y} = A^{-1}y_{A(M)}$ единственно. Кроме того, оператор A^{-1} непрерывен на $A(M)$ и оператор проектирования P непрерывен на Y. Следовательно, оператор $A^{-1} \circ P$ непрерывен на Y и квазирешение $\hat{x}$ непрерывно зависит от правой части y $\odot$

Замечание 3.2 *Теорему 2.1 можно доказать без условия единственности, если понимать непрерывность множества квазирешений в смысле непрерывности многозначных отображений.*

Пусть $m \in (X, \rho)$. Для заданных на m операторов

A_1, $A_2 : (X, \rho) \to (Y, d)$ определим расстояние

$$\rho_m(A_1, A_2) = \sup\{\frac{d(A_1x, A_2x)}{|x\theta|} : x \in m\},$$

где $\theta \in X$ фиксированный элемент. Наряду с точным уравнением $Ax = y$, $y \in Y$ и множеством его квазирешений $Q = Q(y, A, M)$ на $M \subset X$, рассмотрим приближенные уравнения $A_n x = y_n$, $y_n \in Y$, $n \geq 1$ и $Q(y_n, A_n, M_n)$ на $M_n \subset X$, $n \geq 1$. Операторы A, A_n определены на

$$m = \bigcup_{n\geq 1} M_n \bigcup M$$

и действуют в пространство (Y, d).

Т.3.2 *Пусть* $M \in (X, \rho)$ — *компакт,оператор* $A : X \to (Y, d)$ *непрерывен на множестве*

$$m = \bigcup_{n\geq 1} M_n \bigcup M,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y,\ \lim_{n\to\infty} \rho_m(A_n, A) = 0,\ \lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0.$$

Тогда при непустых $Q_n = Q(y_n, A_n, M_n)$ $(n \geq 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \beta(Q_n, Q) = 0.$$

$\odot$ $A(M)$ — компакт, т.к. M — компакт и оператор A непрерывен. Тогда $P(y, A(M)) \neq \oslash$ — компакт и существует квазирешение операторного уравнения. Пусть $x_n \in Q_n$ приближенное квазирешение при $n \geq 1$. Тогда $d(y_n, A_n(M_n)) = d(y_n, A_n x_n)$. Кроме того, при $n \geq 1$

$$d(y_n, Ax_n) \leq d(y_n, A_n x_n) + d(Ax_n, A_n x_n) = d(y_n, A_n(M_n)) + d(Ax_n, A_n x_n) \leq$$

$$d(y_n, A(M_n)) + \beta(A(M_n), A_n(M_n)) + d(Ax_n, A_n x_n).$$

Следовательно, $Ax_n \in P(y_n, A(M_n), \eta_n)$, где

$$\eta_n = d(Ax_n, A_n x_n) + \beta(A(M_n), A_n(M_n)),\ n \geq 1.$$

Множество m можно считать ограниченным, поскольку M — компакт и

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0.$$

Тогда найдется такая константа $R > 0$, что для каждого $x \in m$ $|x\theta| \leq R$ и для каждого $n \geq 1$ $d(Ax_n, A_n x_n) \leq r_n R$, где $r_n = \rho_m(A_n, A)$. Теперь для каждого $n \geq 1$ нетрудно получить, что $\beta(A(M_n), A_n(M_n)) \leq r_n R$ и $\eta_n \leq 2r_n R$. Тем самым доказано, что для каждого $n \geq 1$

$$A(Q_n) \subset P(y_n, A(M_n), 2r_n R).$$

Применяя к этому включению обратный оператор $B : A(M_n) \to M_n$, получим для каждого $n \geq 1$ включение $Q_n \subset B \circ P(y_n, A(M_n), 2r_n R)$. Из леммы 1.1, непрерывности оператора A и условия

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \beta(A(M_n), A(M)) = 0.$$

Теперь, применяя лемму 2.1 и следствие 2.1, получим

$$\lim_{n\to\infty} \beta(B \circ P(y_n, A(M_n), 2r_n R), B \circ P(y, A(M))) = 0,$$

где $B : A(M) \to M$ — обратный оператор. Это тем более справедливо для меньших множеств Q_n, $n \geq 1$. $\odot$

4. Наилучшее аппроксимирующее множество. Относительные чебышевский центр и чебышевский радиус. Множество диаметральных точек непустого ограниченного множества метрического пространства.

Пусть Σ — семейство непустых подмножеств в пространстве (X, ρ). Множество $S^* \in \Sigma$ называется *наилучшим аппроксимирующим множеством* из семейства Σ для множества $M \in B(X)$, если

$\beta(M, S^*) = R_\Sigma(M)$, где $R_\Sigma(M) = \inf\{\beta(M, S) : S \in \Sigma\}$.

Пусть $M \in B(X)$, W непустое подмножество в X. *Относительным чебышевский радиусом множества* M называется число

$R_W(M) = \inf\{\beta(M, x) : x \in W\}$, а множество

$Z_W(M) = \{x \in W : \beta(M, x) = R_W(M)\}$ называется *множеством всех относительных чебышевских центров множества* M. $R(M) = R_X(M)$ $(Z(M) = Z_X(M))$ — *чебышевский радиус* (*множество всех чебышевских центров*) множества M. $H(M) = \{x \in M : \beta(M, x) = D(M)\}$ — *множество диаметральных точек множества* M. Кроме того, используем обозначениия $R_0(M) = R_M(M)$, $Z_0(M) = Z_M(M)$.

Сначала найдем оценки изменения диаметра $D(M)$ и относительного чебышевского радиуса $R_W(M)$ при изменении множеств

M, $W \in (B(X), \alpha)$.

Т.4.1 *Пусть X — метрическое пространство, M, W, A, $B \in B(X)$. Тогда*

(i) $|R_W(M) - R_B(A)| \leq \max[\beta(M,A) + \beta(B,W), \beta(A,M) + \beta(W,B)]$*;*

(ii) $R_W(M) \leq R(M) + |Z(M)W|$ *при* $Z(M) \neq \oslash$*;*

(iii) $R_W(M) \leq R_0(M) + |Z_0(M)W|$ *при* $Z_0(M) \neq \oslash$*;*

(iv) $|R_\Sigma(M) - R_\Sigma(W)| \leq \alpha(M,W)$*;*

(v) $|D(M) - D(W)| \leq 2\alpha(M,W)$*.*

$\odot$ (i) Для любых $x \in W$, $y \in B$ верно неравенство $\beta(M,x) \leq \beta(M,y) + |yx|$. Тогда $R_W(M) \leq \beta(M,y) + |yW| \leq \beta(M,y) + \beta(B,W)$. Следовательно, $R_W(M) \leq R_B(M) + \beta(B,W)$. Кроме того, для любого $x \in B$, $\beta(M,x) \leq \beta(M,A) + \beta(A,x)$. Тогда $R_B(M) \leq \beta(M,A) + R_B(A)$. Учитывая эти неравенства, получим

$$R_W(M) - R_B(A) \leq R_W(M) - R_B(M) + R_B(M) - R_B(A) \leq$$
$$\beta(B,W) + \beta(M,A).$$

Из полученного неравенства следует требуемое неравенство.
(ii) Для любых $y \in Z(M)$, $x \in W$ верно неравенство $\beta(M,x) \leq \beta(M,y) + |yx|$. Тогда из этого неравенства и определений $R(M)$, $Z(M)$ следует, что

$R_W(M) \leq \beta(M,y) + |yW| = R(M) + |Z(M)W|$.

(iii) Для любых $y \in Z_0(M)$, $x \in W$ верно неравенство $\beta(M,x) \leq \beta(M,y) + |yx|$. Тогда из этого неравенства и определений $R_0(M)$, $Z_0(M)$ следует, что

$R_W(M) \leq \beta(M,y) + |yW| = R_0(M) + |Z_0(M)W|$.

(iv) Пусть $x \in M$ и $\tau > 0$. Тогда найдется точка $z \in W$ такая, что $|xz| \leq |xW| + \tau$. Кроме того, получим неравенства

$|xS| \leq |xz| + |zS| \leq |xW| + |zS| + \tau \leq$

$$\sup_{x \in M} |xW| + \sup_{z \in W} |zS| + \tau \leq \alpha(M,W) + \sup_{z \in W} |zS| + \tau$$

для $S \in \Sigma$. Отсюда следует, что

$$\inf_{S \in \Sigma} \sup_{x \in M} |xS| \leq \alpha(M,W) + \sup_{z \in W} |zS| + \tau.$$

Переходя к точной нижней грани в правой части и используя произвольность выбора $\tau > 0$, получим

$$R_\Sigma(M) = \inf_{S\in\Sigma}\sup_{x\in M}|xS| \le \alpha(M,W) + \inf_{S\in\Sigma}\sup_{z\in W}|zS| = \alpha(M,W) + R_\Sigma(W).$$

Неравенство $R_\Sigma(W) \le \alpha(M,W) + R_\Sigma(M)$ получается аналогично.
(v) Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такие элементы x, $y \in M$, u, $v \in W$, что $D(M) \le |xy| + \varepsilon$, $|xu| \le |xW| + \varepsilon$, $|yv| \le |yW| + \varepsilon$. Тогда

$$D(W) \ge |uv| \ge |xy| - |xu| - |yv| \ge |xy| - |xW| - |yW| - 2\varepsilon \ge$$

$$D(M) - 2\alpha(M,W) - 3\varepsilon.$$

Используя произвольность выбора $\varepsilon > 0$, получим $D(M) - D(W) \le 2\alpha(M,W)$. Осталось использовать произвольность выбора M, $W \in B(X)$. $\odot$

С.4.1 *В условиях теоремы 4.1 имеют место неравенства.*

$$|R_W(M) - R_B(A)| \le \alpha(M,A) + \alpha(W,B),$$

$$|R_0(M) - R_0(A)| \le \beta(M,A) + \beta(A,M) \le 2\alpha(M,A).$$

З.4.1 *Если $M \in B(X)$, то условие а) $H(M) = M$ равносильно условию б) $Z_0(M) = M$. Из этих условий следует, что в) $R_0(M) = D(M)$. Если M — компакт, то условия а), б), в) равносильны.*

З.4.2 *Пусть $M \in B(X)$. Если $M \cap Z(M) \ne \emptyset$, то $Z_0(M) = M \cap Z(M)$, $R_0(M) = R(M)$.*

З.4.3 *Пусть M, W, $T \in B(X)$. Тогда $R_W(M) \le R_T(M) + R_W(T)$ и $\theta : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}_+$, $\theta(M,W) = \max\{R_W(M), R_M(W)\}$ — функция, удовлетворяющая неравенству треугольника, а также неравенствам $\alpha(M,W) \le \theta(M,W) \le D(M,W) = \sup\{|xy| : x \in M,\ y \in W\}$.*

З.4.4 *Для любых M, $W \in B[X]$ множество $Z_W(M)$ $(H(M))$ замкнуто в множестве W (M) с индуцированной метрикой.*

5. Наилучшая N-сеть непустого ограниченного множества сопряженного пространства.

N-сетью пространства X называется непустое множество, состоящее не более чем из N точек. Обозначим через Σ_N множество всех N-сетей

пространства (X, ρ). *Радиусом покрытия множества* $M \in B(X)$ N-сетью $S \in \Sigma_N$ называется число $\beta(M, S)$. При $\Sigma = \Sigma_N$, $M \in B(X)$ используем обозначение $R_N(M) = \inf\{\beta(M, S) : S \in \Sigma_N\}$. Наиболее общая теорема, в которой устанавливаются достаточные условия для существования наилучшей N-сети непустого ограниченного множества сопряженного пространства доказана Гаркави А. Л. (в случае метрического пространства такие условия пока (2008 г.) не известны).

Т.5.1 *Если пространство $(X, ||\cdot||)$ является сопряженным к некоторому нормированному пространству $\hat{X}$, то для каждого $M \in B(X)$ найдется наилучшая N-сеть.*

⊙ Для последовательности положительных вещественных чисел $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем такую N-сеть $S^n = \{y_1^n, \ldots, y_N^n\}$, что

$$\beta(M, S^n) \leq R_N(M) + \varepsilon_n.$$

При этом для всех $k \in \{1, \ldots, N\}$, $n \in \mathbb{N}$ нормы элементов $||y_k^n||$ ограничены некоторой константой $A > 0 : ||y_k^n|| \leq A$. Пусть $B^{(1)}[0, A], \ldots, B^{(N)}[0, A]$ — N экземпляров замкнутого шара пространства X. В произвольном шаре из этого набора зададим окрестность точки x_0 неравенствами $|f_m(x - x_0)| < \varepsilon$, где m принадлежит конечному подмножеству множества $\mathbb{N}$, $f_m \in \hat{X}$ и $f_m(x) = x(f_m)$. Тем самым, в этом шаре индуцируется слабая топология, относительно которой он компактен по теореме Банаха-Алаоглу. Следовательно, множество

$$Q = B^{(1)}[0, A] \times \ldots \times B^{(N)}[0, A]$$

компактно по теореме Тихонова и для последовательности $(u_n) = ((y_1^n, \ldots, y_N^n))$ найдется предельная точка $u^* = (y_1^*, \ldots, y_N^*) \in Q$. Кроме того, для каждого $x \in M$

$$||x - y_{k_n}^n|| \leq R_N(M) + \varepsilon_n,$$

где $k_n = k_n(x) \in \{1, \ldots, N\}$. Предположим, что N-сеть $S^* = \{y_1^*, \ldots, y_N^*\}$ не является наилучшей. Тогда найдутся такие точка $x \in M$ и число $\alpha > 0$, что для всех $k \in \{1, \ldots, N\}$

$$||x - y_k^*|| > R_N(M) + \alpha.$$

Кроме того, найдутся такие элементы $f_1, \dots, f_N \in \hat{X}$, что для всех $k \in \{1, \dots, N\}$

$$||f_k|| = 1,\ |f_k(x) - f_k(y_k^*| > R_N(M) + \alpha.$$

С другой стороны, найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что для всех $n > m$

$$|f_k(x) - f_k(y_k^*| \leq |f_k(x) - f_k(y_{k_n}^n)| + |f_k(y_{k_n}^n) - f_k(y_k^*)| \leq$$

$$||x - y_{k_n}^n|| + |f_k(y_{k_n}^n) - f_k(y_k^*)| \leq R_N(M) + \varepsilon_n + |f_k(y_{k_n}^n) - f_k(y_k^*)|.$$

Зададим окрестность $O(u^*)$ точки u^* неравенствами $|f_k(y) - f_k(y_k^*)| < \alpha/2$ при $k = 1, \dots, N$. В силу того, что u^* — предельная точка последовательности (u_n), найдется такое $n_0 > m$, что $u_{n_0} \in O(u^*)$, т.е.

$$|f_k(y_k^{n_0}) - f_k(y_k^*)| < \alpha/2$$

при $k = 1, \dots, N$. Тогда, полагая $k_{n_0} = k_0 \in \{1, \dots, N\}$, получим

$$|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y_{k_0}^*| \leq |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y_{k_0}^{n_0})| + |f_{k_0}(y_{k_0}^{n_0}) - f_{k_0}(y_{k_0}^*)| \leq R_N(M) + \alpha.$$

Получили противоречие. $\odot$

З.5.1 *Найти наилучшую N-сеть для круга евклидовой плоскости.*

З.5.2 *Найти $Z_0(S)$, где S — 3-сеть евклидовой плоскости.*

З.5.3 *Найти наилучшую 2-сеть для эллипса евклидовой плоскости.*

З.5.4 *Найти наилучшую 2-сеть для прямоугольника евклидовой плоскости.*

6. Достаточные условия существования и единственности чебышевского центра непустого ограниченного множества.

Для формулировки достаточных условий существования и единственности чебышевского центра непустого ограниченного множества введем несколько условий.

A. Для любых $x,\ y \in (X, \rho)$ существует единственная точка $\omega(x, y) \in X$ такая, что

$$|x\omega(x, y)| = |y\omega(x, y)| = |xy|/2.$$

B_1. Для всех $p,\ x,\ y \in (X, \rho)$ верно неравенство

$$|p\omega(x, y)| \leq \max\{|px|, |py|\}.$$

B_2. Отображение $\omega : X\times X\to X$ равномерно непрерывно на каждом множестве $B\times B$, где B — произвольный замкнутый шар пространства (X,ρ).

C_1. Для каждого $r>0$ и для любых ограниченных последовательностей (p_n), (x_n), (y_n) в пространстве (X,ρ) таких, что для каждого $n\in\mathbb{N}$

$$|p_nx_n|\le r,\quad |p_ny_n|\le r,\quad \lim_{n\to\infty}|p_n\omega(x_n,y_n)|=r$$

верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty}|x_ny_n|=0$.

C_2. Для каждого $r>0$, для каждой сходящейся к нулю последовательности неотрицательных вещественных чисел (ε_n) и для любых ограниченных последовательностей (p_n), (x_n), (y_n) в пространстве (X,ρ) таких, что для каждого $n\in\mathbb{N}$

$$|p_nx_n|\le r+\varepsilon_n,\quad |p_ny_n|\le r+\varepsilon_n,\quad \lim_{n\to\infty}|p_n\omega(x_n,y_n)|=r$$

верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty}|x_ny_n|=0$.

Примерами полных метрических пространств, в которых выполнены условия (A), (B_1), (B_2), (C_2), являются равномерно выпуклое банахово пространство и пространство Адамара (в частности, пространство Лобачевского). Напомним, что полное метрическое пространство (X,ρ) называется *пространством Адамара*, если для любых x, $y\in X$ найдется такое $m\in X$, что для любого $z\in X$

$$|xy|^2+4|zm|^2\le 2(|xz|^2+|yz|^2).$$

Т.6.1 *Для каждого непустого ограниченного множества метрического пространства, удовлетворяющего условиям (A), (B_1), (C_1), существует не более одного чебышевского центра.*

⊙ Пусть x, y чебышевские центры множества $M\in B(X)$. Тогда из определения чебышевского центра и условий (A), (B_1) следует, что верны неравенства

$$\sup_{u\in M}|\omega(x,y)u|\le \sup_{u\in M}\max\{|xu|,|yu|\}\le R(M).$$

Тогда $\omega(x,y)$ — чебышевский центр множества M и из определения чебышевского центра следует, что в множестве M найдется такая последовательность (p_n), что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} |p_n\omega(x,y)| = R(M),\ |p_n x| \le R(M),\ |p_n y| \le R(M).$$

В силу условия (C_1), получим $x = y$. $\odot$

Т.6.2 *Для каждого непустого ограниченного множества полного метрического пространства, удовлетворяющего условиям* (A), (B_1), (C_2), *существует единственный чебышевского центр.*

$\odot$ Для множества $M \in B(X)$ рассмотрим семейство непустых замкнутых множеств

$$K_\varepsilon(M) = \{y \in X : \beta(M, y) \le R(M) + \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$.
Это семейство обладает следующими элементарными свойствами :
a) если $\alpha \le \varepsilon$, то $K_\alpha(M) \subset K_\varepsilon(M)$;
b) $\cap\{K_\varepsilon(M) : \varepsilon > 0\}$ есть множество всех чебышевских центров множества M.
По теореме 6.1 существует не более одного чебышевского центра множества M. Выберем сходящуюся к нулю последовательность положительных вещественых чисел (ε_n) и для каждого $n \in \mathbb{N}$ такие точки x_n, $y_n \in K_{\varepsilon_n}(M)$, что

$$diam(K_{\varepsilon_n}(M)) \le |x_n y_n| + \varepsilon_n.$$

В силу условий (A), (B_1), определения чебышевского радиуса и множества $K_\varepsilon(M)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ получим

$$R(M) \le \sup_{z\in M} |z\omega(x_n, y_n)| \le \sup_{z\in M} \max\{|zx_n|, |zy_n|\} \le R(M) + \varepsilon_n. \quad (1)$$

Следовательно, в множестве M найдется такая последовательность (z_n), что

$$\lim_{n\to\infty} |z_n\omega(x_n, y_n)| = R(M). \quad (2)$$

Теперь, в силу условия (C_2), получим $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n y_n| = 0$. Тогда по теореме Кантора ([9], с. 399) множество $\cap\{K_\varepsilon(M) : \varepsilon > 0\}$ состоит из одной точки. $\odot$

Т.6.3 *Для каждого непустого ограниченного множества полного метрического пространства, удовлетворяющего условиям* (A), (B_1), (B_2), (C_1), *существует единственный чебышевский центр.*

$\odot$ Начало доказательства этой теоремы совпадает с доказательством теоремы 6.2 за исключением последнего равенства. Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{N}$ такие точки u_n, v_n в сегментах $[z_n, x_n]$, $[z_n, y_n]$, что

$$|u_n x_n| = \mu_n |z_n x_n|,\ |v_n y_n| = \mu_n |z_n y_n|,$$

где

$$\mu_n = \frac{\varepsilon_n}{R(M) + \varepsilon_n}.$$

Используя эти равенства и неравенства (1) получим для каждого $n \in \mathbb{N}$ вспомогательные неравенства

$$|u_n x_n| \leq \varepsilon_n,\ |y_n v_n| \leq \varepsilon_n,\ |z_n u_n| \leq R(M),\ |z_n v_n| \leq R(M).$$

В свою очередь, из этих неравенств, определений точек u_n, v_n, равенства (2) и условия (B_2), получим

$$\lim_{n\to\infty} |z_n \omega(u_n, v_n)| = R(M).$$

Следовательно, в силу условия (C_1),

$$\lim_{n\to\infty} |u_n v_n| = 0.$$

Из этого равенства и неравенств

$$|x_n y_n| \leq |x_n u_n| + |u_n v_n| + |v_n y_n| \leq 2\varepsilon_n + |u_n v_n|$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$ получим $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n y_n| = 0$. Тогда по теореме Кантора множество
$\cap\{K_\varepsilon(M) : \varepsilon > 0\}$ состоит из одной точки. $\odot$

З.6.1 *Найти чебышевский центр для треугольника и четырехугольника евклидовой плоскости.*

7. Наилучшие аппроксимирующие компакты и чебышевские центры выпуклых множеств специальных геодезических пространств.

Т.7.1 *Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A), (B_1), (B_2), (C_1). Тогда каждое выпуклое замкнутое множество является аппроксимативно компактным, сильно чебышевским множеством.*

$\odot$ Докажем аппроксимативную компактность множества M. Пусть $p \in X \backslash M$, (x_n) — минимизирующая последовательность в множестве M и $y_n = [p, x_n] \cap S(p, pM)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} |x_n y_n| = \lim_{n\to\infty} (|x_n p| - |p y_n|) = \lim_{n\to\infty} (|x_n p| - |pM|) = 0.$$

Из условия (B_2) следует, что $|\omega(x_n, x_m)\omega(y_n, y_m)| \to 0$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$. Кроме того, $\omega(y_n, y_m) \in B[p, pM]$, $\omega(x_n, x_m) \in M$ для всех n, $m \in \mathbb{N}$, поскольку M, $B[p, pM]$ — выпуклые множества. Пусть для всех n, $m \in \mathbb{N}$

$$a_{nm} \in S(p, pM) \cap [\omega(x_n, x_m), \omega(y_n, y_m)].$$

Тогда

$$|pM| - |\omega(y_n, y_m) a_{nm}| = |p a_{nm}| - |\omega(y_n, y_m) a_{nm}| \leq |p\omega(y_n, y_m)| \leq |pM|$$

и значит, $|p\omega(y_n, y_m)| \to |pM|$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$.
Из условия (C_1) получим $|y_n y_m| \to 0$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$. Но пространство X — полное, поэтому найдется такая точка $y \in S(p, |pM|)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Из неравенства $|y x_n| \leq |x_n y_n| + |y y_n|$ следует теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y \in M \cap S(p, |pM|).$$

Значит, множество M — аппроксимативно компактно. Пересечение $M \cap S(p, |pM|)$ содержит не более одной точки. Действительно, в противном случае сфера содержала бы невырожденный отрезок, поскольку множества M, $B[p, |pM|]$ выпуклые. Тогда в силу условия (C_1) мы получили бы противоречие. Следовательно, множество M чебышевское. Осталось использовать следствие 1.2. $\odot$

В дальнейшем вместо $\bigcup\limits_{x \in W} P_M(x)$ будем писать $P_M(W)$, где $\oslash \neq W \subset X$. Нам понадобится еще одно условие на пространство (X, ρ)

(D) *Для каждого $x \in (X, \rho)$ и для любой точки p из произвольного сегмента $[u, v] \subset X$ верно неравенство $|pP_{[u,v]}(x)| \leq |px|$.*

Л.7.1 *Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A), (B_1), (B_2), (C_1), (D), W — непустое множество в X, M — непустое замкнутое ограниченное выпуклое множество в X. Тогда имеют место неравенства :*

(i) $|xP_M(W)| \leq |xW|$ *для каждого* $x \in M$*;*
(ii) $\beta(M, P_M(W)) \leq \beta(M, W)$*.*

$\odot$ (i) Из теоремы 7.1 и условий леммы 7.1 следует, что оператор P_M является однозначным и непрерывным в пространстве X. Выберем произвольно $x \in M$, $y \in W$. Тогда найдется единственная точка $y_1 = P_M(y)$. В силу выпуклости множества M, $[x, y_1] \subset M$. Тогда, используя условие (D), получим, что

$$|xP_M(y)| = |xP_{[x,y_1]}(y)| \leq |xy|.$$

Следовательно, $|xP_M(W)| \leq |xy|$ и $|xP_M(W)| \leq |xW|$.
(ii) Неравенство (ii) доказывается переходом к точной верхней грани по всем $x \in M$ сначала в правой части неравенства (i), а затем в левой части полученного неравенства. $\odot$

С. 7.1 *Пусть* X *— полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям* (A)*,* (B_1)*,* (B_2)*,* (C_1)*,* (D)*,* Z *— наилучшее аппроксимирующее множество из семейства* Σ *для непустого замкнутого ограниченного выпуклого множества* $M \subset X$ *и* $P_M(Z) \in \Sigma$*. Тогда* $P_M(Z)$ *— наилучшее аппроксимирующее множество для множества* M*.*

Л.7.2 *Пусть* X *— полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям* (A)*,* (B_1)*,* (B_2)*,* (C_1)*,* (D)*,* $M \in B(X)$*. Тогда существует единственный чебышевский центр множества* M*, принадлежащий замыканию выпуклой оболочки множества* M*, совпадающий с чебышевскими центрами замыкания выпуклой оболочки множества* M *и выпуклой оболочки множества* M*.*

$\odot$ Существование и единственность чебышевского центра $Cheb(M)$ непустого ограниченного множества M следует из теоремы 6.3, а из условий (A), (B_1) следует, что замкнутые шары пространства X выпуклые. Тогда

$$M \subset C(M) \subset \overline{C(M)} \subset B[Cheb(M), R(M)] \Rightarrow$$
$$R(M) = R(C(M)) = R(\overline{C(M)}).$$

Из Следствия 7.1 и единственности чебышевского центра следует, что

$$Cheb(M) \subset \overline{C(M)},\ Cheb(M) = Cheb(C(M)) = Cheb(\overline{C(M)}).\odot$$

З.7.1 *Пространство Адамара удовлетворяет условиям* (A)*,* (B_1)*,* (B_2)*,* (C_1)*,* (D)*.*

8. Непрерывность метрической проекции. Свойства близкие к β-непрерывности множества всех относительных чебышевских центров, множества диаметральных точек и наилучших аппроксимирующих компактов.

Л.8.1 *Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A), (B_1), (B_2), (C_1), (D), M — непустое ограниченное замкнутое выпуклое множество пространства X, (W_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых множеств пространства X, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторому компакту $W \subset X$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(P_M(W_n), P_M(W)) = 0.$$

$\odot$ Из теоремы 7.1 и условий леммы 8.1 следует, что M является аппроксимативно компактным, сильно чебышевским множеством. Кроме того, в силу утверждения (iii) леммы 1.2, оператор P_M является β-непрерывным на компакте $W \subset X$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \beta(P_M(W_n), P_M(W)) = 0.$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \beta(P_M(W), P_M(W_n)) = 0$$

методом от противного. Пусть это утверждение неверно, тогда найдутся константа $c > 0$ и подпоследовательность $(W_m) \subset (W_n)$ такие, что $\beta(P_M(W), P_M(W_m)) > c$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, найдется последовательность $(z_m) \subset W$ такая, что $|P_M(z_m)P_M(W_m)| > c$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, найдется подпоследовательность $(z_k) \subset (z_m)$, сходящаяся к некоторой точке $z \in W$, так как W — компактно. Но оператор P_M является непрерывным, поэтому найдется такое число $k_0 \in \mathbb{N}$, что $|P_M(z)P_M(W_k)| > c$ для каждого $k > k_0$. Из условия

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(W_k, W) = 0$$

следует, что найдется последовательность (y_k), $y_k \in W_k$, сходящаяся к точке z. Но тогда

$$\lim_{k\to\infty} |P_M(z)P_M(W_k)| \leq \lim_{k\to\infty} |P_M(z)P_M(y_k)| = 0.$$

Получили противоречие. $\odot$

Т.8.1 *Пусть X — метрическое пространство, M, $M_n \in K(X)$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0.$$

Тогда найдется такая подпоследовательность $(M_k) \subset (M_n)$, что

$$(i)\ \lim_{k\to\infty} \beta(Z_0(M_k), Z_0(M)) = 0;$$

$$(ii)\ \lim_{k\to\infty} \beta(H(M_k), H(M)) = 0.$$

$\odot$ Из задачи 4.4 и компактности множеств M, M_n следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой элемент $z_n \in Z_0(M_n)$ ($z_n \in H(M_n)$), что

$$|z_n Z_0(M)| = \beta(Z_0(M_n), Z_0(M)) \quad (|z_n H(M)| = \beta(H(M_n), H(M))).$$

(i) Тогда $\alpha(M_n, z_n) = \beta(M_n, z_n) = R_0(M_n)$. Используя условия теоремы, найдем такие подпоследовательность $(z_k) \subset (z_n)$ и элемент $z \in M$, что

$$\lim_{k\to\infty} |z_k z| = 0.$$

Тогда, в силу следствия 4.1 и непрерывности метрики α, получим $\beta(M, z) = \alpha(M, z) = R_0(M)$. Следовательно, $z \in Z_0(M)$ и

$$\lim_{k\to\infty} \beta(Z_0(M_k), Z_0(M)) = \lim_{k\to\infty} |z_k Z_0(M)| = 0.$$

(ii) Тогда $\alpha(M_n, z_n) = \beta(M_n, z_n) = D(M_n)$. Используя условия теоремы, найдем такие подпоследовательность $(z_k) \subset (z_n)$ и элемент $z \in M$, что

$$\lim_{k\to\infty} |z_k z| = 0.$$

Тогда, в силу утверждения (v) теоремы 4.1 и непрерывности метрики α, получим $\beta(M, z) = \alpha(M, z) = D(M)$. Следовательно, $z \in H(M)$ и

$$\lim_{k\to\infty} \beta(H(M_k), H(M)) = \lim_{k\to\infty} |z_k H(M)| = 0.\odot$$

Пр.8.1. Рассмотрим в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ 3-сети

$$S = \{O(0;0), A(1/2;\sqrt{3}/2), B(-1/2;\sqrt{3}/2)\},$$

$$S_n = \{C_n(0;1/n), A(1/2;\sqrt{3}/2), B(-1/2;\sqrt{3}/2)\},$$

где $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Тогда нетрудно проверить, что при $n \in \{2, 3, \ldots\}$

$$\alpha(S_n, S) = 1/n, \quad Z_0(S) = H(S) = S, \quad Z_0(S_n) = \{C_n\}, \quad H(S_n) = \{A, B\},$$

$$\alpha(Z_0(S_n), Z_0(S)) = |BC_n|, \quad \alpha(H(S_n), H(S)) = 1.$$

Таким образом, в теореме 8.1, в общем случае, нельзя заменить отклонение β на метрику Хаусдорфа.

Л.8.2 *Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство и множества M, $W \in B(X)$ такие, что* $\mathrm{Cheb}(M) \in \overline{C(M)}$,

$$\mathrm{Cheb}(W) \in \overline{C(W)}, \quad B(\mathrm{Cheb}(M), R(M)) \cap B(\mathrm{Cheb}(W), R(W)) = \oslash.$$

Тогда

$$|\mathrm{Cheb}(M)\mathrm{Cheb}(W)| \leq 2\alpha(M, W).$$

$\odot$ Отметим, что условие $\mathrm{Cheb}(M) \in \overline{C(M)}$ для $M \in B(X)$ автоматичеси выполнено для вещественного гильбертова пространства, в силу леммы 7.2, или двумерного равномерно выпуклого банахова пространства X. Пусть для определенности $R(W) \leq R(M)$. Тогда

$$|\mathrm{Cheb}(M)\mathrm{Cheb}(W)| = |\mathrm{Cheb}(M)B[\mathrm{Cheb}(W), R(W)]| + R(W) \leq$$

$$\sup\{|xB[\mathrm{Cheb}(W), R(W)]| : x \in \overline{C(M)}\} + R(W) =$$

$$\sup\{|xB[\mathrm{Cheb}(W), R(W)]| : x \in \overline{M}\} + R(W) \leq 2\alpha(M, W). \odot$$

Но отображение Cheb в общем случае не является липшицевым.

Л.8.3 *Пусть $N > 2$, X — евклидово пространство (пространство Лобачевского) размерности больше единицы и U — окрестность $\Sigma_2(X)$ в пространстве $(\Sigma_N(X), \alpha)$. Тогда*
(i) отображение $\mathrm{cheb} : (U, \alpha) \to X$ *не является липшицевым;*
(ii) в евклидовом случае отображение $\mathrm{cheb} : (\Sigma_N(X), \alpha) \to X$ *не является равномерно непрерывным.*

$\odot$ Нетрудно понять, что доказательство достаточно изложить в случае плоскости при $N = 3$. Пусть x, y — две различные точки в евклидовой плоскости (плоскости Лобачевского) и S_+ — половина окружности, построенная на отрезке $[x, y]$ как на диаметре. Определим переменную точку $z \in S_+$ такую, что $|yz| \in (0, |xy|/2)$. Затем найдем точку u, удовлетворяющую условиям : a) $z \in [x, u]$; b) точка y принадлежит окружности, построенной на отрезке $[x, u]$ как на диаметре. Рассмотрим 3-сети $M = \{x, y, z\}$, $Z = \{x, y, u\} \in \Sigma_3(X)\backslash\Sigma_2(X)$ в евклидовой плоскости (плоскости Лобачевского). Тогда, очевидно, $v = \mathrm{cheb}(M) = \omega(x, y)$, $w = \mathrm{cheb}(Z) = \omega(x, u)$ и $|uz| = \alpha(M, Z)$. В евклидовой плоскости для каждой константы

$L > 0$ уточним положение точки $z \in S_+$, подчинив ее дополнительному условию $2L|yz| < |xy|$. Тогда нетрудно получить $|\mathrm{cheb}(M)\mathrm{cheb}(Z)| = |vw| = (|xy|)(|uz|)/(2|zy|) > L|uz| = L\alpha(M, Z)$. Отсюда следует верность леммы 8.3 в случае евклидового пространства. Пусть p — основание перпендикуляра, проведенного из точки v к отрезку $[x, w]$, и ψ — угол при вершине w треугольника $\triangle xvw$ в плоскости Лобачевского. По построению треугольники $\triangle xvw$, $\triangle wpv$ — прямоугольные. Следовательно, имеют место формулы $\tanh|pv| = \sinh|pw| \tan\psi$, $\tanh|vx| = \sinh|vw| \tan\psi$. Тогда отношение $\sinh|vw|/\sinh|pw| = \tanh|vx|/\tanh|pv|$ стремится к ∞ при $(|pv| \to 0)$. Но тогда отношение $|\mathrm{cheb}(M)\mathrm{cheb}(Z)|/\alpha(M, Z) = |vw|/(2|pw|)$ также стремится к ∞ при $(|pv| \to 0)$. Отсюда следует верность леммы 8.3 и в случае пространства Лобачевского. $\odot$

Т.8.2 *Пусть (M_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых множеств пространства (X, ρ). Тогда*

A. Если $M \in \Sigma$,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0,$$

$(K_n) \subset \Sigma$ — последовательность наилучших аппроксимирующих множеств для последовательности (M_n) такая, что для каждого натурального n $K_n \subset M_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(K_n, M) = 0;$$

B. Если M — компакт в X,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(M_n, M) = 0,$$

(S_N^n) – последовательность наилучших N-сетей для последовательности (M_n) такая, что для каждого натурального n $S_N^n \subset M_n$, то найдется подпоследовательность последовательности (S_N^n), сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторой наилучшей N-сети множества M.

$\odot$ *A*. Из условий теоремы 8.2 и утверждения (iv) теоремы 4.1 нетрудно получить :

$$\beta(K_n, M) \leq \beta(M_n, M) \leq \alpha(M_n, M),$$

$$\beta(M, K_n) \leq \beta(M, M_n) + \beta(M_n, K_n) = \beta(M, M_n) + R_\Sigma(M_n) \leq 2\alpha(M, M_n)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(K_n, M) = 0.$$

B. Из условий теоремы 8.2 следует, что найдется такая подпоследовательность

$$(S_N^m = \{y_1^m, \dots y_N^m\}) \subset (S_N^n),$$

что существуют пределы

$$y_i^* = \lim_{m\to\infty} y_i^m \quad (1 \le i \le N).$$

Пусть $S_N^* = \{y_1^*, \dots y_N^*\}$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\beta(M, S_N^*) \le \beta(M, M_m) + \beta(M_m, S_N^m) + \beta(S_N^m, S_N^*) \le$$

$$\alpha(M, M_m) + R_N(M_m) + \beta(S_N^m, S_N^*).$$

Из условия теоремы, утверждения (iv) теоремы 4.1 и определения N-сети S_N^* следует, что правая часть полученного неравенства стремится к $R_N(M)$ при $(m \to \infty)$. Следовательно, S_N^* является наилучшей N–сетью для множества M. ⊙

Следствие 8.1 (**теоремы 8.2 и следствия 7.1**) *Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A), (B_1), (B_2), (C_1), (D), (M_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств пространства X, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторому компакту $M \subset X$. Тогда*
A. Если (K_n) — последовательность наилучших аппроксимирующих компактов для последовательности (M_n), то найдется подпоследовательность $(M_m) \subset (M_n)$, для которой найдется последовательность $(\hat{K}_m)$ наилучших аппроксимирующих компактов, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к множеству M;
B. Если (S_N^n) — последовательность наилучших N-сетей для последовательности (M_n), то найдется подпоследовательность $(M_m) \subset (M_n)$, для которой найдется последовательность $(\hat{S}_N^m)$ наилучших N-сетей, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторой наилучшей N-сети множества M.

Литература

1. Белобров П.К. О чебышевской точке системы множеств // Изв. вузов. Математика. - 1966. - No. 6. - С. 18 - 24.

2. Буземан Г. Геометрия геодезических. - М.: Физматгиз. - 1962.

3. Bridson M. R., Haefliger A. Metric spaces of non-positive curvature. Ser. A Series of Comprehensive Stadies in Mathematics. Vol. 319. - Berlin: Springer-Verlag. - 1999.

4. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. - Москва–Ижевск: Институт компьютерных иследований. - 2004.

5. Власов Л.П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи матем. наук. - 1973. - Т.28. - Вып.6 (174). - С.3-66.

6. Гаркави А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи матем. наук. - 1964. - Т. 19. - Вып. 6. - С. 139 - 145.

7. Гаркави А. Л. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве // Изв. АН СССР. Серия матем. - 1962. - Т. 26. - No. 1. - С. 87 - 106.

8. Diestel J. Geometry of Banach Spaces. LNM485. Springer-Verlag, 1975.

9. Engelking R., General topology, Moscow, "Mir"Publishing House, 1986. (Russian)

10. Лисковец О.А. Некорректные задачи и устойчивость квазирешений // Сиб. мат. ж. - 1969. - Т.10. - No.2. - С.373 - 385.

11. Маринов А.В. Устойчивость ε-квазирешений операторных уравнений 1 рода // Приближение функций полиномами и сплайнами : Сб. статей / АН СССР. УНЦ. - Свердловск : УНЦ АН СССР. - 1985. - С. 105 - 117.

12. Сосов Е.Н. Об аппроксимативных свойствах множеств в специальном метрическом пространстве // Известия вузов. Математика. - 1999. - No. 6. - С. 81 - 84.

13. Sosov E.N. On existence and uniqueness of Chebyshev center of a bounded set in a special geodesic space // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2000. - Vol. 7. - P. 43 - 46.

14. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.: Изд-во Московского ун-та. - 1976.

СОДЕРЖАНИЕ