Е.Н. СОСОВ

Введение в метрическую геометрию

Часть 1

Основные структуры

КАЗАНЬ – 2008

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.Н. СОСОВ

Введение в метрическую геометрию

Часть 1

Основные структуры

КАЗАНЬ – 2008

УДК 515.124.4

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
механико-математического факультета КГУ

Сосов Е.Н.
Введение в метрическую геометрию. Часть 1.: Учебное пособие — Казань: Казанский государственный университет, 2008. 49 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов-математиков IV и V курсов.

Введение.

Данное учебное пособие включает минимум вводного курса по метрической геометрии и предназначено для студентов математиков старших курсов университетов. Часть 1 рассчитана на 30 часов аудиторной нагрузки. По мнению автора, основной набор монографий и учебников по метрической геометрии следующий: [1-9]. Если исключить повторы и добавить еще материал из около 500 статей, не вошедший в эти монографии, то получится около 4000 страниц полного современного курса по метрической геометрии. Кроме того, есть много взаимосвязей с нерегулярной римановой геометрией, гиперболическими группами, теорией фракталов, геометрической теорией меры, нелинейным функциональным анализом, теорией некорректных задач и дискретной математикой. Эти взаимосвязи поддерживают актуальность метрической геометрии и постоянный приток в нее новых задач. Все задачи в пособии элементарны и служат для контроля правильного усвоения основных понятий.

В пособии приняты следующие обозначения.

$|xy| = \rho(x, y)$ — расстояние между точками x, y в метрическом пространстве (X, ρ).

$\odot$ — символ начала (конца) доказательства.

Т.1.2 (**Л.1.2**, **З.1.2**, **Пр.1.2**, **С.1.2**) обозначает теорему 2 (лемму 2, задачу 2, пример 2, следствие 2) лекции 1.

1. Простой путь. Простая дуга. Длина пути. Эквивалентные пути. Кривая в метрическом пространстве.

Непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to X$ называется *путем* (*параметризованной кривой*) с концами $\gamma(a)$, $\gamma(b)$. Путь называется замкнутым путем, если $\gamma(a) = \gamma(b)$. Путь с концами x, y обозначим $\gamma_{x,y}$.

Инъективный путь называется *простым* (*жордановым*) *путем.*

Множество $\hat{\gamma} \subset X$ называется *простой дугой*, если найдется такой простой путь $\gamma : [a, b] \to X$, что $\hat{\gamma} = \gamma([a, b])$. $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ — концы дуги. Остальные точки называются *внутренними точками* простой дуги.

Множество $\Gamma \subset X$ называется *простой замкнутой кривой*, если оно является образом при некотором гомеоморфизме окружности $S(O, 1) \subset \mathbb{R}^2$ в X.

Множество $\Gamma \subset X$ называется *простой кривой*, если оно замкнуто и является либо простой замкнутой кривой, либо образом при некотором гомеоморфизме произвольного интервала $I =< a, b >\subset \mathbb{R}$.

Конечное упорядоченное подмножество $\sigma \subset [a, b]$, содержащее a, b, называется *разбиением отрезка* $[a, b]$. Если $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, то $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$, $n + 1 = card(\sigma)$ — *длина разбиения*, $|\sigma| = \max\{t_{i+1} - t_i : i \in \{0, \ldots, n - 1\}\}$ — *модуль разбиения.*

Полной вариацией пути $\gamma : [a, b] \to X$ относительно разбиения $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ называется величина

$$V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|.$$

Длиной пути $\gamma : [a, b] \to X$ называется величина
$L(\gamma) = \sup\{V_\sigma(\gamma) : \sigma\}$. Путь γ — *спрямляемый*, если $L(\gamma) < +\infty$.

Метрическое пространство называется *линейно* (*метрически*) *связным*, если для любых двух точек из этого пространства найдется (спрямляемый) путь с концами в этих точках.

Пр.1.1. Путь $\gamma : [0, 1] \to X$, $\gamma(t) = t \sin(1/t)$, если $t \in (0, 1]$, и $\gamma(0) = 0$, является неспрямляемым.

$\odot$ Пусть для каждого $n \geq 2$ $\sigma_n = \{0,1\} \cup \{\dfrac{2}{\pi(2i+1)} : i \in \{0,1,\ldots,n\}\}$.

Тогда $V_{\sigma_n}(\gamma) = |\dfrac{2}{\pi(2n+1)}\sin(\pi(2n+1)/2)| +$
$\sum\limits_{i=0}^{n-1} |\dfrac{2}{\pi(2i+3)}\sin(\pi(2i+3)/2) - \dfrac{2}{\pi(2i+1)}\sin(\pi(2i+1)/2)| + |\dfrac{2}{\pi} - \sin 1| \geq$
$\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\dfrac{2}{\pi(2i+3)} + \dfrac{2}{\pi(2i+1)}) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{2}{\pi(2n+1)} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{(2i+1)}$.

Таким образом, путь γ неспрямляемый, т.к. правая часть полученного неравенства стремится к ∞ при $n \to \infty$. $\odot$

Пути $\gamma : [a,b] \to X$, $\gamma_1 : [c,d] \to X$ называются *эквивалентными путями*, если найдется такое (в общем случае многозначное) монотонное, сюръективное отображение $\psi : [c,d] \to [a,b]$, что для каждого $t \in [c,d]$ $\gamma_1(t) = \gamma(\psi(t))$. Отображение ψ называется *заменой параметра.* (монотоность многозначного отображения понимается так: если $t < u$, то каждый элемент множества $\psi(t)$ не больше (или не меньше) каждого элемента множества $\psi(u)$).

Кривой с концами в точках x, y называется класс эквивалентности путей с теми же концами.

Л.1.1. *Длины эквивалентных путей равны.*

$\odot$ 1. С каждым разбиением $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ отрезка $[a,b]$ свяжем разбиение $\hat{\sigma} = (\hat{t}_i)_{i=\overline{0,n}}$ отрезка $[c,d]$, выбрав точки $\hat{t}_i \in \psi^{-1}(t_i)$ $(i = \overline{0,n})$. Тогда $V_{\hat{\sigma}}(\gamma_1) = V_\sigma(\gamma) \Rightarrow L(\gamma_1) \geq V_\sigma(\gamma) \Rightarrow L(\gamma_1) \geq L(\gamma)$.

2. Пусть $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ разбиение отрезка $[c,d]$. Выберем такое разбиение $\hat{\sigma} \subset \psi(\sigma)$. что $\hat{t}_i \in \psi(t_i)$ $(i = \overline{0,n})$. Тогда $V_\sigma(\gamma_1) = V_{\hat{\sigma}}(\gamma) \Rightarrow V_\sigma(\gamma_1) \leq L(\gamma)$ $\Rightarrow L(\gamma_1) \leq L(\gamma)$. $\odot$

Т.1.1. *Для любого пути* $\gamma : [a,b] \to X$ $L(\gamma) = \lim\limits_{|\sigma| \to 0} V_\sigma(\gamma)$.

$\odot$ Пусть $n > 1$, M произвольное неотрицательное вещественное число, удовлетворяющее неравенству $M < L(\gamma)$. Нам достаточно доказать следующее: найдется такое $\eta > 0$, что для любого разбиения σ отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего неравенству $|\sigma| < \eta$, выполняются неравенства $M \leq V_\sigma(\gamma) \leq L(\gamma)$. Правое неравенство следует из определения длины пути γ. Выберем $0 < \varepsilon < (L(\gamma) - M)/2$ и такое разбиение $\tau = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ отрезка $[a,b]$, что $M+\varepsilon < V_\tau(\gamma)$. В силу равномерной непрерывности пути γ, найдется такое $0<\eta<\frac{1}{4}\min\{t_{i+1}-t_i : i\in\{0,1,\dots,n-1\}\}$, что

$|\gamma(u)\gamma(v)| \le \dfrac{\varepsilon}{2n}$ для любых u, $v\in[a,b]$, удовлетворяющих неравенству $|u-v|\le\eta$. Фиксируем η и пусть σ разбиение отрезка $[a,b]$, удовлетворяющее неравенству $|\sigma|<\eta$. Пусть для каждого $i\in\{0,\dots,n-1\}$ вершина $\hat t_i\in\sigma$ (соответственно $\tilde t_i\in\sigma$), ближайшая из σ к t_i, и такая, что $\hat t_i\le t_i$ $(t_i<\tilde t_i)$. Тогда, в силу неравенства $|\sigma|<\eta$, получим для каждого $i\in\{0,\dots,n-1\}$ $t_i<\tilde t_i<\hat t_{i+1}\le t_{i+1}$. Рассмотрим разбиение $\sigma\cup\tau$ отрезка $[a,b]$. Тогда

$V_{\sigma\cup\tau}(\gamma) - V_\sigma(\gamma) = \sum\limits_{i=0}^{n-1}(|\gamma(t_i)\gamma(\hat t_i)| + |\gamma(t_i)\gamma(\tilde t_i)| - |\gamma(\hat t_i)\gamma(\tilde t_i)|) \le \sum\limits_{i=0}^{n-1}(|\gamma(t_i)\gamma(\hat t_i| + |\gamma(t_i)\gamma(\tilde t_i)|) \le 2n\dfrac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon$. Следовательно, $V_\tau(\gamma)\le V_{\sigma\cup\tau}(\gamma)\le V_\sigma(\gamma)+\varepsilon$ и $M\le V_\sigma(\gamma)$. $\odot$

З.1.1. *Если $\Gamma\in X$ — простая замкнутая кривая, то найдется такой замкнутый путь $\gamma:[a,b]\to X$, что $\gamma([a,b])=\Gamma$ и $\gamma(u)\ne\gamma(v)$ для всех u, $v\in[a,b]$, $u\ne v$, $\{u,v\}\ne\{a,b\}$.*

З.1.2. *Для каждого пути $\gamma:[a,b]\to X$ имеет место неравенство $|\gamma(a)\gamma(b)|\le L(\gamma)$.*

З.1.3. *Пусть $\gamma_{x,y}:[0,1]\to X$ — аффинный путь в нормированном пространстве $(X,||.||)$, т.е. $\gamma(t)=(1-t)x+ty$. Тогда $L(\gamma)=||x-y||$.*

З.1.4. *Путь γ из примера 1 есть равномерный предел последовательности спрямляемых путей $\gamma_n:[0,1]\to X$, $\gamma_n(t)=\gamma(t)$, если $t\in[\frac{1}{n\pi},1]$, и $\gamma_n(t)=0$, если $t\in[0,\frac{1}{n\pi}]$. Таким образом, равномерный предел последовательности спрямляемых путей в общем случае не является спрямляемым путем.*

З.1.5. *Бинарное отношение, введенное на множестве всех путей пространства X, является отношением эквивалентности.*

З.1.6. *Для каждого пути $\gamma:[a,b]\to X$ найдется эквивалентный путь $\gamma_1:[0,1]\to X$.*

2. Кривая Коха. Свойства длины пути. Длина дуги, как параметр. Характеризация функции длины дуги.

Пр.2.1. Пусть путь $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ является равномерным пределом последовательности путей $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ($n \in \{0,1,\ldots\}$), определяемых индуктивно следующим образом:

а) $\gamma_0(t) = (t;0)$ для любого $t \in [0,1]$;

б) путь γ_n является аффинным на каждом интервале разбиения $\sigma_n = \{\frac{i}{4^n} : i = 0,1,\ldots,4^n\}$ отрезка $[0,1]$ для каждого $n \in \{0,1,\ldots\}$;

в) для каждого $n \in \{0,1,\ldots\}$ кусочно-линейный путь γ_{n+1} получается из γ_n разрезанием каждого отрезка I разбиения σ_n на три части равной длины и изменением пути γ_n на средней части J следующим образом: отрезок $\gamma_n(J)$ заменяется на ломаную, состоящую из боковых сторон равностороннего треугольника с основанием $\gamma_n(J)$.

Из построения ясно, что для каждого $n \in \{0,1,\ldots\}$ $L(\gamma_{n+1}) = \frac{4}{3}L(\gamma_n)$. Тогда

$L(\gamma) \geq \lim\limits_{n\to\infty} V_{\sigma_n}(\gamma) = \lim\limits_{n\to\infty} V_{\sigma_n}(\gamma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n}{3^n} = \infty.$

Следовательно, определяющий кривую Коха путь γ, является неспрямляемым.

Т.2.1(аддитивность длины пути). *Для любого пути $\gamma : [a,b] \to X$ и для каждого $c \in [a,b]$ $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$.*

$\odot$ Выберем такую последовательность разбиений (σ_n) ($n \in \{1,2,\ldots\}$) отрезка $[a,b]$, что $c \in \sigma_n$ и $|\sigma_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть для каждого $n \in \{1,2,\ldots\}$ $\hat{\sigma}_n = \sigma_n \cap [a,c]$, $\tilde{\sigma}_n = \sigma_n \cap [c,b]$. Тогда $V_{\sigma_n}(\gamma) = V_{\hat{\sigma}_n}(\gamma|_{[a,c]}) + V_{\tilde{\sigma}_n}(\gamma|_{[c,b]})$ и

$\lim\limits_{n\to\infty} |\hat{\sigma}_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |\tilde{\sigma}_n| = 0.$

Из теоремы 1.1 получим $L(\gamma) = \lim\limits_{n\to\infty} V_{\sigma_n}(\gamma) = \lim\limits_{n\to\infty} (V_{\hat{\sigma}_n}(\gamma|_{[a,c]}) + V_{\tilde{\sigma}_n}(\gamma|_{[c,b]})) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$. $\odot$

Т.2.2. *Для каждого спрямляемого пути $\gamma : [a,b] \to X$ функция $\psi : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$, $\psi(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$ является неубывающей непрерывной сюръекцией.*

$\odot$ Из аддитивности длины пути следует, что функция ψ неубывающая. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 1.1 и равномерной непрерывности γ, найдется $\eta > 0$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) $L(\gamma) - V_\sigma(\gamma) < \varepsilon$ для каждого разбиения σ отрезка $[a,b]$ такого, что $|\sigma| < \eta$; 2) $|\gamma(u)\gamma(v)| < \varepsilon$ для любых u, $v \in [a,b]$ таких, что $|u - v| < \eta$.

Пусть u, $v \in [a,b]$ и разбиение σ отрезка $[a,b]$ такие, что $v-u<\eta$, $|\sigma|<\eta$, $\sigma \cap [u,v]=\{u,v\}$. Положим $\sigma_1=\sigma\cap[a,u]$ и $\sigma_2=\sigma\cap[v,b]$. Тогда, используя аддитивность длины пути и условия 1, 2, получим

$L(\gamma|_{[a,u]})+L(\gamma|_{[u,v]})+L(\gamma|_{[v,b]}) = L(\gamma) < V_\sigma(\gamma)+\varepsilon = V_{\sigma_1}(\gamma|_{[a,u]}) + |\gamma(u)\gamma(v)| + V_{\sigma_2}(\gamma|_{[v,b]})+\varepsilon < L(\gamma|_{[a,u]})+\varepsilon+L(\gamma|_{[v,b]})+\varepsilon$. Следовательно, $L(\gamma|_{[u,v]})<2\varepsilon$. Снова используя аддитивность длины пути, получим отсюда непрерывность функции ψ. $\odot$

Пусть $a\le c\le b$. *Произведением* (*конкатенацией*) *путей* $\gamma_1:[a,c]\to X$, $\gamma_2:[c,b]\to X$, удовлетворяющих условию $\gamma_1(c)=\gamma_2(c)$, называется такой путь $\gamma_1*\gamma_2:[a,b]\to X$, что $\gamma_1*\gamma_2(t)=\gamma_1(t)$ при $a\le t\le c$, $\gamma_1*\gamma_2(t)=\gamma_2(t)$ при $c\le t\le b$.

Т.2.3 (Характеризация функции длины дуги). *Пусть C множество всех путей в пространстве (X,ρ) и $L:C\to\mathbb{R}_+$ — функция, сопоставляющая каждому пути его длину. Тогда L — наименьшая функция из функций $F:C\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяющих следующим двум условиям:*
(i) для каждого пути $\gamma:[a,b]\to X$ $F(\gamma)\ge|\gamma(a)\gamma(b)|$;
(ii) $F(\gamma_1*\gamma_2)=F(\gamma_1)+F(\gamma_2)$.

$\odot$ Пусть функция $F:C\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям (i), (ii) и $\sigma=(t_i)_{i=\overline{0,n}}$ — разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда $F(\gamma)\ge\sum\limits_{i=0}^{n-1}F(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]})\ge \sum\limits_{i=0}^{n-1}|\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|\ge V_\sigma(\gamma)$. Следовательно, $F(\gamma)\ge L(\gamma)$. Осталось заметить, что в силу задач 1.2, 2.1, функция L удовлетворяет условиям (i), (ii). $\odot$

Говорят, что спрямляемый путь $\gamma:[a,b]\to X$ *параметризован длиной дуги или имеет натуральную параметризацию* (*параметризован с постоянной скоростью $v>0$*), если для любых t, t_1, удовлетворяющих условию $a\le t\le t_1\le b$, верно равенство $L(\gamma|_{[t,t_1]})=t_1-t$ ($L(\gamma|_{[t,t_1]})=v(t_1-t)$).

Т.2.4. *Пусть $\gamma:[a,b]\to X$ спрямляемый путь. Тогда путь $\lambda:[0,L(\gamma)]\to X$, $\lambda(u)=\gamma(t)$, где $\psi(t)=L(\gamma|_{[a,t]})=u$, эквивалентен пути γ и параметризован длиной дуги.*

$\odot$ В силу теоремы 2.2 функция ψ является непрерывной функцией на $[a,b]$. Следовательно, для каждого $u\in[0,L(\gamma)]$ найдется такое $t\in[a,b]$, что $\psi(t) = u$. Пусть $t, \hat{t} \in [a, b]$ такие, что $t \le \hat{t}$ и $L(\gamma|_{[a,t]}) = L(\gamma|_{[a,\hat{t}]})$. Тогда в силу аддитивности длины дуги получим $L(\gamma|_{[t,\hat{t}]}) = L(\gamma|_{[a,\hat{t}]}) - L(\gamma|_{[a,t]}) = 0$. Следовательно, отображение γ постоянно на отрезке $[t, \hat{t}]$ и $\gamma = \lambda \circ \psi$. Пусть $v \in [0, L(\gamma)]$ и $\tilde{t} \in [a, b]$ такие, что $u \le v$ $L(\gamma|_{[a,\tilde{t}]}) = v$. Тогда $|\lambda(u)\lambda(v)| = |\gamma(t)\gamma(\tilde{t})| \le L(\gamma|_{[t,\tilde{t}]}) = L(\gamma|_{[a,\tilde{t}]}) - L(\gamma|_{[a,t]}) = v - u$. Следовательно, отображение λ нерастягивающее и является путем, эквивалентным пути $\gamma = \lambda \circ \psi$. Кроме того, учитывая лемму 1.1, получим $L(\lambda|_{[u,v]}) = L((\lambda \circ \psi)|_{[t,\tilde{t}]}) = L(\gamma|_{[t,\tilde{t}]}) = L(\gamma|_{[a,\tilde{t}]}) - L(\gamma|_{[a,t]}) = v - u$. Таким образом, путь λ параметризован длиной дуги. $\odot$

Говорят, что путь $\gamma : [a, b] \to X$, где $a < b$, *параметризован пропорционально длине дуги*, если или γ — постоянный путь, или найдется такой натурально параметизованный путь $\hat{\gamma} : [c, d] \to X$, что $\gamma = \hat{\gamma} \circ \psi$ и $\psi : [a, b] \to [c, d]$ — единственный аффинный гомеоморфизм, т.е

$$\psi(t) = \frac{(d - c)t + bc - ad}{b - a}.$$

З.2.1. *Имеет место равенство* $L(\gamma_1 * \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.

З.2.2. *Если* $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ *и пути* γ_1, γ_2 *параметризованы длиной дуги, то путь* γ *параметризован длиной дуги.*

З.2.3. *Если* $\gamma : [0, 1] \to X$ *путь, параметризованный пропорционально длине дуги, то* γ *— липшицево отображение с константой* $L(\gamma)$ (см. определение липшицева отображения в лекции 5).

3. Дифференцируемые пути в евклидовом пространстве. Пространство путей.

Т.3.1. *Пусть* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ C^1*-путь и* $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *его производная. Тогда*

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

$\odot$ Достаточно доказать, что функция $\psi : [a, b] \to [0, L(\gamma)]$, $\psi(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$ дифференцируема и $\psi'(t) = |\gamma'(t)|$, т.к. $\psi(a) = 0$. Из аддитивности длины дуги получим $\psi(\hat{t}) - \psi(t) = L(\gamma|_{[t,\hat{t}]})$, где $a \le t < \hat{t} \le b$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ функция $\gamma'_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Следовательно, найдется такое $\eta > 0$, что для любых t, $\hat{t}$, удовлетворяющих условиям $a \leq t < \hat{t} \leq b$, $\hat{t} - t < \eta$, имеем для всех $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\tau \in [t, \hat{t}]$ $(\gamma'_j(\tau))^2 \leq (\gamma'_j(t))^2 + \varepsilon$. Пусть t, $\hat{t}$ удовлетворяют условиям $a \leq t < \hat{t} \leq b$, $\hat{t} - t < \eta$ и $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,k}}$ произвольное разбиение отрезка $[t, \hat{t}]$. Тогда для любых $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ найдутся такие $\tau_{i,j} \in [t_i, t_{i+1}]$, что $\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i+1}) = \gamma'_j(\tau_{i,j})(t_i - t_{i+1})$ и, следовательно,
$V_\sigma(\gamma|_{[t,\hat{t}]}) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} (\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i+1}))^2} \leq \sum\limits_{i=0}^{k-1} \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}(t_{i+1} - t_i) = \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}(\hat{t} - t)$. Правая часть не зависит от σ, следовательно $L(\gamma|_{[t,\hat{t}]}) \leq \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}(\hat{t} - t)$ и $\dfrac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t} \leq \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}$. С другой стороны, $\dfrac{|\gamma(\hat{t}) - \gamma(t)|}{|\hat{t} - t|} \leq \dfrac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t}$. В силу того, что функция ψ возрастающая, последние два неравенства верны для любых t, $\hat{t} \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенствам $t \neq \hat{t}$, $|\hat{t} - t| < \eta$. Кроме того, $\lim\limits_{|\hat{t}-t| \to 0} \dfrac{|\gamma(\hat{t}) - \gamma(t)|}{|\hat{t} - t|} = |\gamma'(t)|$. Тогда найдется такое $\hat{\eta} > 0$, что для любых t, $\hat{t} \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенствам $t \neq \hat{t}$, $|\hat{t} - t| < \hat{\eta}$, $|\gamma'(t)| - \varepsilon \leq \dfrac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t}$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \min\{\eta, \hat{\eta}\}$, что для любых t, $\hat{t} \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенствам $t \neq \hat{t}$, $|\hat{t} - t| < \delta$, $|\gamma'(t)| - \varepsilon \leq \dfrac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t} \leq \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}$. Осталось перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. $\odot$

Множество $C([a, b], X)$ всех путей, определеных на отрезке $[a, b]$ и принимающих значения в пространстве (X, ρ), обычно наделяют метрикой δ, определяющей топологию равномерной сходимости, т.е. $\delta(\gamma, \gamma_1) = \sup\{|\gamma(t)\gamma_1(t)| : t \in [a, b]\}$ для γ, $\gamma_1 \in C([a, b], X)$. Часто на множестве путей $C([a, b], X)$ рассматривают и более слабую топологию поточечной сходимости.

Пусть E — топологическое пространство. Функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$ называется *полунепрерывной снизу в точке* $x_0 \in E$, если для каждого вещественного m, удовлетворяющего условию $m < f(x_0)$, найдется такая окрестность $W(x_0) \subset E$, что для любого $x \in W(x_0)$ $m \leq f(x)$. Функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *полунепрерывной снизу* в E, если она полунепрерывна снизу в каждой точке из E.

Л.3.1. *Пусть последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в топологическом пространстве E к точке $x_0 \in E$, I — множество индексов и функции $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_i : E \to \overline{\mathbb{R}}$ $(i \in I)$ полунепрерывны снизу в точке x_0. Тогда*

(i) функция $F : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x) = \sup\{f_i(x) : i \in I\}$ полунепрерывна снизу в точке x_0;

(ii) $f(x_0) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf f(x_n)$.

$\odot$ (i) В силу свойства верхней грани, для каждого вещественного m, удовлетворяющего условию $m < F(x_0)$, найдется такой индекс $j \in I$, что $m < f_j(x_0)$. Тогда найдется такая окрестность $W(x_0) \subset E$, что для любого $x \in W(x_0)$ $m \leq f_j(x)$, т.к. функция f_j полунепрерывна снизу в точке x_0. Следовательно, для любого $x \in W(x_0)$ $m \leq f_j(x) \leq F(x)$.
(ii) В силу полунепрерывности снизу функции f в точке x_0, для каждого вещественного m, удовлетворяющего условию $m < f(x_0)$, найдется такая окрестность $W(x_0) \subset E$, что для любого $x \in W(x_0)$ $m \leq f(x)$. Кроме того, для достаточно большого n $x_n \in W(x_0)$, т.к. последовательность (x_n) сходится к точке $x_0 \in E$. Тогда для достаточно большого n $m \leq f(x_n)$. Предположим теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} \inf f(x_n) < f(x_0)$. Тогда, выбрав такое m, что $\lim\limits_{n\to\infty} \inf f(x_n) < m < f(x_0)$, получим противоречие. $\odot$

Т.3.2. *Функционал длины $L : C([a,b],X) \to \mathbb{R}_+ \cup \infty$ является полунепрерывным снизу относительно топологии поточечной сходимости (и, как следствие, относительно топологии равномерной сходимости). Кроме того, если последовательность путей $\gamma_n : [a,b] \to X$ $(n \in \mathbb{N})$ поточечно (равномерно) сходится к пути $\gamma : [a,b] \to X$, то $L(\gamma) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf L(\gamma_n)$.*

$\odot$ Для каждого фиксированного $t \in [a,b]$ отображение вычисления $\gamma \to \gamma(t)$ является непрерывным относительно топологии поточечной сходимости. Следовательно, для каждого фиксированного разбиения σ отрезка $[a,b]$ функция $V_\sigma : C([a,b],X) \to \mathbb{R}_+$ является непрерывной относительно топологии поточечной сходимости, как сумма суперпозиций непрерывных отображений. Первое утверждение теоремы 3.2 следует теперь из утверждения (i) леммы 3.1 и определения фукционала длины. Последнее утверждение теоремы 3.2 следует из доказанного первого утверждения этой теоремы и утверждения (ii) леммы 3.1. $\odot$

С.3.1. *Если последовательность спрямляемых путей* $\gamma_n : [a,b] \to X$ $(n \in \mathbb{N})$, *длины которых ограничены одной константой, поточечно* (*равномерно*) *сходится к пути* $\gamma : [a,b] \to X$, *то путь* γ *спрямляемый.*

С.3.2. *Пусть* $M \in \mathbb{R}_+$. *Тогда множество* $\{\gamma \in C([a,b],X) : L(\gamma) \leq M\}$ *замкнуто в пространстве* $C([a,b],X)$ *относительно топологии поточечной сходимости* (топологии равномерной сходимости).

Пр.3.1. Пусть для каждого $n \in \{0,1,\ldots\}$ $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ — кусочно-аффинный путь, график которого есть объединение отрезков, соединяющих пары точек из множества $\{(\frac{p}{2^n};\frac{\varepsilon(p)}{2^n}) : 0 \leq p \leq 2^n\}$, где $\varepsilon(p) = 0$ при четном p и $\varepsilon(p) = 1$ при нечетном p, в порядке увеличения первой координаты. Рассмотрим последовательность путей $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_n(t) = (t; F_n(t))$ $(n \in \{0,1,\ldots\})$. Эта последовательность сходится к пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_n(t) = (t;0)$, длина которого $L(\gamma) = 1$. Но $L(\gamma_n) = \sqrt{2}$ $(n \in \{0,1,\ldots\})$. Следовательно, функция длины не является в общем случае непрерывной.

Пр.3.2. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\gamma_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $\gamma_n(t) = \dfrac{\cos(tn^2)}{n}$. Функция $\cos(tn^2)$ принимает n^2 раз значение 1 (-1), когда t пробегает отрезок $[0,\pi]$. Следовательно, $L(\gamma_n) \geq \dfrac{2n^2}{n} = 2n \to \infty$ при $n \to \infty$. Кроме того, последовательность (γ_n) $(n \in \mathbb{N})$ сходится равномерно к постоянному пути $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = 0$, длина которого $L(\gamma) = 0$. Таким образом, $L(\gamma_n) \nrightarrow L(\gamma)$ при $n \to \infty$.

Пр.3.3. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\gamma_n(t) = 0$ при $t = 0$ и $\gamma_n(t) = \dfrac{t\sin(1/t)}{n}$ при $t \in (0,1]$. Тогда из примера 1.1 получим, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $L(\gamma_n) = \infty$. С другой стороны, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого $t \in [0,1]$ $\gamma_n(t) \leq 1/n$. Следовательно, последовательность (γ_n) $(n \in \mathbb{N})$ сходится равномерно к постоянному пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = 0$, длина которого $L(\gamma) = 0$. Таким образом, в этом случае также $L(\gamma_n) \nrightarrow L(\gamma)$ при $n \to \infty$.

4. Теорема Арцела-Асколи. Существование кратчайшего пути.

Последовательность отображений $f_n : (X, \rho) \to (Y, d)$ $(n \in \mathbb{N})$ называется *равномерно эквинепрерывной* (*равностепенно равномерно непрерывной*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех x, $y \in X$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < \delta$.

Пр.4.1. Последовательность отображений $f_n : (X, \rho) \to (Y, d)$ $(n \in \mathbb{N})$, удовлетворяющая следующему условию : найдутся такие константы $\alpha > 0$, $K \geq 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех x, $y \in X$ $d(f_n(x), f_n(y)) \leq K\rho^\alpha(x, y)$, является равномерно эквинепрерывной.

Метрическое пространство называется *ограниченно компактным* (*конечно-компактным, собственным*), если любое его ограниченное замкнутое подмножество компактно.

Пр.4.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой является ограниченно компактным, а его подпространство $\mathbb{Q}^n$ — несобственным метрическим пространством.

Т.4.1 (Арцела-Асколи). *Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно эквинепрерывная последовательность отображений из сепарабельного метрического пространства (X, ρ) в собственное метрическое пространство (Y, d) и для каждого $x \in X$ последовательность $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена. Тогда найдется подпоследовательность последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся равномерно на любом компактном подмножестве $K \subset X$ к равномерно непрерывному отображению $f : (X, \rho) \to (Y, d)$.*

$\odot$ Пусть $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ бесконечное счетное всюду плотное подмножество в X. В силу того, что пространство Y собственное и последовательность $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена, она имеет сходящуюся подпоследовательность $(f_{n_1}(x_1))_{n_1\in\mathbb{N}}$. Аналогично, найдется такая подпоследовательность $(f_{n_2})_{n_2\in\mathbb{N}} \subset (f_{n_1})_{n_1\in\mathbb{N}}$, что последовательности $(f_{n_2}(x_1))_{n_1\in\mathbb{N}}$, $(f_{n_2}(x_2))_{n_2\in\mathbb{N}}$ сходятся. Продолжим этот процесс. Тогда для каждого $k > 1$ найдется такая подпоследовательность $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \subset (f_{n_{k-1}})_{n_{k-1}\in\mathbb{N}}$, что для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ последовательности $(f_{n_k}(x_i))_{n_k} \in \mathbb{N}$ сходятся. Следовательно, для каждого $x \in D$ последовательность $(f_{n_n}(x))_{n_n\in\mathbb{N}}$ сходится. Упростим обозначения, заменив индекс n_n на индекс n. Пусть $\varepsilon > 0$. Используем равномерную эквинепрерывность последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех x, $y \in X$, удовлетворяющих неравенству $|xy| < \delta$. Для данного $x \in X$ выберем такую точку $y \in D$, что $|xy| < \delta$. Тогда найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех m, $n \geq n_0$ $d(f_m(x), f_n(x)) \leq d(f_m(x), f_m(y)) + d(f_m(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) < 3\varepsilon$, т.к. последовательность $(f_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится. Следовательно, для каждого $x \in X$ последовательность $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, как фундаментальная последоватеьность в собственном метрическом пространстве. Положим для каждого $x \in X$ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Переходя в определении равномерной эквинепрерывности последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ к пределу при $n \to \infty$, получим равномерную непрерывность отображения f. Пусть $K \subset X$ — компактно. Тогда существует номер $n_1 \in \mathbb{N}$, что для каждого $x \in K$ найдется такой $x^* \in \{x_1, \ldots, x_{n_1}\} \subset D$, что $|xx^*| < \delta$. Кроме того, найдется такой, независящий от выбора $x \in K$, номер $n_2 \in \mathbb{N}$, что для каждого $n \geq n_2$ и для каждого $i \in \{1, \ldots, n_1\}$ $d(f_n(x_i), f(x_i)) < \varepsilon$. Тогда для каждого $x \in X$ и для каждого $n \geq n_2$ $d(f(x), f_n(x)) \leq d(f(x), f(x^*)) + d(f(x^*), f_n(x^*)) + d(f_n(x^*), f_n(x)) < 3\varepsilon$. Таким образом, последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится на компактном подмножестве $K \subset X$ к отображению f. $\odot$

Т.4.2. *Пусть X собственное метрическое пространство, $M \geq 0$ константа, для каждого $n \in \mathbb{N}$ путь $\gamma_n : [a, b] \to X$ параметризован пропорционально длине дуги, $L(\gamma_n) \leq M$ и множество $\{\gamma_n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в X. Тогда последовательность путей $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ имеет подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторому пути γ и $L(\gamma) \leq M$.*

$\odot$ В силу задачи 2.3 для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображение $\gamma_n : [a, b] \to X$ M-липшицево. Следовательно, последовательность $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно эквинепрерывна. Кроме того, найдется подпоследовательность $(\gamma_m(a))_{m\in\mathbb{N}} \subset (\gamma_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторой точке x, поскольку пространство X собственное. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $m_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $m \geq m_0$ и для каждого $t \in [a, b]$ $|x\gamma_m(t)| \leq |x\gamma_m(a)| + |\gamma_m(a)\gamma_m(t)| \leq \varepsilon + L(\gamma_m)|t - a| \leq M(b - a) + \varepsilon$ и последовательность $(\gamma_m(t))_{m\in\mathbb{N}}$ ограничена. Следовательно, по теореме Арцела-Асколи и по теореме 3.2 найдется такая сходящаяся подпоследовательность последовательности $(\gamma_m)_{m\in\mathbb{N}}$, для которой длина предельного пути не больше, чем M. $\odot$

Кривая в метрическом пространстве называется *кратчайшей*, если ее длина наименьшая среди всех кривых с теми же концами. Кривая $\gamma : I \to X$ для произвольного интервала $I \subset \mathbb{R}$ называется кратчайшей, если ее сужение на любой замкнутый интервал является кратчайшей.

Т.4.3. *Пусть X собственное метрическое пространство, x, $y \in X$ и найдется спрямляемый путь с концами в x, y. Тогда существует кратчайший путь с концами в x, y.*

$\odot$ Пусть $\tau = \inf\{L(\gamma) : \gamma$ — путь с концами в x, $y\}$ и $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая последовательность путей, соединяющих точки x, y, что $L(\gamma_n) \to \tau$ при $n \to \infty$. Без потери общности можно считать, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ путь γ_n параметризован пропорционально длине дуги и определен на отрезке $[0,1]$. В силу теоремы 4.2, найдется подпоследовательность последовательности $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся равномерно к некоторому пути γ, соединяющему точки x, y. Из определения τ получим $\tau \le L(\gamma)$. С другой стороны, в силу теоремы 3.2, $L(\gamma) \le \lim\limits_{n\to\infty} \inf L(\gamma_n) = \tau$. $\odot$

З.4.1. *Метрическое пространство X является ограниченно компактным тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ функция $\rho_x : X \to \mathbb{R}_+$, $\rho_x(y) = |xy|$ — собственная (т.е. прообраз компактного множества компакт)*

З.4.2. *Собственное метрическое пространство является полным и сепарабельным. Замкнутое подпространство собственного метрического пространства является собственным метрическим пространством.*

З.4.3. *Носитель кратчайшей является простой дугой. Всякий отрезок кратчайшей есть кратчайшая.*

5. Липшицевы отображения, подобия и изометрические отображения метрических пространств. Расстояние по Липшицу.

Пусть $K \ge 0$. Отображение $f : (X,\rho) \to (Y,d)$ называется *K-липшицевым*, если для любых x, $x' \in X$ $d(f(x), f(x')) \le K|xx'|$. При $K = 1$ $(0 \le K < 1)$ это отображение называется *нерастягивающим* (*сжимающим*) *отображением.* Отображение f называется *липшицевым*, если найдется такое $K \geq 0$, что f — K-липшицево отображение.

Функцией смещения для отображения $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ называется функция $\rho_f : (X, \rho) \to \mathbb{R}_+$, $\rho_f(x) = |xf(x)|$.

Растяжение (*дилатация*) *отображения* $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ определяется формулой $dil(f) = \sup\{\frac{d(f(x), f(x'))}{|xx'|} : x \neq x'\}$. *Растяжение* (*дилатация*) *отображения* f *в точке* $x \in X$ определяется формулой $dil_x(f) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} dil(f|_{B(x,\varepsilon)})$.

Т.5.1. *Пусть* $\hat{X}$ *всюду плотное множество в пространстве* (X, ρ), (Y, d) — *полное метрическое пространство и* $f : (\hat{X}, \rho) \to (Y, d)$ — *липшицево отображение. Тогда существует такое единственное липшицево отображение* $\tilde{f} : (X, \rho) \to (Y, d)$, *что* $dil(\tilde{f}) = dil(f)$.

$\odot$ Пусть $x \in X$ и K — константа Липшица для f. Выберем такую последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \hat{X}$, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ является последовательностью Коши, поскольку для всех i, $j \in \mathbb{N}$ $d(f(x_i), f(x_j)) \leq K|x_i x_j|$ и $|x_i x_j| \to 0$ при i, $j \to \infty$. Следовательно, последовательность Коши $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в полном пространстве (Y, d). Положим $\tilde{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x' = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n$, то $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) = \lim\limits_{n\to\infty} d(f(x_n), f(x'_n)) \leq K \lim\limits_{n\to\infty} |x_n x'_n| = K|xx'|$. Следовательно, отображение $\tilde{f}$ является липшицевым и $dil(\tilde{f}) = dil(f)$. Кроме того, если два непрерывных отображения совпадают на всюду плотном множестве, то они совпадают всюду. Поэтому отображение $\tilde{f}$ единственно. $\odot$

Отображение $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *билипшицевым*, если существуют такие положительные константы c и C, что для всех x, $x' \in X$ $c|xx'| \leq d(f(x), f(x')) \leq C|xx'|$.

Метрики ρ и ρ' на множестве X называются *липшицево-эквивалентными*, если $id : (X, \rho) \to (X, \rho')$ билипшицево отображение.

Известно, что все нормы на конечномерном векторном пространстве липшицево-эквивалентны.

Сюръекция $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *подобием с коэффициентом* *подобия* $\sigma_f > 0$, если для любых x, $x' \in X$ $d(f(x), f(x')) = \sigma_f |xx'|$. Подобие f называется *собственным подобием* (*изометрией*), если $\sigma_f \neq 1$ ($\sigma_f = 1$).

Отображение $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *изометрическим отображением* (*отображением, сохраняющим расстояния*), если для любых x, $x' \in X$ $d(f(x), f(x')) = |xx'|$. Отображение f называется *локально изометрическим отображением*, если для любого $x \in X$ найдется такая окрестность $V(x)$, что $f|_{V(x)}$ изометрическое отображение.

Расстоянием по Липшицу между метриками ρ, ρ_1 на множестве X называется величина $|\rho\rho_1|_L = \sup\{|\ln \dfrac{\rho_1(x, x')}{|xx'|}| : x \neq x'\}$.

Расстоянием по Липшицу d_L *между метрическими пространствами* (X, ρ), (Y, d) называется величина $d_L(X, Y) = \inf\{|\rho f^* d|_L : f : (X, \rho) \to (Y, d)$ — биекция$\}$, где для любых x, $x' \in X$ $f^* d(x, x') = d(f(x), f(x'))$.

Говорят, что *последовательность метрических пространств* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится по Липшицу к метрическому пространству* X, если $d_L(X_n, X) \to 0$ при $n \to \infty$.

Т.5.2. *Компакты* (X, ρ), (Y, d) *изометричны тогда и только тогда, когда* $d_L(X, Y) = 0$.

$\odot$ Необходимость очевидна. Достаточность. Пусть $d_L(X, Y) = 0$. Тогда найдется такая последовательность биекций $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из X на Y, что $1 - \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{d(f_n(x), f_n(x'))}{|xx'|} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$ для всех $x \neq x'$. Следовательно, последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно эквинепрерывна и имеет сходящуюся подпоследовательность по теореме Арцела-Асколи. Ясно, что предел этой подпоследовательности является изометрией пространтства (X, ρ) на (Y, d). $\odot$

Пр.5.1. Пусть X граф с двумя вершинами и ребрами $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ ребро e_n изометрично отрезку $[0, 1 + 1/n]$ со стандартной метрикой. Пространство Y получено из пространства X добавлением одного ребра e_0, изометричного отрезку $[0, 1]$. Тогда $|XY|_L = 0$ и пространства X, Y не являются изометричными. Действительно, пусть $n \geq 2$. Положим $f_n : (X, \rho) \to (Y, d)$, $f_n(e_n) = e_0$, $f_n(e_k) = e_k$ при $k = 1, \ldots, n-1$, $f_n(e_k) = e_{k-1}$ при $k \geq n + 1$. Тогда нетрудно проверить, что $|\rho f_n^* d|_L \to 0$ при $n \to \infty$.

З.5.1. *Для каждого* $\oslash \neq M \subset X$ *функция* $\rho_M : (X,\rho) \to \mathbb{R}_+$, $\rho_M(x) = \inf\{|xy| : y \in M\}$ *является нерастягивающей функцией.*

З.5.2. *Если отображение* $f : (X,\rho) \to (X,\rho)$ *является* K*-липшицевым, то функция смещения для него является* $(K+1)$*-липшицевой функцией.*

З.5.3. *Для* K*-липшицева (липшицева) отображения* $dil(f) \leq K$ $(dil(f) < \infty)$. *Если* $f : (X,\rho) \to (Y,d)$, $g : (Y,d) \to (Z,d_1)$ *— липшицевы отображения, то суперпозиция* $g \circ f$ *— липшицево отображение и* $dil(g \circ f) \leq dil(g) dil(f)$.

З.5.4. *Множество всех липшицевых отображений из метрического пространства в нормированное пространство является векторным пространством. Для любых таких липшицевых отображений* f, g *и числа* $\lambda \in \mathbb{R}$ *имеют место неравенства* $dil(g+f) \leq dil(g) + dil(f)$, $dil(\lambda f) \leq |\lambda| dil(f)$.

З.5.5. *Для метрических пространств* (X,ρ), (Y,d) *следующие три метрики на множестве* $X \times Y$ *липшицево-эквивалентны:*

$\rho_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{|x_1x_2|^2 + |y_1y_2|^2}$,

$\rho_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1x_2| + |y_1y_2|$,

$\rho_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1x_2|, |y_1y_2|\}$.

З.5.6. *Две липшицево-эквивалентные метрики — одновременно полные или неполные.*

З.5.7. *Расстояние по Липшицу неотрицательная, симметричная функция, удовлетворяющая неравенству треугольника.*

6. Пространство с внутренней метрикой. Сегмент. Геодезическое пространство.

Метрика на множестве X называется *внутренней*, если для любых x, $y \in X$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $z \in X$, что $\max\{|xz|, |yz|\} \leq |xy|/2 + \varepsilon$.

Л.6.1. *Пусть* X *пространство с внутренней метрикой и* x, $y \in X$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует равномерно непрерывное отобра-*

жение $z : \{$ *двоично-рациональные в* $[0,1]\} \to X$*, обладающее свойствами*

(i) $z(0)=x$, $z(1)=y$;

(ii) $|z(\frac{k}{2^n})z(\frac{k+1}{2^n})| \le \frac{1}{2^n}(|xy|+\varepsilon)$ *для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *и для всех* $k=0,\ldots,2^n-1$.

$\odot$ Положим $z(0)=x$, $z(1)=y$ и предположим, отображение z уже определено для чисел вида $\frac{k}{2^{n-1}}$ при $k=0,\ldots,2^{n-1}$ с более сильным условием, чем (ii): (iii) $|z(\frac{k}{2^{n-1}})z(\frac{k+1}{2^{n-1}})| \le \frac{1}{2^{n-1}}(|xy|+\varepsilon(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}))$. Выберем для $k=0,\ldots,2^{n-1}-1$ такую точку $z(\frac{2k+1}{2^n})$, что $\max\{|z(\frac{k}{2^{n-1}})z(\frac{2k+1}{2^n})|,|z(\frac{2k+1}{2^n})z(\frac{k+1}{2^{n-1}})|\} \le \frac{1}{2}|z(\frac{k}{2^{n-1}})z(\frac{k+1}{2^{n-1}})|+\frac{\varepsilon}{2^{2n}}$. Используя наше предположение, получим, что правая часть этого неравенства не превосходит $\frac{1}{2^n}(|xy|+\varepsilon(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}))$ Равномерную непрерывность этого отображения теперь нетрудно получить из (ii). $\odot$

Метрика на множестве X называется *строго внутренней*, если для любых x, $y \in X$ найдется такая точка $z \in X$ (называемая *серединой* между x, y), что $|xz|=|yz|=|xy|/2$.

Пр.6.1. Выпуклое множество без ненулевого конечного числа точек с индуцированной из евклидовой плоскости метрикой является пространством с внутренней метрикой, которая не является строго внутренней метрикой.

В метрически связном пространстве (X,ρ) определим *метрику* ρ_l, относительно которой расстояние $|xy|_l$ между произвольными двумя точками x, $y \in X$ равно нижней грани длин кривых, соединяющих эти точки (эту метрику иногда называют *внутренней метрикой относительно исходной метрики, но чаще — the length metric или the path metric*).

Л.6.2. *В метрически связном пространстве* (X,ρ) ρ_l *— внутренняя метрика и для любых* x, $y \in X$ $|xy| \le |xy|_l$.

$\odot$ Из определений нижней грани, длины кривой и задачи 1.2 следует, что для любых x, $y \in X$ $0 \le |xy| \le |xy|_l = |yx|_l$. Кроме того, если $|xy|_l = 0$, то $x=y$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и x, y, $z \in X$. Выберем такие пути $\gamma : [a, b] \to X$, $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to X$, что $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$, $\gamma_1(a_1) = y$, $\gamma(b_1) = z$, $L(\gamma) \le |xy|_l + \varepsilon/2$, $L(\gamma_1) \le |yz|_l + \varepsilon/2$. Тогда путь $\gamma * \gamma_1$ соединяет точки x, z и $|xz|_l \le L(\gamma * \gamma_1) = L(\gamma) + L(\gamma_1) \le |xy|_l + |yz|_l + \varepsilon$ Используя произвольность $\varepsilon > 0$, получим неравенство треугольника для функции ρ_l. Кроме того, в силу теоремы 2.2 найдется такое $t \in [a, b]$, что $L(\gamma|_{[a,t]}) = L(\gamma|_{[t,b]}) = L(\gamma)/2$. Полагая $u = \gamma(t)$, получим $\max\{|xu|, |yu|\} \le L(\gamma)/2 \le \dfrac{1}{2}|xy|_l + \varepsilon/4$. $\odot$

Пр.6.2. Пусть $X = ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \{\{\dfrac{1}{n}\} \times [0,1] : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ с индуцированной метрикой. Тогда $|(\dfrac{1}{n}; 0)(0; 0)| \to 0$ при $n \to \infty$, но для каждого $n \in \mathbb{N}$ $|(\dfrac{1}{n}; 0)(0; 0)|_l \ge 2$. Таким образом, отображение $id : (X, \rho) \to (X, \rho_l)$ не является непрерывным, в отличие от обратного к нему отображения (согласно лемме 6.2).

Пр.6.3. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ — кривая Коха, $p \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}^2$ и множество $D = \cup\{[p, z] : z \in K\}$ с индуцированной метрикой из $\mathbb{R}^3$. Тогда (D, ρ) гомеоморфно замкнутому диску. Но (D, ρ_l) не является гомеоморфным замкнутому диску. Действительно, $|xy|_l = |xy|$ при $z \in K$, x, $y \in [p, z]$ и $|xy|_l = |px| + |py|$ в противном случае. Следовательно, для каждого $x \in D \backslash \{p\}$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что шар $B(x, \varepsilon) \subset (D, \rho_l)$ гомеоморфен открытому интервалу в $\mathbb{R}$, а не двумерному диску.

Л.6.3.
(i) Если $\gamma : [a, b] \to (X, \rho)$ спрямляемый путь, то $\gamma : [a, b] \to (X, \rho_l)$ — путь.
(ii) Если $\gamma : [a, b] \to (X, \rho_l)$ путь, то $\gamma : [a, b] \to (X, \rho)$ — путь и $L_\rho(\gamma) = L_{\rho_l}(\gamma)$.
(iii) Если (X, ρ) — метрически связное пространство, то $(\rho_l)_l = \rho_l$.

$\odot$
(i) Используя аддитивность длины дуги для всех t_0, $t \in [a, b]$ получим $|\gamma(t_0)\gamma(t)|_l \le L(\gamma|_{[t_0,t]}) = |L(\gamma|_{[a,t]}) - L(\gamma|_{[a,t_0]})|$. Тогда в силу теоремы 2.2 $|\gamma(t)\gamma(t_0)|_l \to 0$ при $t \to t_0$.
(ii) Первое утверждение сразу следует из леммы 6.2. Пусть $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ разбиение отрезка $[a, b]$. Из леммы 6.2 получим $V_\sigma^\rho(\gamma) \le V_\sigma^{\rho_l}(\gamma) \Rightarrow L_\rho(\gamma) \le$

$L_{\rho_l}(\gamma)$. С другой стороны, $V_\sigma^{\rho_l}(\gamma) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1}|_l \le \sum\limits_{i=0}^{n-1} L_\rho(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) = L_\rho(\gamma) \Rightarrow L_{\rho_l}(\gamma) \le L_\rho(\gamma)$.
(iii) Это утверждение следует из определения метрики ρ_l и доказанного утверждения (ii). $\odot$

Сегментом $[x, y]$ с концами x, y в метрическом пространстве называется кривая с этими концами, длина которой равна $|xy|$. Часто сегмент отождествляют с образом изометрического отображения замкнутого интервала в метрическое пространство.

Метрическое пространство называется *геодезическим пространством*, если любые две его точки могут быть соединены сегментом.

Т.6.1. *Пусть (X, ρ) полное метрическое пространство с внутренней метрикой. Тогда $\rho_l = \rho$. Если, кроме того, метрика ρ строго внутренняя, то (X, ρ) — геодезическое пространство.*

$\odot$ Пусть x, $y \in X$ и $\varepsilon > 0$ (в случае, когда метрика ρ строго внутренняя, считаем $\varepsilon = 0$). Используя лемму 6.1, найдем равномерно непрерывное отображение $z : \{$ двоично-рациональные в $[0,1]\} \to X$, обладающее свойствами (i), (ii) этой леммы. Это отображение по непрерывности можно продолжить до непрерывного отображения $\hat{z} : [0,1] \to X$, поскольку множество двоично-рациональных точек плотно в отрезке $[0,1]$, равномерно непрерывное отображение z отображает последовательность Коши в последовательность Коши и пространство (X, ρ) полное. Используя свойство (ii), получим $L(\hat{z}) \le |xy| + \varepsilon$. Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и определения метрики ρ_l, $|xy|_l \le |xy|$. Обратное неравенство получено в лемме 6.2. В случае строго внутренней метрики получили $L(\hat{z}) \le |xy|$. Следовательно, учитывая задачу 1.2, $L(\hat{z}) = |xy|$ и путь $\hat{z}$ параметризует сегмент $[x, y]$. $\odot$

З.6.1. *Если в пространстве с внутренней метрикой $|xy| < r_1 + r_2$, то $B(x, r_1) \cap B(y, r_2) \neq \emptyset$.*

З.6.2. *В пространстве с внутренней метрикой для всех $x \in X$ $r > 0$ $\overline{B(x, r)} = B[x, r]$.*

З.6.3. *В пространстве (X, ρ_l) кривая кратчайшая тогда и только тогда, когда она является сегментом.*

З.6.4. *Пополнение пространства с внутренней метрикой является пространством с внутренней метрикой.*

7. Геодезическая кривая, луч, прямая. Выпуклость метрического пространства по Менгеру. Теорема Хопфа–Ринова–Кон-Фоссена.

Пусть I интервал в $\mathbb{R}$. Локально изометрическое отображение $\gamma : I \to (X, \rho)$ называется *геодезической параметризованной кривой.*

Прямой (*лучом*) в пространстве (X, ρ) называется образ при изометрическом отображении $\gamma : \mathbb{R} \to X$ ($\gamma : \mathbb{R}_+ \to X$).

Прямым метрическим пространством называется геодезическое пространство, в котором через любые две различные точки можно провести единственную прямую.

Л.7.1. *Если в пространстве (X, ρ) $((X, \rho_l))$ последовательность сегментов (кратчайших) $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторой кривой γ, то эта кривая — сегмент.*

$\odot$ Пусть x, y — концы кривой γ. В силу теоремы 3.2, получим
$L(\gamma) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf L(\gamma_n) = |xy|$.
Осталось использовать задачи 1.2, 6.3. $\odot$

Т.7.1 (Теорема Хопфа–Ринова–Кон-Фоссена). *Для локально-компактного пространства X с внутренней метрикой следующие утверждения эквивалентны:*
(i) *пространство X собственное;*
(ii) *пространство X полное;*
(iii) *каждый геодезический путь $\gamma : [0, a) \to X$ может быть продолжен до пути $\hat{\gamma} : [0, a] \to X$;*
(iv) *найдется такая точка $p \in X$, что каждый кратчайший путь $\gamma : [0, a) \to X$ с $\gamma(0) = p$ может быть продолжен до пути $\hat{\gamma} : [0, a] \to X$.*
Каждое из условий (i) – (iv) влечет, что X — геодезическое пространство.

$\odot$ $(i) \Rightarrow (ii)$ См. задачу 4.2.
$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ Оставляем в качестве простых упражнений.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Докажем от противного. Предположим, что найдется неком-

пактный замкнутый шар. Положим $R = \sup\{r : \text{шар } B[p,r] \text{ компактен}\}$. Тогда $R < \infty$. Докажем, что шар $B(p,R)$ предкомпактен. Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвольная последовательность из этого шара. Можно считать, что $|px_n| \to R$ при $n \to \infty$. В противном случае найдется подпоследовательность последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, содержащаяся в шаре меньшего радиуса и, следовательно, обладающая сходящейся подпоследовательностью, т.к. последний шар компактен. В силу теорем 4.3, 6.1 и задачи 6.3 для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется натурально-параметризованный сегмент $\gamma_n : [0, |px_n|] \to X$, соединяющий p с $x_n \in B[p, |px_n|]$. Из последовательности $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать подпоследовательность, в которой сужения путей на отрезок $[0, |px_1|]$ сходятся. Из этой подпоследовательности выберем следующую подпоследовательность путей, сужения которых на отрезок $[0, |px_2|]$ сходятся, и так далее. Затем канторовский диагональный процесс (т.е. выбор n-го элемента из n-й подпоследовательности для $n = 1, 2, \ldots$) дает такую последовательность $(\gamma_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$, что для любого $t \in [0, R)$ последовательность $(\gamma_{m_n}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторой точке $\gamma(t) \in X$. В силу леммы 7.1 $\gamma : [0, R) \to X$ является отображением и кратчайшей. Согласно (iv) эту кратчайшую можно продолжить до пути $\hat{\gamma} : [0, R] \to X$. Тогда последовательность $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $\hat{\gamma}(R)$ и замкнутый шар $B[p, R]$ в силу задачи 6.2 компактен. Для любого $x \in B[p, R]$ найдется такое $r(x) > 0$, что шар $B(x, r(x))$ предкомпактен, т.к. пространство X локально компактно. Выберем конечное подпокрытие $(B[x_i, r(x_i)])$ из покрытия этими шарами шара $B[p, R]$. Объединение шаров этого конечного подпокрытия предкомпактно и содержит шар $B(p, R + \varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Это противоречит выбору R. $\odot$

Следующие примеры показывают, что все условия теоремы 7.1 существенны.

Пр.7.1. Пусть для всех $x, y \in \mathbb{R}$ $\delta(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$. Тогда на $\mathbb{R}$ эта метрика локально совпадает со стандартной метрикой и $id : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |.|)$ — гомеоморфизм. Пространство $(\mathbb{R}, \delta)$ является ограниченным, полным, локально компактным, но не является компактным и пространством с внутренней метрикой. Действительно, $\delta(x,y) = 1$ для всех таких x, y, что $|x-y| > 1$, но $\delta_l(x,y) = |x-y| > 1$.

Пр.7.2. Рассмотрим интервал $(0,1) \subset (\mathbb{R}, |.|)$ с индуцированной метрикой. Это пространство ограничено, замкнуто в себе, но не является компактным.

Пр.7.3. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство. Это пространство со строго внутренней метрикой, как и любое нормированное пространство. Оно не является локально компактным, т.к. шар $B[0,1] \subset X$ замкнут и ограничен, но не является компактным.

Пр.7.4. Пространство X из примера 7.3 полное пространство с внутренней метрикой, не являющееся локально компактным. С метрикой $\delta(x,y) = \min\{1, ||x-y||\}$ $(x,\, y \in X)$ оно не является геодезическим пространством, т.к. каждая кривая с концами в точках x, y с $||x-y|| > 1$ имеет длину большую единицы, но $\delta(x,y) = 1$.

Л.7.2. *Пусть $x \in (X, \rho_l)$, $r > 0$. Тогда для любых y, $z \in B(x,r)$ найдется путь $\gamma : [a,b] \to X$ с концами y, z длины меньше, чем $2r$. Кроме того, $\gamma([a,b]) \subset B(x,2r)$.*

$\odot$ Используя неравенство треугольника, получим $|yz| \le |yx| + |xz| < 2r$. Следовательно, найдется путь $\gamma : [a,b] \to X$ с концами y, z длины меньше, чем $2r$. Последнее включение докажем методом от противного. Пусть найдется такое $t \in [a,b]$, что $\gamma(t) \notin B(x,2r)$. Тогда $|y\gamma(t)| \ge |x\gamma(t)| - |xy|$, $|z\gamma(t)| \ge |x\gamma(t)| - |xz| > r$. Следовательно, $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,t]}) + L(\gamma_{[t,b]}) \ge |y\gamma(t)| + |z\gamma(t)| > 2r$. Получили противоречие. $\odot$

Говорят, что точка $z \in (X,\rho)$ *лежит между* различных точек x, $y \in X$, если $z \ne x$, $z \ne y$ и $|xz| + |zy| = |xy|$. Пишут: (xzy).

Метрическое пространство (X,ρ) называется *выпуклым по Менгеру*, если для любой пары различных точек из X найдется точка, лежащая между ними.

Множество A в метрическом пространстве (X,ρ) называется *выпуклым*, если сужение метрики ρ на A — строго внутренняя метрика.

Очевидно, что всякое метрическое пространство со строго внутренней метрикой (в частности, геодезическое пространство) является выпуклым по Менгеру.

Л.7.3 (Транзитивность отношения между). *Для любых попарно различных x, y, z, $t \in X$ (xyz), (xzt) тогда и только тогда, когда (xyt),*

(yzt).

$\odot$ Пусть (xyz), (xzt). Тогда $|xy| + |yz| = |xz|$, $|xt| = |xz| + |zt| = |xy| + |yz| + |zt| \geq |xy| + |yt| \geq |xt|$. Следовательно, $|xy| + |yt| = |xt|$ и $|yz| + |zt| = |yt|$. Таким образом, (xyt), (yzt). В обратную сторону, аналогично. $\odot$

З.7.1. *Пусть Y — метрическое пространство, X — пространство с внутренней метрикой и $f : X \to Y$ локально K-липшицево отображение. Тогда f K-липшицево отображение.*

8. Геодезическая выпуклость и выпуклость по Менгеру. Произведения метрических пространств.

Пусть (X, ρ) геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом. Множество $A \subset X$ называется *геодезически выпуклым*, если для любых x, $y \in A$ $[x, y] \subset A$. Множество $B \subset X$ называется *строго геодезически выпуклым*, если для любых x, $y \in \overline{B}$ $(x, y) = [x, y] \setminus \{x, y\} \subset Int(B)$.

Л.8.1. *Пусть (X, ρ) собственное геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом и $A \subset X$ геодезически выпукло. Тогда $\overline{A}$ геодезически выпукло.*

$\odot$ Пусть x, $y \in \overline{A}$ и последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ сходятся к x, y соответственно. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\gamma_n : [0, 1] \to X$ параметризация сегмента $[x_n, y_n]$ пропорционально длине дуги. По теореме Арцела-Асколи найдется подпоследовательность $(\gamma_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторому пути $\gamma : [0, 1] \to X$, параметризованному пропорционально длине дуги. Тогда для каждого $t \in [0, 1]$ $\gamma(t) = \lim\limits_{m\to\infty} \gamma_m(t) \subset \overline{A}$. По лемме 7.1 и условию леммы 8.1 γ — параметризация единственного сегмента $[x, y] \subset \overline{A}$. $\odot$

Пусть (X, ρ) геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом. *Выпуклой оболочкой* $C(A)$ множества $A \subset X$ называется пересечение всех выпуклых подмножеств в X, содержащих множество A.

Л.8.2. *Пусть (X, ρ) собственное геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегмен-*

том, $C_0(A) = A \subset X$ *и для каждого* $n \in \mathbb{N}$ $C_n(A) = \cup\{[x,y] : x,\ y \in C_{n-1}(A)\}$*. Тогда* $C(A) = \cup\{C_n(A) : n \geq 0\}$*.*

$\odot$ По индукции нетрудно проверить, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $C_n(A) \subset C(A)$, поскольку множество $C(A)$ геодезически выпуклое. Следовательно, $\cup\{C_n(A) : n \geq 0\} \subset C(A)$. Пусть $x,\ y \in \cup\{C_n(A) : n \geq 0\}$. Тогда найдется такой номер $n \geq 0$, что $x,\ y \in C_n(A)$. Следовательно, $[x,y] \subset C_{n+1}(A) \subset \cup\{C_n(A) : n \geq 0\}$ и множество $\cup\{C_n(A) : n \geq 0\}$ — геодезически выпуклое. Тогда $C(A) \subset \cup\{C_n(A) : n \geq 0\}$. $\odot$

Пр.8.1. Пусть $r > 0$ и $M \subset B(x,r)$, где M — замкнутый заполненный квадрат в $\mathbb{R}^2$. Тогда $B(x,r)$ — строго геодезически выпуклое множество. Но $\cap\{B(x,r) :\ M \subset B(x,r),\ r > 0,\ x \in \mathbb{R}^2\} = M$ — геодезически выпукло, но нестрого.

Т.8.1. *Собственное выпуклое по Менгеру пространство является геодезическим пространством.*

$\odot$ В силу теоремы 6.1 и задачи 4.2 достаточно доказать, что собственное выпуклое по Менгеру пространство является пространством со строго внутренней метрикой. Рассмотрим для различных фиксированных точек $x,\ y \in X$ множество $B = \{z \in X : |xz| + |zy| = |xy|\}$. Множество B компактно, как ограниченное и замкнутое множество в собственном пространстве. Функция $f : B \to \mathbb{R}$, $f(z) = \min\{|zx|, |zy|\}$ непрерывна на компакте. Следовательно, найдется такая точка $m \in B$, что $f(m) = \max\{f(z) : z \in B\}$. Тогда (xmy) и $f(m) = \min\{|mx|, |my|\} \leq |xy|/2$. Докажем, что $f(m) = |mx| = |my| = |xy|/2$. Пусть, напротив, $f(m) = |mx| < |my|$. Тогда, по условию, найдется такая точка $v \in X$, что (mvy). В силу леммы 7.2, (xvy) и (xmv). Следовательно, $f(m) = |xm| < |xv|$ и $|vy| \leq f(m) < |xy|/2$. Действительно, если $|vy| > f(m)$, то $\min\{|vx|, |vy|\} > f(m)$ и получаем противоречие. Далее, $|mv| = |xv| - |xm| = |xy| - |vy| - |xm| \geq |xy| - 2f(m) > 0$. Следовательно, $a = \inf\{|mv| : (mvy)\} \geq |xy| - 2f(m) > 0$. Пусть последовательность $(|mv_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, где $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{v \in X : (mvy)\}$, сходится к a. Тогда найдется подпоследовательность $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторой точке v_0, т.к. пространство X собственное и множество $\{v \in X : (mvy)\}$ ограниченное. Тогда, по условию, найдется такая точка $\hat{v} \in X$, что $(m\hat{v}v_0)$. Следовательно, $|m\hat{v}| < |mv_0| = a$. Получили противоречие. Таким образом, $f(m) = |mx| = |my| = |xy|/2$. $\odot$

Л.8.3. *Пусть* (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) *метрические пространства. Тогда*

(i) *при* $p \in [1, \infty)$ *формула* $\rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = (|x_1y_1|^p + |x_2y_2|^p)^{1/p}$ *определяет метрику на* $X_1 \times X_2$*;*

(ii) *формула* $\rho_\infty((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = \max\{|x_1y_1|, |x_2y_2|\}$ *определяет метрику на* $X_1 \times X_2$.

$\odot$ Пусть $p \in [1, \infty)$, $a_1 = |x_1y_1|$, $a_2 = |x_2y_2|$, $b_1 = |y_1z_1|$, $b_2 = |y_2z_2|$. $\rho_p((x_1; x_2), (z_1; z_2)) = (|x_1z_1|^p + |x_2z_2|^p)^{1/p} \le ((a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p)^{1/p} \le (a_1^p + a_2^p)^{1/p} + (b_1^p + b_2^p)^{1/p} = \rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2)) + \rho_p((y_1; y_2), (z_1; z_2))$ $\odot$

Т.8.2. *Если* (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) *собственные метрические пространства (пространства со строго внутренней метрикой), то* $(X_1 \times X_2, \rho_p)$ *собственное метрическое пространство (пространство со строго внутренней метрикой) при* $p \in [1, \infty]$.

$\odot$ Докажем для $p \in [1, \infty)$ (для $p = \infty$ доказательство аналогично). Заметим, что проекция $(X_1 \times X_2, \rho_p)$ на (X_1, ρ_1) $((X_2, \rho_2))$ является нерастягивающим отображением. Если $K = K_1 \times K_2$ замкнуто и ограничено в $(X_1 \times X_2, \rho_p)$, то $K_1 \subset (X_1, \rho_1)$, $K_2 \subset (X_2, \rho_2)$ ограничены и $\overline{K_1}$, $\overline{K_2}$ компактны, как замкнутые и ограниченные множества в собственных пространствах. Следовательно, $\overline{K_1} \times \overline{K_2}$ компактно в $X_1 \times X_2$. Но K замкнуто в компакте $\overline{K_1} \times \overline{K_2}$, следовательно K компакт и $(X_1 \times X_2, \rho_p)$ собственное метрическое пространство. Докажем второе утверждение. Пусть $(x_1; x_2)$, $(y_1; y_2) \in (X_1 \times X_2, \rho_p)$. По условию найдутся такие $z_1 \in X_1$, $z_2 \in X_2$, что $|x_1z_1| = |z_1y_1| = |x_1y_1|/2$, $|x_2z_2| = |z_2y_2| = |x_2y_2|/2$. Тогда $\rho_p((x_1; x_2), (z_1; z_2)) = (|x_1z_1|^p + |x_2z_2|^p)^{1/p} = ((|x_1y_1|/2)^p + (|x_2y_2|/2)^p)^{1/p} = \rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2))/2$. Аналогично доказывается, что $\rho_p((y_1; y_2), (z_1; z_2)) = \rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2))/2$. $\odot$

Т.8.3. *Пусть для каждого* $i = 1, 2$ (X_i, ρ_i) *геодезическое пространство,* $\gamma_i : [0, 1] \to X_i$ *параметризация сегмента* $[x_i, y_i]$ *пропорционально длине дуги. Тогда* $\gamma : [0, 1] \to (X_1 \times X_2, \rho_p)$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t); \gamma_2(t))$ *параметризация сегмента* $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$ *пропорционально длине дуги при* $p \in [1, \infty]$. *Кроме того,* $L(\gamma) = (L(\gamma_1)^p + L(\gamma_2)^p)^{1/p}$ *при* $p \in [1, \infty)$ *и* $L(\gamma) = \max\{L(\gamma_1), L(\gamma_2)\}$ *при* $p = \infty$.

$\odot$ Пусть $p \in [1, \infty)$. Для всех u, $v \in [0, 1]$

$\rho_p(\gamma(u), \gamma(v)) = (|\gamma_1(u)\gamma_1(v)|^p + |\gamma_2(u)\gamma_2(v)|^p)^{1/p} = (L(\gamma_1)^p|u - v|^p +$

$L(\gamma_2)^p|u-v|^p)^{1/p} = (L(\gamma_1)^p + L(\gamma_2)^p)^{1/p}|u-v|$.

Следовательно, γ — параметризация сегмента пропорционально длине дуги и $L(\gamma) = (L(\gamma_1)^p + L(\gamma_2)^p)^{1/p}$. При $p = \infty$ доказательство аналогично. $\odot$

З.8.1. *Докажите теоремы 8.2, 8.3 при $p = \infty$.*

9. Отображения, неувеличивающие (сохраняющие) длины кривых. Нерастягивающие отображения. Отображения уменьшающие (неуменьшающие) расстояние.

$f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *отображением, неувеличивающим длины кривых с коэффициентом $K \geq 0$* (*сохраняющим длины кривых*), если для любого спрямляемого пути $\gamma : [a, b] \to X$ $L_Y(f(\gamma)) \leq KL_X(\gamma)$ ($L_Y(f(\gamma)) = L_X(\gamma)$). Инъективное отображение, сохраняющее длины кривых, называется *изометрическим вложением.*

Л.9.1.
(*i*) *Если $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ K-липшицево отображение, то f является отображением, неувеличивающим длины кривых с коэффициентом K.*
(*ii*) *Если $f : (X, \rho_l) \to (Y, d)$ непрерывное отображение, неувеличивающее длины кривых с коэффициентом K, то f — K-липшицево отображение.*

$\odot$ (*i*) Пусть $\gamma : [a, b] \to X$ спрямляемый путь. Для любого разбиения $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ отрезка $[a, b]$ $V_\sigma(f \circ \gamma) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} d(f(\gamma(t_i)), f(\gamma(t_{i+1}))) \leq K \sum\limits_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})| = KV_\sigma(\gamma)$. Взяв верхнюю грань по всем разбиениям отрезка $[a, b]$ сначала в правой части неравенства, затем в левой, получим $L_Y(f(\gamma)) \leq KL_X(\gamma)$.
(*ii*) Для любых x, $y \in X$ $d(f(x), f(y)) \leq \inf\{L_Y(\hat{\gamma}) : \hat{\gamma}$ путь в Y с концами $f(x)$, $f(y)$ $\} \leq \inf\{L_Y(f \circ \gamma) : \gamma$ путь в X с концами x, y $\} \leq K \inf\{L_X(\gamma) : \gamma$ путь в X с концами x, y $\} = K|xy|_l$. $\odot$

Пр.9.1. Пусть (Y, d) дискретное пространство. Тогда для каждого $K \geq 0$ любое $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ является отображением, неувеличивающим длины кривых с коэффициентом K, т.к. любой путь в Y имеет нулевую длину.

Л.9.2. *Пусть $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ нерастягивающее отображение и x, $y \in X$. Тогда верны следующие утверждения.*
(i) Если $(yxf(y))$, то $\rho_f(x) \leq \rho_f(y)$. В случае равенства : $(xf(y)f(x))$ и $|f(x)f(y)| = |xy|$.
(ii) Если $(xyf(y))$, то $\rho_f(y) \leq \rho_f(x)$. В случае равенства : $(xf(x)f(y))$ и $|f(x)f(y)| = |xy|$.

$\odot$ (i) Если $(yxf(y))$, то $\rho_f(x) = |xf(x)| \leq |xf(y)| + |f(y)f(x)| \leq |xf(y)| + |yx| = |yf(y)| = \rho_f(y)$. В случае равенства, все неравенства становятся равенствами. Из третьего равенства следует, что $|f(x)f(y)| = |xy|$, а из второго равенства следует, что $(xf(y)f(x))$.
(ii) Если $(xyf(y))$, то $0 < \rho_f(y) = |yf(y) = |xf(y)| - |xy| \leq |xf(y)| - |f(y)f(x)| \leq |xf(x)| = \rho_f(x)$. В случае равенства : $|f(y)f(x)| = |yx| > 0$. Следовательно, $f(x) \neq f(y)$, $f(x) \neq x$ и $(xf(x)f(y))$. $\odot$

Л.9.3. *Пусть $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ нерастягивающее отображение и x, $y \in X$. Тогда*
(i) если $|f(x)f(y)| = |xy|$ и найдется сегмент $[x, y]$, то $f|_{[x,y]}$ изометрическое отображение;
(ii) если $(Y, d) = (X, \rho)$, найдется единственный сегмент $[x, y]$ и $f(x) = x$, $f(y) = y$, то для любого $z \in [x, y]$ $f(z) = z$;
(iii) если $(Y, d) = (X, \rho)$ геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом, то множество всех неподвижных точек $Fix(f)$ отображения f является замкнутым геодезически выпуклым множеством в X.

$\odot$ (i) Пусть $z \in [x, y]$. Тогда $|xy| = |xz| + |zy| \geq |f(x)f(z)| + |f(z)f(y)| \geq |f(x)f(y)| = |xy|$. Следовательно, $|f(x)f(z)| = |xz|$ и $|f(x)f(y)| = |xy|$. Если $w \in [x, y]$, то нетрудно проверить, что $|f(z)f(w)| = |zw|$.
(ii) Это следствие (i).
(iii) Замкнутость множества $Fix(f)$ следует из непрерывности отображения f, а геодезическая выпуклость из (ii). $\odot$

$f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *отображением, неуменьшающим (уменьшающим) расстояния*, если для любых (различных) x, $x' \in X$ $d(f(x), f(x')) \geq |xx'|$ $(d(f(x), f(x')) < |xx'|)$.

Т.9.1. *Пусть X компактное метрическое пространство и $f : X \to X$ уменьшающее расстояния отображение. Тогда отображение f имеет* *единственную неподвижную точку $x \in X$ и для любого $y \in X$ последовательность $(f^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к точке x при $n \to \infty$.*

$\odot$ Пусть x точка минимума для функции ρ_f, которая существует, поскольку эта функция непрерывна на компакте. Если $f(x) \neq x$, то $\rho_f(f(x)) = |f(x)f^2(x)| < |xf(x)| = \rho_f(x)$. Получили противоречие. Следовательно, $f(x) = x$. Эта неподвижная точка единственная. Если предположить, что существует еще одна неподвижная точка y отображения f, то получаем противоречие, т.к. $|xy| = |f(x)f(y)| < |xy|$. Пусть $y \in X$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ $y_n = f^n(y)$. Тогда или $y_n = x$ для некоторого n, в этом случае для каждого $m \geq n$ $f^m(y) = x$, или для каждого $n \geq 0$ $|y_{n+1}x| = |f(y_n)f(x)| < |y_nx|$. Во втором случае найдется $l = \lim\limits_{n\to\infty} |y_nx|$, т.к. последовательность строго убывает и ограничена снизу. Пусть $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к точке z подпоследовательность последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, которая существует, т.к. X компактно. Тогда $l = \lim\limits_{i\to\infty} |y_{n_i}x| = \lim\limits_{i\to\infty} |y_{n_i+1}x| = \lim\limits_{i\to\infty} |f(y_{n_i})x| = |f(z)x| = |zx|$. Но при $z \neq x$ $|f(z)x| = |f(z)f(x)| < |zx|$. Следовательно, $z = x$. $\odot$

Л.9.4. *Пусть X геодезическое пространство, $f : X \to X$ уменьшающее расстояния отображение и x точка локального минимума для функции ρ_f. Тогда x единственная неподвижная точка отображения f.*

$\odot$ Докажем методом от противного. Пусть $x \neq f(x)$ и $(xyf(x))$. Тогда из утверждения (i) леммы 9.2 получим, что верно неравенство $\rho_f(y) < \rho_f(x)$ или $|f(x)f(y)| = |xy|$. Если точка y достаточно близка к точке x, то первое неравенство приводит к противоречию с тем, что x точка локального минимума для функции ρ_f. А второе равенство приводит к противоречию с тем, что f уменьшает расстояния. Следовательно, $f(x) = x$. Если предположить, что существует еще одна неподвижная точка x' отображения f, то получаем противоечие, т.к. $|xx'| = |f(x)f(x')| < |xx'|$. $\odot$

Л.9.5. *Пусть $f : X \to X$ неуменьшающее расстояния отображение, x,$y \in X$ и $(xf(y)y)$. Тогда $\rho_f(x) \geq \rho_f(y)$. Причем, если имеет место равенство, то $|f(x)f(y)| = |xy|$ и $(f(x)xf(y))$.*

$\odot$ Используя условия, получим $\rho_f(x) = |xf(x)| \geq |f(y)f(x)| - |f(y)x| \geq |xy| - |f(y)x| = |yf(y)| = \rho_f(y) > 0$. Если $\rho_f(x) = \rho_f(y)$, то из третьего неравенства получим $|f(x)f(y)| = |xy| > 0$, а из второго неравенства получим $(f(x)xf(y))$. $\odot$

З.9.1. *Биекция* $f:(X,\rho_l)\to(Y,d_l)$, *сохраняющая длины кривых, является изометрией.*

10. Изометрии компактных пространств.

Пусть $M\subset(X,\rho)$ и $\varepsilon>0$. Множество $S\subset X$ называется *ε-сетью* для M, если для любого $x\in M$ $|xS|\le\varepsilon$.

Множество $S\subset(X,\rho)$ называется *ε-разделенным* для $\varepsilon>0$, для любых двух различных точек x, $y\in S$ $|xy|\ge\varepsilon$.

Т.10.1. *Пусть X — компактное метрическое пространство. Тогда*
(i) любое нерастягивающее сюрьективное отображение $f:X\to X$ является изометрией;
(ii) если отображение $f:X\to X$ не уменьшает расстояния, то f является изометрией.

$\odot$ (i) Пусть, напротив, найдутся такие точки p, $q\in X$, что $|f(p)f(q)|<|pq|$. Выберем такое $\varepsilon>0$, что $|f(p)f(q)|<|pq|-5\varepsilon$. Пусть n — такое натуральное число, что в X существует хотя бы одна ε-сеть мощности n. Рассмотрим множество $W\subset X^n$ всех ε-сетей в X, состоящих из n точек каждая. Это множество замкнуто в (X^n,ρ_∞), следовательно, оно компактно. Определим функцию $F:X^n\to\mathbb{R}$ равенством $F(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}|x_ix_j|$. Тогда найдется элемент $S=(x_1,\dots,x_n)\in W$, на котором липшицева функция F достигает минимума. Кроме того, $f(S)=(f(x_1),\dots,f(x_n))\in W$, т.к. f — нерастягивающая сюрьективная функция. Более того, $F(f(S))\le F(S)$, т.к. для всех i, $j\in\{1,\dots,n\}$ $|f(x_i)f(x_j)|\le|x_ix_j|$. Но $F(S)$ — минимум функции F на W. Следовательно, $F(f(S))=F(S)$ и для всех i, $j\in\{1,\dots,n\}$ $|f(x_i)f(x_j)|=|x_ix_j|$. С другой стороны, найдутся такие номера i, $j\in\{1,\dots,n\}$, что $|px_i|\le\varepsilon$ и $|qx_j|\le\varepsilon$. Для этих номеров мы имеем $|x_ix_j|\ge|pq|-|px_i|-|qx_j|\ge|pq|-2\varepsilon$ и $|f(x_i)f(x_j)|\le|f(p)f(q)|+|f(p)f(x_i)|+|f(x_j)f(q)|\le|f(p)f(q)|+2\varepsilon<|pq|-3\varepsilon$. Таким образом, $|f(x_i)f(x_j)|<|x_ix_j|$. Противоречие.
(ii) Выберем произвольно x, $y\in X$ и $\varepsilon>0$. Для любого $n\in\mathbb{N}$ положим $x_n=f^n(x)$, $y_n=f^n(y)$. Тогда найдутся сходящиеся подпоследовательности $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}\subset(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}\subset(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, т.к. про-

странство X компактно. Следовательно, найдется такой номер n_m, что $|x_{n_m}x_{n_{m+1}}| < \varepsilon/2$, $|y_{n_m}y_{n_{m+1}}| < \varepsilon/2$. Тогда для $k = n_{m+1} - n_m$ $|xx_k| \leq |x_1x_{k+1}| \leq \ldots \leq |x_{n_m}x_{n_{m+1}}| < \varepsilon/2$. Аналогично, $|yy_k| < \varepsilon/2$. Следовательно, $|xy| \leq |x_1y_1| \leq \ldots \leq |x_ky_k| \leq |x_kx| + |xy| + |yy_k| < |xy| + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, $|xy| = |x_1y_1| = |f(x)f(y)|$. Следовательно, f — изометрическое отображение и $f(X)$ — компакт. Докажем, что f сюръекция. Пусть, напротив, найдется $p \in X \backslash f(X)$. Тогда существует, такое $\varepsilon > 0$, что $B(p, \varepsilon) \cap f(X) = \oslash$, поскольку компакт $f(X)$ замкнут в компакте X. В силу задачи 10.1, найдется максимальное число n точек ε-разделенного множества в X и пусть $S \subset X$ — ε-разделенное множество из n точек. Тогда $f(S)$ — ε-разделенное множество из n точек, т.к. f — изометрическое отображение. С другой стороны, $|pf(S)| \geq |pf(X)| \geq \varepsilon$. Следовательно, $f(S) \cup \{p\}$ — ε-разделенное множество из $n+1$ точек. Получили противоречие. $\odot$

Пр.10.1. Простой путь $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t; \sin t)$ — изометрическое вложение, но не изометрия на образ.

Л.10.1. *Пусть (X, ρ) геодезическое пространство, $M \subset X$ открыто, $(M, d = \rho|_M)$ метрически связно. Тогда включение $i : (M, d_l) \to X$ является локальной изометрией.*

$\odot$ Пусть $x \in M$ и $B(x, 2r) \subset M$. В силу леммы 7.2, для любых y, $z \in B(x, r)$ найдется сегмент $[y, z]_X \subset B(x, 2r) \subset M$. Тогда $d_l(y, z) \leq L([y, z]) = |yz| = d(y, z)$. Следовательно, $d_l(y, z) = d(y, z)$ и $i : B(x, r) \to X$ — сохраняет расстояния. Таким образом, i локальная изометрия, поскольку $M \subset X$ открыто. $\odot$

Л.10.2. *Пусть $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ локальная изометрия. Тогда для любого $x \in X$ найдется такое положительное вещественное число r, что $f|_{B(x,r)} : B(x, r) \to B(f(x), r)$ изометрия и $\psi : X \to (0, \infty]$, $\psi(x) = r_x = \sup\{r : f|_{B(x,r)} : B(x, r) \to B(f(x), r)$ — изометрия $\}$ нерастягивающее отображение.*

$\odot$ Пусть $x \in X$. Тогда найдется такая окрестность $V(x)$, что $f|_{V(x)} : V(x) \to f(V(x))$ изометрия. Выберем $B(x, r) \subset V(x)$. Тогда $f|_{B(x,r)}$ изометрическое отображение и $B(f(x), r) \subset f(V(x))$. Кроме того, для любого $q \in B(f(x), r)$ найдется такое $p \in V(x)$, что $f(p) = q$. Но $|xp| = d(f(x), q) < r$. Следовательно, $p \in B(x, r)$ и $f|_{B(x,r)} : B(x, r) \to B(f(x), r)$

изометрия. Если найдется такое $x \in X$, что $r_x = \infty$, то $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ изометрия и для любого $x \in X$ $r_x = \infty$. Пусть для любого $x \in X$ $r_x < \infty$. Заметим, что для всех $r > 0$, $x' \in B(x, r)$ $B(x', r - |xx'|) \subset B(x, r)$. Следовательно, $r_x - r_{x'} \leq |xx'|$. $\odot$

Л.10.3.
(i) *Локальная изометрия сохраняет длины.*
(ii) *Если $f : (X, \rho_l) \to (Y, d_l)$ локальная изометрия, то f — нерастягивающее отображение.*
(iii) *Если $f : (X, \rho_l) \to (Y, d_l)$ локальная изометрия и гомеоморфизм, то f — изометрия.*

$\odot$ (i) Пусть $\gamma : [a, b] \to X$ путь. Из компактности отрезка $[a, b]$ следует, что найдется такое $r > 0$, что для каждого $t \in [a, b]$ $r < r_{\gamma(t)}$. В силу равномерной непрерывности отображения γ, найдется такое $\delta > 0$, что для всех t, $t' \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|t - t'| < \delta$, $|\gamma(t)\gamma(t')| < r$. Пусть $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ такое разбиение отрезка $[a, b]$, что $|\sigma| < \delta$. Тогда для каждого $i = \overline{0, n-1}$ $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset B(\gamma(t_i), r)$. Следовательно, $L(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) = L(f \circ \gamma|_{[t_i,t_{i+1}]})$ и, в силу аддитивности длины дуги, $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$.
(ii) Это следствие доказанного утверждения (i) и утверждения (ii) леммы 9.1.
(iii) Это следствие доказанного утверждения (ii). $\odot$

Пусть $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ непрерывное отображение, $\gamma : [a, b] \to Y$ путь, $x \in f^{-1}(\gamma(a))$. Путь $\gamma'[a, b] \to X$ называется *лифтом* (*поъемом*) *пути* γ с началом в точке x относительно отображения f, если $f \circ \gamma' = \gamma$ и $\gamma'(a) = x$.

З.10.1. *Если в метрическом пространстве существует* $(\varepsilon/3)$*-сеть из n точек, то ε-разделенное множество не может содержать более чем n точек. Максимальное* (*по числу точек*) *ε-разделенное множество в метрическом пространстве является ε-сетью.*

З.10.2. *Пусть* $(C(X), ||.||_\infty)$ *— банахово пространство непрерывных функций $X \to \mathbb{R}$ на компакте (X, ρ_l) с нормой $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Тогда отображение $E : (X, \rho_l) \to (C(X), ||.||_\infty)$, $E(x) = \rho(x, \cdot)$ является изометрическим вложением и изометрией на образ.*

11. Локальные изометрии. Фактор-пространство.

Т.11.1 (Обратный образ внутренней метрики, индуцированной локальным гомеоморфизмом). *Пусть X линейно связное хаусдорфово топологическое пространство, $f : X \to (Y, d_l)$ сюрьективный локальный гомеоморфизм. Тогда существует единственная внутренняя метрика на X, относительно которой f локальная изометрия.*

$\odot$ Для любого пути $\gamma : [0,1] \to X$ положим $L^*(\gamma) = L(f \circ \gamma)$, $\rho : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $|xy| = \inf\{L^*(\gamma) : \gamma_{x,y}$ — путь$\}$. Докажем, что ρ — метрика. Пусть x, y, $z \in X$. Тогда $|xy| = |yx| \geq 0$ и $|xz| \leq L^*(\gamma_{x,y} * \gamma'_{y,z}) = L^*(\gamma_{x,y}) + L^*(\gamma'_{y,z})$. Взяв нижние грани в правой части неравенства, получим $|xz| \leq |xy| + |yz|$. Пусть $x \neq y$. Выберем такие непересекающиеся окрестности $V(x)$, $V(y)$, что $f|_{V(x)} : V(x) \to f(V(x))$, $f|_{V(y)} : V(y) \to f(V(y))$ гомеоморфизмы. Пусть $B(f(x), r(x)) \subset f(V(x))$, $B(f(y), r(y)) \subset f(V(y))$. Тогда для любого пути $\gamma_{x,y}$ $L^*(\gamma) = L(f \circ \gamma) > r(x) + r(y) > 0$. Следовательно, $|xy| > 0$. Пусть $\gamma_{x,y} : [a, b] \to X$ —путь, $\gamma' = f \circ \gamma$, $s \in [a, b]$ и окрестность $V(\gamma(s))$ такая, что $f|_{V(\gamma(s))} : V(\gamma(s)) \to f(V(\gamma(s)))$ гомеоморфизм. Выберем такое $r(s) > 0$, что $B(\gamma'(s), r(s)) \subset f(V(\gamma(s)))$ и положим $V'(\gamma(s)) = V(\gamma(s)) \cap f^{-1}(B\gamma'(s), r(s))$. Тогда . $f|_{V'(\gamma(s))} : V'(\gamma(s)) \to B(\gamma'(s), r(s))$ гомеоморфизм. Покроем компакт $\gamma'([a, b])$ конечным набором открытых шаров $(B(\gamma'(s_i), r(s_i)/2))_{i=\overline{0,k}}$ с $s_i \in [a, b]$ $(i = \overline{0, k})$. В силу компактности отрезка $[a, b]$, найдется такое разбиение этого отрезка $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$, что для каждого $i = \overline{0, n-1}$ найдется $j \in \{0, \ldots, k\}$, для которого $\gamma'([t_i, t_{i+1}]) \subset B(\gamma'(s_j), r(s_j)/2)$. В силу леммы 7.2, для любого $i = \overline{0, n-1}$ найдется такой путь γ'_i, соединяющий $\gamma'(t_i)$ с $\gamma'(t_{i+1})$, что $L(\gamma'_i) < r(s_j)$ и принадлежащий открытому шару $B(\gamma'(s_j), r(s_j))$. Пусть для любого $i = \overline{0, n-1}$ $\gamma_i = (f|_{V'(\gamma(s_j))})^{-1}(\gamma'_i)$ (это лифт пути γ'_i) и $\gamma^*_{x,y} = \gamma_0 * \ldots * \gamma_{n-1}$. Тогда $L^*(\gamma_i) = L(\gamma'_i) < r(s_j)$ и $L(\gamma^*_{x,y}) < \infty$. Следовательно, $|xy| < \infty$ и ρ — метрика. Пусть $x \in X$. Тогда найдется такая окрестность $V(x)$, что $f|_{V(x)} : V(x) \to B(f(x), r(x))$ гомеоморфизм. Пусть $V'(x) = f^{-1}(B(f(x), r(x)/4)) \cap V(x)$, x_1, $x_2 \in V'(x)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2) \in B(f(x), r(x)/4)$. Тогда $|y_1 y_2| = \inf\{L(\gamma) : \gamma_{y_1,y_2}$ —путь$\}$. В силу леммы 7.2, найдем путь γ_{y_1,y_2}, чей образ содержится в $B(f(x), r(x)/2)$ и чья длина меньше чем $r(x)/2$. Пусть γ'_{x_1,x_2} лифт пути γ. Тогда $L^*(\gamma') = L(\gamma)$ и $|x_1 x_2| \leq d(y_1, y_2)$. $= \inf\{L(\gamma) : \gamma_{y_1,y_2}$ — путь$\}$. Пусть $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такая последовательность путей с концами x_1, x_2, что $L^*(\gamma_n) \to |x_1, x_2|$ $(n \to \infty)$. Кроме того, $d(y_1, y_2) \leq L^*(\gamma_n) \to |x_1 x_2|$ $(n \to \infty)$. Следовательно, $d(y_1, y_2) = |x_1, x_2|$ и f изометрически отображает $V'(x)$ на свой образ. Пусть x, $x' \in X$. В силу утверждения (i) леммы 10.3, для любого пути $\gamma_{x,y}$ $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$. Таким образом, $L(\gamma) = L^*(\gamma)$ и из определения ρ следует, что это внутренняя метрика. Пусть ρ' еще одна внутренняя метрика на X, относительно которой f локальная изометрия. Тогда $\rho'(x, x') = \inf\{L(\gamma) : \gamma_{x,x'}$ —путь$\} = \inf\{L(f \circ \gamma) : \gamma_{x,x'}$ —путь$\} = |xx'|$ $\odot$

Т.11.2. *Пусть $f : (X, \rho_l) \to (Y, d)$ локальная изометрия и пространство (X, ρ_l) полное. Тогда для любой геодезической (кратчайшей) $\gamma : [0, a] \to Y$ и любой такой точки x_0, что $f(x_0) = \gamma(0)$, существует единственная геодезическая (кратчайшая) $\hat{\gamma} : [0, a] \to X$, удовлетворяющая условиям: $\hat{\gamma}(0) = x_0$ и $f(\hat{\gamma}(t)) = \gamma(t)$.*

$\odot$ Пусть путь γ параметризован длиной дуги. Рассмотрим такой участок $[0, t)$ отрезка $[0, a]$, что путь $\gamma|[0, t)$ может быть лифтирован в X, т.е. найдется такой путь $\hat{\gamma}_t : [0, t) \to X$, что $f \circ \hat{\gamma} = \gamma|_{[t,0)}$ и $\hat{\gamma}(0) = x_0$. Множество таких участков не пусто, т.к. сужение f на достаточно малую окрестность точки x_0 является изометрией на образ. Пусть $[0, t_0)$ максимальный интервал, для которого такой лифт существует. Выберем такую сходящуюся к t_0 при $n \to \infty$ последовательность $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $t_n < t_0$. Тогда $(\hat{\gamma}_{t_0}(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ является последовательностью Коши, сходящейся к точке p, поскольку пространство X полное. Ясно, что точка p не зависит от выбора последовательности $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Кроме того, последовательность $(f \circ \hat{\gamma}_{t_0}(t_n) = \gamma(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к точке $\gamma(t_0)$ при $n \to \infty$, поэтому γ допускает лифт на отрезке $[0, t_0]$. Если $t_0 \neq a$, то поскольку f локальная изометрия, найдется такое $\varepsilon > 0$, что существует лифт пути $\gamma|[0, t_0 + \varepsilon)$. Получили противоречие с тем, что $[0, t_0)$ максимальный интервал. Покажем, что если $\gamma : [0, a] \to Y$ — сегмент, то $\hat{\gamma} : [0, a] \to X$ — сегмент. Пусть $L(\gamma) = |\gamma(0)\gamma(a)|$. Тогда $L(\hat{\gamma}) = |\gamma(0)\gamma(a)|$, поскольку локальная изометрия сохраняет длину пути. Но локальная изометрия является нерастягивающим отображением, поэтому $L(\hat{\gamma}) = |\gamma(0)\gamma(a)| \leq |\hat{\gamma}(0)\hat{\gamma}(a)| \leq L(\hat{\gamma})$ и $L(\hat{\gamma}) = |\hat{\gamma}(0)\hat{\gamma}(a)|$. $\odot$

Л.11.1. *Пусть $f : (X, \rho_l) \to (Y, d_l)$ локальная изометрия, $I = [a, b]$ $(I = \mathbb{R}, I = [0, \infty))$, $\gamma : I \to X$ — путь и $f \circ \gamma : I \to Y$ — параметризация сегмента (прямой, луча). Тогда $\gamma : I \to X$ — параметризация сегмента* (*прямой, луча*).

$\odot$ Пусть $I = [a, b]$. Тогда, в силу леммы 10.3, $|f(\gamma(a))f(\gamma(b))| \leq |\gamma(a)\gamma(b)| = L_X(\gamma) = L_Y(f \circ \gamma) = |f(\gamma(a))f(\gamma(b))|$. $\odot$

Пусть R — отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, ρ). Определим функцию $\rho_R : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $\rho_R(x, y) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^{k} |p_i q_i| : p_1 = x, p_{i+1} \sim q_i, q_k = y, i \in \{1, \ldots, k-1\}, k \in \mathbb{N}\}$, которая задает *фактор-полуметрику* на фактор-пространстве. Сопоставим полуметрическому пространству (X, ρ_R) метрическое пространство $(X/\rho_R, \rho_R)$, отождествляя точки, находящиеся на нулевом расстоянии (сохраняя то же самое обозначение ρ_R для этой метрики). Полученная метрика называется *фактор-метрикой* или *метрикой фактор-пространства.*

Пусть $(X_\alpha, \rho_{\alpha l})_{\alpha \in A}$ — семейство пространств с внутренней метрикой. *Внутренней метрикой дизъюнктного объединения пространств* называется функция $\rho_l : \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \times \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, удовлетворяющая двум условиям :

1. Если найдется такое $\alpha \in A$, что x, $y \in X_\alpha$, то $\rho_l(x, y) = \rho_{\alpha l}(x, y)$;
2. В противном случае $\rho_l(x, y) = \infty$.

Л.11.2 *Пусть $b : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ — произвольная функция, D — класс таких полуметрик ρ на X, что $\rho \leq b$. Тогда для любых x, $y \in X$ $\rho_m(x, y) = \sup\{|xy| : \rho \in D\}$ — максимальная полуметрика в D. Если b — конечная функция, то ρ_m — конечная полуметрика.*

$\odot$ Докажем лишь неравенство треугольника (остальные свойства легко проверить). Для любых x, y, $z \in X$ $\rho_m(x, y) \leq \sup\{|xz| + |zy| : \rho \in D\} \leq \sup\{|xz| : \rho \in D\} + \sup\{|zy| : \rho \in D\} = \rho_m(x, z) + \rho_m(z, y)$ $\odot$

С.11.1 *Пусть пространство X покрыто семейством $(X_\alpha, \rho_\alpha)_{\alpha \in A}$, где для каждого $\alpha \in A$ ρ_α — полуметрика. Класс D всех таких полуметрик ρ, что для каждого $\alpha \in A$ $\rho(x, y) \leq \rho_\alpha(x, y)$ для всех x, $y \in X$, содержит единственную полуметрику ρ_m, обладающую свойством : для каждого $\rho \in D$ для всех x, $y \in X$ $\rho(x, y) \leq \rho_m(x, y)$. Причем, если для каждого $\alpha \in A$ $\rho_\alpha = \rho_{\alpha l}$, то $\rho_m = \rho_{ml}$. Если, кроме того, X связно, для каждого $\alpha \in A$ X_α открыто и ρ_α — конечная, то ρ_m — конечная.*

$\odot$ Если ρ_α заданы не на всем X, то полагаем $\rho_\alpha(x, y) = \infty$ при $x \notin X_\alpha$

или $y \notin X_\alpha$. Применим лемму 11.2 к функции $b(x,y) = \inf\{\rho_\alpha(x,y) : \alpha \in A\}$. Пусть для каждого $\alpha \in A$ $\rho_\alpha = \rho_{\alpha l}$. Тогда $\rho_{ml} \leq \rho_{\alpha l} = \rho_\alpha$, т.к. $\rho_m \leq \rho_\alpha$ и $\rho_m \in D$. Следовательно, $\rho_m = \rho_{ml}$, т.к ρ_m максимальна. $\odot$

Т.11.2 *Пусть R — эквивалентность на (X,ρ) и для любых x, $y \in X$ $b_R(x,y) = 0$ при $x \sim y$, $b_R(x,y) = |xy|$ в остальных случаях. Тогда ρ_R — максимальная среди всех полуметрик $\hat\rho$, удовлетворяющих неравенству $\hat\rho \leq b_R$.*

$\odot$ Пусть D — класс всех таких полуметрик $\hat\rho$, что $\hat\rho \leq b_R$. Тогда $\rho_R \in D$ и достаточно доказать неравенство $\rho_R \geq \hat\rho$ для каждого $\hat\rho_R \in D$. Пусть $x = p_1$, $y = q_k$ и $b_R(q_i, p_{i+1}) = 0$ при $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Тогда $\hat\rho(x,y) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \hat\rho(p_i, q_i) + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \hat\rho(q_i, p_{i+1}) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} |p_i, q_i|$. Следовательно, $\hat\rho \leq \rho_R$ $\odot$

З.11.1. *ρ_R — полуметрика.*

З.11.2. *В метрическом пространстве (X,ρ) $\rho_R \leq \rho$.*

З.11.3. *Закончить доказательство следствия 11.1.*

12. Однородные пространства. Метрика Буземана на группе подобий метрического пространства.

Метрическое пространство называется *метрически однородным*, если для любых x, $y \in X$ найдется такая изометрия $I : X \to X$, что $I(x) = y$. Пространство, локально изометричное евклидову пространству называется *плоским метрическим пространством.*

Пусть G подгруппа группы $Iso(X, \rho_l)$. Введем на X отношение эквивалентности R_G следующим образом : $x \sim y$, если найдется такой элемент $g \in G$, что $x = g(y)$. Обозначим $X/G = X/R_G$.

Рассмотрим метрику $\hat\rho$ на X/G $\hat\rho(\hat x, \hat y) = \inf\{|xy| : x \in \hat x, y \in \hat y\}$ для $\hat x$, $\hat y \in X/G$. Учитывая, что класс эквивалентности точки $x \in X$ является орбитой этой точки $O(x) = \{g(x) : g \in G\}$, можно дать другое определение этой метрики

$\hat\rho(O(x), O(y)) = \inf\{|xg(y)| : g \in G\}$.

Л.12.1 *Имеет место равенство $\hat\rho = \rho_{R_G}$.*

$\odot$ Пусть $x = p_1$, $y = q_k \in X$. Из определения метрики ρ_{R_G} следует, что найдутся такие изометрии $g_i \in G$ при $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, что $g_i(p_{i+1}) = q_i$. Рассмотрим новую последовательность $\tilde{p}_1 = p_1 = x$, $\tilde{q}_1 = q_1$, $\tilde{p}_2 = g_1(p_2)$, $\tilde{q}_2 = g_1(q_2), \ldots$, $\tilde{p}_k = g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{k-1}(p_k)$, $\tilde{q}_k = g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{k-1}(q_k)$. Тогда $|p_i q_i| = |\tilde{p}_i \tilde{q}_i|$, т.к. $g_i \in G$ при $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{k} |p_i q_i| = \sum\limits_{i=1}^{k} |\tilde{p}_i \tilde{q}_i|$. С другой стороны, по выбору изометрий g_i $\tilde{q}_i = \tilde{p}_{i+1}$. Тогда $|x\tilde{q}_k| \leq \sum\limits_{i=1}^{k} |\tilde{p}_i \tilde{q}_i| + \sum\limits_{i=1}^{k-1} |\tilde{p}_{i+1} \tilde{q}_i| = \sum\limits_{i=1}^{k} |p_i q_i|$. Но $q_k = y$, следовательно, $\tilde{q}_k \in O(y)$. Таким образом, доказали неравенство $\hat{\rho} \leq \rho_{R_G}$. Пусть $y^* \in O(y)$, $x^* \in O(x)$. Тогда $y^* \sim y$, $x^* \sim x$. Положим $p_1 = q_1 = x$, $p_2 = x^*$, $q_2 = y^*$, $p_3 = q_3 = y$. Тогда длина этого пути равна $|x^* y^*|$. Таким образом, $\hat{\rho} \geq \rho_{R_G}$. $\odot$

Л.12.2 *Метрика $\hat{\rho}$ — внутренняя.*

$\odot$ Докажем в том случае, когда X — локально компактное, полное и все орбиты компактны. Общий случай получается из данного с помощью аппроксимации. Пусть $\hat{x}$, $\hat{y} \in X/G$. Выберем такие $x \in \hat{x}$, $y \in \hat{y}$, что $\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = |xy|$. Это возможно, поскольку орбиты компактны. Пусть точка $z \in X$ такая, что $|xz| = |zy| = |xy|/2$. Тогда $\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{z}) \leq |xz| = |xy|/2 = \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y})/2$. Аналогично, $\hat{\rho}(\hat{y}, \hat{z}) \leq \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y})/2$. Из неравенства треугольника следует, что эти неравенства являются равенствами. Следовательно, $\hat{z}$ — середина между $\hat{x}$, $\hat{y} \in X/G$. $\odot$

Пр.12.1 Если $G = \{g \in Iso(\mathbb{R}^2) : g(x; y) = (x + k; y + l),\ k,\ l \in \mathbb{N}\}$, то фактор-пространство $\mathbb{R}^2/G$ является плоским тором. Если $G = \{g \in Iso(\mathbb{R}^2) : g = id \vee g(x; y) = (x; -y)\}$, то фактор-пространство $\mathbb{R}^2/G$ является полуплоскостью.

Пусть $p \in (X, \rho)$ и $Sim(X, Y)$ — множество всех подобий метрического пространства X на метрическое пространство (Y, d). *Метрика Буземана* δ_p на множестве $Sim(X, Y)$ определяется формулой $\delta_p(f, \varphi) = \sup\{d(f(x), \varphi(x))e^{-|px|} : x \in X\}$ для всех f, $\varphi \in Sim(X, Y)$.

Неподвижная точка собственного подобия называется *центром подобия*, а множество всех центров подобий пространства X обозначается $Cen(X)$.

Л.12.3 *Пусть p, $q \in (X, \rho)$ и $\mathbb{R}_+^*$ — группа положительных вещественных чисел со стандартной операцией умножения. Тогда верны сле-*

дующие утверждения.
(i) Для каждого δ_p — метрика на множестве $Sim(X,Y)$;
(ii) метрики δ_p, δ_q липшицево эквивалентны на $Sim(X,Y)$;
(iii) отображение $\sigma : (Sim(X), \circ) \to \mathbb{R}_+^*$, $\sigma(f) = \sigma_f$ — непрерывный гомоморфизм, ядро которого есть группа изометрий;
(iv) для любых f, $\varphi \in Sim(X,Y)$, $\theta \in Sim(Y)$, $\psi \in Iso(X)$ имеют место равенства $\delta_p(f \circ \psi, \varphi \circ \psi) = \delta_{\psi(p)}(f, \varphi)$, $\delta_p(\theta \circ f, \theta \circ \varphi) = \sigma_\theta \delta_p(f, \varphi)$;
(v) множества $Cen(X)$, $X \backslash Cen(X)$ инвариантны относительно действия группы $Sim(X)$ на X;
(vi) если группа $Sim(X)$ действует транзитивно на полном метрическом пространстве X, то и группа $Iso(X)$ действует транзитивно на пространстве X.

$\odot$

(i) Для всех f, $\varphi \in Sim(X,Y)$ из неравенств $\delta_p(f,\varphi) \leq \sup\{(d(f(x), f(p)) + d(f(p), \varphi(p)) + d(\varphi(p), \varphi(x)))e^{-|px|} : x \in X\} \leq \sigma_f + d(f(p), \varphi(p)) + \sigma_\varphi$ следует конечность величины $\delta_p(f,\varphi)$. Очевидно, что $\delta_p(f,\varphi) = \delta_p(\varphi, f) \geq 0$ для всех f, $\varphi \in Sim(X,Y)$. Пусть $f \neq \varphi$. Тогда найдется такая точка $x_0 \in X$, что $f(x_0) \neq \varphi(x_0)$ и $\delta_p(f,\varphi) \geq d(f(x_0), \varphi(x_0))e^{-|x_0 p|} > 0$. Докажем неравенство треугольника $\delta_p(f,\varphi) \leq \sup\{(d(f(x), h(x)) + d(h(x), \varphi(x))e^{-|px|} : x \in X\} \leq \delta_p(f,h) + \delta_p(h,\varphi)$ для всех f, φ, $h \in Sim(X,Y)$.
(ii) Это следует из очевидных неравенств $\delta_p(f,\varphi)e^{-|pq|} \leq \delta_q(f,\varphi) \leq \delta_p(f,\varphi)e^{|pq|}$.
(iii) Пусть x, $y \in X$ различны, f, $\varphi \in Sim(X,Y)$ произвольные. Тогда $d(f \circ \varphi(x), f \circ \varphi(y)) = \sigma_f \sigma_\varphi |xy|$. Следовательно, $\sigma(f \circ \varphi) = \sigma(f)\sigma(\varphi)$. Последнее утверждение очевидно. Докажем непрерывность σ. Пусть $\delta_p(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$, где f, $f_n \in Sim(X,Y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $x \in X$ $d(f_n(x), f(x)) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\sigma(f_n)|xy| = d(f_n(x), f_n(y)) \to d(f(x), f(y)) = \sigma(f)|xy|$ и $\sigma(f_n) \to \sigma(f)$ при $x \neq y$, $n \to \infty$.
(iv) Доказательство очевидно.
(v) Пусть $x \in Cen(X)$, т.е. найдется собственное подобие f такое, что $f(x) = x$. Тогда для каждого $\psi \in Sim(X)$ $\sigma(\psi \circ f \circ \psi^{-1}) = \sigma(f)$. Следовательно, $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ собственное подобие. Кроме того, $\psi \circ f \circ \psi^{-1}(\psi(x)) = \psi(x)$. Таким образом, $\psi(x) \in Cen(X)$.
(vi) Пусть x, $y \in X$. Тогда найдется такое подобие $f \in Sim(X)$, что

$f(x) = y$. Рассмотрим нетривиальный случай, когда подобие f собственное. Тогда, в силу полноты пространства, найдется такая точка $z \in X$, что $f(z) = z$. Кроме того, найдется такое подобие g, что $g(x) = z$. Тогда $\sigma(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g) = 1$ и $f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g(x) = y$. $\odot$

Пусть $Const(X, Y)$ — множество постоянных отображений из X в Y. Приведем без доказательства некоторые результаты о группе подобий с метрикой Буземана.

Т.12.1. *Если пространства (X, ρ), (Y, d) — полные, то пространства $(Sim(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$, $(Iso(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$ — полные.*

Т.12.2. *Если пространство (X, ρ) — собственное, то топология пространства $(Sim(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$ совпадает как с топологией поточечной сходимости, так и с компактно-открытой топологией.*

Т.12.3. *Если пространства (X, ρ), (Y, d) — собственные, то пространство $(Sim(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$ — собственное. Если кроме того, пространство (X, ρ) — компактно, пространство $(Sim(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$ — компактно.*

Т.12.4. *$(Sim(X), \delta_p)$ — топологическая группа, действующая непрерывно на пространстве (X, ρ).*

Т.12.5. *Пусть пространство (X, ρ) — полное. Тогда верны следующие утверждения.*
(i) Если $Cen(X) = X$, то $\overline{Sim(X)} = Sim(X) \cup Const(X, X)$
(замыкание выполняется в пространстве $(Lip(X, Y), \delta_p)$);
(ii) Если $Cen(X) \neq \oslash$, X, то $Cen(X) \subset \partial(Cen(X))$ и $\overline{Sim(X)} = Sim(X) \cup Const(X, \partial(Cen(X)))$;
(iii) Если $Cen(X) = \oslash$, то $\overline{Sim(X)} = Sim(X) = Iso(X)$.

З.12.1. *Собственное подобие полного метрического пространства на себя обладает единственным центром подобия.*

З.12.2. *Если метрическое пространство X ограничено, то $Sim(X) = Iso(X)$.*

З.12.3. *Докажите свойство (iv) леммы 12.3.*

З.12.4. *Докажите, что δ_p является метрикой на множестве $Lip(X, Y)$ всех липшицевых отображений из метрического простран-*

ства (X,ρ) в метрическое пространство (Y,d).

13. Отклонение и метрика Хаусдорфа.

Обозначим $B(X)$ ($B[X]$) множество всех непустых (замкнутых) ограниченных подмножеств метрического пространства (X,ρ).

Отклонением по Хаусдорфу множества $M \in B(X)$ от непустого множества $W \subset X$ называется число $\beta(M,W) = \sup\{|xW| : x \in M\}$.

Л.13.1. *Пусть M, $H \in B(X)$, $\oslash \neq W \subset X$. Тогда верны следующие утверждения.*
(i) $\beta(M,W) \le \beta(M,H) + \beta(H,W)$;
(ii) $\beta(M,H) = \inf\{r : M \subset B(H,r)\}$, где $B(H,r) = \cup\{B(x,r) : x \in H\}$ — обобщенный шар;
(iii) Если для каждого $\alpha \in A$ $M_\alpha \in B(X)$ и $M = \bigcup\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$, то

$$\beta(M,H) = \sup\{\beta(M_\alpha,H) : \alpha \in A\}$$

$\odot$ (i) Для каждого $\varepsilon > 0$ для любого $y \in M$ найдется такое $z \in H$, что $|yz| \le |yH| + \varepsilon$. Тогда $|yW| \le |yz| + |zW| \le |yz| + \beta(H,W) \le |yH| + \varepsilon + \beta(H,W) \le \beta(M,H) + \beta(H,W) + \varepsilon$. Переходя в полученном неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $|yz| \le \beta(M,H) + \beta(H,W)$. Осталось взять верхнюю грань в левой части последнего неравенства.
(ii) Пусть $R = \inf\{r : M \subset B(H,r)\}$ и число $r > 0$ такое, что $M \subset B(H,r)$. Тогда для каждого $y \in M$ найдется такая точка $x \in H$, что $|xy| < r$ и, следовательно, $|yH| < r$. Взяв верхнюю грань в левой части установленного неравенства, получим $\beta(M,H) \le r$. Теперь в правой части возьмем нижнюю грань. Тогда получим $\beta(M,H) \le R$. Предположим, что равенства нет. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\beta(M,H)+\varepsilon < R$. Следовательно, для каждого $y \in M$ найдется такая точка $x \in H$, что $|yx| < |yH|+\varepsilon \le \beta(M,H)+\varepsilon$. Тогда $y \in B(x,\beta(M,H)+\varepsilon) \subset B(H,\beta(M,H)+\varepsilon)$. В силу произвольности $y \in M$, $M \subset B(H,\beta(M,H)+\varepsilon)$. Таким образом, наше предположение приводит к противоречию.
(iii) Пусть $x \in M$. Тогда найдется такое $\alpha \in A$, что $x \in M_\alpha$. Следовательно, $|xH| \le \beta(M_\alpha,H) \le \sup\{\beta(M_\alpha,H) : \alpha \in A\}$. Возьмем в левой части полученного неравенства верхнюю грань. Тогда получим $\beta(M,H) \le \sup\{\beta(M_\alpha,H) : \alpha \in A\}$. Неравенство в другую сторону очевидно. $\odot$

Расстоянием по Хаусдорфу между множествами M, $W \in B(X)$ называется число

$\alpha(M,W) = \max\{\beta(M,W), \beta(W,M)\}$.

Л.13.2. *Пусть M, $W \in B(X)$. Тогда верны следующие утверждения.*
(i) α *— псевдометрика* (метрика) на множестве $B(X)$ ($B[X]$);
(ii) $\alpha(M,W) = \inf\{r : M \subset B(W,r),\ W \subset B(M,r)\}$;
(iii) $\alpha(M,W) = \sup\{||xM| - |xW|| : x \in X\}$.

$\odot$ (i) Это следует из определения, утверждения (i) леммы 13.1 и задачи 13.1.
(ii) Это следует из определения и утверждения (ii) леммы 13.1.
(iii) $\sup\{||xM| - |xW|| : x \in X\} \geq \max\{\sup\{||xM| - |xW|| : x \in M\}, \sup\{||xM| - |xW|| : x \in W\}\} = \alpha(M,W)$. Докажем неравенство в другую сторону. Для каждого $\varepsilon > 0$ для любого $x \in X$ найдутся такие $m_x \in M$, $w_x \in W$, что $|xm_x| \leq |xM| + \varepsilon$, $|xw_x| \leq |xW| + \varepsilon$. Тогда $|xW| \leq |xm_x| + |m_xW| \leq |xM| + |m_xW| + \varepsilon \leq |xM| + \beta(M,W) + \varepsilon$. Аналогично получим неравенство $|xM| \leq |xW| + \beta(W,M) + \varepsilon$. Следовательно, $||xM| - |xW|| \leq \beta(W,M) + \varepsilon$. Возъмем в левой части полученного неравенства верхнюю грань. Тогда получим $\sup\{||xM| - |xW|| : x \in X\} \leq \beta(W,M) + \varepsilon$. Осталось перейти в правой части неравенства к пределу при $\varepsilon \to 0$. $\odot$

Л.13.3. *Пусть X банахово пространство M, W, $M_1, \ldots, M_n$, $W_1, \ldots, W_n \in B(X)$. Тогда верны следующие утверждения.*
(i) $\alpha(M_1 + \ldots + M_n, W_1 + \ldots + W_n) \leq \alpha(M_1, W_1) + \ldots + \alpha(M_n, W_n)$;
(ii) $\beta(\overline{C(M)}, W) \leq \beta(M,W)$, $\alpha(\overline{C(M)}, \overline{C(W)}) \leq \alpha(M,W)$.

$\odot$ (i) Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдутся такие $x_i \in M_i$, $y_i \in W_i$, что $\alpha(M_1 + \ldots + M_n, W_1 + \ldots + W_n) \leq \rho(x_1 + \ldots + x_n, W_1, \ldots, W_n) + \varepsilon$, $\alpha(M_1 + \ldots + M_n, W_1 + \ldots + W_n) \leq \rho(y_1 + \ldots + y_n, M_1 + \ldots + M_n) + \varepsilon$. Кроме того, для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдутся такие $z_i \in W_i$, что $||x_i - z_i|| < \alpha(M_i, W_i) + \varepsilon/n$. Тогда $\alpha(M_1 + \ldots + M_n, W_1 + \ldots + W_n) - \varepsilon \leq \rho(x_1 + \ldots + x_n, W_1, \ldots, W_n) \leq ||x_1 + \ldots + x_n - (z_1 + \ldots + z_n)|| \leq ||x_1 - z_1|| + \ldots + ||x_n - z_n|| \leq \alpha(M_1, W_1) + \ldots + \alpha(M_n, W_n) + \varepsilon$. Осталось перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.
(ii) Пусть $x \in C_1(M)$. Тогда найдутся такие $\lambda \in [0,1]$, y, $z \in M$, что $x = (1-\lambda)y + \lambda z$. Кроме того, $|xW| \leq \inf\{(1-\lambda)|yw| + \lambda|zw| : w \in$

$W\} \le \beta(M,W)$. Следовательно, $\beta(C_1(M),W) \le \beta(M,W)$. По индукции доказывается, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\beta(C_n(M),W) \le \beta(M,W)$. Пусть $x \in C(M)$. Тогда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $x \in C_n(M)$. Следовательно, $|xW| \le \beta(M,W)$. Возъмем в левой части полученного неравенства верхнюю грань. Тогда получим $\beta(\overline{C(M)},W) = \beta(C(M),W) \le \beta(M,W)$. Второе неравенство следует из доказанного и определения метрики Хаусдорфа. $\odot$

Т.13.1. *Если пространство (X,ρ) — полное, то пространство $(B[X],\alpha)$ — полное.*

$\odot$ Пусть $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в $B[X]$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\alpha(M_n,M_m) < \varepsilon$ для всех m, $n \ge n_0$. Рассмотрим множество всех таких точек $x \in X$, что для любой окрестности U точки x $U \cap M_n \ne \oslash$ для бесконечно многих $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\alpha(M_n,M) \to 0$ при $n \to \infty$. Найдется такое $m \ge n_0$, что $B(x,\varepsilon) \cap M_m \ne \oslash$, т.е. найдется такая точка $y \in M_m$, что $|xy| < \varepsilon$. Кроме того, $|yM_n| < \varepsilon$. Тогда $|xM_n| \le |xy| + |yM_n| < 2\varepsilon$. Осталось доказать, что для каждого $x \in M_n$ $|xM| < 2\varepsilon$. Положим $n_1 = n$ и для каждого $k > 1$ выберем такое число $n_k \in \mathbb{N}$, что $n_k > n_{k+1}$ и $\alpha(M_l,M_s) < \varepsilon/2^k$ для любых l, $s \ge n_k$. Пусть $x_1 = x$. В силу того, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ $\alpha(M_{n_k},M_{n_{k+1}}) < \varepsilon/2^k$, найдется точка $x_{k+1} \in M_{n_{k+1}}$ такая, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ $|x_kx_{k+1}| < \varepsilon/2^k$. Последовательность $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ фундаментальная, т.к. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|x_kx_{k+1}| < 2\varepsilon$. Следовательно, она сходится к некоторой точке $y \in X$. Тогда $|xM| \le |xy| = \lim\limits_{k\to\infty}|xx_k| \le \sum\limits_{k=0}^{\infty}|x_kx_{k+1}| < 2\varepsilon$. $\odot$

Т.13.2. (Бляшке) *Если пространство (X,ρ) — компактное, то пространство $(B[X],\alpha)$ — компактное.*

$\odot$ Учитывая теорему 13.1, достаточно доказать, что $(B[X],\alpha)$ вполне ограничено. Пусть S конечная ε-сеть в X и $M \in B[X]$. Рассмотрим множество $S(M) = \{x \in S : |xM| \le \varepsilon\} \in B[X]$. Пусть $y \in M$. Тогда найдется такая точка $x \in S$, что $|xy| \le \varepsilon$. Кроме того, $x \in S(M)$, т.к. $|xM| \le |xy| \le \varepsilon$. Следовательно, для каждого $y \in M$ $|yS(M)| \le \varepsilon$. Тогда $\alpha(M,S(M)) \le \varepsilon$, поскольку по определению $S(M)$ для каждого $x \in S(M)$ $|xM| \le \varepsilon$. В силу произвольности $M \in B[X]$, множество $B[S]$ является ε-сетью в $B[X]$. $\odot$

З.13.1. *Пусть* $M \in B(X)$, $\oslash \neq W \subset X$. $\beta(M, W) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $M \subset \overline{W}$.

З.13.2. *Если* $\beta(M, H) < r$, *то* $M \subset B(H, r)$.

З.13.3. *Если для каждого* $\alpha \in A$ $H_\alpha \in B(X)$ *и* $\bigcup\limits_{\alpha \in A} H_\alpha \subset H$, *то* $\beta(M, H) \leq \inf\{\beta(M, H_\alpha) : \alpha \in A\}$.

З.13.4. *Пусть* X *банахово пространство,* $a \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\beta(aM, aW) = |a|\beta(M, W)$, $\alpha(aM, aW) = |a|\alpha(M, W)$.

З.13.5. *Пусть* M, $W \in B(X)$. $\alpha(M, W) = \inf\{r : M \subset N_r(W), W \subset N_r(M)\}$, *где* $N_r(M) = \{x \in X : \exists y \in M(|yx| \leq r)\}$.

14. Расстояние по Громову–Хаусдорфу. Метрика Буземана.

Расстоянием по Громову–Хаусдорфу между метрическими пространствами (X, ρ), (Y, d) называется величина
$d_{GH}(X, Y) = \inf\{r :$ существуют метрическое пространство (Z, d') и его подпространства X', Y', изометричные X, Y соответственно такие, что $\alpha(X', Y') < r\}$. Причем допускается, что $\alpha(X', Y')$ и $d_{GH}(X, Y)$ могут принимать бесконечные значения.

Можно доказать, что $d_{GH}(X, Y) = \inf\{\alpha(X, Y)\}$, где инфимум берется по всем метрикам на $X \cup Y$, продолжающим метрики X и Y.

Л.14.1. *Функция* d_{GH} *удовлетворяет неравенству треугольника.*

$\odot$ Пусть метрики ρ_{12}, ρ_{23} пространств $X_1 \cup X_2$, $X_2 \cup X_3$ такие, что их сужения на пространства X_1, X_2 и X_3 соответственно, совпадают с исходными метриками этих пространств. Пусть $\rho_{13}(x_1, x_3) = \inf\{\rho_{12}(x_1, x_2) + \rho_{23}(x_2, x_3) : x_2 \in X_2\}$. Нетрудно проверить, что вместе с исходными метриками на X_1, X_3 ρ_{13} определяет метрику на $X_1 \cup X_3$. Кроме того, $\alpha(X_1, X_3) \leq \alpha(X_1, X_2) + \alpha(X_2, X_3)$, где $\alpha(X_i, X_j)$ соответствует метрике α_{ij} при i, $j \in \{1, 2, 3\}$. $\odot$

Множество $R \subset X \times Y$ называется *соответствием* между множествами X и Y, если для каждой точки $x \in X$ найдется такая точка $y \in Y$, что $(x, y) \in R$, и для каждой точки $\in Y$ найдется такая точка $x \in X$, что $(x, y) \in R$

Искажением $disR$ соответствия R между метрическими пространствами (X,ρ), (Y,d) называется величина $disR = \sup\{||xx'| - d(y,y')| : (x,y),\ (x',y') \in R\}$.

Т.14.1. *Для любых метрических пространств X и Y имеет место равенство*
$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\{disR : R\}$, *где инфимум берется по всем соответствиям R между X и Y, т.е. $d_{GH}(X,Y) = \inf\{r :$ существует соответствие R между X и Y с $disR < 2r\}$.*

$\odot$ Докажем, что для любого $r > d_{GH}(X,Y)$ найдется соответствие R с $disR < 2r$. Можно считать, что X и Y подпространства некоторого пространства Z и $\alpha(X,Y) < r$ в Z, т.к. $d_{GH}(X,Y) < r$. Пусть $R = \{(x,y) \in X \times Y : \rho_Z(x,y) < r\}$. Это соответствие, поскольку $\alpha(X,Y) < r$. Следовательно, для любых (x,y), $(x',y') \in R$ $|d_Z(x,x') - d_Z(y,y')| \le d_Z(x,y) + d_Z(x',y') < 2r$. Докажем теперь, что для любого соответствия R $d_{GH}(X,Y) \le \frac{1}{2}\inf\{disR : R\}$ Пусть $disR = 2r$. Достаточно доказать, что на дизъюнктном объединении $X \cup Y$ найдется такая полуметрика d, что $d|_{X\times X} = d_X$, $d|_{Y\times Y} = d_Y$ и $\alpha(X,Y) \le r$ в $(X \cup Y, d)$. Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ положим $d(x,y) = \inf\{d_X(x,x') + r + d_Y(y',y) : (x',y') \in R\}$. Расстояния внутри X, Y прежние — d_X и d_Y соответственно. Теперь нетрудно проверить неравенство треугольника и верность неравенства $\alpha(X,Y) < r$. $\odot$

Пусть $\varepsilon > 0$. Отображение $f : (X,\rho) \to (Y,d)$ называется *ε-изометрией*, если $disf = \sup\{|d(f(x),f(x')) - |xx'|| : x,\ x' \in X\} \le \varepsilon$ и образ $f(X)$ является ε-сетью в Y.

С.14.1. *Пусть (X,ρ), (Y,d) метрические пространства и $\varepsilon > 0$. Тогда*
(i) если $d_{GH}(X,Y) < \varepsilon$, то найдется 2ε-изометрия из X в Y;
(ii) если найдется ε-изометрия из X в Y, то $d_{GH}(X,Y) < 2\varepsilon$.

$\odot$
(i) Пусть R — соответствие между X и Y с $disR < 2\varepsilon$. Для каждой точки $x \in X$ выберем такую точку $f(x) \in Y$, что $(x, f(x)) \in R$. Очевидно, полученное отображение обладает свойством $dilf \le dilR < 2\varepsilon$. Для точки $y \in Y$ рассмотрим такую точку, что $(x,y) \in R$. Точки y, $f(x)$ находятся в соответствии с x. Тогда $d(y, f(x)) \le |xx| + disR < 2\varepsilon$. Следовательно,

$d(y, f(X)) < 2\varepsilon$.
(ii) Пусть для ε-изометрии f $R = \{(x, y) \in X \times Y : d(y, f(x)) \leq \varepsilon\}$. Множество R является соответствием, т.к. $f(X)$ является ε-сетью в Y. Если (x, y), $(x', y') \in R$, то $|d(y, y') - |xx'|| \leq |d(f(x), f(x')) - |xx'|| + d(y, f(x)) + d(y', f(x')) \leq 3\varepsilon$. Следовательно, $disR \leq 3\varepsilon$, а по предыдущей теореме $d_{GH}(X, Y) \leq \frac{3}{2}\varepsilon < 2\varepsilon$. $\odot$

Т.14.2. d_{GH} *является конечной метрикой на пространстве классов изометричных компактных пространств.*

$\odot$ Осталось доказать, что из равенства $d_{GH}(X, Y) = 0$ следует изометричность компактных пространств X и Y. В силу следствия 14.1, найдется такая последовательность отображений $f_n : X \to Y$, что $disf_n \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем счетное всюду плотное множество $S \subset X$. Используя канторов диагональный процесс, можно найти такую подпоследовательность (f_{n_k}) последовательности (f_n), что для каждой точки $x \in S$ последовательность $(f_{n_k}(x))$ сходится в Y. Не умаляя общности, можно предположить, что это выполняется для исходной последовательности. Пусть отображение $f : S \to Y$ является пределом последовательности отображений (f_n), т.е. для каждого $x \in S$ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. В силу того, что для всех x, $x' \in S$ $|d(f_n(x), f_n(x')) - |xx'|| \leq disf_n \to 0$ при $n \to \infty$, отображение f сохраняет расстояния. Используя теорему 5.1, продолжим f до сохраняющего расстояния отображения из всего X в Y. Но существует аналогичное сохраняющее расстояния из Y в X. Следовательно, X и Y изометричны. $\odot$

Пусть $p \in (X, \rho)$. *Метрикой Буземана* на множестве $CL_0(X)$ всех непустых замкнутых подмножеств пространства X называется функция $\delta_p : CL_0(X) \times CL_0(X) \to \mathbb{R}_+$, $\delta_p(M, W) = \sup\{||xM| - |xW||e^{-|px|} : x \in X\}$.

Л.14.1.
(i) *Для любого* $p \in X$ δ_p *— метрика на множестве* $CL_0(X)$;
(ii) *для любых* p, $q \in X$ *метрики* δ_p, δ_q *липшицево эквивалентны.*

$\odot$ Из неравенств $\delta_p(M, W) = \sup\{||xM| - |xW||e^{-|px|} : x \in X\} \leq \sup\{(|xM| + |xW|)e^{-|px|} : x \in X\} \leq \sup\{(|pM| + |pW| + 2|px|)e^{-|px|} : x \in X\} \leq |pM| + |pW| + 2$ следует, что величина $\delta_p(M, W)$ конечная. Докажем неравенство треугольника (другие аксиомы определения метрики легко

проверяются). Пусть $\varepsilon > 0$, M, W, $L \in CL_0(X)$. Тогда найдется $z \in X$ $\delta_p(M,W) - \varepsilon \le ||zM| - |zW||e^{-|pz|} \le (||zM| - |zL|| + ||zL| - |zW||)e^{-|pz|} \le \delta_p(M,L) + \delta_p(L,W)$. Осталось перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.
(ii) Используя очевидное неравенство $e^{-|px|} \le e^{-|qx|}e^{|pq|}$, получим требуемые неравенства $\delta_p(M,W)e^{-|pq|} \le \delta_q(M,W) \le \delta_p(M,W)e^{|pq|}$. $\odot$

Доказательство следующей сложной теоремы содержится в [3].

T.14.1. *Если пространство* (X,ρ) *— собственное, то пространство* $(CL_0(X),\delta_p)$ *— собственное.*

15. Верхний угол. Угол. Пространство направлений. Конус.

Треугольник $\triangle xyz$ в метрическом пространстве (X,ρ) состоит из трех точек (вершин) x, y и z, соединенных тремя кратчайшими (сторонами): $[x,y]$, $[y,z]$ и $[z,x]$, с длинами $|xy|$, $|yz|$ и $|zx|$ соответственно.

Пусть M_k^2 евклидова плоскость при $k=0$, плоскость Лобачевского при $k<0$ и двумерная открытая полусфера при $k>0$, радиуса $1/\sqrt{k}$.

Для каждого треугольника $\triangle xyz$ в X построим в плоскости M_k^2 *треугольник сравнения* $\triangle\overline{xyz}$ с теми же длинами сторон (при $k>0$ всегда считаем, что периметр $\triangle xyz$ меньше, чем $2\pi/\sqrt{k}$.), т.е. $|xy| = |\overline{xy}|$, $|yz| = |\overline{yz}|$ и $|zx| = |\overline{zy}|$. *Угол сравнения* $\tilde{\measuredangle}xyz$ (или $\tilde{\measuredangle}(x,y,z)$) определяется равенством

$$\tilde{\measuredangle}xyz = \arccos\frac{|xy|^2 + |yz|^2 - |zx|^2}{2|xy||yz|}.$$

Пусть $\gamma : [0,\varepsilon) \to X$, $\gamma' : [0,\varepsilon) \to X$ — пути в пространстве (X,ρ_l), исходящие из одной точки $p = \gamma(0) = \gamma'(0)$. *Верхний угол* $\measuredangle_{super}(\gamma,\gamma')$ между γ и γ' определяется равенством

$$\measuredangle_{super}(\gamma,\gamma') = \limsup_{s,t\to 0} \tilde{\measuredangle}(\gamma(s),p,\gamma'(t)),$$

а *угол* $\measuredangle(\gamma,\gamma')$ между γ и γ' определяется равенством

$$\measuredangle(\gamma,\gamma') = \lim_{s,t\to 0} \tilde{\measuredangle}(\gamma(s),p,\gamma'(t)),$$

если только этот предел существует.

Доказательства следующих утверждений можно найти в [8], [2].

Л.15.1.
(*i*) *Каждая кратчайшая образует нулевой угол сама с собой;*
(*ii*) *если две кратчайшие* $[x, y]$, $[y, z]$ *таковы, что их произведение есть кратчайшая* $[x, z]$, *то угол между* $[y, x]$ *и* $[y, z]$ *равен* π.

Т.15.1. *Пусть три кривые* γ_1, γ_2 *и* γ_3 *исходят из одной точки* p. *Тогда*
(*i*) *если существуют углы* $\alpha_1 = \measuredangle(\gamma_2, \gamma_3)$, $\alpha_2 = \measuredangle(\gamma_1, \gamma_3)$, $\alpha_3 = \measuredangle(\gamma_1, \gamma_2)$, *то они удовлетворяют следующему неравенству треугольника* $\alpha_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2$;
(*ii*) *верно неравенство* $\measuredangle_{super}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \measuredangle_{super}(\gamma_2, \gamma_3) + \measuredangle_{super}(\gamma_1, \gamma_3)$;
(*iii*) *если* z *— внутренняя точка кратчайшей* $[x, y]$ *и углы* $\measuredangle uzx$, $\measuredangle uzy$ *существуют, то их сумма не меньше, чем* π.

Говорят, что кривая γ (с началом в p) *имеет направление* в точке p, если $\measuredangle_{super}(\gamma, \gamma) = 0$. Две кривые γ_1, γ_2 *имеют одинаковое направление* в точке p, если угол $\measuredangle_{super}(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ (заметим, что в силу (*ii*) теоремы 15.1, в этом случае кривые γ_1, γ_2 имеют в точке p направление).

Две кривые из множества всех, имеющих направление в точке p, назовем эквивалентными, если они имеют одинаковое направление. Нетрудно проверить, что это действительно отношение эквивалентности на данном множестве. Класс эквивалентных кривых называется *направлением.*

Т.15.2. *Множество направлений в данной точке образует метрическое пространство, в котором расстояние между двумя направлениями определяется верхним углом между ними.*

Конус $Con(X)$ над метрическим пространством (X, ρ) — это результат склеивания в одну точку всех точек слоя $X \times \{0\}$ в прямом произведении $X \times [0, \infty)$. Эта точка называется *вершиной конуса.*

Расстояние $\rho_c(a, b)$ между точками $a = (x, t)$, $b = (y, s)$ на конусе $Con(X)$ задается следующим образом $\rho_c(a, b) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts\cos(|xy|)}$ при $|xy| \leq \pi$, $\rho_c(a, b) = t + s$ при $|xy| \geq \pi$.

Т.15.3.
(*i*) $(Con(X), \rho_c)$ *— метрическое пространство.*
(*ii*) *Метрика* ρ_c *на* $Con(X)$ *— внутренняя* (строго внутренняя) тогда

и только тогда, когда метрика ρ — внутренняя (строго внутренняя) на расстояниях меньших, чем π. Последнее значит, что для любых x, $y \in X$ таких, что $|xy| < \pi$, найдется кривая в X, соединяющая x и y такая, что ее длина сколь угодно близка (равна) $|xy|$.

Литература

1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. - Москва–Ленинград: Гостехиздат. - 1948. - 387 с.
2. Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны.(Основы внутренней геометрии поверхностей). - Тр. матем. ин-та им. Стеклова. LXIII. - Москва–Ленинград: Изд-во АН СССР. - 1962. - 263 с.
3. Буземан Г. Геометрия геодезических. - М.: Физматгиз. - 1962. - 503 с.
4. Busemann H., Phadke B. B. Spaces with Distinguished Geodesics. - New York - Basel - Marsel Dekker Inc. - 1987. - 159 p.
5. Ballman W. Lectures on spaces of nonpositive Curvature. DMV Seminar 25. Birkhauser. -1995. - 112 p.
6. Bridson M. R., Haefliger A. Metric spaces of non-positive curvature. Ser. A Series of Comprehensive Stadies in Mathematics. Vol. 319. - Berlin: Springer-Verlag. - 1999. - 643 p.
7. Gromov M. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Progress in Mathematics 152. Birkhauser. Boston. -1999. - 578 p.
8. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. - Москва–Ижевск: Институт компьютерных иследований. - 2004. - 496 с.
9. Papadopoulos A. Metric spaces convexity and nonpositive curvature. - Zurich: European Math. Society. - 2005. - 287 p.
10. Куратовский К. Топология. – М.: Мир, 1966. - Т. 1. - 594 с.

СОДЕРЖАНИЕ