КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. А. Попов
М. Х. Бренерман

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Издательство
Казанского государственного университета
2008

УДК 519.21
ББК 22.171я73

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
физического факультета КГУ

Рецензент
доцент кафедры математической статистики КГУ к.ф.-м.н. О.Е.Тихонов

Попов В. А., Бренерман М. Х. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — Казань: Издательство КГУ, 2008. — 119 с. — Табл. 6. Ил. 33. Библиогр. 9 назв.

Руководство содержит задачи для практических занятий и самостоятельной работы студентов по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика». Предназначено для студентов физического факультета, обучающихся по специальностям „Физика“, „Радиофизика“, „Астрономия“, „Астрономо-геодезия“, „Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем“.

Предисловие

В современной системе высшего образования большое внимание уделяется самостоятельной работе студентов. При этом студент должен не только научиться решать типовые задачи по изучаемой дисциплине, но и применять полученные навыки при решении задач в рамках своей специальности.

В книге собрано более 200 задач к курсу «Теория вероятности и математическая статистика», читаемому на физическом факультете Казанского университета. Ее основу составили задачи из различных сборников [3]–[6], которые регулярно используются при ведении практических занятий. Здесь собраны задачи разной степени сложности, от самых простых, предназначенных для приобретения навыков применения готовых формул и теорем, до более сложных, решение которых требует некоторой изобретательности. Это позволяет использовать пособие в качестве базового задачника для проведения практических занятий.

Большое количество задач приведено вместе с решениями. Это, в первую очередь, задачи с наиболее общими или стандартными схемами решения. Ко многим задачам даны указания, в которых студент может найти подсказку в том случае, если решение не удается найти самостоятельно. Если указание отсутствует, то это означает, что решение достаточно очевидно, либо методы решения подробно разобраны в примерах, либо похожая подсказка содержится в предыдущих задачах. Кроме того, каждый параграф снабжен сводкой основных понятий, формул и теорем, необходимых для успешного освоения данного раздела. Это дает возможность использовать пособие как для самостоятельной работы во время семестра, так и для «срочной» подготовки к экзамену или зачету.

Часть задач из раздела «Математическая статистика» рекомендуется решать с помощью электронных таблиц «Excel», пакетов «Maple», «Mathematica», «Mathcad» и др. Это сэкономит время и поможет избежать ошибок при, хоть и несложных, но объемных вычислениях.

Теория вероятностей

§ 1. События

Мы вводим базовые понятия теории вероятностей на эвристическом уровне[1)]. Будем рассматривать некий объект (явление), который характеризуется набором своих состояний. Над объектом производится эксперимент (опыт, испытание, измерение) с целью получения информации о его состоянии. Рассматриваются только такие эксперименты, которые могут быть воспроизведены неограниченное количество раз, в одних и тех же условиях, и результат любого эксперимента невозможно однозначно предсказать.

Событием A (случайным событием, исходом) будем называть состояние объекта, полученное в результате однократного проведения эксперимента.

Элементарным событием ω будем называть простейший, неделимый в рамках данного опыта, исход. Появление одного элементарного события исключает наступление любого другого. Все возможные элементарные события образуют *множество элементарных событий* Ω. Любое событие A рассматривается как некоторое подмножество из Ω: $A \subseteq \Omega$.

Достоверным называется событие Ω, которое в результате опыта непременно должно произойти. *Невозможным* называется событие (обозначается $\varnothing$), которое в результате опыта не может произойти.

Два события A и B называются *совместными*, если они могут появиться в результате одного эксперимента. Два события A и B называются *несовместными*, если наступление одного исключает наступление другого.

События называются *равновозможными*, если по условиям экс-

[1)] Интересующихся формальным математическим построением теории вероятностей отсылаем, например, к книге [9] перимента нет оснований считать какое-либо более возможным, чем другое.

События A и B называются *зависимыми*, если наступление одного из них делает возможным наступление другого.

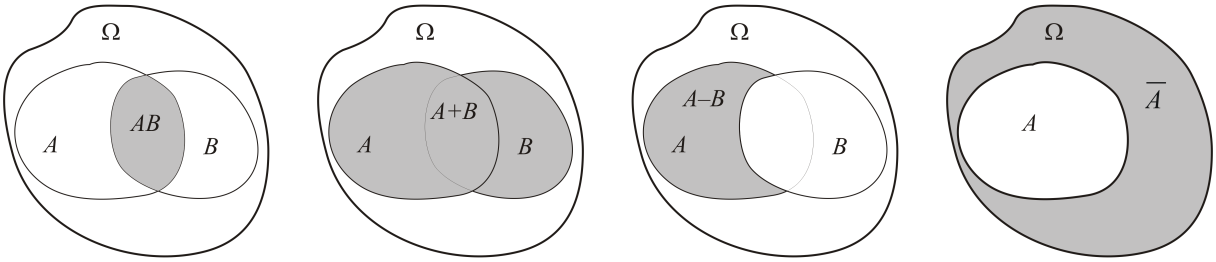

Рис. 1.

Суммой (объединением) событий A и B (обозначается $A+B$ или $A\bigcup B$) называется событие, состоящее из исходов, входящих в A или B. Другими словами, должно иметь место хотя бы одно из событий A или B.

Произведением (пересечением) событий A и B (обозначается AB или $A\bigcap B$) называется событие, состоящее из исходов, одновременно входящих в A и B. Другими словами, события A и B появляются совместно.

Разностью событий A и B (обозначается $A-B$ или $A\backslash B$) называется событие, состоящее из исходов, входящих в A, но не входящих в B.

Противоположным событием (дополнением) к событию A (обозначается $\overline{A}$) называется событие, наступающее всякий раз, когда не происходит событие A. Очевидно, что $\overline{A} = \Omega - A$, и события $\overline{A}$ и A несовместны.

События B_i образуют *полную группу несовместных событий* (или, короче, полную группу), если 1) $B_iB_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$; 2) $\prod\limits_i B_i = \Omega$.

Алгеброй событий $\mathfrak{A}$ называется совокупность событий $A \subset \Omega$, таких, что 1) $\varnothing$ и $\Omega \in \mathfrak{A}$, 2) для любых событий $A, B \in \mathfrak{A}$, операции суммы, разности и произведения снова дают событие из $\mathfrak{A}$.

Проиллюстрировать базовые понятия можно следующими примерами:
объект — игральная кость, опыт — бросание кости,
элементарное событие — выпадение «1», «2»,... «6»,
событие — выпадение четного числа очков,

достоверное событие — выпадение какого-либо числа очков, невозможное событие — выпадение «0» и т. д.

Задача 1. *По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события* A_i = {*попадание при* i*-м выстреле*}, ($i = 1, 2, 3$). *Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий* A_i *и* $\overline{A}_i$ *следующие события*: B ={*все три попадания*}; C ={*все три промаха*}; D ={*хотя бы одно попадание*}; E ={*не меньше двух попаданий*}; F ={*попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле*}.

Решение. Любое событие, включающее три выстрела, можно представить в виде произведения событий A_i и $\overline{A}_i$. Некоторые события могут произойти только одним способом. Например, событие $B = A_1A_2A_3$, а событие $C = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Другие события могут реализоваться несколькими путями. Так, для события D благоприятными будут события, когда стрелок попадает первым выстрелом, а остальными промахивается; попадает первым и третьим, а вторым промахивается и т. д. Событие D будет представлять собой сумму таких благоприятных исходов:

$$D = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3.$$

Для того чтобы записать событие E, надо из события D убрать три первых слагаемых, так как они описывают только одно попадание из трех.

Чтобы произошло событие F, первые два выстрела должны быть промахами, а результат третьего выстрела не важен. Поэтому $F = \overline{A}_1\overline{A}_2$. Заметим, что событие D таким образом может быть записано гораздо короче. Поскольку при i-м попадании результаты остальных выстрелов не важны, то $D = A_1 + A_2 + A_3$.

Задача 2. *Три письма раскладываются случайно по трем конвертам с адресами. Записать событие* A, *заключающееся в том, что хотя бы одно письмо попадет в свой конверт.*

Решение. Пусть событие B_i ={i-е письмо попадает в свой конверт}. Тогда благоприятный исход может реализоваться несколькими взаимоисключающими способами. Например, первое письмо попадает в свой конверт, а два других — в чужие. Это событие может быть записано в виде произведения $B_1\overline{B}_2\overline{B}_3$. Кроме этого, благоприятными являются события $\overline{B}_1 B_2 \overline{B}_3$, $\overline{B}_1 \overline{B}_2 B_3$, а также $B_1 B_2 B_3$. Искомое событие является суммой всех вышеперечисленных несовместных событий:

$$A = B_1 \overline{B}_2 \overline{B}_3 + \overline{B}_1 B_2 \overline{B}_3 + \overline{B}_1 \overline{B}_2 B_3 + B_1 B_2 B_3.$$

Другой, более короткий вариант:

$$A = B_1 + B_2 + B_3.$$

Задача 3. *В цепь включены четыре элемента, как показано на рис. 2. Во время работы может произойти отказ любого из элементов. Записать событие A =*{*цепь исправна*} *через такие же события для каждого элемента.*

Решение. Цепь будет работать, если работает элемент 1 и хотя бы один из элементов 2, 3 или 4. Обозначим события B_i ={i-й элемент исправен}. Тогда $A = B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_1 B_4$.

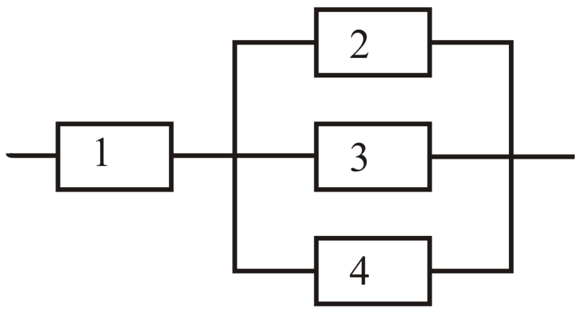

Рис. 2.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4. Пусть A, B и C — три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что а) произошло только событие A; б) произошли A и B, C не произошло; в) все три события произошли; г) произошло по крайней мере одно из событий; д) произошло одно и только одно событие.

Задача 5. В цепь включены пять элементов, как показано на рис. 3, каждый из которых может отказать во время работы. Рассматриваются события, заключающиеся в том, что i-й элемент отказал. Записать событие A ={цепь не работает}.

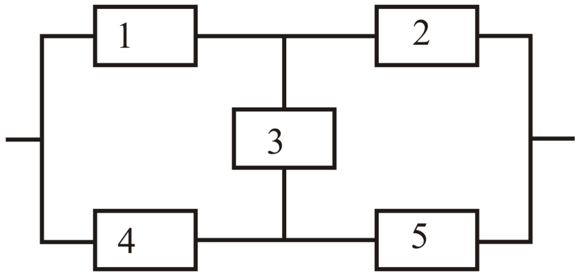

Рис. 3.

Задача 6. В ящике лежит большое количество ключей, среди которых находится нужный. Рассматриваются события A_i={Нужный ключ обнаружился при i-й попытке. Записать событие B ={Для поиска нужного ключа понадобилось не более трех попыток}.

Задача 7. Рассматриваются события A_1={выигрыш по билету одной лотереи} и A_2={выигрыш по билету другой лотереи}. Что означают события:

$$B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2 \quad \text{и} \quad C = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2 + A_1 A_2?$$

Задача 8. Известно, что события A и B произошли, а событие C не произошло. Произошли или не произошли следующие события: $A + BC$; $(A + B)C$; $\overline{A}B + C$; ABC?

Задача 9. Рабочий изготовил n деталей. Пусть событие A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ заключается в том, что i-я изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что: а) ни одна из деталей не имеет дефектов; б) только одна деталь имеет дефект; в) по крайней мере одна деталь имеет дефект; г) не более одной детали имеет дефект.

§ 2. Элементы комбинаторики

При решении задач часто необходимо подсчитать число элементарных событий, составляющих благоприятный исход. Будем рассматривать только конечные множества, из которых по тем или иным правилам выбирается какой-либо набор элементов.

Пусть каждая такая выборка может содержать только различные элементы множества.

Размещение есть упорядоченная выборка m элементов из n возможных. Число возможных размещений можно вычислить следующим образом: первый элемент может быть выбран n способами, второй — $n-1$ способом, третий — $n-2$ способами и т. д. В результате

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{1}$$

Перестановка — это частный случай размещения, когда в выборку входят все элементы множества, то есть $m = n$:

$$P_n = A_n^n = n! \tag{2}$$

Сочетание есть неупорядоченная выборка m элементов из n возможных. Число сочетаний можно получить, если число размещений A_n^m разделить на число возможных перестановок внутри каждого размещения P_m:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \tag{3}$$

Например, выбирая два из трех элементов a, b, c, мы получаем шесть размещений: ab, ac, ba, bc, ca, cb — и три сочетания: ab, ac, bc.

Если в выборке элементы могут повторяться, то различают следующие типы выборок.

Размещение с повторениями есть упорядоченная выборка m элементов из n возможных, в которой каждый элемент может встречаться более одного раза. При этом может быть, что $m > n$. Каждый элемент выборки может быть выбран n способами, поэтому число таких размещений есть

$$\bar{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m} = n^m \tag{4}$$

Перестановки с повторениями. Имеются элементы m различных сортов, причем элементов 1-го сорта n_1 штук, 2-го — n_2 штук и т. д., так что $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$. Внутри каждого сорта элементы неразличимы. Число различных перестановок получится, если учесть, что в каждой перестановке нам не важен внутренний порядок элементов каждого сорта:

$$P_n(n_1, n_2 \dots, n_m) = \frac{P_n}{P_{n_1} P_{n_2} \dots P_{n_m}} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} \tag{5}$$

Сочетания с повторениями есть неупорядоченная выборка m элементов из n возможных, в которой каждый элемент может встречаться более одного раза. Состав выборки определяется только числом элементов каждого сорта. Число возможных сочетаний можно подсчитать следующим образом. Разместим все элементы выборки на одной прямой, группируя их по сортам. Таких групп будет n штук, включая пустые группы. Отделим группы перегородками, которых будет $n-1$ штука. Заменим каждый элемент любой группы единицей, а перегородку нулем. Число сочетаний с повторениями совпадает с числом перестановок с повторениями $n-1$ нулей и m единиц:

$$\bar{C}_n^m = P_{n+m-1}(n-1, m) = \frac{P_{n+m-1}}{P_m P_{n-1}} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m \qquad (6)$$

Например, выбирая два из трех элементов a, b, c, мы получаем девять размещений с повторениями: $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$ — и шесть сочетаний с повторениями: aa, bb, cc, ab, ac, bc.

В ряде случаев бывает удобно вместо применения формул (1)–(6) использовать два основных правила комбинаторики — правила суммы и произведения.

Правило суммы. Если элемент a может быть выбран n способами, а элемент b — m способами, то только один из них может быть выбран $m+n$ способами. Например, если на тарелке лежит два яблока и три груши, то фрукт может быть выбран пятью способами.

Правило произведения. Если элемент a может быть выбран n способами, а элемент b — m способами, то пара a, b может быть выбрана mn способами. В частности, отсюда немедленно следует формула для размещения с повторениями (4).

Задача 10. *Сколькими способами можно расставить на шахматной доске* 8 *ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?*

Решение. Ясно, что при таком расположении на каждой горизонтали и каждой вертикали стоит по одной ладье. Возьмем одно из этих расположений и обозначим через a_1 номер занятого поля на первой горизонтали, через a_2 — на второй горизонтали, ..., через a_8 — на восьмой горизонтали. Тогда $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ будет некоторой перестановкой из чисел $1, 2, \ldots, 8$ (ясно, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_8$ нет ни одной пары одинаковых, так как иначе две ладьи попали бы на одну и ту же вертикаль). Таким образом, число искомых расположений ладей равно числу перестановок чисел $1, 2, \ldots, 8$, то есть $P_8 = 8! = 40\,320$.

Задача 11. ***Схема выбора без возвращения.*** *В корзине находится n пронумерованных шаров. Наудачу извлекается m шаров. Каково общее число возможных комбинаций?*

Решение. Каждая выборка представляет собой размещение без повторения, поэтому число комбинаций есть A_n^m.

Задача 12. ***Схема выбора с возвращением.*** *В корзине находится n пронумерованных шаров. Наудачу извлекается шар, его номер записывается, после чего он возвращается в корзину. Операция повторяется m раз. Каково общее число возможных комбинаций?*

Решение. Каждая выборка представляет собой размещение с повторением, поэтому число комбинаций есть $\bar{A}_n^m$.

Задача 13. *У Деда Мороза в мешке 7 различных подарков, 5 из которых он должен подарить пятерым детям — каждому по одному. Сколькими способами он может это сделать?*

Решение. Если имеет значение только то, какие подарки Дед Мороз взял из мешка, и при этом неважно кому какой подарок достался (например, подарки выкладываются под елку), то число таких способов есть число сочетаний C_7^5 (неупорядоченная выборка). Если же учитывать различные способы, которыми одни и те же подарки могут быть розданы детям, то число способов есть A_7^5 (упорядоченная выборка).

Задача 14. *Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи»?*

Решение. Здесь есть одна буква «м», четыре буквы «и», три буквы «с» и одна буква «п», а всего 9 букв. Значит, по формуле (5) число перестановок равно

$$P_9(4,3,1,1) = \frac{9!}{4!3!1!1!} = 2520.$$

Задача 15. *Рассматривается система N частиц, каждая из которых может находиться в одном из k состояний. Найти полное число состояний, в которых может находиться система.*

Решение. Решение задачи зависит от того, какими свойствами обладают частицы. Рассмотрим наиболее распространенные системы

Максвелла—Больцмана, Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака.

В системе Максвелла—Больцмана частицы считаются различными, число частиц в любом состоянии не ограничено. В этом случае мы имеем дело с упорядоченной выборкой из N элементов, которые могут принимать повторяющиеся значения из множества всех состояний. Следовательно, полное число состояний вычисляется по формуле (4), в которой нужно положить $m = N$ и $n = k$, то есть k^N.

В системе Бозе—Эйнштейна частицы считаются неразличимыми, число частиц в любом состоянии не ограничено. Эта система отличается от предыдущей тем, что выборка будет неупорядоченной. Это значит, что число состояний должно вычисляться по формуле (6)и будет равно $\bar{C}_k^N$.

В системе Ферми—Дирака частицы неразличимы, но в каждом состоянии может находиться не более одной частицы. Тогда мы имеем неупорядоченную выборку из N элементов, в которой значения не повторяются. Следовательно, число состояний дается формулой (3) и равно C_k^N. В этом случае число частиц не должно превышать числа состояний.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 16. Имеется пять кусков материи разных цветов. Сколько из этих кусков можно сшить различных флагов, если флаги состоят из трёх горизонтальных полос разного цвета?

Задача 17. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Задача 18. Кодовый замок состоит из 5 дисков. На каждый диск нанесены цифры от 0 до 9. Каково максимальное число попыток может быть сделано человеком, который не знает шифр замка?

Задача 19. В азбуке Морзе буквы кодируются определенным набором точек и тире. Какого количества точек и тире для передачи одной буквы будет достаточно при кодировании алфавитов а) русского; б) английского?

Задача 20. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

Задача 21. Сколькими способами можно выбрать правление ОАО из пяти человек, если в обществе 100 равноправных акционеров?

Задача 22. В школьном конкурсе эрудитов принимает участие 5 учеников. Конкурс состоит из 7 этапов; победитель каждого этапа получает звезду. Сколькими способами звезды могут распределиться среди участников конкурса?

§ 3. Определения вероятности

Классическое определение вероятности. Пусть n — общее число возможных элементарных исходов испытания, а m — число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A. Все элементарные события считаются равновозможными. Тогда вероятность события A определяется равенством

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m}{n}. \tag{7}$$

В большинстве задач число исходов можно подсчитать способами, описанными в § 2.

Относительная частота события A_n определяется равенством

$$\nu(A_n) = \frac{m}{n},$$

где m — число испытаний, в которых событие A_n наступило; n — общее число произведенных испытаний.

Статистическая вероятность события есть предел относительной частоты при $n \to \infty$:

$$\mathsf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n).$$

Геометрические вероятности. Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Предполагается, что вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения и формы. Тогда вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством

$$P = \frac{S(g)}{S(G)}, \tag{8}$$

где S — площадь фигуры.

Аналогичным образом можно определить вероятность попадания точки на отрезок длины l, лежащий внутри отрезка большей длины L:

$$P = \frac{l}{L}, \tag{9}$$

и вероятность попадания внутрь пространственной фигуры, имеющей объем v и являющейся частью фигуры с объемом V:

$$P = \frac{v}{V}. \tag{10}$$

Задача 23. *Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «решка».*

Решение. Возможны 4 элементарных исхода: (ОО, ОР, РО, РР). Три последних являются благоприятными. Следовательно, искомая вероятность $P = 3/4$.

Задача 24. *В конверте среди* 100 *фотокарточек находятся две разыскиваемые. Из конверта наудачу извлечены* 10 *карточек. Найти вероятность того, что среди них окажутся нужные.*

Решение. Число всех возможных исходов равно числу способов, которыми можно выбрать 10 фотографий из 100. Очевидно, что $n = C_{100}^{10}$. Благоприятными являются события, при которых среди 10 отобранных оказались 2 искомые. Остальные карточки могут образовывать любой набор. Число таких наборов есть число способов, которыми можно отобрать 8 карточек из 98. Поэтому $m = C_{98}^{8}$. Вероятность найти нужные фотографии

$$P = \frac{C_{98}^{8}}{C_{100}^{10}} = \frac{1}{110}.$$

Задача 25. ***Гипергеометрическая схема.*** *В корзине находится N шаров, среди них M белых и $N - M$ черных. Из корзины вынимают n шаров. Найти вероятность того, что среди них будет ровно m белых.*

Решение. Полное число возможных исходов — это число различных способов, которыми можно выбрать n шаров из N имеющихся, то есть C_N^n. Число благоприятных исходов подсчитывается следующим образом. m белых шаров могут быть выбраны C_M^m способами. Для каждого такого способа черные шары могут быть выбраны C_{N-M}^{n-m} способами. Всего благоприятных событий будет $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$. Искомая вероятность, таким образом, равна

$$P = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{11}$$

Задача 26. *На отрезке длины L, находящемся на числовой оси, Ox наудачу поставлены две точки с координатами y и z, причем $y < z$. Найти вероятность того, что длина получившегося отрезка окажется меньше, чем $L/2$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.*

Решение. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат yOz. По условиям задачи точки y и z удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant y < z \leqslant L$. Тогда любое событие будет описываться точкой с координатами (y, z), находящейся внутри треугольника OBD (рис. 4). Благоприятные события удовлетворяют дополнительному условию $z - y < L/2$. Эти события представлены точками фигуры $OABCD$.

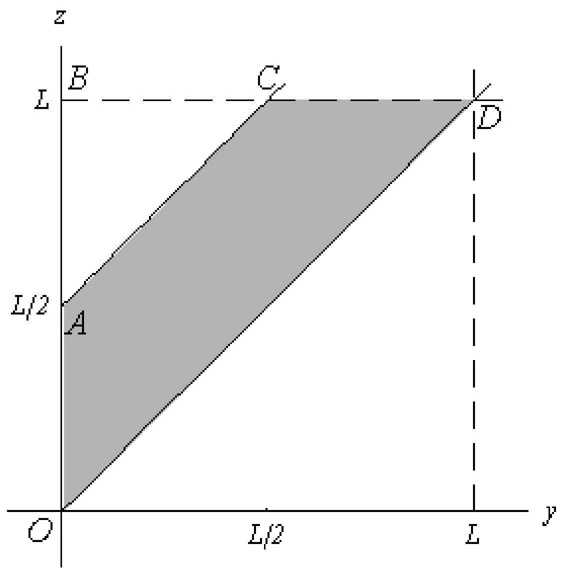

Рис. 4.

Искомая вероятность вычисляется по формуле (8):

$$P = \frac{S(OABCD)}{S(OBD)} = \frac{S(OBD) - S(ABC)}{S(OBD)} = \frac{L^2/2 - (L/2)^2/2}{L^2/2} = \frac{3}{4}.$$

Задача 27. ***Задача Бюффона.*** *Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$ ($l < a$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.*

Решение. Введем следующие обозначения: x — расстояние от середины иглы до ближайшей параллели; φ — угол, составленный иглой с этой параллелью (рис. 5). Положение иглы полностью определяется заданием определенных значений x и φ, причем x принимает значения от 0 до a; возможные значения φ изменяются от 0 до π. Другими словами, середина иглы может попасть в любую из точек прямоугольника со сторонами a и π (рис. 6). Таким образом, этот прямоугольник можно рассматривать как фигуру G, точки которой представляют собой все возможные положения середины иглы. Очевидно, площадь фигуры G равна $a\pi$.

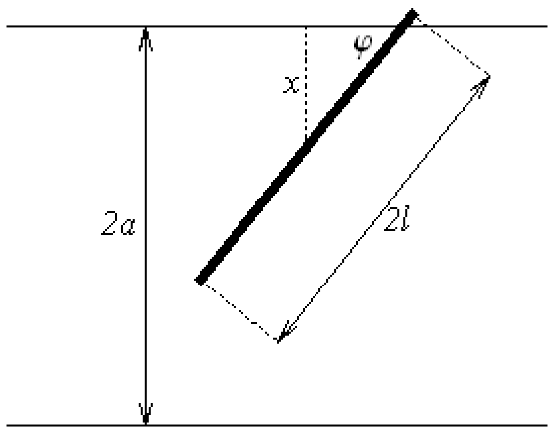

Рис. 5.

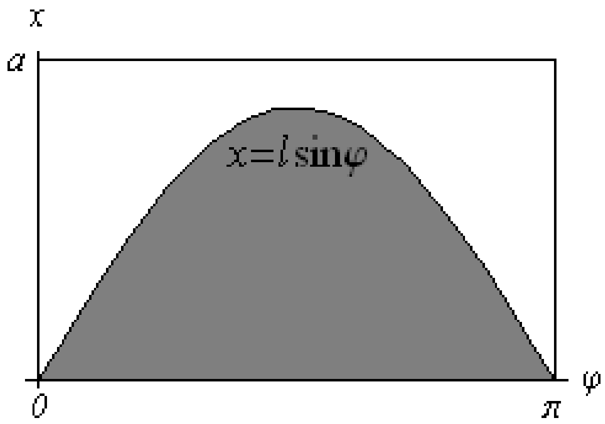

Рис. 6.

Найдем теперь фигуру g, каждая точка которой благоприятствует интересующему нас событию, т. е. каждая точка этой фигуры может служить серединой иглы, которая пересекает ближайшую к ней параллель. Как видно из рис. 5, игла пересечет ближайшую к ней параллель при условии $x \leqslant \sin\varphi$, т. е. если середина иглы попадет в любую из точек фигуры, заштрихованной на рис. 6. Таким образом, заштрихованную фигуру можно рассматривать как фигуру g. Найдем площадь этой фигуры:

$$S(g) = \int_0^{\pi} l \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi = -l \cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 2l.$$

Искомая вероятность того, что игла пересечет прямую

$$P = \frac{S(g)}{S(G)} = \frac{2l}{a\pi}.$$

Задача 28. ***Задача о встрече.*** *Два студента условились встретиться в определенном месте между* 12 *и* 13 *часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение четверти часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода в промежутке от* 12 *до* 13 *часов.*

Решение. Обозначим момент прихода первого студента через x, а второго — через y. Станем изображать x и y как декартовы координаты на плоскости (рис. 7); в качестве единицы масштаба выберем минуту. Всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со стороной 60.

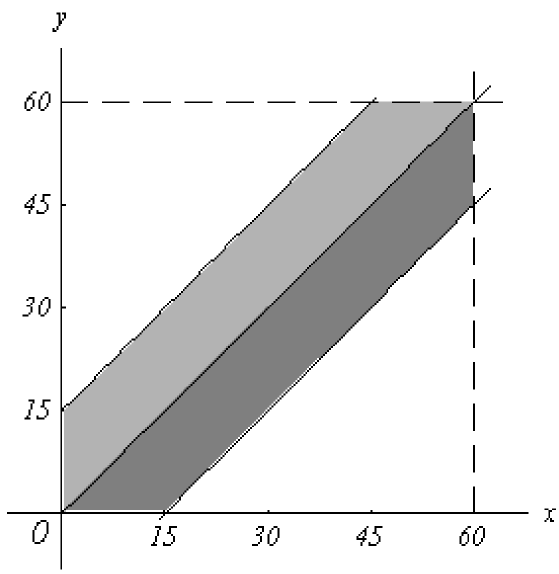

Рис. 7.

Для того чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| < 20$. Если первый студент пришел раньше, то $x < y$ и

$y - x < 20$; благоприятные события расположатся в светло-серой области. Если раньше пришел второй студент, то $y < x$ и $x - y < 20$; благоприятные события расположатся в темно-серой области.

Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата:

$$P = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{7}{16}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 29. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

Задача 30. На полке в случайном порядке расставлено n книг, среди которых находится двухтомник Д. Лондона. Предполагая, что различные расположения книг равновероятны, найти вероятность того, что оба тома двухтомника расположены рядом.

Задача 31. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадут числа очков, не совпадающие между собой (и не равные шести).

Задача 32. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

Задача 33. Батарея, состоящая из k орудий, ведет огонь по группе, состоящей из l самолетов ($k < l$). Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что а) все k орудий будут стрелять по одной и той же цели; б) все орудия будут стрелять по разным целям.

Задача 34. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные пачки по 26 листов. Вероятность какого события больше: A={в каждой из пачек окажется по 2 туза} или B={в одной пачке один туз, в другой — три}?

Задача 35. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий: A={все пассажиры выйдут на четвертом этаже}; B={все пассажиры выйдут одновременно} (на одном и том же этаже); C={все пассажиры выйдут на разных этажах}.

Задача 36. В чулане n пар ботинок. Из них случайно выбирается $2r$ ботинок ($2r < n$). Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок: а) нет парных; б) имеется ровно одна пара.

Задача 37. В купейном вагоне (9 купе по 4 места) семи пассажирам продано семь билетов. Найти вероятности событий: A={пассажиры попали в два купе} и B={пассажиры попали в три купе}. Рассмотреть два случая: а) пассажиры покупают билеты в разное время, независимо друг от друга; б) пассажиры едут вместе, и один покупает билеты всей группе, так что номера проданных пассажиру мест идут подряд, а наименьший номер выбирается случайно из множества номеров $\{1, \ldots, 30\}$.

Задача 38. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

Задача 39. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

Задача 40. Коэффициенты p и q квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

выбираются наудачу в промежутке (0, 1). Чему равна вероятность того, что корни будут действительными числами?

Задача 41. Три точки случайным образом поставлены на окружность. Найти вероятность того, что эти точки образуют тупоугольный треугольник. Предполагается, что вероятность попадания на любую дугу окружности пропорциональна ее длине.

Задача 42. Решить задачу Бюффона, когда $l = 2a$. Найти вероятности того, что игла пересечет а) хотя бы одну линию; б) только одну линию; в) две линии.

Задача 43. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время подхода пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго — два часа.

Задача 44. На отрезок [0,1] наудачу брошены две точки, разбившие его на три отрезка. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник? Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

Задача 45. Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков длиной не более L можно построить треугольник. Предполагается, что вероятность попадания точки в пространственную фигуру пропорциональна объему фигуры и не зависит от ее расположения.

§ 4. Основные теоремы

Теорема сложения вероятностей событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B). \tag{12}$$

В случае, когда события A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB). \tag{13}$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A}) = 1. \tag{14}$$

Вероятность (возможно, бесконечной) суммы попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$\mathsf{P}\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i \mathsf{P}(A_i). \tag{15}$$

Для n совместных событий вероятность их суммы выражается формулой:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A_1+\ldots+A_n) &= \sum_i \mathsf{P}(A_i) - \sum_{ij}\mathsf{P}(A_iA_j) + \\ &+ \sum_{ijk}\mathsf{P}(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1}\mathsf{P}(A_1A_2\ldots A_n).\end{aligned} \quad (16)$$

Условной вероятностью события A при наличии B называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность обозначается $\mathsf{P}(A|B)$.

Независимые события. События A и B называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Для независимых событий

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A), \qquad \mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B). \quad (17)$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A|B). \quad (18)$$

Для независимых событий A и B

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B). \quad (19)$$

Вероятность произведения нескольких событий

$$\mathsf{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_3|A_1A_2)\ldots\mathsf{P}(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}). \quad (20)$$

Для независимых событий

$$\mathsf{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\ldots\mathsf{P}(A_n). \quad (21)$$

Задача 46. *Студентка Люся Копейкина к зачету успела выучить только* 6 *вопросов из* 16, *но надеется, что в случае неудачи уговорит профессора Аркадия Аристарховича задать ей второй вопрос. По многолетним наблюдениям профессора можно разжалобить в двух случаях из трех, и это соотношение не меняется с годами. Каковы Люсины шансы сдать зачет?*

Решение. Обозначим события A ={профессор задал второй вопрос} и B_i ={зачет сдан с i-й попытки}. Поскольку попыток две, то $i = 1, 2$. Люся получит зачет, если сразу ответит на вопрос (произойдет событие B_1), либо, если не ответив на первый вопрос, ей удастся уговорить профессора задать ей второй вопрос и она сможет на него ответить (событие $C = \overline{B}_1 A B_2$). Вероятности событий

$$\mathsf{P}(B_1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8},\ \mathsf{P}(\overline{B}_1) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8},\ \mathsf{P}(A|\overline{B}_1) = \frac{2}{3},\ \mathsf{P}(B_2|A\overline{B}_1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

События B_1 и C несовместны, поэтому вероятность сдать зачет определяется по формулам (12) и (20):

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(B_1 + C) &= \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(\overline{B}_1)\mathsf{P}(A|\overline{B}_1)\mathsf{P}(B_2|A\overline{B}_1) = \\ &= \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

Задача 47. *Производится стрельба по мишени. Вероятность попадания равна p. Какова вероятность того, что а) первое попадание произойдет при n-м выстреле; б) для первого попадания потребуется не более m патронов; в) при трех выстрелах будет не меньше двух попаданий?*

Решение. Пусть событие A_i ={попадание при i-м выстреле}, а B ={попадание при m-м выстреле}. Очевидно, что $B = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{n-1}A_n$. Так как все события A_i независимы, то

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(\overline{A}_1)\mathsf{P}(\overline{A}_2)\ldots\mathsf{P}(\overline{A}_{n-1}A_n) = (1-p)^m p.$$

Рассмотрим событие C ={для первого попадания потребуется не более m выстрелов}. Тогда противоположное событие $\overline{C} = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_m$ и его вероятность

$$\mathsf{P}(\overline{C}) = \mathsf{P}(\overline{A}_1)\mathsf{P}(\overline{A}_2)\ldots\mathsf{P}(\overline{A}_m) = (1-p)^m.$$

Тогда $\mathsf{P}(C) = 1 - \mathsf{P}(\overline{B}) = 1 - (1-p)^m$.

Обозначим событие D ={не менее двух попаданий при трех выстрелах}. Это событие можно представить следующим образом: $D = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$. Вероятность этого события

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(D) &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(\overline{A}_3) + \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(\overline{A}_2)\mathsf{P}(A_3) + \\ &+ \mathsf{P}(\overline{A}_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3 + A_1A_2A_3) = \\ &= 3p^2(1-p) + p^3 = p^2(3-2p).\end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 48. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0.95 для первого сигнализатора и 0.9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Задача 49. Ученик 6б класса Костя Сидоров и его приятель, заняв выгодную позицию вблизи школьных дверей, обстреливали снежками всех выходящих девчонок. Когда дверь в очередной раз открылась, два снежка одновременно полетели в голову застывшего на пороге завуча — Маргариты Викентьевны. Какова вероятность того, что цель была поражена, если известно, что Костя обычно попадает 8 раз из 10, а его приятель только 7?

Задача 50. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0.4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

Задача 51. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0.6; 0.7; 0.8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

Задача 52. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.

Задача 53. Найти вероятность разрыва цепи, изображенной на рис. 3, если вероятность отказа ее элементов равна $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.05$, $p_3 = 0.1$, $p_4 = 0.2$, $p_5 = 0.05$. Отказы элементов происходят независимо.

Задача 54. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью p. а) Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания; б) Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включить зажигание не более двух раз.

Задача 55. Производится стрельба ракетами по некоторой наблюдаемой цели. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна p_1; попадания отдельных ракет независимы. Каждая попавшая ракета поражает цель с вероятностью p_2 Стрельба ведется до поражения цели или до израсходования всего боезапаса; на базе имеется боезапас n ракет ($n > 2$). Найти вероятность того, что не весь этот боезапас будет израсходован.

Задача 56. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0.8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0.4. можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

Задача 57. Водопроводчик Вася поздно вечером возвращается домой. У него в руках связка из пяти ключей, причем только один подходит к дверям квартиры. По причинам, о которых можно только догадываться, Вася пробует ключи наугад так, что при каждой попытке любой ключ, включая нужный, выбирается с одинаковой вероятностью. За этим захватывающим зрелищем через замочную скважину дверей соседней квартиры внимательно следят Иван Кузьмич и Пелагея Марковна. Иван Кузьмич готов биться об заклад, что Васька и с третьей попытки в дом не попадет. Сердобольная же Пелагея Марковна утверждает, что, по крайней мере, на третий раз дверь поддастся. У кого больше шансов победить в споре?

Задача 58. Пелагея Марковна и Иван Кузьмич вечерами обычно играют в преферанс со своим внуком, учеником 6б класса Костей Сидоровым. Костину двухлетнюю сестренку Катю сажают на прикуп. Сколько раз за вечер нужно сдать колоду, чтобы в прикупе по крайней мере один раз оказалось два туза с вероятностью не меньше 1/2.

(Примечание: при игре в преферанс старшие 32 карты колоды случайным образом сдаются между тремя игроками, получающими по 10 карт, и прикупом, куда кладутся две карты.)

§ 5. Формула Байеса

Формула полной вероятности. Пусть событие A может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий $B_1, B_2 \ldots B_n$, образующих полную группу. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B_1)\mathsf{P}(A|B_1) + \mathsf{P}(B_2)\mathsf{P}(A|B_2) + \ldots + \mathsf{P}(B_n)\mathsf{P}(A|B_n). \qquad (22)$$

Формула Байеса. Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2 \ldots B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса

$$\mathsf{P}(B_k|A) = \frac{\mathsf{P}(B_k)\mathsf{P}(A|B_k)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(B_k)\mathsf{P}(A|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(B_i)\mathsf{P}(A|B_i)}. \qquad (23)$$

Задача 59. *В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).*

Решение. Обозначим события A ={вытащен белый шар} и B_k ={в урне находится k белых шаров}. Первоначально в урне могло находиться $0, 1, 2, \ldots, n$ белых шаров. Так как любое начальное количество белых шаров равновозможно, то вероятность $\mathsf{P}(B_k) = 1/(n+1)$. Условная вероятность вытащить белый шар, если первоначально в урне находилось k белых шаров $\mathsf{P}(A|B_k) = (k+1)/(n+1)$. По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A) &= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(B_k)\mathsf{P}(A|B_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(n+1)^2} = \frac{1+2+3+\ldots+(n+1)}{(n+1)^2} = \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n+2}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

При вычислении суммы в числителе удобно попарно суммировать числа 1 и $n+1$, 2 и n и т. д.

Задача 60. *Ученик* 6*б класса Костя Сидоров и его приятель, заняв выгодную позицию вблизи школьных дверей, обстреливали снежками всех выходящих девчонок. Известно, что Костя обычно попадает* 8 *раз из* 10, *а его приятель только* 7, *при этом приятель более расторопен и в* 60% *случаев успевает бросить снежок первым. Когда дверь в очередной раз открылась, первый снежок поразил застывшего на пороге завуча Маргариту Викентьевну, а второй разбился о стену. Какова вероятность того, что метким стрелком был Костя?*

Решение. Пусть события $A = \{$первый снежок попал в цель$\}$, $B_1 = \{$первым бросил Костя$\}$, $B_2 = \{$первым бросил приятель$\}$. Тогда $\mathsf{P}(B_1) = 0.4$, $\mathsf{P}(B_2) = 0.6$. Вероятность попадания при условии, что первым бросил Костя $\mathsf{P}(A|B_1) = 0.8$ и, аналогично, $\mathsf{P}(A|B_2) = 0.7$. Вероятность того, что попал Костя вычисляем по формуле Байеса (23):

$$\mathsf{P}(B_1|A) = \frac{0.4 \cdot 0.8}{0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.7} \approx 0.43.$$

Задача 61. ***Задача о пьянице***[1]***.*** *Пьяница стоит на краю пропасти и через равные промежутки времени с вероятностью* $1/2$ *делает шаг к пропасти или от нее (рис.* 8*). Какова вероятность того, что он в конце концов свалится в пропасть?*

Решение. Обозначим искомую вероятность p. Очевидно, для точек A и B вероятности сделать *в конце концов* шаг влево одинаковы и равны p. По формуле полной вероятности вероятность упасть в пропасть есть сумма вероятности сразу шагнуть в пропасть и вероятности сначала пойти в другую сторону, а потом *в конце концов* попасть из точки B в точку A и шагнуть в пропасть:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p \cdot p,$$

откуда $p = 1$.

[1] Аналогичные задачи и их обобщения (в менее «игривой» формулировке) составляют содержание теории случайных процессов, имеющей широкие приложения в различных областях физики и экономико-математических моделях.

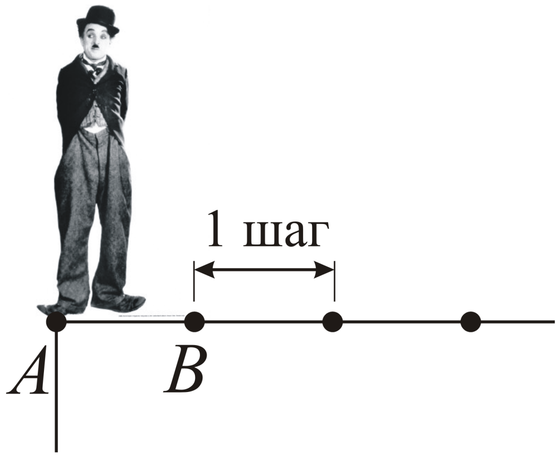

Рис. 8.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 62. Симпатичная студентка Люся Копейкина вместе с подругой готовилась к зачету. Они успели выучить только 15 вопросов из 30. По жребию Люсе выпало идти первой, а ее подруге — второй. Люся считает, что подруге повезло больше, так как шансы вытянуть счастливый билет увеличатся. Права ли она? Зависит ли вывод от числа выученных билетов?

Задача 63. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Задача 64. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше m $(m > 0)$?

Задача 65. Среди посетителей кафе 30% мужчин, 30% женщин, 40% детей. Мужчина заказывает пирожное с вероятностью 0.1, женщина — с вероятностью 0.5, ребенок — с вероятностью 0.7. Какова вероятность того, что случайный посетитель закажет пирожное?

Задача 66. Любимое занятие двухлетней девочки Кати — срезать пуговицы с одежды. Пока мама готовила кашу, Кате удалось отстричь все 5 белых пуговиц с папиной пижамы и 3 черные пуговицы с маминого вечернего платья. Одну пуговицу Катя проглотила, а остальные засунула в глубокую щель между полом и плинтусом. За этим занятием ее и застала мама. С большим трудом мама сумела выковырять из щели 2 пуговицы. Какова вероятность того, что платье можно привести в порядок, если одна запасная пуговица у мамы есть?

Задача 67. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Задача 68. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что выстрел из первого орудия был точным, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.5$.

Задача 69. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1; на втором месте — с вероятностью p_2; на третьем — с вероятностью p_3. Известно, что рыбак свято верит в магию числа 3 и, придя на выбранное место, закидывает удочку ровно три раза. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте, если рыбак вернулся с одной рыбой.

§ 6. Последовательности испытаний

Независимые испытания. Пусть производится опыт, в котором возможны N несовместных исходов. Если производятся испытания, в которых вероятность появления любого из этих исходов не зависит от исходов в других испытаниях, то такие испытания называют независимыми.

Схема Бернулли. Пусть $N = 2$. Тогда в каждом испытании возможно появление одного из двух исходов. Один исход принято называть успехом, его вероятность в каждом испытании равна p; другой — неудачей, его вероятность равна $q = 1 - p$. Вероятность того, что в n независимых испытаниях успех наступит ровно m раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{24}$$

Полиномиальная схема. Пусть $N > 2$. Вероятности исходов в отдельном испытании равны соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_N$ $(p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1)$. Тогда вероятность того, что в n независимых испытаний первый исход появится m_1 раз, второй исход — m_2 раз, ..., N-й исход — m_N раз, равна

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_N) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_N!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_N^{m_N}. \tag{25}$$

Задача 70. *Для стрелка вероятность попасть в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов других выстрелов и равна* $1/4$. *Стрелок сделал* 5 *выстрелов. Найти вероятность событий*: $A = \{$*стрелок попал ровно* 3 *раза*$\}$, $B = \{$*стрелок попал не менее трех раз*$\}$.

Решение. Вероятность успеха в одном «испытании» (т. е. выстреле) $p = 1/4$, неудачи $q = 3/4$. По формуле (24)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A) &= P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{512}, \\
\mathbf{P}(B) &= P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \\
&= C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{53}{512}.
\end{aligned}$$

Задача 71. *Найти наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли с* n *испытаниями при данной вероятности успеха* p.

Решение. Число k называют наивероятнейшим, если $P_n(k) \geqslant P_n(m)$ для любого другого числа успехов m. Очевидно, что данное неравенство должно выполняться, в том числе, и для $m = k \pm 1$:

$$P_n(k) \geqslant P_n(k+1) \implies \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \geqslant \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-k-1},$$

откуда

$$\frac{q}{n-k} \geqslant \frac{p}{k+1} \quad \implies \quad k \geqslant np - q.$$

Аналогично получаем:

$$P_n(k) \geqslant P_n(k-1) \implies \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \geqslant \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} q^{n-k+1},$$

откуда

$$\frac{p}{k} \geqslant \frac{q}{n-k+1} \quad \Longrightarrow \quad np + p \geqslant k.$$

Таким образом, наивероятнейшее число успехов должно удовлетворять двойному неравенству:

$$np - q \leqslant k \leqslant np + p.$$

Задача 72. *Костя Сидоров любит ходить в тир пострелять. Его рекорд в серии из пяти выстрелов составляет* 47 *очков. Какова вероятность повторить рекорд, если в среднем он попадает в десятку в* 30% *случаев, в девятку — в* 50%, *в восьмерку — в* 20%, *в семерку — в* 5%, *оставшиеся* 5% *приходятся на диапазон* 0–6?

Решение. Набрать 47 очков пятью выстрелами можно тремя способами:

1) 10+10+10+10+7, 2) 10+10+10+9+8, 3) 10+10+9+9+9.

Обозначим эти события A_1, A_2 и A_3. Вероятность каждого варианта можно подсчитать по формуле (25):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1) &= \frac{5!}{4!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 1!\cdot 0!}\cdot 0.3^4\cdot 0.5^0\cdot 0.2^0\cdot 0.05^1\cdot 0.05^0 = 0.002\\
\mathbf{P}(A_2) &= \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot 0.3^3\cdot 0.5^1\cdot 0.2^1\cdot 0.05^0\cdot 0.05^0 = 0.054\\
\mathbf{P}(A_3) &= \frac{5!}{3!\cdot 3!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot 0.3^2\cdot 0.5^3\cdot 0.2^0\cdot 0.05^0\cdot 0.05^0 = 0.113
\end{aligned}$$

Полная вероятность повторить рекорд составляет $0.002 + 0.054 + 0.113 = 0.169$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 73. При передаче сообщения вероятность искажения каждого знака равна 0.01. Предполагая независимость искажения любого из знаков, найти вероятность того, что группа из 5 знаков а) не будет искажена; б) будет содержать менее двух искажений.

Задача 74. Два равносильных шахматиста играют в матч из n результативных партий. Ничьи во внимание не принимаются. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех?

б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

Задача 75. Когда Васечкин и Петров играют в шахматы, то Петров выигрывает у Васечкина в среднем две результативные партии из трех, а с Машей Старцевой у него полный паритет. Что вероятнее в матче из 4 партий: выиграть у Васечкина или не проиграть Маше? Ничьи в матчах не учитываются.

Задача 76. В подъездах нового дома включено $2n$ новых электролампочек. Каждая лампочка в течение года выходит из строя с вероятностью p. Найти вероятность того, что в течение года не менее половины первоначально включенных лампочек придется заменить новыми.

Задача 77. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0.9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Задача 78. Два стрелка одновременно стреляют по одной мишени. Вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна 0.2, а для второго — 0.4. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых не будет ни одного попадания в мишень, если стрелки произведут 25 залпов.

Задача 79. Папа пообещал купить Косте Сидорову велосипед, когда Костя сумеет выиграть у него 20 партий. Они договорились каждый день играть одну партию, которая с одинаковой вероятностью может завершиться вничью, победой Кости или его поражением. Когда надо начинать матч, чтобы шансы получить велосипед к 1 мая были максимальными?

Задача 80. Том Сойер ставит свою дохлую крысу на веревочке против приятельского сломанного будильника, что при подбрасывании 6 монет выпадет 3 орла. Том считает, что шансы получить или не получить загаданный результат равны. Прав ли он? Каковы шансы Тома выиграть спор?

Задача 81. По многолетним наблюдениям в районе обсерватории из 30 ноябрьских ночей ясных бывает в среднем 10. Группе астрономов, собирающихся сделать мировое открытие, выделено 5 ночей для наблюдений. Найти вероятность того, что мировое открытие будет совершено, если для этого требуется по крайней мере 2 ясные ночи.

Задача 82. На зачете предлагается решить 5 задач. Решенная задача оценивается в 2 балла, наполовину решенная — в 1 балл, за нерешенную задачу баллы не начисляются. Чтобы получить зачет, необходимо набрать не менее 8 баллов. Какова вероятность получить зачет у симпатичной студентки Люси Копейкиной, если из десяти задач она в среднем решает 6 и наполовину решает 3, а одну решить никак не может.

Задача 83. Два равносильных шахматиста в среднем каждую вторую партию играют вничью. Какова вероятность, что матч из 4 партий закончится вничью?

Задача 84. Отрезок разделен на четыре части в отношении 1:2:3:4. На отрезок наудачу поставлено 8 точек. Найти вероятность того, что на каждую из четырех частей отрезка попадет по две точки.

§ 7. Случайные величины

Случайной величиной называется действительная функция $\xi = \xi(\omega)$, заданная на множестве элементарных событий так, что любое множество $A = \{\omega : \xi(\omega) < x\}$ принадлежит алгебре событий $\mathfrak{A}$.

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что ξ примет значение, меньшее чем x:

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x). \tag{26}$$

Свойства функции распределения:

1) Функция распределения есть неубывающая функция;
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$;
3) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$;
4) Функция распределения непрерывна слева: $\lim\limits_{x \to a-0} F(x) = F(a)$;
5) $\mathbf{P}(\xi \geqslant x) = 1 - F(x)$;
6) $\mathbf{P}(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a)$;
7) $\mathbf{P}(\xi = x) = F(x+0) - F(x)$;

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, пробегающая не более чем счетное число значений. При этом

$$p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i), \quad \sum_i p_i = 1, \tag{27}$$

где сумма берется по всем возможным значениям i.

Законом распределения дискретной случайной величины ξ называется таблица, где перечислены возможные (различные) значения этой случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ с соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_k	$\ldots$

Графическое изображение ряда распределения (рис. 9) называется *многоугольником распределения*.

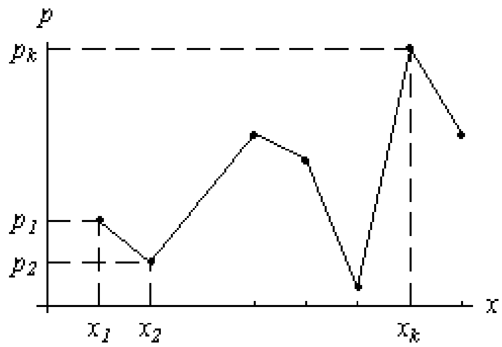

Рис. 9.

Наиболее употребительные дискретные распределения:

Биномиальное распределение. Случайная величина ξ может принимать значения $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Соответствующие вероятности:

$$p_m = \mathbf{P}(\xi = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

где $0 < p < 1$.

Гипергеометрическое распределение. Случайная величина ξ может принимать значения $m = 0, 1, 2, \ldots, \min(n, M)$. Соответствующие вероятности:

$$p_m = \mathbf{P}(\xi = m) = C_M^m C_{N-M}^{n-m} / C_N^n,$$

где n, M и N — натуральные числа.

Распределение Пуассона. Случайная величина ξ может принимать значения $m = 0, 1, 2, \ldots$. Соответствующие вероятности:

$$p_m = \mathbf{P}(\xi = m) = \lambda^m e^{-\lambda}/m!,$$

где $\lambda > 0$.

Геометрическое распределение. Случайная величина ξ может принимать значения $m = 1, 2, \ldots$. Соответствующие вероятности:

$$p_m = \mathbf{P}(\xi = m) = (1-p)^{m-1} p, \tag{28}$$

где $0 < p < 1$.

Непрерывной (точнее, абсолютно непрерывной) случайной величиной называется случайная величина, для которой существует неотрицательная функция $p(x)$, такая что

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t. \tag{29}$$

Функция $p(x)$ называется *плотностью распределения* (вероятностей) случайной величины. В точках, где плотность распределения является непрерывной, $p(x) = F'(x)$.

Из формулы (29) и свойства 3 функции распределения следует, что плотность распределения удовлетворяет *условию нормировки*:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x) = 1. \tag{30}$$

Наиболее употребительные непрерывные распределения:

Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$. Плотность распределения задается функцией

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \tag{31}$$

Нормальное (*гауссово*) *распределение* с параметрами (a, σ^2):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{32}$$

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{33}$$

Методами математического анализа можно показать, что функции $p(x)$, определенные формулами (31)–(33), удовлетворяют условию нормировки (30).

Задача 85. *В корзине 6 шаров, из которых 4 белых и 2 черных. Вытаскивается 3 шара. Случайной величиной является число белых шаров. Для данной случайной величины составить ряд распределения, изобразить многоугольник распределения, записать функцию распределения и нарисовать ее график. Найти вероятность события* $\boldsymbol{P}(0.5 < \xi < 2.5)$.

Решение. Распределение является гипергеометрическим с $N = 6$, $M = 4$ и $n = 3$; m может принимать значения 0, 1, 2, 3. Чтобы составить ряд распределения, вычислим значения вероятностей. Поскольку вытаскивается 3 шара, а черных только 2, то $p_0 = \mathbf{P}(\xi = 0) = 0$. Остальные вероятности:

$$\begin{aligned} p_1 = \mathbf{P}(\xi = 1) &= \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^4} = \frac{1}{5} \\ p_1 = \mathbf{P}(\xi = 2) &= \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^4} = \frac{3}{5} \\ p_1 = \mathbf{P}(\xi = 3) &= \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^4} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ряд распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Соответствующий этому ряду многоугольник распределения изображен на рис. 10.

Чтобы построить функцию распределения, разобьем числовую ось на интервалы $(-\infty, 0]$, $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$, $(3, +\infty)$. На каждом из этих

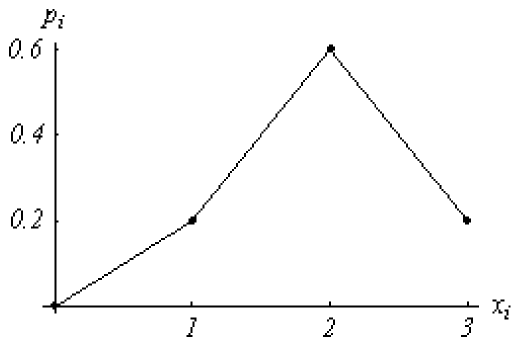

Рис. 10.

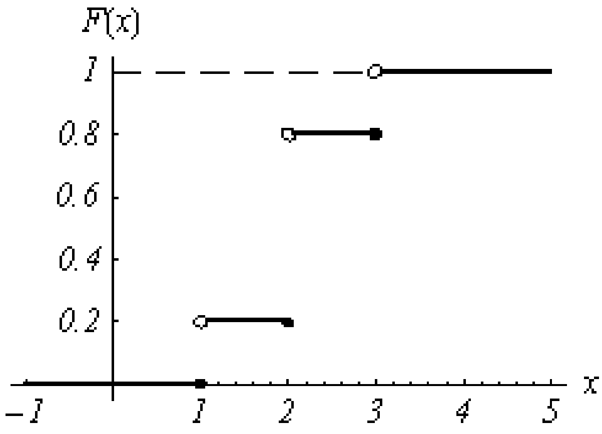

Рис. 11.

интервалов функция распределения будет постоянной:

$$
\begin{aligned}
x \in (-\infty, 0] &: \ F(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = 0,\\
x \in (0, 1] &: \ F(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = p_0 = 0,\\
x \in (1, 2] &: \ F(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = p_0 + p_1 = \frac{1}{5},\\
x \in (2, 3] &: \ F(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{4}{5},\\
x \in (3, +\infty) &: \ F(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.
\end{aligned}
$$

График этой функции изображен на рис. 11.

Согласно свойству 6, вероятность

$$\mathsf{P}(0.5 < \xi < 2.5) = F(2.5) - F(0.5) = 4/5 - 0 = 4/5.$$

Задача 86. *В тире стрелку, попавшему в мишень, выдается призовой патрон для следующего выстрела. Вероятность попадания при одном выстреле* 0.8. *Найти закон распределения дискретной случайной величины* ξ *— числа патронов, выданных стрелку, если он купил только один патрон. Построить функцию распределения.*

Решение. Очевидно, что вероятность не получить патронов равна вероятности промахнуться первым выстрелом: $\mathsf{P}(\xi = 0) = 0.2$. Стрелок получит только один патрон, если попадет первым выстрелом и промахнется вторым. В силу независимости попаданий при каждом выстреле эта вероятность есть $\mathsf{P}(\xi = 1) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$. Аналогично можно вычислить вероятность получения m патронов: $\mathsf{P}(\xi = m) = 0.8^m \cdot 0.2$. Закон распределения

x_i	0	1	2	$\ldots$	m	$\ldots$
p_i	0.2	0.16	0.128	$\ldots$	$0.8^m \cdot 0.2$	$\ldots$

Функция распределения показана на рис. 12. Данное распределение является геометрическим.

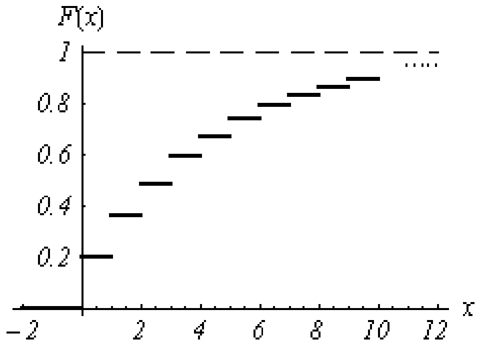

Рис. 12.

Задача 87. *Плотность распределения случайной величины* (*рис.* 13)

$$p(x) = \begin{cases} a\cos x, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти параметр a, функцию распределения и вероятность $\boldsymbol{P}(\pi/6 < \xi < \pi)$.

Решение. Чтобы найти a, воспользуемся свойством 3 функции распределения. Это значит, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{34}$$

Находим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cos x\,\mathrm{d}x = 2a\sin x\,\Big|_0^{\pi/2} = 2a = 1.$$

Следовательно, $a = 1/2$.

Функцию распределения находим по формуле (29). На интервале $(-\infty, -\pi/2)$ функция распределения $F(x) = 0$. Если $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, то

$$F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{x} \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin t\,\Big|_{-\pi/2}^{x} = \frac{1}{2}(1+\sin x).$$

Когда $x \in (\pi/2, \infty)$, функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}(1+\sin x), & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

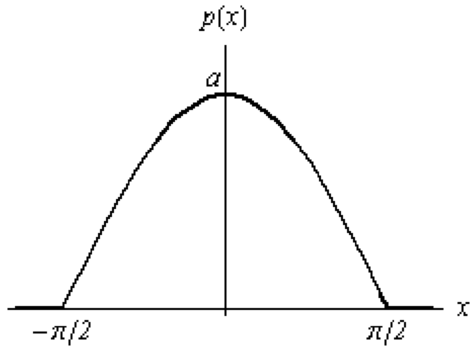

Рис. 13.

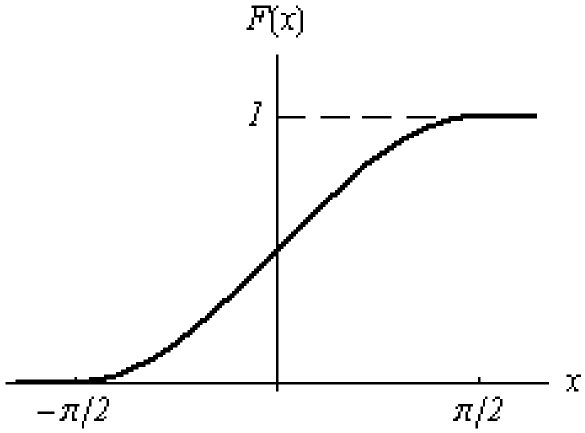

Рис. 14.

Вероятность попасть в интервал $(\pi/6, \pi)$ определяется по свойству 6 или может быть вычислена с помощью определенного интеграла

$$\mathsf{P}(\pi/3 < \xi < \pi) = \int\limits_{\pi/6}^{\pi} p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin t\,\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{1}{4}.$$

Задача 88. *Случайная величина* ξ *имеет показательное распределение с плотностью* $p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$. *Найти плотность распределения случайной величины* $\eta = \sqrt{\xi}$.

Решение. По определению функции распределения:

$$F_\eta(x) = \mathbf{P}(\eta < x) = \mathbf{P}(\sqrt{\xi} < x) = \mathbf{P}(\xi < x^2) = F_\xi(x^2).$$

При $x > 0$, плотность распределения является производной от функции распределения:

$$p_\eta(x) = F'_\eta(x) = \frac{\mathrm{d}F_\xi(x^2)}{\mathrm{d}x} = 2x\,p_\xi(x^2) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}.$$

Случайная величина η имеет распределение Рэлея (см. задачу 100).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 89. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины ξ — числа появлений «орла» при двух подбрасываниях монеты. Найти функцию распределения случайной величины.

Задача 90. Случайная величина ξ может принимать следующие значения: -2, 1, 2, 5. Известно, что $\mathbf{P}(\xi = -2) = 0.1$, $\mathbf{P}(\xi = 2) = 0.1$, $\mathbf{P}(\xi = 5) = 0.6$. Найти закон распределения случайной величины и построить ее функцию распределения.

Задача 91. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Задача 92. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0.9. Требуется: а) составить закон распределения случайной дискретной величины ξ — числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту; б) найти наивероятнейшее число заданных студенту дополнительных вопросов.

Задача 93. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0.8, вторым — 0.7. Начинает стрельбу первое орудие. Составить закон распределения дискретной случайной величины ξ — числа снарядов, израсходованных вторым орудием.

Задача 94. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти значение x_0 такое, что $\mathsf{P}(\xi < x) = \mathsf{P}(\xi > x)$.

Задача 95. Дана плотность распределения случайной величины $p(x) = e^{a|x|}$. Найти параметр a и функцию распределения.

Задача 96. Дана функция распределения случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin 2x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $p(x)$.

Задача 97. Задана плотность распределения случайной величины $p(x) = a/\operatorname{ch} x$. Найти параметр a и функцию распределения.

Задача 98. Задана плотность распределения случайной величины

$$p(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in [0,1]\,, \\ 0, & x \notin [0,1]\,. \end{cases}$$

Найти параметр a и функцию распределения.

Задача 99. Плотность распределения случайной величины ξ представляет собой полуэллипс с полуосями a и b (рис. 15). Величина a известна. Требуется найти величину b, построить функцию распределения и ее график.

Задача 100. Случайная величина ξ — расстояние от точки попадания до центра мишени — распределена по закону Релея:

$$p(x) = \begin{cases} are^{-h^2r^2}, & r \geqslant 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения; в) моду R, т. е. точку локального максимума плотности распределения; г) вероятность того, что в результате выстрела расстояние от точки попадания до центра

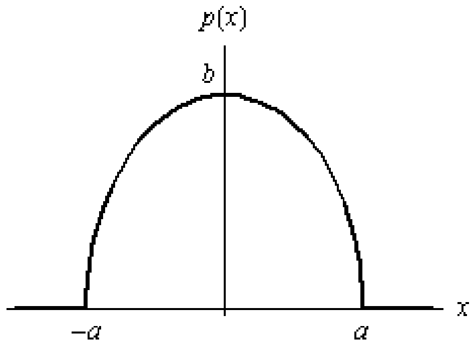

Рис. 15.

мишени окажется меньше, чем мода. Построить графики плотности и функции распределения.

Задача 101. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с плотностью $p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$. Найти плотности распределения случайных величин а) $\eta = \xi^2$; б) $\zeta = 1 - e^{-\lambda\xi}$.

Задача 102. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $(0; 1)$. Найти плотности распределения случайных величин а) $\eta = \xi^2$; б) $\zeta = e^\xi$.

Задача 103. Плотность случайной величины ξ имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Найти плотность распределения величины $\eta = \ln\xi$.

Задача 104. Пусть $F(x)$ — непрерывная строго возрастающая функция распределения и $F^{-1}(x)$ — обратная к ней функция и ξ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке [0;1]. Показать, что случайная величина $\eta = F^{-1}(\xi)$ имеет своей функцией распределения $F(x)$[1)].

§ 8. Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их

[1)] Указанное свойство позволяет из реализации равномерно распределенных величин получать реализации величин с функцией распределения $F(x)$.

вероятности:

$$\mathsf{M}\xi = \sum_i x_i p_i. \tag{35}$$

Сумма может содержать как конечное, так и бесконечное число членов. В последнем случае предполагается, что бесконечный ряд сходится абсолютно.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называют интеграл:

$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,\mathrm{d}x, \tag{36}$$

если этот интеграл сходится абсолютно.

Свойства математического ожидания:

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:
$$\mathsf{M}C = C.$$
2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:
$$\mathsf{M}(C\xi) = C\mathsf{M}\xi.$$
3) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:
$$\mathsf{M}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \mathsf{M}\xi_1 + \mathsf{M}\xi_2 + \ldots + \mathsf{M}\xi_n.$$
4) Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:
$$\mathsf{M}(\xi_1\xi_2\ldots\xi_n) = \mathsf{M}\xi_1 \cdot \mathsf{M}\xi_2 \cdot \ldots \cdot \mathsf{M}\xi_n.$$

Дисперсией случайной величины ξ называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2. \tag{37}$$

Дисперсию также удобно вычислять по формуле:

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2. \tag{38}$$

Свойства дисперсии:

1) Дисперсия является неотрицательной величиной:

$$\mathsf{D}\xi \geqslant 0.$$

2) Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$\mathsf{D}C = 0.$$

3) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$$\mathsf{D}(C\xi) = C^2\mathsf{D}\xi.$$

4) Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$\mathsf{D}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \mathsf{D}\xi_1 + \mathsf{D}\xi_2 + \ldots + \mathsf{D}\xi_n.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_\xi = \sqrt{\mathsf{D}\xi}. \tag{39}$$

Начальным моментом порядка k случайной величины ξ называют математическое ожидание величины ξ^k:

$$\alpha_k = \mathsf{M}\xi^k. \tag{40}$$

Центральным моментом порядка k случайной величины ξ называют математическое ожидание величины $(\xi - \mathsf{M}\xi)^k$:

$$\mu_k = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^k. \tag{41}$$

Задача 105. *Вычислить математическое ожидание и дисперсию для распределения Пуассона.*

Решение. Для распределения Пуассона

$$x_k = k, \quad p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Математическое ожидание вычисляем по формуле (35):

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+1}}{m!}e^{-\lambda} = \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.\end{aligned}$$

Вычислим математическое ожидание от квадрата случайной величины:

$$\mathbf{M}\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}.$$

Если $k \geqslant 2$, то

$$\frac{k}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{(k-2)!}.$$

Пользуясь этим, разобьем сумму на две части:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\xi^2 &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}\right)e^{-\lambda} = \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+1}}{m!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+2}}{n!}\right)e^{-\lambda} = \\ &= \left(\lambda+\lambda^2\right)e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \left(\lambda+\lambda^2\right)e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda+\lambda^2.\end{aligned}$$

По формуле (38) находим:

$$\mathbf{D}\xi = (\lambda+\lambda^2) - \lambda^2 = \lambda.$$

Задача 106. *Вычислить математическое ожидание и дисперсию для распределения Гаусса.*

Решение. Математическое ожидание вычисляем по формуле (36) с плотностью распределения (32):

$$\mathbf{M}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}x.$$

Выполним замену переменных $(x-a)/\sigma = t$.

$$\mathsf{M}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sigma t + a)e^{-t^2/2}\sigma\,\mathrm{d}t = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Первый интеграл обращается в ноль, поскольку подынтегральная функция нечетная. Во втором слагаемом интеграл равен $\sqrt{2\pi}$. Это легко сообразить, если вспомнить, что функция $p(t) = (1/\sqrt{2\pi})\exp(-t^2/2)$ есть плотность вероятности для гауссова распределения с параметрами (0,1); интеграл от нее по бесконечному промежутку равен 1. Таким образом $\mathsf{M}\xi = a$.

Дисперсия

$$\mathsf{D}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}x.$$

Снова сделаем замену переменной $(x-a)/\sigma = t$ и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}\mathsf{D}\xi &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t\,\mathrm{d}e^{-t^2/2} = \\ &= -te^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sigma^2.\end{aligned}$$

Задача 107. *Вычислить математическое ожидание и дисперсию для биномиального распределения.*

Решение. Способ 1. Случайная величина ξ принимает значения $x_k = k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ с вероятностью $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$. По формуле (35)

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}.$$

Чтобы вычислить сумму, рассмотрим функцию $f(p) = (p+q)^n$. Продифференцировав ее, найдем $f'(p) = n(p+q)^{n-1}$.

С другой стороны, $f(p)=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$, следовательно $f'(p) = \sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k p^{k-1} q^{n-k}$.

Если умножить получившуюся сумму на p, то она совпадет с выражением, которое необходимо вычислить. При этом надо считать, что $p + q = 1$. Таким образом, $\mathsf{M}\xi = pf'(p)_{|p+q=1} = np$.

Аналогичным образом вычислим

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\xi^2 &= p(pf'(p))'_{|p+q=1} = [n(p+q)^{n-1} + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}]_{|p+q=1} = \\ &= np + n(n-1)p^2.\end{aligned}$$

Отсюда по формуле (38)

$$\mathsf{D}\xi = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np(1-p) = npq.$$

С п о с о б 2. Обозначим ξ_k k-е испытание в схеме Бернулли. Каждая из случайных величин ξ_k принимает с вероятностью q значение 0 и с вероятностью p значение 1. Следовательно,

$$\mathsf{M}\xi_k = 0\cdot q + 1\cdot p = p, \qquad \mathsf{D}\xi_k = 0\cdot q + 1\cdot p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Очевидно, что ξ_k — независимы и $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии для суммы случайных величин, находим $\mathsf{M}\xi = np$, $\mathsf{D}\xi = npq$.

Задача 108. *Заданы две независимые случайные величины — ξ и η. Величина ξ — дискретная, ее ряд распределения:*

x_i	-2	-1	0	2
p_i	0.2	0.3	0.05	0.45

Величина η — непрерывная с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = 2\xi - 3\eta$.

Решение. Вычислим по формулам (35) и (36) математические ожидания случайных величин ξ и η:

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\xi &= -2\cdot 0.2+(-1)\cdot 0.3+0\cdot 0.05+2\cdot 0.45=0.2,\\ \mathsf{M}\eta &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1} x\cdot x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$\mathsf{M}\zeta$ определим согласно свойству 3 математического ожидания:

$$\mathsf{M}\zeta = 2\mathsf{M}\xi - 3\mathsf{M}\eta = 2\cdot 0.2 - 3\cdot(1/3) = -0.6.$$

Дисперсию дискретной случайной величины определим по формуле (37). Дополним ряд распределения следующими строками:

x_i	-2	-1	0	2
p_i	0.2	0.3	0.05	0.45
$x_i-\mathsf{M}\xi$	-2.2	-1.2	-0.2	1.8
$(x_i-\mathsf{M}\xi)^2$	4.84	1.44	0.04	3.24

$$\mathsf{D}\xi = 4.84\cdot 0.2 + 1.44\cdot 0.3 + 0.04\cdot 0.05 + 3.24\cdot 0.45 = 2.86.$$

Дисперсию величины η вычислим по формуле (38). Для этого найдем

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\eta^2 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1} x^2\cdot x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4},\\ \mathsf{D}\eta &= \left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{36}.\end{aligned}$$

Так как величины ξ и η независимы, то по свойству дисперсии 4 получаем

$$\mathsf{D}\zeta = 4\mathsf{D}\xi + 9\mathsf{D}\eta = 4\cdot 2.86 + 9\cdot 7/144 = 11.8775.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 109. Найти математическое ожидание и дисперсию для следующих распределений: а) равномерного (формула (31)); б) показательного (формула (33)); в) геометрического (формула (28)); г) Рэлея (задача 100).

Задача 110. Случайная величина ξ — скорость молекулы газа — распределена по закону Максвелла:

$$p(x) = \begin{cases} av^2 e^{-v^2/b^2}, & v \geqslant 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) среднее значение скорости и дисперсию; в) моду V, т. е. точку локального максимума плотности распределения; г) вероятность того, что скорость молекулы лежит между модой и средним значением.

Задача 111. К случайной величине ξ прибавили постоянную, не случайную величину a. Как от этого изменятся ее характеристики: а) математическое ожидание; б) дисперсия; в) среднее квадратическое отклонение; г) второй начальный момент?

Задача 112. Случайную величину ξ умножили на постоянную, не случайную величину a. Как от этого изменятся ее характеристики: а) математическое ожидание; б) дисперсия; в) среднее квадратическое отклонение; г) второй начальный момент?

Задача 113. Две независимые случайные величины ξ и η заданы законами распределения:

x_i	-5	1	4
p_i	0.3	0.1	0.6

y_i	-1	0	1
p_i	0.1	0.7	0.2

Найти математическое ожидание и дисперсию величины $\zeta = \xi + 3\eta$.

Задача 114. Две независимые случайные величины ξ и η заданы законами распределения:

x_i	-2	-1	0	2
p_i	0.2	0.3	0.1	0.4

y_i	-2	1
p_i	0.3	0.7

Найти математическое ожидание и дисперсию величины $\zeta = \xi - 2\eta^2$.

Задача 115. Две независимые случайные величины ξ и η заданы законами распределения:

x_i	$\pi/6$	π	$3\pi/2$
p_i	0.2	0.5	0.3

y_i	-3	1
p_i	0.4	0.6

Найти математическое ожидание и дисперсию величины $\zeta = 2\sin\xi - \eta$.

Задача 116. Бросают n игральных костей. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы числа очков, которые выпадут на всех гранях.

Задача 117. Дискретная случайная величина ξ может принимать только два значения x_1 и x_2. Доказать, что дисперсия величины ξ пропорциональна квадрату разности этих значений. Чему равен коэффициент пропорциональности?

Задача 118. Дискретная случайная величина ξ имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что ξ примет значение x_1 равна 0.2. Найти закон распределения величины ξ, если математическое ожидание и дисперсия известны: $\mathsf{M}\xi = 2.6$, $\mathsf{D}\xi = 0.8$.

Задача 119. Дискретная случайная величина ξ может принимать значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Найти вероятности, соответствующие этим значениям, если математическое ожидание и дисперсия известны: $\mathsf{M}\xi = 2.2$, $\mathsf{D}\xi = 0.76$.

Задача 120. Производится три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.4. Рассматривается случайная величина ξ — число попаданий при трех выстрелах. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины ξ. Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Задача 121. Случайная величина ξ подчинена закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») на участке от $-a$ до a (рис. 16). а) Написать выражение плотности распределения; б) Построить график функции распределения; в) Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; г) Найти вероятность попадания случайной величины в интервал $(-a/2; a)$.

Задача 122. Случайная величина ξ распределена по закону Коши:

$$p(x) = \frac{a}{1 + x^2}.$$

а) Найти коэффициент a; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти вероятность попадания величины ξ на участок (—1;1); г) существуют ли для случайной величины ξ числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсия?

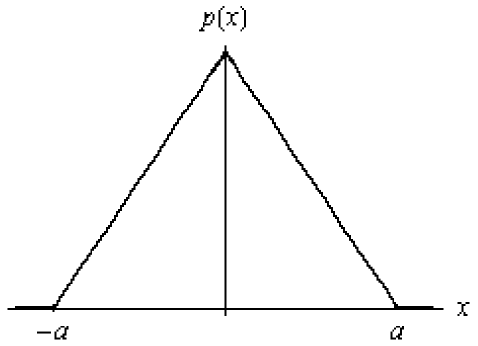

Рис. 16.

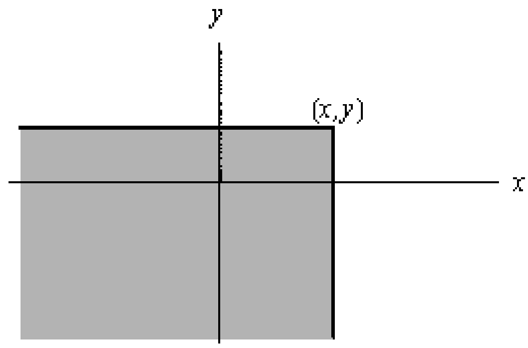

Рис. 17.

§ 9. Система двух случайных величин

Двумерной случайной величиной называют совокупность двух случайных величин (ξ, η), рассматриваемых совместно. Геометрически двумерная величина может быть истолкована как случайная точка M на плоскости xOy или как случайный вектор OM.

Функцией распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины называется вероятность совместного выполнения двух неравенств $\xi < x,\ \eta < y$:

$$F(x, y) = \mathsf{P}(\xi < x,\ \eta < y). \tag{42}$$

Геометрически $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в квадрант с вершиной (x, y), заштрихованный на рис. 17.

Свойства функции распределения:

1) Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству:
$$0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$$

2) Функция распределения есть неубывающая функция по каждому аргументу.

3) Имеют место предельные соотношения:
$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, \quad F(\infty, \infty) = 1.$$

4) При $y \to \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей ξ: $F_{\xi\eta}(x, \infty) = F_{\xi}(x)$. Аналогично, $F_{\xi\eta}(\infty, y) = F_{\eta}(y)$.

5) Вероятность попадания точки в прямоугольник $a \leqslant x < b$, $c \leqslant y < d$ вычисляется по формуле:

$$\mathsf{P}(a \leqslant \xi < b, c \leqslant \eta < d) = F(a,c) + F(b,d) - F(a,d) - F(b,c). \quad (43)$$

Плотностью распределения непрерывной двумерной случайной величины называется неотрицательная функция $p(x,y)$ такая, что

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t. \quad (44)$$

В точках непрерывности плотность распределения выражается через функцию распределения формулой

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \quad (45)$$

Вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в произвольную область D выражается формулой:

$$\mathsf{P}((\xi,\eta) \in D) = \iint\limits_{D} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad (46)$$

Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если

$$F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi}(x) F_{\eta}(y). \quad (47)$$

Для дискретных случайных величин необходимым и достаточным условием выполнения (47) является

$$\mathsf{P}(\xi = x_i, \eta = y_k) = \mathsf{P}(\xi = x_i)\mathsf{P}(\eta = y_k), \quad (48)$$

для непрерывных:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = p_{\xi}(x)\, p_{\eta}(y) \quad (49)$$

во всех точках непрерывности $p_{\xi\eta}(x,y)$.

Начальным моментом порядка $k+m$ случайного вектора (ξ,η) называют математическое ожидание величины $\xi^k \eta^m$:

$$\alpha_{k,m} = \mathsf{M}(\xi^k \eta^m). \quad (50)$$

В частности, $\alpha_{1,0} = \mathsf{M}\xi$, $\alpha_{0,1} = \mathsf{M}\eta$.

Центральным моментом порядка $k+m$ случайного вектора (ξ, η) называют математическое ожидание произведения отклонений соответственно k-й и m-й степеней:

$$\mu_{k,m} = \mathbf{M}\left((\xi - \mathbf{M}\xi)^k (\eta - \mathbf{M}\eta)^m\right). \tag{51}$$

В частности, $\mu_{0,1} = \mu_{1,0} = 0$, $\mu_{2,0} = \mathbf{D}\xi$, $\mu_{0,2} = \mathbf{D}\eta$.

Ковариацией (*корреляционным моментом*) случайных величин ξ и η называют центральный момент порядка 1+1:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mu_{1,1} = \mathbf{M}\big((\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)\big). \tag{52}$$

Коэффициентом корреляции величин ξ и η называют отношение ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\sigma_\xi \sigma_\eta}}. \tag{53}$$

Коэффициент корреляции — безразмерная величина, причем $|\rho_{\xi\eta}| \leqslant 1$. Коэффициент корреляции служит для оценки тесноты *линейной* связи между ξ и η: чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к единице, тем связь сильнее; чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к нулю, тем связь слабее. Если коэффициент корреляции равен нулю, то величины называют *некоррелированными*. Из независимости двух величин следует их некоррелированность, но из некоррелированности еще нельзя сделать вывод о независимости этих величин (для нормально распределенных величин из некоррелированности этих величин вытекает их независимость).

Задача 123. *Даны две произвольные случайные величины ξ и η. Найти $\mathbf{D}(\xi + \eta)$.*

Решение. По определению (37)

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\xi + \eta) &= \mathbf{M}\big((\xi + \eta) - \mathbf{M}(\xi + \eta)\big)^2 = \mathbf{M}\big((\xi - \mathbf{M}\xi) + (\eta - \mathbf{M}\eta)\big)^2 = \\
&= \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 + \mathbf{M}(\eta - \mathbf{M}\eta)^2 + 2\mathbf{M}\big((\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)\big) = \\
&= \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

Задача 124. *Закон распределения дискретного случайного вектора* (ξ, η) *определяется таблицей*

$x_i \backslash y_i$	-1	0	2
1	0.15	0.3	0.35
2	0.05	0.1	0.05

а) Найти законы распределения отдельных компонент ξ *и* η. *б) Построить функцию распределения* $F(x, y)$. *в) Установить, являются ли зависимыми величины* ξ *и* η. *г) Чему равна вероятность* $\mathbf{P}(\xi \geqslant \eta)$? *д) Найти коэффициент корреляции.*

Решение. а) Чтобы найти закон распределения случайной величины ξ, надо найти вероятности $\mathsf{P}(\xi = 1)$ и $\mathsf{P}(\xi = 2)$. Находим

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\xi = 1) &= \mathsf{P}(\xi = 1, \eta = -1) + \mathsf{P}(\xi = 1, \eta = 0) + \mathsf{P}(\xi = 1, \eta = 1) = \\ &= 0.15 + 0.3 + 0.35 = 0.8, \end{aligned}$$

то есть складываем все вероятности в первой строке таблицы. Аналогично, складывая числа во второй строке, получаем, что $\mathsf{P}(\xi = 2) = 0.2$. Чтобы получить закон распределения величины η, надо складывать числа по столбцам таблицы. В итоге приходим к следующим рядам распределения:

x_i	1	2
p_i	0.8	0.2

y_i	-1	0	2
p_i	0.2	0.4	0.4

б) Чтобы построить функцию распределения, разобьем оси Ox и Oy на интервалы, границы которых определяют возможные значения случайных величин ξ и η. Внутри каждого получившегося прямоугольника значение функции распределения постоянно. Такую функцию распределения удобно оформить в виде таблицы:

$x \backslash y$	$y \leqslant -1$	$-1 < y \leqslant 0$	$0 < y \leqslant 2$	$y > 2$
$x \leqslant 1$	0	0	0	0
$1 < x \leqslant 2$	0	0.15	0.45	0.8
$x > 2$	0	0.2	0.6	1

в) Величины ξ и η зависимы, так как, например,

$$\mathsf{P}(\xi = 1, \eta = -1) = 0.15, \quad \text{но} \quad \mathsf{P}(\xi = 1)\,\mathsf{P}(\eta = -1) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$$

г) Условию $\xi \geqslant \eta$ удовлетворяют все пары чисел (x_i, y_k), кроме пары (1;1). Поэтому $\mathsf{P}(\xi > \eta) = 1 - \mathsf{P}(\xi = 1, \eta = 1) = 1 - 0.35 = 0.65$.

д) Пользуясь рядами распределения для отдельных компонент ξ и η, находим математические ожидания $\mathsf{M}\xi = 1.2$ и $\mathsf{M}\eta = 0.6$, а также средние квадратические отклонения $\sigma_\xi = 0.4$ и $\sigma_\eta = 1.2$ (см. § 8). В таблице совместного распределения ξ и η сдвигаем значения x_i и y_k на величину $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{M}\eta$:

$x_i - \mathsf{M}\xi$ \\ $y_i - \mathsf{M}\eta$	-1.6	-0.6	1.4
-0.2	0.15	0.3	0.35
0.8	0.05	0.1	0.05

Вычисляем ковариацию и коэффициент корреляции:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\xi, \eta) &= -0.2\cdot(-1.6)\cdot 0.15 + (-0.2)\cdot(-0.6)\cdot 0.3 + (-0.2)\cdot 1.4\cdot 0.35 + \\ &\quad +0.8\cdot(-1.6)\cdot 0.05 + 0.8\cdot(-0.6)\cdot 0.1 + 0.8\cdot 1.4\cdot 0.05 = -0.07, \\ \rho_{\xi\eta} &= \frac{-0.07}{\sqrt{0.4 \cdot 1.2}} = -0.101 \end{aligned}$$

Задача 125. *Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины* $p(x, y) = (1/4)\cos x \cos y$ *в квадрате* $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$, *и равна* 0 *вне этого квадрата. а) Построить график плотности распределения. б) Найти функцию распределения и построить ее график. Являются ли составляющие случайного вектора независимыми случайными величинами?*

Решение. График плотности распределения приведен на рис. 18. Функция распределения вычисляется по формуле (44). Ее удобно представить в виде:

$y \backslash x$	$\left(-\infty\,;-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$	$\left[\frac{\pi}{2}\,;\infty\right)$
$\left(-\infty\,;-\frac{\pi}{2}\right)$	0	0	0
$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$	0	$\frac{1}{4}(1+\sin x)(1+\sin y)$	$\frac{1}{2}(1+\sin y)$
$\left[\frac{\pi}{2}\,;\infty\right)$	0	$\frac{1}{2}(1+\sin x)$	1

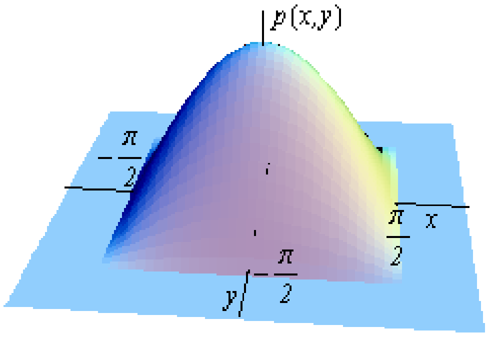

Рис. 18.

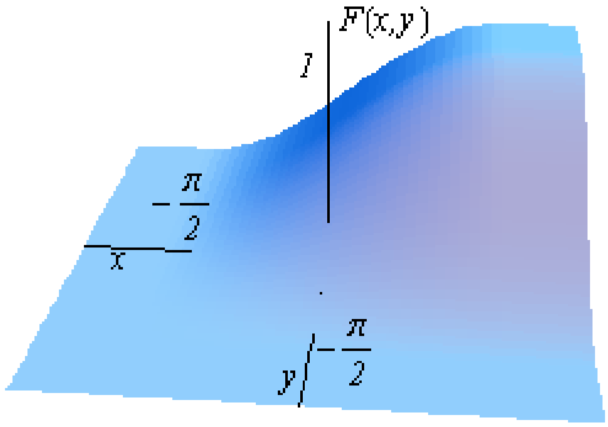

Рис. 19.

График функции распределения представлен на рис. 19. Составляющие случайного вектора являются независимыми, так как двумерная плотность распределения может быть представлена в виде произведения плотностей распределения $p_\xi(x) = (1/2)\cos x$ и $p_\eta(y) = (1/2)\cos y$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 126. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$y \backslash x$	$(-\infty\,;0)$	$\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$	$\left(\frac{\pi}{2}\,;\infty\right)$
$(-\infty\,;0)$	0	0	0
$\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$	0	$\sin x \sin y$	$\sin y$
$\left(\frac{\pi}{2}\,;\infty\right)$	0	$\sin x$	1

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = \pi/6$, $y = \pi/3$.

Задача 127. Задана двумерная плотность вероятности
$$p(x, y) = C/[(9 + x^2)(16 + y^2)]$$
системы двух случайных величин. Найти постоянную C.

Задача 128. Два стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу, каждый по своей мишени. Случайная величина ξ — число попаданий первого стрелка; η — второго стрелка. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго p_2. Построить функцию распределения $F(x, y)$ системы случайных величин (ξ, η).

Задача 129. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна p. Рассматриваются две случайные величины: ξ — число попаданий; η — число промахов. Построить функцию распределения $F(x, y)$ системы (ξ, η).

Задача 130. Система случайных величин (ξ, η) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата R со стороной 1 (см. рис. 20). Написать выражение плотности распределения $p(x, y)$. Построить функцию распределения системы. Написать выражения $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$. Определить, являются ли случайные величины ξ и η независимыми или зависимыми.

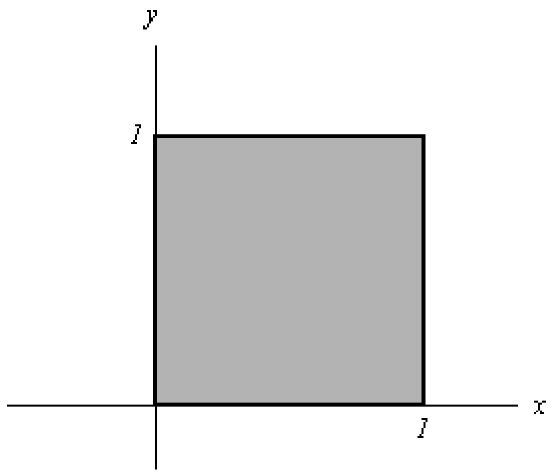

Рис. 20.

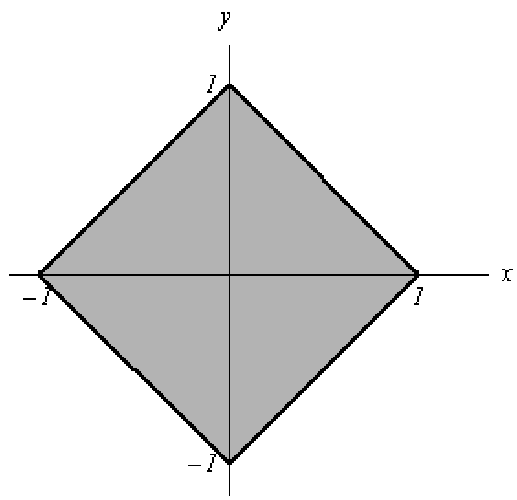

Рис. 21.

Задача 131. Совместное распределение величин ξ_1 и ξ_2 является равномерным в круге $x^2 + y^2 < 1$. Найти вероятность $\mathsf{P}(|\xi_1| < 1/\sqrt{2}, |\xi_2| < 1/\sqrt{2})$.

Задача 132. Игральная кость бросается до тех пор, пока впервые не выпадет меньше пяти очков. Пусть случайная величина ξ — число очков, выпавших при последнем бросании, а η — число бросаний кости. Найти совместное распределение ξ и η. Являются ли ξ и η независимыми?

Задача 133. Доказать, что ковариация случайных величин ξ и η может быть найдена по формуле $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{M}\xi\eta - \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta$.

Задача 134. Число ξ выбирается случайным образом из множества целых чисел $\{1,2,3\}$. Затем из того же множества выбирается число η, большее первого или равное ему. Найти закон распределения случайного вектора (ξ,η). Определить являются ли ξ и η независимыми. Найти коэффициент корреляции.

Задача 135. Найти функцию распределения суммы независимых случайных величин ξ и η, первая из которых равномерно распределена в сегменте $(-h,h)$, а вторая имеет функцию распределения $F(x)$.

Задача 136. Доказать, что если ξ и η связаны линейной зависимостью $\eta = a\xi + b$, то абсолютная величина коэффициента корреляции равна единице.

Задача 137. Доказать, что если коэффициент корреляции случайных величин ξ и η равен единице, то они связаны линейной зависимостью.

Задача 138. Случайная точка (ξ,η) распределена по нормальному закону на плоскости:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$$

Найти вероятность попадания точки (ξ,η) в квадрат R, изображенный на рис. 21.

Задача 139. Плотность распределения случайной величины (ξ,η) отлична от нуля внутри треугольника, изображенного на рис. 22. Найти значение функции распределения в точке (1;3), если распределение а) равномерное; б) имеет вид $p(x,y) = ax^2y$, где a=const.

Задача 140. Случайная точка (ξ,η) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата R, изображенного на рис. 21. а) Написать выражение плотности распределения $p_{\xi\eta}(x,y)$. б) Найти значение совместной функции распределения в точке (1/2;1/2). в) Найти выражения

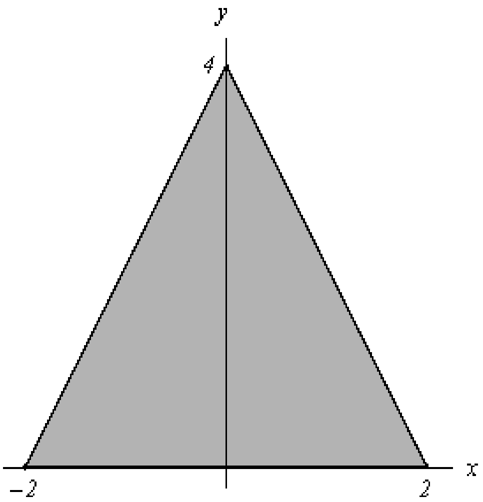

Рис. 22.

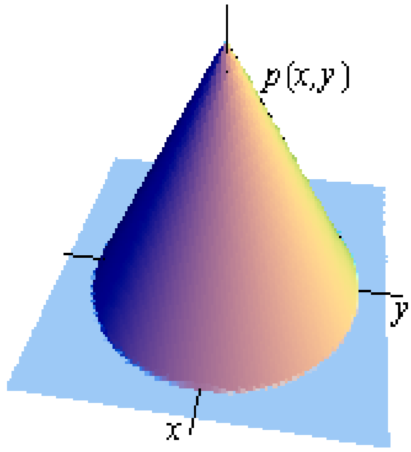

Рис. 23.

плотностей распределения $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$ отдельных величин ξ и η, входящих в систему. г) Являются ли величины ξ и η зависимыми? д) Являются ли величины ξ и η коррелированными?

Задача 141. Поверхность распределения системы случайных величин (ξ, η) представляет собой прямой круговой конус (рис. 23); основанием конуса служит круг с центром в начале координат и с радиусом r_0. Вне этого круга плотность распределения равна нулю. а) Написать выражение плотности распределения $p_{\xi\eta}(x, y)$. б) Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi^2 + \eta^2$. в) Являются ли величины ξ и η зависимыми? г) Являются ли величины ξ и η коррелированными?

Задача 142. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и нормально распределены с параметрами (0;1). Найти плотность распределения величин: а) $\eta_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2$; б) $\eta_2 = \operatorname{arctg} \xi_2/\xi_1$; в) совместную плотность распределения (η_1, η_2).

§ 10. Характеристические функции

Характеристической функцией случайной величины ξ называется комплексная функция действительного аргумента

$$f(t) = \mathsf{M} e^{i\xi t}. \tag{54}$$

Свойства характеристической функции:

1) Соответствие между множеством характеристических функций и множеством функций распределения является взаимно однозначным.

2) Характеристическая функция определена и непрерывна на всей числовой прямой и удовлетворяет соотношениям

$$0 \leqslant |f(t)| \leqslant 1, \qquad f(0) = 1.$$

3) Если $\eta = a\xi + b$, где a и b — постоянные, то

$$f_\eta(t) = e^{ibt} f_\xi(at). \tag{55}$$

4) Характеристическая функция суммы двух независимых случайных величин ξ и η равна произведению их характеристических функций:

$$f_{\xi+\eta}(t) = f_\xi(t) f_\eta(t). \tag{56}$$

5) Если случайная величина ξ имеет абсолютный момент n-го порядка, то есть $\mathsf{M}|\xi|^n < \infty$, то характеристическая функция величины ξ дифференцируема n раз и при $k \leqslant n$

$$f^{(k)}(0) = i^k \mathsf{M}\xi^k. \tag{57}$$

Задача 143. *Найти характеристическую функцию биномиального распределения.*

Решение. Случайная величина ξ принимает целые значения $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ с вероятностью $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$. По определению (54)

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathsf{M}e^{i\xi t} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(pe^{it}\right)^k q^{n-k} = \\ &= (pe^{it} + q)^n. \end{aligned}$$

Задача 144. *Найти характеристическую функцию нормального распределения с параметрами* (a, σ^2).

Решение. По определению (54)

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathsf{M}e^{i\xi t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} e^{ixt}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2-2(a+it\sigma^2)x+a^2)/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-a-it\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $y = (x - a - it\sigma^2)/\sigma$:

$$f(t) = e^{iat-\sigma^2t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}x = e^{iat-\sigma^2t^2/2}.$$

Задача 145. *Плотность распределения непрерывной случайной величины* ξ *является четной функцией. Доказать, что ее характеристическая функция вещественна.*

Решение. Согласно определению (54) характеристическая функция случайной величины ξ

$$f(t) = \mathsf{M}e^{i\xi t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{ixt}\,\mathrm{d}x.$$

По формуле Эйлера $e^{ixt} = \cos(xt) + i\sin(xt)$. Поскольку функция $p(x)$ — четная, то произведение $p(x)\cos(xt)$ является четной, а произведение $p(x)\sin(xt)$ нечетной функцией. В результате

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\cos(xt)\,\mathrm{d}x + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\sin(xt)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{\infty} p(x)\cos(xt)\,\mathrm{d}x,$$

что доказывает вещественность $f(t)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 146. Найти характеристические функции следующих распределений: а) показательного распределения; б) распределения Пуассона; в) распределения, равномерного на отрезке [-1;1]; г) геометрического распределения;

Задача 147. Дискретная случайная величина ξ с одинаковой вероятностью принимает положительные и отрицательные значения, то есть $\mathsf{P}(\xi{=}a) = \mathsf{P}(\xi{=}{-a})$. Доказать, что ее характеристическая функция вещественна.

Задача 148. Найти закон распределения, соответствующий характеристическим функциям: а) $\cos t$; б) $\cos^2 t$.

Задача 149. Случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Доказать, что при $\lambda \to \infty$ распределение величины $\eta = (\xi - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ стремится к нормальному с параметрами (0;1).

§ 11. Предельные теоремы

Локальная теорема Муавра—Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно m раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x_m), \tag{58}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}, \qquad x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{59}$$

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных значений аргумента приведена в *приложении* 1; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, так как функция $\varphi(x)$ — четная.

Интегральная теорема Муавра—Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, $(0 < p < 1)$, событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз, приближенно равна

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi(x_{m_2}) - \Phi(x_{m_1}), \tag{60}$$

где
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \tag{61}$$
— функция Лапласа,
$$x_{m_1} = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_{m_2} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$
Таблица значений функции Лапласа для положительных значений ($0 \leqslant x \leqslant 5$) приведена в *приложении* 2; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0.5$; для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная.

Приближения с использованием формул (58) и (60) дают наилучший эффект при $p \approx 1/2$, а при $p < 1/20$ приводят к грубейшим ошибкам[1)]! В этом случае рекомендуется пользоваться предельной теоремой Пуассона.

Теорема Пуассона. Если число независимых испытаний n велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то вероятность того, что событие наступит m раз приближенно равна
$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda = np. \tag{62}$$

Неравенство Чебышева Вероятность того, что отклонение случайной величины ξ от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, оценивается согласно неравенству
$$\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}. \tag{63}$$

Задача 150. *Найти вероятность того, что событие A наступит* 1400 *раз в* 2400 *испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна* 0.6.

Решение. Так как число испытаний $n = 2400$ велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра—Лапласа (58). Вычислим x_m при $m = 1400$:
$$x_{1400} = \frac{1400 - 2400 \cdot 0.6}{\sqrt{2400 \cdot 0.6 \cdot 0.4}} = -\frac{40}{24} = -1.67.$$

[1)] При $n \approx 1000$ и $p \approx 0.002$ можно ошибиться на 25 порядков!

Используя свойство четности функции $\varphi(x)$, по таблице из приложения 1 найдем значение $\varphi(-1.67) = \varphi(1.67) = 0.0989$. Искомая вероятность

$$P_{2400}(1400) = \frac{0.0989}{24} = 0.0041.$$

Задача 151. *Вероятность появления события A в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0.8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.*

Решение. Число испытаний $n = 100$ велико, поэтому используем интегральную теорему Муавра-Лапласа (60).

а) $m_1 = 75,\ m_2 = 90,\ p = 0.8,\ q = 0.2$. Вычисляем

$$\begin{aligned} x_{m_1} = x_{75} &= \frac{75 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -1.25, \\ x_{m_2} = x_{90} &= \frac{90 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 2.5. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, получим

$$\begin{aligned} P_{100}(75 \leqslant m \leqslant 90) &= \Phi(2.5) - \Phi(-1.25) = \Phi(2.5) + \Phi(1.25) = \\ &= 0.4938 + 0.3944 = 0.8882. \end{aligned}$$

Значения функции Лапласа взяты из таблицы в *приложении* 2.

б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно либо 75, либо 76, …, либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять $m_1 = 75,\ m_2 = 100$. Тогда

$$\begin{aligned} x_{m_1} = x_{75} &= \frac{75 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -1.25, \\ x_{m_2} = x_{100} &= \frac{100 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 5. \end{aligned}$$

Искомая вероятность

$$\begin{aligned} P_{100}(75 \leqslant m \leqslant 100) &= \Phi(5) - \Phi(-1.25) = \Phi(5) + \Phi(1.25) = \\ &= 0.5 + 0.3944 = 0.8944. \end{aligned}$$

в) События $\{A$ появилось не менее 75 раз$\}$ и $\{A$ появилось не более 74 раз$\}$ противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность

$$P_{100}(m \leqslant 74) = 1 - P_{100}(75 \leqslant m \leqslant 100) = 1 - 0.8944 = 0.1056.$$

Задача 152. *Учебник издан тиражом* $100\,000$ *экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна* 0.0001. *Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.*

Решение. По условию, $n = 100\,000$, $p = 0.0001$, $m = 5$. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся теоремой Пуассона (62). При этом $\lambda = np = 100\,000 \cdot 0.0001 = 10$. Искомая вероятность

$$P_{100\,000}(5) = \frac{10^5}{5!}e^{-10} = 0.0375.$$

Задача 153. *Оценить вероятность того, что случайная величина* ξ *отклонится от своего математического ожидания более чем на три средних квадратических отклонения.*

Решение. В неравенстве (63) положим $\varepsilon = 3\sigma$, где $\sigma = \sqrt{\mathsf{D}\xi}$ — среднее квадратическое отклонение:

$$\mathsf{P}(|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 154. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

Задача 155. Вероятность рождения мальчика равна 0.51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

Задача 156. Монета брошена $2N$ раз (N велико!). Найти вероятность того, что «орел» выпадет а) ровно N раз. б) на $2m$ раз больше, чем «решка».

Задача 157. Вероятность появления события в каждом из 21 независимого испытания равна 0.7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

Задача 158. Монета брошена $2N$ раз (N велико!). Найти вероятность того, что число выпадений «орла» будет заключено между числами $N - \sqrt{N/2}$ и $N + \sqrt{N/2}$.

Задача 159. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0.8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0.9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

Задача 160. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0.002. Найти вероятность того, что за время t откажут ровно три элемента.

Задача 161. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

Задача 162. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время t. Найти среднее число отказавших за время t элементов, если вероятность того, что за это время откажет хотя бы один элемент, равна 0.98.

Задача 163. Используя неравенство Чебышева, оценить длину интервала, симметричного относительно среднего значения, вероятность попадания в который не менее 0.5. Дисперсия $\mathsf{D}\xi = 1$.

Задача 164. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0.8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом включенных ламп за время T окажется меньше трех.

Математическая статистика

§ 12. Выборочные распределения

Генеральной совокупностью называют множество всех значений измеряемой случайной величины.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называют некоторое подмножество генеральной совокупности, полученное в результате произведенного эксперимента (наблюдения).

Объемом выборки называют число элементов в выборке.

Вариантой называют наблюдаемое значение x_i признака ξ.

Вариационным рядом называют последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке.

Частотой n_i называют число наблюдений варианты. Сумма частот равна объему выборки $\sum\limits_{i=1}^{M} n_i = n$, где M — число вариант.

Относительной частотой называют отношение частоты к объему выборки $p_i^* = n_i/n$. Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{M} p_i^* = 1$.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Эмпирической функцией распределения называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $\xi < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \tag{64}$$

где n_x — число вариант, меньших x.

Полигоном частот (или относительных частот) называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), $(x_2, n_2), \ldots$ (или точки (x_i, p_i^*), смотри рис. 24)

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h_k, а высоты равны отношению n_k/h_k (плотность частоты). Площадь частичного k-го прямоугольника равна $h_k(n_k/h_k) = n_k$ — сумме частот вариант, попавших в k-й интервал. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки. Гистограмма относительных частот состоит из прямоугольников с высотами p_k^*/h_k (рис. 26, 27).

Выборочным средним называют величину

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M} x_k n_k = \sum_{k=1}^{M} x_k p_k^*, \tag{65}$$

где M — число различных вариант.

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M}(x_k - \bar{x})^2 n_k = \sum_{k=1}^{M}(x_k - \bar{x})^2 p_k^*. \tag{66}$$

Иногда более удобна другая формула:

$$D_{\text{в}} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2. \tag{67}$$

Исправленной выборочной дисперсией называется величина

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_{\text{в}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \tag{68}$$

Квадратные корни из величин (66) и (68) называются выборочным средним квадратическим отклонением и исправленным выборочным средним квадратическим отклонением соответственно.

Начальным эмпирическим моментом порядка k называется величина

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k. \tag{69}$$

Центральным эмпирическим моментом порядка k называется величина

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^k. \tag{70}$$

Очевидно, что $\bar{x} = a_1$ и $D_{\text{в}} = m_2$.

Точечной оценкой неизвестного параметра θ теоретического распределения называют число θ^*, зависящее от выборки.

Для оценки неизвестных параметров распределения служат различные методы, такие как *метод моментов* и *метод наибольшего правдоподобия.*

Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

Если распределение определяется одним параметром, то для его отыскания приравнивают один теоретический момент одному эмпирическому моменту того же порядка. Например, можно приравнять начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка: $\alpha_1 = a_1$. Учитывая, что $\alpha_1 = \mathbf{M}\xi$ (см. § 8) и $a_1 = \bar{x}$, получим уравнение

$$\mathbf{M}\xi = \bar{x}. \tag{71}$$

Математическое ожидание является функцией от неизвестного параметра заданного распределения, поэтому, решив уравнение (71) относительно неизвестного параметра, получим его точечную оценку.

Если распределение определяется двумя параметрами, то приравнивают два теоретических момента двум соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. Например:

$$\alpha_1 = a_1,\ \mu_2 = m_2, \qquad \text{или} \qquad \mathbf{M}\xi = \bar{x},\ \mathbf{D}\xi = D_{\text{в}}.$$

Метод наибольшего правдоподобия точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения сводится к отысканию максимума функции одного или нескольких оцениваемых параметров.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — наблюдаемые в данном эксперименте значения случайной величины ξ. *Функцией правдоподобия* называют функцию оцениваемого параметра θ:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = p(x_1, \theta)\, p(x_2, \theta) \dots p(x_n, \theta). \tag{72}$$

В случае, когда ξ — непрерывная случайная величина, $p(x, \theta)$ является плотностью распределения, зависящей от параметра θ. Если ξ — дискретная случайная величина, то $p(x, \theta) = \mathsf{P}(\xi = x, \theta)$.

Оценкой наибольшего правдоподобия параметра θ называют такое его значение θ^*, при котором функция правдоподобия достигает максимума.

Функции L и $\ln L$ достигают максимума при одном и том же значении θ, поэтому вместо отыскания максимума функции L ищут максимум функции $\ln L$, что является более удобным. Уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta} = 0 \tag{73}$$

называют уравнением правдоподобия.

Задача 165. *Для оценки стрелковой подготовки личного состава батальона было отобрано* 50 *человек, каждый из которых произвел* 10 *выстрелов по мишени. Результаты стрельбы представлены в таблице*:

Число попаданий	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число стрелков	1	0	2	1	4	6	8	11	11	2	4

Построить полигон относительных частот, эмпирическую функцию распределения, вычислить выборочные среднее и дисперсию.

Решение. Объем выборки $n = 50$. Приведенная таблица является по сути рядом распределения для частот, в котором число попаданий представляет собой варианту, а число стрелков — частоту. Запишем ряд относительных частот (каждая частота делится на n):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i^*	0.02	0.00	.04	0.02	0.08	0.12	0.16	0.22	0.22	0.04	0.08

и построим полигон относительных частот (рис. 24). Эмпирическая функция распределения изображена на рис. 25. Вычислим выборочное среднее (число вариант $M = 11$):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{11} x_k n_k = \frac{1}{50}(0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + \ldots + 9\cdot 2 + 10\cdot 4) = \frac{162}{25} = 6.48.$$

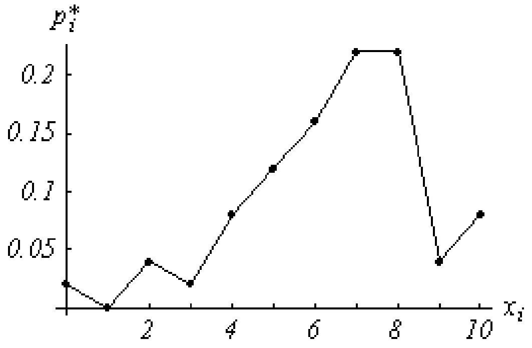

Рис. 24.

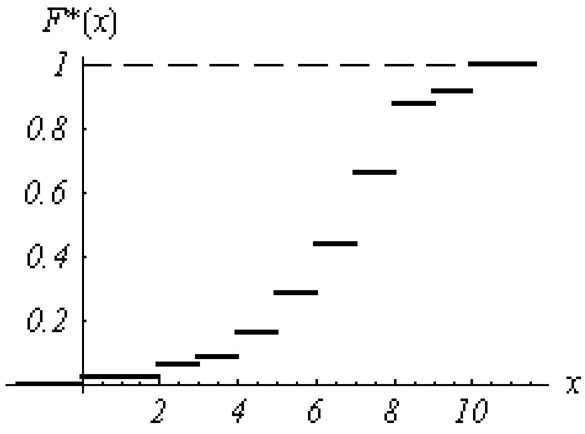

Рис. 25.

По формуле (67) вычислим выборочную дисперсию:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{50}(0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 2 + \ldots + 9^2 \cdot 2 + 10^2 \cdot 4) - 6.48^2 = 4.4896.$$

Исправленная дисперсия

$$s^2 = \frac{50}{49} \cdot 4.4896 = 4.58122.$$

Задача 166. *Ниже приведены результаты измерения роста случайно отобранных* 100 *студентов.*

Рост, см	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174
Число студентов	2	8	12	22	26
Рост, см	174–178	178–182	182–186	186–190	
Число студентов	14	10	5	1	

Построить гистограмму относительных частот. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов (*в качестве вариант принять середины интервалов*).

Решение. Объем выборки $n = 100$. Интервалы I_i статистического ряда одинаковы, поэтому высота прямоугольников в гистограмме вычисляется по формуле $n_i/(nh)$:

I_i	154 – 158	158 – 162	162 – 166	166 – 170	170 – 174
p_i^*	0.005	0.02	0.03	0.055	0.065
I_i	174 – 178	178 – 182	182 – 186	186 – 190	
p_i^*	0.035	0.025	0.0125	0.0025	

Соответствующая гистограмма изображена на рис. 26. На следующем

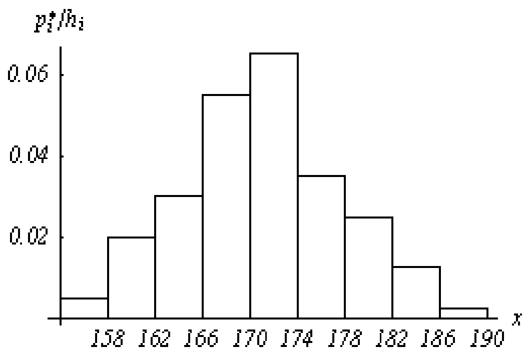

Рис. 26.

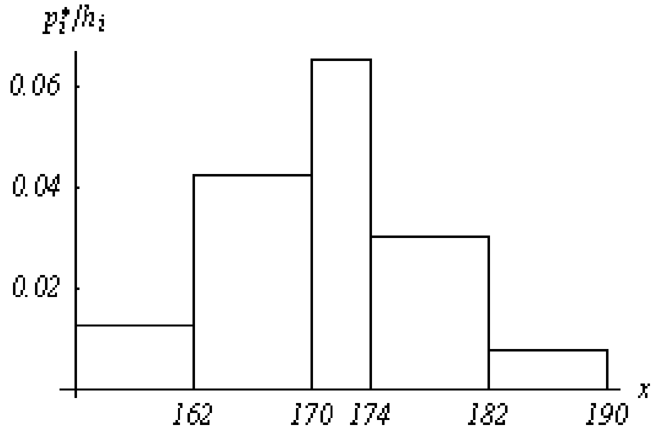

Рис. 27.

рисунке гистограмма состоит из прямоугольников с неравными основаниями. Статистический ряд для построения этой гистограммы получен путем объединения интервалов исходного ряда:

I_i	154–162	162–170	170–174	174–182	182–190
n_i	10	34	26	24	6
p_i^*/h_i	0.0125	0.0425	0.065	0.03	0.0075

Здесь средний интервал имеет длину $h_3 = 4$ см, остальные $h_i = 8$ см.

При вычислении выборочных параметров в качестве вариант будем брать середины интервалов. Так, для первого интервала вариантой служит $x_1 = 156$ см. Выборочное среднее

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{100}(156 \cdot 2 + 160 \cdot 8 + 164 \cdot 12 + 168 \cdot 22 + 172 \cdot 26 + 176 \cdot 14 + \\ &+ 180 \cdot 10 + 184 \cdot 5 + 188 \cdot 1) = 171. \end{aligned}$$

Выборочная и исправленная выборочная дисперсии

$$\begin{aligned} D_{\text{в}} &= \frac{1}{100}(156^2 \cdot 2 + 160^2 \cdot 8 + 164^2 \cdot 12 + 168^2 \cdot 22 + 172^2 \cdot 26 + \\ &+ 176^2 \cdot 14 + 180^2 \cdot 10 + 184^2 \cdot 5 + 188^2 \cdot 1) - 171^2 = 45.24. \end{aligned}$$

$$s^2 = \frac{100}{99} \cdot 45.24 = 45.697.$$

Задача 167. *Случайная величина* ξ (*число семян сорняков в пробе зерна*) *распределена по закону Пуассона*:

$$\boldsymbol{P}(x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}, \tag{74}$$

где x_i — *число семян в одной пробе. Ниже приведено распределение семян сорняков в* n=1000 *пробах зерна* (*в первой строке указано количество семян сорняков в одной пробе*; *во второй строке указано число таких проб*):

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	40	8	4	2

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра распределения Пуассона.

Решение. Требуется оценить один параметр, поэтому достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Приравняем начальный теоретический момент первого порядка α_1 начальному эмпирическому моменту первого порядка a_1. В результате получим уравнение (71). Математическое ожидание распределения Пуассона равно параметру λ этого распределения (см. задачу 105); выборочное среднее вычисляем по формуле (65). Таким образом, точечной оценкой параметра λ распределения Пуассона служит выборочная средняя:

$$\lambda^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{6} x_i n_i = 0.9.$$

Задача 168. *Исходя из условия задачи* 167 *найти точечную оценку неизвестного параметра* λ *методом наибольшего правдоподобия.*

Решение. Составим функцию правдоподобия:

$$L = p(x_1, \lambda)\, p(x_2, \lambda) \ldots p(x_n, \lambda),$$

где $p(x_i, \lambda)$ определены выражением (74). Получим следующую функцию правдоподобия:

$$L = \frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i!}.$$

Прологарифмируем:

$$\ln L = \ln \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!.$$

Найдем первую производную по λ:

$$\frac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i - n.$$

Приравняв первую производную нулю и решив полученное уравнение, получим оценку

$$\lambda^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},$$

которая совпадает с оценкой, полученной в задаче 167 методом моментов.

Найдем вторую производную по λ:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \ln L}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

В точке $\lambda = \lambda^*$ вторая производная отрицательна:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \ln L}{\mathrm{d}\lambda^2}_{|\lambda=\lambda^*} = -\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

Это означает, что точка $\lambda = \lambda^*$ является точкой максимума и ее надо принять в качестве оценки наибольшего правдоподобия неизвестного параметра распределения Пуассона.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 169. Для данного распределения выборки

а)

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

б)

x_i	2	5	7	10
n_i	20	14	10	6

построить полигон относительных частот, эмпирическую функцию распределения, найти среднее значение, выборочную и исправленную дисперсии.

Задача 170. По данному распределению выборки

а)

$x_i - x_{i+1}$	$2-4$	$4-6$	$6-8$	$8-10$
n_i	6	10	4	5

б)

$x_i - x_{i+1}$	$1-5$	$5-9$	$9-13$	$13-17$
n_i	10	20	50	20

построить гистограмму, найти среднее значение, выборочную и исправленную дисперсии. За варианту принять середины интервалов.

Задача 171. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106. Найти: а) выборочную среднюю длину стержня; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

Задача 172. При измерении длины крыла пчелы были получены следующие данные (в мм):

9.68	9.81	9.77	9.60	9.61	9.55	9.74	9.48	9.72	9.70
9.52	9.63	9.68	9.88	9.47	9.44	9.82	9.71	9.84	9.57
9.79	9.43	9.59	9.50	9.78	9.64	9.72	9.71	9.58	9.61

Разбив все значения на 5 интервалов, построить гистограмму относительных частот. Найти выборочное среднее, выборочную и исправленную дисперсию. За варианты принять середины интервалов.

Задача 173. Прибор измеряет жирность молока с точностью до 0.2%. Измерялась жирность молока 20 коров. Данные измерения приведены в таблице (в процентах)

3.8	3.4	4.2	3.4	3.6	3.6	4.0	4.2	4.0	3.6
3.6	3.8	4.0	4.2	3.8	3.8	3.6	3.8	3.8	4.0

Построить вариационный ряд, статистический ряд, полигон относительных частот, эмпирическую функцию распределения. Вычислить выборочное среднее, выборочную и исправленную дисперсию.

Задача 174. Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров α и β гамма-распределения, плотность которого при $x \geqslant 0$

$$p(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x/\beta} \quad (\alpha > -1,\ \beta > 0).$$

Задача 175. Найти методом моментов точечную оценку параметра распределения, плотность которого задана функцией

$$p(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\alpha^3}{(x^2+\alpha^2)^2}.$$

Задача 176. Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку неизвестного параметра p (вероятность появления события в одном испытании) биномиального распределения:

$$P_m(x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i},$$

где x_i — число появлений события в i-м опыте, m — количество испытаний в одном опыте, n — число опытов.

Задача 177. Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения.

Задача 178. Найти методом наибольшего правдоподобия точечные оценки параметров a и σ^2 нормального распределения.

Задача 179. Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку параметров a и σ распределения Кэптейна, плотность которого

$$p(x) = \frac{f'(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(f(x)-a)^2/(2\sigma^2)},$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция.

§ 13. Интервальные оценки

Интервальной называют оценку параметра распределения, которая определяется двумя числами — концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок.

Пусть θ^* — оценка параметра θ, найденная по данным выборки. Пусть $\delta > 0$ и $|\theta - \theta^*| < \delta$, тогда число δ характеризует *точность* оценки. Чем меньше δ, тем оценка точнее. Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка θ^* удовлетворяет неравенству $|\theta - \theta^*| < \delta$; можно лишь говорить о вероятности β, с которой это неравенство осуществляется.

Доверительной вероятностью (*надежностью*) оценки называют вероятность β, с которой осуществляется неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве β берут число близкое к единице. Наиболее часто доверительную вероятность задают равной 0.95, 0.99 или 0.999. Величину $2\alpha = 1 - \beta$ называют *уровнем значимости.*

Доверительным интервалом называют интервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью β.

Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

1) Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии σ:

$$\bar{x} - \varepsilon_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \varepsilon_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{75}$$

где n — объем выборки, ε_β — значение аргумента функции Лапласа, при котором $2\Phi(\varepsilon_\beta) = \beta$. Значения функции Лапласа приведены в *приложении* 2.

2) Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии:

$$\bar{x} - t_\beta \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\beta \frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{76}$$

где s — исправленное среднее квадратическое отклонение, t_β — значение аргумента функции распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы $F_{\tau_{n-1}}(x)$, при котором $2F_{\tau_{n-1}}(t_\beta) = \beta$. Таблица соответствующих значений t_β при заданных n и β приведена в *приложении* 3. При $n \geqslant 30$ функция распределения $F_{\tau_n}(x)$ практически не отличается от функции Лапласа.

3) Доверительный интервал для дисперсии при известном математическом ожидании a:
$$\frac{z}{u_\alpha} < \sigma < \frac{z}{u_{1-\alpha}}, \tag{77}$$
где $z^2 = \sum(x_i - a)^2$, u_α^2 — значение аргумента функции распределения χ^2-Пирсона (хи-квадрат Пирсона) с n степенями свободы $F_{\chi_n}(x)$, при котором $F_{\chi_n}(u_\alpha^2) = 1 - \alpha = (1+\beta)/2$. Соответственно, $F_{\chi_n}(u_{1-\alpha}^2) = \alpha = (1-\beta)/2$. Значения u_α^2 при заданных n и α приводятся в таблице *приложения* 4.

4) Доверительный интервал для дисперсии при неизвестном математическом ожидании строится по формуле
$$\frac{s\sqrt{n-1}}{u_\alpha} < \sigma < \frac{s\sqrt{n-1}}{u_{1-\alpha}}, \tag{78}$$
в которой значения u_α и $u_{1-\alpha}$ определяются по распределению хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы, а s — исправленное среднее квадратическое отклонение.

Задача 180. *Дана выборка нормально распределенной случайной величины*:

x_i	-1	0	1	3
n_i	4	2	6	4

Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания с доверительной вероятностью $\beta = 0.99$ *при неизвестной дисперсии*.

Решение. Поскольку дисперсия распределения неизвестна, то для вычисления доверительного интервала следует использовать формулу (76). Объем выборки $n = 16$. Вычислим выборочное среднее и исправленную дисперсию:

$$\bar{x} = \frac{1}{16}(-1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 6 + 3\cdot 4) = 0.875,$$
$$s^2 = \frac{1}{15}\big((-1-0.875)^2\cdot 2 + (0-0.875)^2\cdot 4 + (1-0.875)^2\cdot 6+$$
$$+(3-0.875)^2\cdot 4\big) = 2.25.$$

Находим $s = 1.5$. Величину t_β определим по таблице из *приложения* 3. Для доверительной вероятности $\beta = 0.99$ значение $t_\beta = 2.95$. Искомые границы интервала:

$$1 - 2.95\cdot 1.5/4 < a < 1 + 2.95\cdot 1.5/4 \qquad \text{или}$$
$$-0.23 < a < 1.98.$$

Задача 181. *Найти доверительный интервал для оценки с доверительной вероятностью* $\beta = 0.95$ *неизвестного математического ожидания по выборке из задачи* 165, *если дисперсия* $\sigma = 2$. *Считается, что результаты стрельбы распределены нормально.*

Решение. Выборочное среднее вычислено в задаче 165 и равно $\bar{x} = 6.48$, объем выборки $n = 50$. Поскольку дисперсия известна, то для построения доверительного интервала воспользуемся формулой (75). Величину $\varepsilon_\beta = 1.96$ определим по таблице из *приложения* 2, как аргумент функции Лапласа, при котором она принимает значение $\beta/2 = 0.95/2 = 0.475$. Находим нижнюю и верхнюю границу интервала:

$$\bar{x} - \varepsilon_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6.48 - 0.55 = 5.93,$$
$$\bar{x} + \varepsilon_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6.48 + 0.55 = 7.03.$$

Искомый доверительный интервал $[5.93, 7.03]$.

Задача 182. *По данным задачи* 166 *оценить среднее квадратическое отклонение с надежностью* 0.95. *Считается, что распределение людей по их росту является нормальным.*

Решение. Истинное значение среднего роста студентов неизвестно, поэтому используем формулу (78) . Исправленная дисперсия вычислена в задаче 166: $s = \sqrt{45.697} \approx 6.76$. Объем выборки $n = 100$, следовательно, распределение χ^2 имеет 99 степеней свободы. Доверительная вероятность $\beta = 0.95$, откуда находим $\alpha = (1-\beta)/2 = 0.025$ и $1-\alpha = (1+\beta)/2 = 0.975$. По таблице критических точек распределения χ^2 в *приложении* 4 определяем $u_\alpha^2 = 128.4$ и $u_{1-\alpha}^2 = 73.36$. Искомый доверительный интервал:

$$\begin{aligned} 6.76\sqrt{99/128.4} <\ & \sigma < 6.76\sqrt{99/73.36}, \\ 5.94 <\ & \sigma < 7.85. \end{aligned}$$

Задача 183. *В задаче* 180 *найти доверительный интервал для среднего квадратического отклонения с надежностью* $\beta = 0.9$, *если известна генеральная средняя* $a = 1$.

Решение. Вычислим величину

$$z^2 = \sum_{i=1}^{4}(x_i-a)^2 n_i = (-1-1)^2\cdot 2+(0-1)^2\cdot 4+(1-1)^2\cdot 6+(3-1)^2\cdot 4 = 34.$$

Уровень значимости $\alpha = (1-\beta)/2 = 0.05$. Для определения границ интервала используем распределение χ^2 с $n = 16$ степенями свободы. По таблице из *приложения* 4 находим $u_\alpha^2 = 26.3$ и $u_{1-\alpha}^2 = 7.96$. Искомый доверительный интервал:

$$\begin{aligned} \sqrt{34/26.3} <\ & \sigma < \sqrt{34/7.96}, \\ 1.14 <\ & \sigma < 2.07. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 184. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 ч. Найти с надежностью 0.95 доверительный интервал для средней продолжительности a горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ *ч*. Предполагается, что продолжительность горения ламп распределена нормально.

Задача 185. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений $a = 40$ *м* произведено пять равноточных измерений расстояния от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния a до цели с надежностью $\beta = 0.95$, зная среднее результатов измерений $\bar{x} = 2000$ м.

Задача 186. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0.975 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней равна 0.2, если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $a = 1.5$.

Задача 187. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0.95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Задача 188. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 30.1$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\beta = 0.99$. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Задача 189. По данным выборки объема n из генеральной совокупности нормально распределенного количественного признака найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение s. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью β, если: а) $n = 10,\ s = 5.1,\ \beta = 0.9$; б) $n = 50,\ s = 14,\ \beta = 0.99$.

Задача 190. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 12$:

x_i	-3	-2	-1	0	1
n_i	2	2	4	3	1

При помощи доверительного интервала оценить с надежностью 0.95 генеральное среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенного признака генеральной совокупности, среднее значение которого $a = -1$.

Задача 191. Из генеральной совокупности нормально распределенного признака извлечена выборка объемом $n = 50$:

-5.06	9.09	-2.54	10.53	5.19	3.14	4.74	8.	-6.87	-0.02
7.39	-4.05	-1.66	0.86	-0.91	-6.96	-3.05	-3.22	8.5	3.08
-6.11	3.09	6.59	-0.41	10.43	3.49	4.65	-0.22	-1.44	-5.35
11.92	0.53	-1.64	4.4	-3.56	-0.2	-9.7	0.33	6.13	-0.35
7.09	-0.8	7.15	3.78	6.64	3.38	-5.72	0.98	7.	11.23

Построить статистический ряд, распределив варианты по 5 интервалам. Для полученного распределения а) найти выборочное среднее, выборочную и исправленную дисперсии (в качестве вариант принять середины интервалов); б) построить доверительный интервал для среднего значения с надежностью 0.999; в) построить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения с надежностью 0.99.

Задача 192. Из генеральной совокупности нормально распределенного признака извлечена выборка объемом $n = 50$:

2	-8	-4	1	-9	-5	2	7	-15	-4
-3	-5	-2	-10	-1	-7	2	3	-8	-6
4	-1	6	-6	-10	-4	-2	-2	9	-13
2	-1	8	0	-6	-6	-4	-2	0	-13
0	1	-3	2	2	-9	-1	-3	1	2

Построить статистический ряд и для полученного распределения а) найти выборочное среднее, выборочную и исправленную дисперсии; б) построить доверительный интервал для среднего значения с надежностью 0.95; в) построить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения с надежностью 0.9.

§ 14. Статистическая проверка гипотез

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известного распределения.

Нулевой (*основной*) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (*альтернативной*) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

В итоге проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называют *уровнем значимости* и обозначают через α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают через β.

Статистическим критерием (*или просто критерием*) называют случайную величину K, которая служит для проверки гипотезы. Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частное *наблюдаемое* или *эмпирическое* значение критерия $K_{\text{набл}}$.

Множество всех возможных значений критерия разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается — *критическая область*, а другая — при которых она принимается — *область принятия гипотезы*. Точки, отделяющие одну область от другой, называют *критическими точками* $k_{\text{кр}}$. Гипотеза принимается, если наблюдаемое значение критерия оказывается в области принятия гипотезы. Поскольку K — одномерная случайная величина, то это условие формулируется в виде неравенства, например $K_{\text{набл}} < k_{\text{кр}}$.

Примеры статистических критериев:

1) Сравнение двух дисперсий s_ξ^2 и s_η^2 нормальных генеральных совокупностей по независимым выборкам с объемами n и m.

   Нулевая гипотеза H_0: генеральные дисперсии двух нормальных совокупностей равны, т. е. $\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\eta$; конкурирующая гипотеза H_1: $\mathsf{D}\xi \neq \mathsf{D}\eta$.

   Наблюдаемое значение критерия:

$$F_{\text{набл}} = \frac{s_\xi^2}{s_\eta^2}, \tag{79}$$

где s_ξ^2 — большее значение исправленной дисперсии, а s_η^2 — меньшее. Таким образом, всегда $F_{\text{набл}} \geqslant 1$. Критическая точка $F_{\text{кр}}$ определяется по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора *приложения* 5 по уровню значимости α (в задачах указывается уровень значимости 2α; чтобы воспользоваться таблицей, его необходимо разделить на два) и числам степеней свободы $k_1 = n - 1$ (для большей исправленной дисперсии) и $k_2 = m - 1$ (для меньшей исправленной дисперсии).

Если $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.
Если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают.

2) Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы, причем объемы выборок n и m являются малыми, т. е. $n, m < 30$.

   Нулевая гипотеза H_0: математические ожидания двух нормальных совокупностей равны, т. е. $\mathbf{M}\xi = \mathbf{M}\eta$; конкурирующая гипотеза H_1: $\mathbf{M}\xi \neq \mathbf{M}\eta$.

   Наблюдаемое значение критерия:

$$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{(n-1)s_\xi^2 + (m-1)s_\eta^2}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}, \qquad (80)$$

   где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — выборочные средние, а s_ξ^2 и s_η^2 — исправленные выборочные дисперсии. Критическая точка $t_{\text{кр}}$ определяется по таблице *приложения* 3 по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $n + m - 2$.

   Если $|t_{\text{набл}}| < t_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.
   Если $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают.

3) Сравнение выборочного параметра с гипотетическим генеральным значением этого параметра может быть выполнено на основе интервальных оценок (стр. 76). Например, сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней при известной дисперсии σ осуществляется при помощи неравенства (77), которое задает область принятия гипотезы.

   В этом случае нулевая гипотеза H_0: математическое ожидание a нормальной совокупности равна гипотетическому значению a_0, т. е. $a = a_0$; конкурирующая гипотеза H_1: $a \neq a_0$.

Наблюдаемое значение критерия:

$$\theta_{\text{набл}} = \frac{|\bar{x} - a_0|\sqrt{n}}{\sigma}. \tag{81}$$

Критическая точка $\theta_{\text{кр}}$ определяется по таблице значений функций Лапласа *приложения* 2 по заданному уровню значимости 2α: $2\,\Phi(\theta_{\text{кр}}) = 1 - 2\alpha$.

Если $\theta_{\text{набл}} < \theta_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\theta_{\text{набл}} > \theta_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Аналогично выполняется сравнение параметров в других случаях, приведенных в § 13.

4) Критерий согласия χ^2 Пирсона для проверки гипотезы о том, что случайная величина ξ имеет распределение $F(x)$. Рассматривается эмпирическое распределение, содержащее s интервалов или вариант с частотами n_i, $i = 1, \ldots, s$. Для этого необходимо:

   а) Найти по заданному эмпирическому распределению оценки параметров предполагаемого распределения.

   б) Приняв эти оценки в качестве истинных значений параметров распределения, найти теоретические частоты n_i'.

   в) Вычислить наблюдаемое значение критерия Пирсона

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_i \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}. \tag{82}$$

   г) По таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости 2α и числу степеней свободы $k = s - r - 1$ (r — число неизвестных параметров предполагаемого распределения) найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}$.

   д) Если $\chi_{\text{набл}} < \chi_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о предполагаемом распределении случайной величины ξ.
   Если $\chi_{\text{набл}} > \chi_{\text{кр}}$, то гипотезу отвергают.

Задача 193. *Из двух партий изделий, изготовленных на двух одинаково настроенных станках, извлечены малые выборки, объемы которых $n = 10$ и $m = 12$. Получены следующие результаты измерения контролируемого параметра изделий:*

x_i	3.4	3.5	3.7	3.9
n_i	2	3	4	1

y_i	3.2	3.4	3.6
m_i	2	2	8

Требуется при уровне значимости $2\alpha = 0.01$ *проверить гипотезу* H_0: $\mathbf{M}\xi = \mathbf{M}\eta$ *о равенстве средних размеров изделий при конкурирующей гипотезе* H_1: $\mathbf{M}\xi \neq \mathbf{M}\eta$. *Предполагается, что случайные величины* ξ *и* η *распределены нормально.*

Решение. По формулам (65)–(68) определяем выборочные средние

$$\bar{x} = 3.6, \qquad \bar{y} = 3.5$$

и исправленные выборочные дисперсии

$$s_\xi^2 = 0.0267, \qquad s_\eta^2 = 0.0255.$$

Исправленные дисперсии различны, тогда как рассматриваемый критерий предполагает, что генеральные дисперсии одинаковы. Поэтому необходимо сравнить дисперсии, используя критерий Фишера-Снедекора.

Наблюдаемое значение критерия (формула (79)):

$$F_{\text{набл}} = \frac{0.0267}{0.0255} = 1.05.$$

Критическую точку находим по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора на уровне значимости 0.005 (половина от указанного в задаче) со степенями свободы $k_1 = n-1 = 9$ и $k_2 = m-1 = 11$: $F_{\text{кр}} = 5.54$. Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, то дисперсии различаются незначимо, и, следовательно, можно считать, что допущение о равенстве генеральных дисперсий выполняется.

Сравним средние, для чего вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента (80): $t_{\text{набл}} = 1.45$. По уровню значимости $2\alpha = 0.01$ и числу степеней свободы $k = n + m - 2 = 20$ находим в таблице *приложения* 3 критическое значение $t_{\text{кр}} = 2.85$.

Так как $|t_{\text{набл}}| < t_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о равенстве средних. Таким образом, средние размеры изделий существенно не различаются.

Задача 194. *Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением* $a = 5.2$ *извлечена выборка* *объема* $n = 100$ *и по ней найдена выборочная средняя* $\bar{x} = 27.56$. *Требуется при уровне значимости* $2\alpha = 0.05$ *проверить нулевую гипотезу* H_0: $a = a_0 = 26$ *при конкурирующей гипотезе* H_1: $a \neq 26$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$\theta_{\text{набл}} = \frac{|27/56 - 26|\sqrt{100}}{5.2} = 3.$$

Для данного уровня значимости $\Phi(\theta_{\text{кр}}) = 0.475$; по таблице значений функции Лапласа (см. *приложение* 2) находим, что $\theta_{\text{кр}} = 1.96$.

Так как $\theta_{\text{набл}} > \theta_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочная и гипотетическая генеральная средние различаются значимо.

Задача 195. *Используя критерий согласия Пирсона, при уровне значимости* $\alpha = 0.05$ *проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности* ξ *с эмпирическим распределением выборки объема* $n = 100$:

Интервал $(x_i; x_{i+1})$	(3;8)	(8;13)	(13;18)	(18;23)	(23;28)	(28;33)	(33;38)
Частота n_i	6	8	15	40	16	8	7

Решение. Вычислим выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение, приняв в качестве вариант середины интервалов:

$$\begin{array}{cccccccc} x_i^* & 5.5 & 10.5 & 15.5 & 20.5 & 25.5 & 30.5 & 35.5 \\ n_i & 6 & 8 & 15 & 40 & 16 & 8 & 7 \end{array}$$

По формулам (65) и (66) находим

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} x_i^* n_i = 20.7,$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} (x_i^* - \bar{x})^2 n_i = 52.96.$$

Таким образом, в качестве теоретического распределения будем рассматривать нормальное распределение с параметрами $a = \bar{x} = 20.7$

и $\sigma = \sqrt{D_в} = 7.28$. Теоретические частоты вычислим по формуле $n'_i = nP_i$, где P_i — вероятность попадания в i-й интервал.

Чтобы вычислить эти вероятности, перейдем от случайной величины ξ к величине $\eta = (\xi - a)/\sigma$, имеющей нормальное распределение с параметрами (0;1). Найдем соответствующие границы интервалов $y_i = (x_i - a)/\sigma$; при этом крайние интервалы преобразуем в бесконечные полуинтервалы, т. е. примем, что $y_1 = -\infty$, а $y_8 = \infty$. Это делается, чтобы сохранить нормировку вероятности $\sum P_i = 1$. В результате получаем следующее соответствие между границами интервала:

x_i	3	8	13	18	23	28	33	38
y_i	$-\infty$	-1.75	-1.06	-0.37	0.32	1.00	1.69	∞
$\Phi(y_i)$	-0.5	-0.4599	-0.3554	-0.1443	0.1255	0.3413	0.4545	0.5

Вероятность попадания в i-й интервал $P_i = \Phi(y_{i+1}) - \Phi(y_i)$. Значения функции Лапласа берем из таблицы *приложения* 2. Результаты вычисления вероятностей и теоретических частот приведены в таблице:

Интервал $(y_i; y_{i+1})$	Частота n_i	Вероятность P_i	Теор. частота n'_i	$n_i - n'_i$
$(-\infty; -1.75)$	6	0.0401	4.01	1.99
$(-1.75; -1.06)$	8	0.1045	10.45	-2.45
$(-1.06; -0.37)$	15	0.2111	21.11	-6.11
$(-0.37; 0.32)$	40	0.2698	26.98	13.02
(0.32;1.00)	16	0.2158	21.58	-5.58
(1.00;1.69)	8	0.1137	11.37	-3.37
$(1.69;\infty)$	7	0.0455	4.55	2.45

По формуле (82) вычисляем наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = 13.39$.

Для определения критической точки используем таблицу *приложения* 4 с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ и числом степеней свободы $k = s - r - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$ ($s = 7$ — число интервалов, $r = 2$ — число параметров распределения, вычисленных по выборке): $\chi^2_{кр} = 9.49$.

Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ — отвергаем гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности ξ; другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо. Это означает, что данные наблюдений не согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 196. По двум независимым выборкам, объемы которых $n = 14$ и $m = 10$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей ξ и η, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_\xi^2 = 0.84$ и $s_\eta^2 = 2.52$. При уровне значимости $2\alpha = 0.1$ проверить нулевую гипотезу H_0: $\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\eta$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $\mathsf{D}\xi \neq \mathsf{D}\eta$.

Задача 197. Двумя методами проведены измерения одной и той же физической величины. Первый метод дал следующие результаты:

$$9.6, \quad 10.0, \quad 9.8, \quad 10.2, \quad 10.6, \quad 10.0;$$

второй метод:

$$10.4, \quad 9.7, \quad 10.0, \quad 10.3, \quad 9.9, \quad 10.0, \quad 10.1, \quad 9.9.$$

Можно ли считать, что оба метода обеспечивают одинаковую точность измерений, если принять уровень значимости $2\alpha = 0.01$? Предполагается, что результаты измерений распределены нормально и выборки независимы.

Задача 198. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 10$ и $m = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние: $\bar{x} = 142.3$, $\bar{y} = 145.3$ и исправленные дисперсии: $s_\xi^2 = 2.7$ и $s_\eta^2 = 3.2$. При уровне значимости $2\alpha = 0.01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\eta$ при конкурирующей гипотезе H_1: $\mathsf{M}\xi \neq \mathsf{M}\eta$.

Задача 199. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 40$ извлечена выборка объема $n = 64$ и по ней найдена выборочная средняя $\bar{x} = 136.5$. Требуется при уровне значимости $2\alpha = 0.01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 130$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 130$.

Задача 200. Произведено 100 замеров физической характеристики объекта. Разность между средним значением и величиной, предсказываемой теорией, составила 0.2. Можно ли результаты измерения признать соответствующими теории на уровне значимости $2\alpha = 0.02$, если точность измерения равна 0.5? Предполагается, что величина ошибки измерения распределена нормально.

Задача 201. По выборке объема $n = 16$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности, найдены выборочная средняя $\bar{x} = 118.2$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 3.6$. Требуется при уровне значимости $2\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 120$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 120$.

Задача 202. Проектный контролируемый размер изделий, изготовляемых станком-автоматом, $a_0 = 35$ мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

Контролируемый размер x_i	34.8	34.9	35.0	35.1	35.3
Число изделий n_i	2	3	4	6	5

Требуется при уровне значимости $2\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 35$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 35$.

Задача 203. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 21$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2 = 16.2$. Требуется при уровне значимости $2\alpha = 0.01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 15$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы H_1: $\sigma^2 \neq 15$.

Задача 204. В результате длительного хронометража времени сборки узла различными сборщиками установлено, что дисперсия этого времени $\sigma_0^2 = 2$ мин^2. Результаты 20 наблюдений за работой новичка таковы:

Время сборки узла в мин x_i	56	58	60	62	64
Число узлов n_i	1	4	10	3	2

Можно ли при уровне значимости $2\alpha = 0.05$ считать, что новичок работает ритмично (в том смысле, что дисперсия затрачиваемого им времени существенно не отличается от дисперсии времени остальных сборщиков)?

Задача 205. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с заданным эмпирическим распределением:

Интервал $(x_i; x_{i+1})$	$(-20; -10)$	$(-10; 0)$	(0;10)	(10;20)
Частота n_i	20	47	80	89
Интервал $(x_i; x_{i+1})$	(20;30)	(30;40)	(40;50)	
Частота n_i	40	16	8	

Задача 206. В итоге испытания 450 ламп было получено эмпирическое распределение длительности их горения (в первом столбце указаны интервалы в часах, во втором столбце — частота n_i, т. е. количество ламп, время горения которых заключено в пределах соответствующего интервала):

Интервал $x_i - x_{i+1}$	Частота n_i	Интервал $x_i - x_{i+1}$	Частота n_i
0–400	121	1600–2000	45
400–800	95	2000–2400	36
800–1200	76	2400–2800	21
1200–1600	56		

Требуется при уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что время горения ламп распределено по показательному закону.

Задача 207. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности ξ с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Задача 208. Произведено $n = 100$ опытов. Каждый опыт состоял из $N = 10$ испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события A равна 0.3. В итоге получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано число x_i появлений события A в одном опыте; во второй строке — частота n_i, т. е. число опытов, в которых наблюдалось x_i появлений события A):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	10	27	32	23	6

Задача 209. Отдел технического контроля проверил $n = 200$ партий одинаковых изделий и получил следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i нестандартных изделий в одной партии; во второй строке — частота n_i, т. е. количество партий, содержащих x_i нестандартных изделий):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	116	56	22	4	2

Указания и ответы

Задача 4. *Ответ.* а) $A\,\overline{B}\,\overline{C}$; б) $A\,B\,\overline{C}$; в) $A\,B\,C$; г) $A+B+C$; д) $A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C$.

Задача 5. *Ответ.* Один из вариантов $A=B_1B_4+B_2B_5+B_1B_3B_5+B_2B_3B_4$.

Задача 6. *Ответ.* $B=A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

Задача 7. *Ответ.* Событие B={выигрыш по билету только одной лотереи}. Событие B={выигрыш по билету хотя бы одной лотереи}.

Задача 8. *Указание.* Можно воспользоваться диаграммами, изображенными на рис. 1, закрашивая произошедшие события в белый цвет, а непроизошедшие — в черный. Если в результате всех операций белый цвет останется, то событие произошло.

Ответ. Событие $A+BC$ произошло, остальные не произошли.

Задача 9. *Ответ.* а) $\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n$; б) $A_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\ldots\overline{A}_n+\ldots+\overline{A}_1\ldots\overline{A}_{n-1}A_n$; в) $A_1+A_2+\ldots+A_n$; г) сумма событий а) и б).

Задача 16. *Ответ.* $A_5^3=60$.

Задача 17. *Указание.* Поскольку девушки водят хоровод, то циклическая перестановка не дает новой расстановки.

Ответ. 720.

Задача 18. *Указание.* Любую комбинацию кодового замка можно рассматривать как размещение с повторением.

Ответ. $\bar{A}_{10}^5-1=99\,999$.

Задача 19. *Указание.* Каждая буква представляет собой упорядоченный набор некоторого числа двух символов.

Ответ. а) 5; б) 4.

Задача 20. *Указание.* В этой задаче играет роль и то, кто будет выбран в руководство общества, и то, какие посты займут выбранные. Действительно, выбор: президент — Иванов, вице-президент — Татаринов, ученый секретарь — Тимошенко, казначей — Алексеев, отличается от выбора: президент — Тимошенко, вице-президент — Иванов, ученый секретарь — Татаринов и казначей — Алексеев.

Ответ. $A_{25}^4 = 303\,600$.

Задача 21. *Указание.* В отличие от предыдущей задачи порядок выбора членов правления не имеет значения.

Ответ. $C_{100}^5 = 75\,287\,520$.

Задача 22. *Указание.* Количество звезд у одного участника может быть любым; например, один ученик может получить 7 звезд, остальные — ни одной.

Ответ. $\bar{C}_5^7$.

Задача 29. *Ответ.* а) 0.384; б) 0.096; в) 0.008.

Задача 30. *Указание.* Число благоприятных событий можно вычислить, рассматривая двухтомник как одну книгу.

Ответ. $2/n$.

Задача 31. *Ответ.* $C_5^2/C_6^3 = 1/2$.

Задача 32. *Ответ.* $C_8^5 C_4^4/C_{12}^9 = 14/55$.

Задача 33. *Ответ.* а) $1/l^{k-1}$; б) A_l^k/l^k.

Задача 34. *Указание.* Вероятности событий A и B вычисляются согласно гипергеометрической схеме.

Ответ. $\mathsf{P}(A) \approx 0.3902 < \mathsf{P}(B) \approx 0.4994$.

Задача 35. *Указание.* Событие, в котором Петров вышел на 3-м этаже, а Васечкин — на 6-м, отличается от события, в котором Петров вышел на 6-м этаже, а Васечкин — на 3-м. Поэтому полное число элементарных событий вычисляется по упорядоченной выборке с повторениями.

Ответ. $\mathsf{P}(A) = 1/216$, $\mathsf{P}(B) = 1/36$, $\mathsf{P}(C) = 5/54$.

Задача 36. *Указание.* а) Для определения вероятности события A={среди выбранных нет парных ботинок} необходимо подсчитать число способов, которыми $2r$ непарных ботинок можно выбрать из $2n$ ботинок. Для этого надо найти, сколькими способами можно расставить ботинки в два ряда так, чтобы в каждом ряду не было ботинок из одной пары. В каждом ряду, очевидно, будет находиться n ботинок. Затем надо найти количество вариантов взять $2r$ ботинок из какого-либо одного ряда.

б) Для определения числа способов получить только одну пару среди $2r$ ботинок удобно исключить эту пару и подсчитать число возможных способов набрать оставшиеся ботинки, как это было сделано в пункте а). Затем надо учесть, сколькими способами может быть выбрана эта пара.

Ответ. а) $2^{2r}C_n^{2r}/C_{2n}^{2r}$; б) $n\,2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}/C_{2n}^{2r}$.

Задача 37. *Указание.* а) Число способов, которыми может реализоваться событие A определяется количеством вариантов, которыми можно выбрать 2 купе из 9, и в каждом из них — сколькими способами можно разместить 7 человек на 8 местах. При подсчете числа событий, благоприятствующих появлению события B, надо учесть, что среди размещений 7 человек на 12 местах есть такие, в которых пассажиры оказываются только в двух купе, а третье оказывается пустым. Все такие комбинации должны быть исключены. Другой путь— составить различные возможные размещения пассажиров на 4 местах в *каждом* из выбранных трех купе. Например, в одном купе может ехать один человек, а в двух других — по трое. Такая комбинация может быть реализована в трех вариантах — в зависимости от того, где едет одинокий пассажир.

б) Группа займет два купе, если первый билет куплен на первое или второе место в любое купе, кроме последнего. В остальных случаях группа займет три купе.

Ответ. а) $\mathsf{P}(A) = 1/28\,985$, $\mathsf{P}(B) = 224/28\,985$;
б) $\mathsf{P}(A) = 8/15$, $\mathsf{P}(B) = 7/15$.

Задача 38. *Указание.* Положение монеты полностью характеризуется положением ее центра. Благоприятным событием будет такое множество точек положения центра монеты, при котором она не будет пересекать прямую.

Ответ. $1 - r/a$.

Задача 39. *Указание.* Положение монеты полностью характеризуется положением ее центра. Необходимо построить фигуру, такую, что если центр монеты находится внутри этой фигуры, то монета не пересекает линии.

Ответ. $(a - 2r)^2/a^2$.

Задача 40. *Указание.* На плоскости (p, q) найти область, соответствующую условию положительности дискриминанта.

Ответ. $1/12$.

Задача 41. *Указание.* Положение одной точки можно зафиксировать. Для двух других ввести угловые координаты φ и ψ). На плоскости (φ, ψ) изобразить область возможных и благоприятных пар точек (φ, ψ).

Ответ. $3/4$.

Задача 42. *Указание.* Подсказкой служит решение задачи Бюффона, приведенное на стр. 16.

Ответ. а) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{\pi}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0.837$; б) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\pi} - \dfrac{2}{3} \approx 0.436$;

в) $\dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{\pi}\left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 0.401$.

Задача 43. *Указание.* Смотри задачу 28.

Ответ. $139/1152$.

Задача 44. *Указание.* Сложить треугольник из трех отрезков можно только в том случае, если сумма длин двух любых из этих отрезков больше длины третьего. Обозначив координаты точек x и y, нужно найти множество точек на плоскости (xOy), удовлетворяющих этому условию.

Ответ. $1/4$.

Задача 45. *Указание.* Треугольник из трех отрезков может получиться только в том случае, если сумма длин двух любых из этих отрезков больше длины третьего. Обозначив длины отрезков x, y и z, нужно построить трехмерную фигуру, отвечающую этим условиям.

Ответ. 1/2.

Задача 48. *Ответ.* 0.14.

Задача 49. *Указание.* Пусть события A = {попал Костя}, B = {попал приятель}. События A и B — независимы. Искомое событие есть $A + B$.

Ответ. 0.94.

Задача 50. *Указание.* Пусть событие A_i= {в i-м измерении превышена точность}. Искомое событие представляет собой сумму несовместных событий вида $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ и т. п.

Ответ. 0.432.

Задача 51. *Указание.* Пусть событие A_i= {i-й элемент работает безотказно}. В каждом случае искомое событие следует представить как сумму несовместных событий. Например, в случае в) реализуется единственное событие $A_1A_2A_3$.

Ответ. а) 0.188; б) 0.452; в) 0.336.

Задача 52. *Указание.* Удобнее перейти к противоположному событию, которое состоит в том, что при одном цикле наблюдения объект не обнаруживается, и найти сначала вероятность не обнаружить объект за n циклов.

Ответ. $1 - (1 - p)^n$.

Задача 53. *Указание.* Воспользоваться решением задачи 5 и формулой (16).

Ответ. 0.02368.

Задача 54. *Ответ.* а) $(1 - p)p$; б) $1 - (1 - p)^2 = (2 - p)p$.

Задача 55. *Ответ.* $1 - (1 - p_1p_2)^{n-1}$.

Задача 56. *Ответ.* $n \geqslant 5$.

Задача 57. *Указание.* События A = {выигрывает Иван Кузмич} и B = {выигрывает Пелагея Марковна} противоположны. Событие A наступит, если Василий в первых трех попытках достанет неподходящий ключ. Попытки вытащить такой ключ являются независимыми, с вероятностью «успеха» $p = 4/5$.

Ответ. Шансы 64:61 в пользу Ивана Кузьмича.

Задача 58. *Указание.* Удобно перейти к противоположному событию A ={ни разу не было двух тузов в прикупе при n раздачах}. Из условия $1 - \mathbf{P}(A) > 1/2$ определяется число n.

Ответ. 57.

Задача 62. *Указание.* Для вычисления вероятности вытянуть счастливый билет подругой, которая подходит второй, нужно воспользоваться формулой полной вероятности 22.

Ответ. Вероятность вытянуть нужный билет не зависит от того, какой по очереди Люся подойдет за билетом. Этот вывод не зависит от количества выученных билетов.

Задача 63. *Ответ.* 0.85.

Задача 64. *Указание.* Событие A состоит в том, что разность между первым выпавшим числом k и вторым выпавшим числом l будет не меньше m, т. е. $A = \{k - l \geqslant m\}$. События B_k заключаются в том, что первым выбрано число $k = m + 1, \ldots n$.

Ответ. $(n - m)(n - m + 1)/2n(n - 1)$.

Задача 65. *Ответ.* 0.46.

Задача 66. *Указание.* Мама сможет починить платье, если достанет 2 черные пуговицы. Пусть событие A = {мама достала 2 черные пуговицы}. Возможны две гипотезы: B_1 = {проглочена белая пуговица} и B_2 = {проглочена черная пуговица}. Для вычисления $\mathbf{P}$(A) использовать формулу полной вероятности.

Ответ. 13/28.

Задача 67. *Ответ.* Вероятность того, что винтовка была без оптического прицела, равна 24/43; с оптическим прицелом — 19/43.

Задача 68. *Указание.* Рассмотреть события A = {попало два снаряда} и $B_i = \{i$-е орудие попало в цель$\}$. В этом случае условное событие $A|B_1 = B_2\overline{B}_3 + \overline{B}_2 B_3$

Ответ. 20/47.

Задача 69. *Ответ.* $p_1(1-p_1)^2 / \sum\limits_{i=1}^{3} p_i(1-p_i)^2$.

Задача 73. *Указание.* В данном случае «успехом» является искажение знака. Искажения каждого знака независимы, и не имеет значения, в каком порядке они произойдут, следовательно, применима формула Бернулли с $p = 0.01$ и $q = 0.99$.

Ответ. а) $P_5(0) = 0.951$; б) $P_5(0) + P_5(1) = 0.999$.

Задача 74. *Указание.* Поскольку шахматисты равносильны, то вероятности успеха и неудачи равны: $p = q = 1/2$. Вероятности событий вычисляются по формуле Бернулли.

Ответ. а) Вероятнее выиграть одну партию из двух: $P_2(1) = 1/2$, $P_4(2) = 3/8$; б) Вероятнее выиграть не менее двух партий из четырех:

$$P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) - P_4(1) = 11/16,$$
$$P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 8/16.$$

Задача 75. *Указание.* В матче с Васечкиным вероятность успеха $p = 2/3$ и для победы в матче нужно выиграть 3 или 4 партии. В матче с Машей необходимо выиграть 2, 3 или 4 партии с вероятностью успеха $p = 1/2$.

Ответ. Вероятнее не проиграть Маше. Вероятность этого события равна 11/16, а вероятность выиграть у Петрова — 16/27.

Задача 76. *Ответ.* $1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k p^k (1-p)^{2n-k}$.

Задача 77. *Указание.* Смотри решение задачи 71.

Ответ. 14 элементов.

Задача 78. *Указание.* Промахи стрелков являются независимыми событиями.

Ответ. 2 залпа.

Задача 79. *Указание.* Оценить число матчей, которое нужно сыграть, чтобы вероятность выиграть 25 партий была максимальной (см. задачу 71).

Ответ. Нужно рассчитывать на число партий $59 \leqslant n \leqslant 62$, т. е. матч следует начинать примерно 1 марта.

Задача 80. *Ответ.* Том не прав. Его шансы выиграть спор 5 к 11.

Задача 81. *Указание.* Пусть событие $A = \{$из 5 ночей будет по крайней мере 2 ясные$\}$. Противоположное событие $\overline{A} = \{$ни одной ясной ночи или одна ясная ночь из 5$\}$. $\mathsf{P}(\overline{A}) = P_5(0) + P_5(1)$.

Ответ. $\mathsf{P}(A) = 131/243 \approx 0.539$.

Задача 82. *Указание.* Необходимо перебрать все способы получить 8, 9 и 10 баллов и вычислить вероятности этих событий согласно полиномиальной схеме.

Ответ. 0.53136.

Задача 83. *Ответ.* 5/8.

Задача 84. *Ответ.* 0.0145

Задача 89. *Ответ.* Случайная величина ξ имеет распределение

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Задача 91. *Ответ.* Случайная величина ξ имеет распределение

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Задача 92. *Указание.* Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение. Наивероятнейшее число вопросов может быть определено непосредственно из ряда распределения.

Ответ. а) $\mathsf{P}(\xi = n) = 0.9^{n-1}0.1$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — число вопросов; б) 1.

Задача 93. *Указание.* Второе орудие не израсходует снарядов, если первое орудие поразит цель первым выстрелом. Второе орудие израсходует лишь один снаряд, если при первом выстреле оно попадет в цель, или если оно промахнется, а первое орудие попадет в цель при втором выстреле и т. д.

Ответ. $\mathsf{P}(\xi = 0) = 0.8$, $\mathsf{P}(\xi = n) = 0.06^{n-1}0.188$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — число выстрелов второго орудия.

Задача 94. *Ответ.* $x_0 = \ln 2$.

Задача 95. *Указание.* Для вычисления значения параметра a использовать условие нормировки. Чтобы нормировочный интеграл имел конечное значение, параметр a должен быть отрицательным.

Ответ. $a = -2$. Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{2x}, & x < 0, \\ 1 - \dfrac{1}{2}e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

Задача 96. *Ответ.*

$$p(x) = \begin{cases} 2\cos 2x, & x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], \\ 0, & x \notin \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Задача 97. *Ответ.* $a = 1/2\pi$.

Задача 98. *Ответ.* $a = 3$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Задача 99. *Указание.* Величину b можно найти из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения.

Ответ. $b = 2/a\pi$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, \\ \dfrac{2}{a\pi}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{a^2\pi}{2}\right), & -a \leqslant x \leqslant a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

График функции распределения изображен на рис. 28.

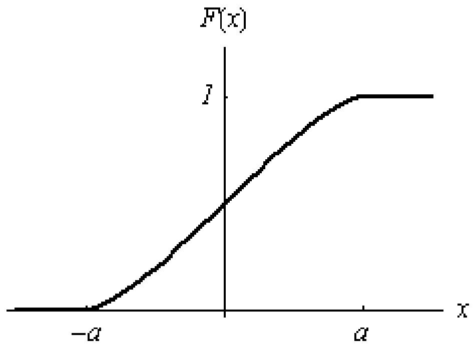

Рис. 28.

Задача 100. *Ответ.* а) $a = 2h^2$;

б) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-h^2r^2}, & r \geqslant 0, \\ 0, & r < 0; \end{cases}$ в) $R = 1/h\sqrt{2}$; г) $\mathbf{P}(\xi < R) = 0.393$.

Графики плотности и функции распределения изображены на рис. 29 и 30.

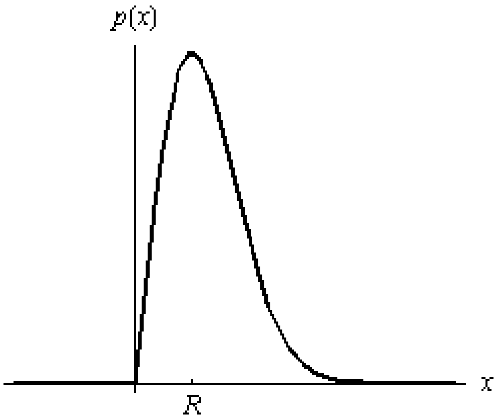

Рис. 29.

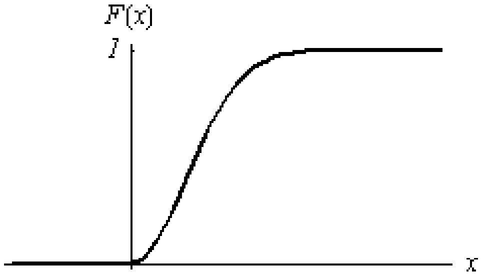

Рис. 30.

Задача 101. *Ответ.* а) $p_\eta(x) = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}}$, $x > 0$; б) $p_\zeta(x) = 1$, $0 < x < 1$.

Задача 102. *Ответ.* а) $p_\eta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2},\ x > 0;$

б) $p_\zeta(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln^2 x)/2},\ x > 0.$

Задача 103. *Ответ.* $p_\eta(x) = 2e^{2x},\ x < 0.$

Задача 109. *Ответ.* а) $\mathsf{M}\xi = (a+b)/2,\ \mathsf{D}x = (b-a)^2/12;$ б) $\mathsf{M}\xi = 1/\lambda,\ \mathsf{D}x = 1/\lambda^2;$ в) $\mathsf{M}\xi = 1/p,\ \mathsf{D}x = q/p^2;$ г) $\mathsf{M}\xi = \sqrt{\pi}/2h,\ \mathsf{D}x = (4-\pi)/4h^2.$

Задача 110. *Ответ.* а) $a = 4/\sqrt{\pi}b^3;$ б) $v_{\text{ср}} = \mathsf{M}\xi = 2b/\sqrt{\pi},$ $\mathsf{D}x = (3\pi - 8)b^2/2\pi;$ в) $V = b;$ г) $\mathsf{P}(V < v < v_{\text{ср}}) = 0.1055.$

Задача 111. *Ответ.* а) прибавится слагаемое a; б) не изменится; в) не изменится; г) прибавится слагаемое $a^2 + 2a\mathsf{M}\xi$.

Задача 112. *Ответ.* а) умножится на a; б) умножится на a^2; в) умножится на $|a|$; г) умножится на a^2.

Задача 113. *Ответ.* $\mathsf{M}\zeta = 1.3,\ \mathsf{D}\zeta = 18.9.$

Задача 114. *Ответ.* $\mathsf{M}\zeta = -3.7,\ \mathsf{D}\zeta = 10.25.$

Задача 115. *Ответ.* $\mathsf{M}\zeta = 0.2,\ \mathsf{D}\zeta = 5.08.$

Задача 116. *Указание.* В качестве случайной величины ξ взять сумму очков на всех костях, а ξ_k — количество очков, выпавших на k-й кости ($k = 1, 2, \ldots, n$). Величины ξ_k независимы, имеют одинаковое распределение, и $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Ответ. $7n/2$.

Задача 117. *Указание.* Написать ряд распределения случайной величины ξ и вычислить дисперсию по формуле (38).

Ответ. $p_1 p_2$.

Задача 118. *Указание.* Вероятность того, что случайная величина примет значение x_2, определится из условия нормировки. По формулам (35) и (38) записать выражения для математического ожидания и дисперсии, которые дадут два уравнения для определения двух неизвестных величин x_1 и x_2.

Ответ. $x_1 = 1,\ x_2 = 3$.

Задача 119. *Указание.* Записать условие нормировки, выражения для математического ожидания и дисперсии, которые дадут систему уравнений для определения вероятностей.

Ответ. $p_1 = 0.3,\ p_2 = 0.2,\ p_3 = 0.5$.

Задача 120. *Указание.* Случайная величина имеет биномиальное распределение.

Ответ. Ряд распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	0.216	0.432	0.288	0.064

Функция распределения имеет график, показанный на рис. 31. $\mathsf{M}\xi = 1.2,\ \mathsf{D}\xi = 0.72,\ \sigma_\xi = 0.8485$.

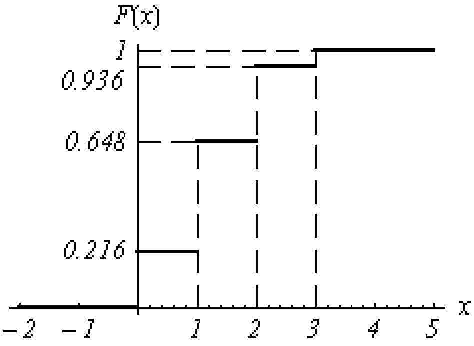

Рис. 31.

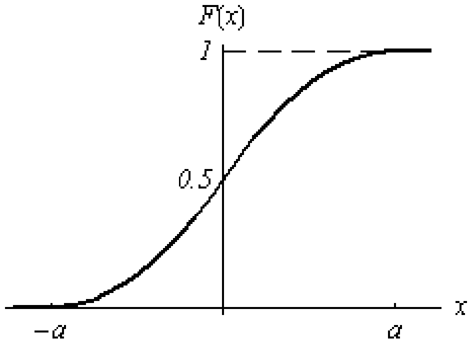

Рис. 32.

Задача 121. *Ответ.* а) $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right), & x \in [-a, a], \\ 0, & x \notin [-a, a]; \end{cases}$

б) График функции распределения при $x \in [-a, a]$ составлен из двух участков парабол (рис. 32); в) $\mathsf{M}\xi = 0,\ \mathsf{D}\xi = a^2/6,\ \sigma_\xi = a/\sqrt{6}$; г) $\mathsf{P}(-a/2 \leqslant \xi \leqslant a) = 7/8$.

Задача 122. *Ответ.* а) $a = \dfrac{1}{\pi}$; б) $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}$; в) $\mathsf{P}(-1 \leqslant \xi \leqslant 1) = \dfrac{1}{2}$; г) математическое ожидание и дисперсия не существуют, так как выражающие их интегралы расходятся.

Задача 126. *Указание*. Вероятность вычисляется по формуле (43). *Ответ*. $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4 = 0.26$.

Задача 127. *Ответ*. $C = 12/\pi^2$.

Задача 128. *Указание*. Случайные величины ξ и η независимы, поэтому $F_{\xi\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$.

Ответ. Значения функции распределения даны в таблице:

$y \backslash x$	$(-\infty;0]$	$(0;1]$	$(1;\infty)$
$(-\infty;0]$	0	0	0
$(0;1]$	0	$(1-p_1)(1-p_2)$	$1-p_2$
$(1;\infty)$	0	$1-p_1$	1

Задача 129. *Указание*. Случайные величины ξ и η зависимы: $\xi+\eta = 1$.

Задача 130. *Ответ*.

$$p(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y)\in R, \\ 0, & (x,y)\notin R. \end{cases}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ или } y<0, \\ xy, & (x,y)\in R, \\ x, & 0<x<1,\ y>1, \\ y, & x>1,\ 0<y<1, \\ 1, & x,y>1. \end{cases}$$

График функции распределения показан на рис. 33.

$$p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0;1], \\ 0, & x\notin[0;1]. \end{cases}$$

Величины ξ и η являются независимыми, поскольку $p(x,y)=p_\xi(x)\,p_\eta(y)$.

Задача 131. *Указание*. Изобразить возможные и благоприятные значения двумерной случайной величины (ξ_1,ξ_2) на плоскости (x,y).

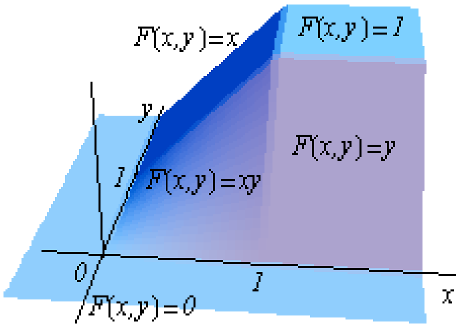

Рис. 33.

Ответ. $2/\pi$.

Задача 132. *Ответ.* $\mathsf{P}(\xi = m, \eta = n) = 1/(2 \cdot 3^n)$, $m = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Случайные величины ξ и η независимы.

Задача 134. *Ответ.* Таблица распределения случайного вектора (ξ, η):

$\eta \backslash \xi$	1	2	3	$\mathsf{P}(\eta = m)$
1	1/9	0	0	1/9
2	1/9	1/6	0	5/18
3	1/9	1/9	1/3	11/18
$\mathsf{P}(\xi = m)$	1/3	1/3	1/3	

Случайные величины ξ и η зависимы.
Коэффициент корреляции $\rho_{\xi\eta} = \sqrt{6/17} \approx 0.594$.

Задача 135. *Указание.* Вычислить двойной интеграл (46) по области $D = \{(y, z) : y + z < x\}$.

Ответ. $F_{\xi+\eta} = \dfrac{1}{2h} \displaystyle\int\limits_{x-h}^{x+h} F(t)\, \mathrm{d}t$.

Задача 137. *Указание.* Показать, что случайные величины $\phi = (\xi - \mathsf{M}\xi)/\sqrt{\mathsf{D}\xi}$ и $\psi = (\eta - \mathsf{M}\eta)/\sqrt{\mathsf{D}\eta}$ равны. Для этого вычислить $\mathbf{M}(\phi - \psi)$ и $\mathbf{D}(\phi - \psi)$.

Задача 138. *Указание.* Распределение случайного вектора обладает центральной симметрией, то есть оно не меняется при любом повороте координатных осей.

Ответ. $\bigl(2\Phi\bigl(1/\sqrt{2}\bigr) - 1\bigr)^2 \approx 0.23$.

Задача 139. *Указание.* Значение функции распределения вычисляется путем интегрирования плотности распределения по области, которая является пересечением треугольника, изображенного на рис. 22 и квадранта, изображенного на рис. 17 с вершиной в точке (1;3). В случае равномерного распределения задача сводится к вычислению площади указанной фигуры и площади треугольника.

Ответ. а) 13/16; б) 47/64.

Задача 140. *Указание.* Плотность распределения легко найти, зная площадь квадрата R. Значение функции распределения определяется так же, как в задаче 139. Плотность распределения величины $p_\xi(x)$ вычисляется путем интегрирования совместной плотности распределения $p_{\xi\eta}(x, y)$ по переменной y. Зависимость величин ξ и η определяется согласно условию (49). Коррелированность определяется согласно (52). В данной задаче средние значения $\mathbf{M}\xi = \mathbf{M}\eta = 0$, поэтому вычисление ковариации сводится к вычислению интеграла $\iint\limits_R xy\, p_{\xi\eta}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Ответ. а) $p_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & (x, y) \in R, \\ 0, & (x, y) \in R. \end{cases}$ б) $F_{\xi\eta}(1/2; 1/2) = 3/4$.

в) $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

График этого распределения показан на рис. 16.

г) Зависимы. д) Некоррелированы.

Задача 141. *Указание.* Плотность распределения случайной величины ζ может быть найдена как производная от соответствующей функции распределения. Вычисления удобно выполнять в полярной системе координат. Зависимость и коррелированность случайных величин ξ и η определяется так же, как в задаче 140. При вычислении средних значений удобно воспользоваться четностью плотности распределения.

Ответ. а) $p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{r_0^3\pi}(r_0 - \sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2 < r_0^2, \\ 0, & x^2+y^2 > r_0^2. \end{cases}$

б) $p_\zeta(x) = (3/r_0^3)(r_0 - \sqrt{x})$, $(x < r_0^2)$. в) Зависимы. г) Некоррелированы.

Задача 142. *Указание.* Перейти в полярную систему координат.

Ответ. а) $p_{\eta_1}(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x/2}$ $(x > 0)$; б) $p_{\eta_2}(x) = \dfrac{1}{\pi}$ $(|x| \leqslant \pi/2)$;
в) $p_{\eta_1\eta_2}(x,y) = p_{\eta_1}(x)p_{\eta_2}(y)$.

Задача 146. *Ответ.* а) $\lambda/(\lambda - it)$; б) $e^{-\lambda+\lambda e^{it}}$; в) $\sin t/t$; г) $p/(1-qe^{it})$.

Задача 147. *Указание.* При вычислении характеристической функции собрать попарно слагаемые, относящиеся к $\xi = a$ и $\xi = -a$.

Задача 148. *Указание.* Воспользоваться формулой

$$\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2.$$

Ответ.

а)

x_i	-1	1
p_i	1/2	1/2

б)

x_i	-2	0	2
p_i	1/4	1/2	1/4

Задача 149. *Указание.* Воспользоваться характеристической функцией для распределения Пуассона, найденной в задаче 146, и свойством 3 характеристических функций. Разложить экспоненту в ряд при $\lambda \to \infty$.

Задача 154. *Указание.* Использовать локальную теорему Муавра—Лапласа.

Ответ. 0.04565.

Задача 155. *Ответ.* 0.0782.

Задача 156. *Ответ.* а) $P_{2N}(N) = 0.5642/\sqrt{N}$; б) $P_{2N}(N+m) = \sqrt{2/N}\,\varphi(m\sqrt{2/N})$, где функция $\varphi(x)$ определяется выражением (59).

Задача 157. *Указание.* Использовать интегральную теорему Муавра—Лапласа.

Ответ. 0.95945.

Задача 158. *Ответ.* 0.6826.

Задача 159. *Ответ.* $n = 100$.

Задача 160. *Указание.* Использовать теорему Пуассона.

Ответ. 0.18.

Задача 161. *Ответ.* а) 0.0613; б) 0.9197; в) 0.019; г) 0.632.

Задача 162. *Указание.* Среднее число отказавших элементов равно параметру λ распределения Пуассона

Ответ. $\lambda \approx 4$.

Задача 163. *Ответ.* Длина интервала $l \geqslant 2\sqrt{2}$.

Задача 164. *Ответ.* Вероятность этого события не менее 0.64.

Задача 171. *Ответ.* а) $\bar{x} = 100$ мм; б) $D_{\text{в}} = 34$ мм^2, $s^2 = 42.5$ мм^2.

Задача 174. *Указание.* Гамма-функция определяется интегралом

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

и обладает свойством $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Гамма-распределение имеет два параметра, следовательно, необходимо составить два уравнения. Их можно получить, приравнивая теоретические и эмпирические моменты первого и второго порядка. При вычислении теоретических моментов нужно воспользоваться указанными выше свойствами гамма-функции.

Ответ. $\alpha^* = \bar{x}^2/D_{\text{в}} - 1$, $\beta^* = D_{\text{в}}/\bar{x}$.

Задача 175. *Указание.* Для нахождения оценки единственного параметра распределения α необходимо одно уравнение. Но равенство теоретического и эмпирического момента первого порядка не может служить таким уравнением (почему?). Поэтому следует использовать равенство моментов второго порядка.

Ответ. $\alpha^* = \sqrt{D_{\text{в}}}$

Задача 176. *Ответ.* $p^* = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i/nm.$

Задача 177. *Ответ.* $\lambda^* = 1/\bar{x}.$

Задача 178. *Указание.* Составить и решить систему

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0.$$

Ответ. $a^* = \bar{x},\ \sigma^{*2} = D_{\text{в}}.$

Задача 179. *Указание.* Составить и решить систему

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0.$$

Ответ. $a^* = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\right)/n,\ \sigma^* = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(f(x_i) - a^*)/n}$

Задача 190. *Ответ.* s=1.24, доверительный интервал [0.85, 1.97].

Задача 201. *Указание.* Наблюдаемое значение параметра $\theta_{\text{набл}} = |\bar{x} - a_0|\sqrt{n}/s$, а критическая точка определяется по распределению Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Задача 203. *Указание.* Наблюдаемое значение параметра $u^2_{\text{набл}} = \sqrt{n-1}\, s^2/\sigma_0^2$; критические точки u^2_α и $u^2_{1-\alpha}$ определяются по распределению χ^2 с $n-1$ степенью свободы (см. § 13). Область принятия гипотезы $u^2_{1-\alpha} < u^2_{\text{набл}} < u^2_\alpha$.

Задача 204. *Указание.* Нулевая гипотеза H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$; конкурирующая гипотеза H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Приложения

Приложение 1. Таблица значений функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0.	0.39894	0.31	0.38023	0.62	0.32918	0.93	0.25888	1.24	0.18494
0.01	0.39892	0.32	0.37903	0.63	0.32713	0.94	0.25647	1.25	0.18265
0.02	0.39886	0.33	0.3778	0.64	0.32506	0.95	0.25406	1.26	0.18037
0.03	0.39876	0.34	0.37654	0.65	0.32297	0.96	0.25164	1.27	0.1781
0.04	0.39862	0.35	0.37524	0.66	0.32086	0.97	0.24923	1.28	0.17585
0.05	0.39844	0.36	0.37391	0.67	0.31874	0.98	0.24681	1.29	0.1736
0.06	0.39822	0.37	0.37255	0.68	0.31659	0.99	0.24439	1.3	0.17137
0.07	0.39797	0.38	0.37115	0.69	0.31443	1.	0.24197	1.31	0.16915
0.08	0.39767	0.39	0.36973	0.7	0.31225	1.01	0.23955	1.32	0.16694
0.09	0.39733	0.4	0.36827	0.71	0.31006	1.02	0.23713	1.33	0.16474
0.1	0.39695	0.41	0.36678	0.72	0.30785	1.03	0.23471	1.34	0.16256
0.11	0.39654	0.42	0.36526	0.73	0.30563	1.04	0.2323	1.35	0.16038
0.12	0.39608	0.43	0.36371	0.74	0.30339	1.05	0.22988	1.36	0.15822
0.13	0.39559	0.44	0.36213	0.75	0.30114	1.06	0.22747	1.37	0.15608
0.14	0.39505	0.45	0.36053	0.76	0.29887	1.07	0.22506	1.38	0.15395
0.15	0.39448	0.46	0.35889	0.77	0.29659	1.08	0.22265	1.39	0.15183
0.16	0.39387	0.47	0.35723	0.78	0.29431	1.09	0.22025	1.4	0.14973
0.17	0.39322	0.48	0.35553	0.79	0.292	1.1	0.21785	1.41	0.14764
0.18	0.39253	0.49	0.35381	0.8	0.28969	1.11	0.21546	1.42	0.14556
0.19	0.39181	0.5	0.35207	0.81	0.28737	1.12	0.21307	1.43	0.1435
0.2	0.39104	0.51	0.35029	0.82	0.28504	1.13	0.21069	1.44	0.14146
0.21	0.39024	0.52	0.34849	0.83	0.28269	1.14	0.20831	1.45	0.13943
0.22	0.3894	0.53	0.34667	0.84	0.28034	1.15	0.20594	1.46	0.13742
0.23	0.38853	0.54	0.34482	0.85	0.27798	1.16	0.20357	1.47	0.13542
0.24	0.38762	0.55	0.34294	0.86	0.27562	1.17	0.20121	1.48	0.13344
0.25	0.38667	0.56	0.34105	0.87	0.27324	1.18	0.19886	1.49	0.13147
0.26	0.38568	0.57	0.33912	0.88	0.27086	1.19	0.19652	1.5	0.12952
0.27	0.38466	0.58	0.33718	0.89	0.26848	1.2	0.19419	1.51	0.12758
0.28	0.38361	0.59	0.33521	0.9	0.26609	1.21	0.19186	1.52	0.12566
0.29	0.38251	0.6	0.33322	0.91	0.26369	1.22	0.18954	1.53	0.12376
0.3	0.38139	0.61	0.33121	0.92	0.26129	1.23	0.18724	1.54	0.12188

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
1.55	0.12001	1.96	0.05844	2.37	0.02406	2.78	0.00837	3.19	0.00246
1.56	0.11816	1.97	0.0573	2.38	0.02349	2.79	0.00814	3.2	0.00238
1.57	0.11632	1.98	0.05618	2.39	0.02294	2.8	0.00792	3.21	0.00231
1.58	0.1145	1.99	0.05508	2.4	0.02239	2.81	0.0077	3.22	0.00224
1.59	0.1127	2.	0.05399	2.41	0.02186	2.82	0.00748	3.23	0.00216
1.6	0.11092	2.01	0.05292	2.42	0.02134	2.83	0.00727	3.24	0.0021
1.61	0.10915	2.02	0.05186	2.43	0.02083	2.84	0.00707	3.25	0.00203
1.62	0.10741	2.03	0.05082	2.44	0.02033	2.85	0.00687	3.26	0.00196
1.63	0.10567	2.04	0.0498	2.45	0.01984	2.86	0.00668	3.27	0.0019
1.64	0.10396	2.05	0.04879	2.46	0.01936	2.87	0.00649	3.28	0.00184
1.65	0.10226	2.06	0.0478	2.47	0.01888	2.88	0.00631	3.29	0.00178
1.66	0.10059	2.07	0.04682	2.48	0.01842	2.89	0.00613	3.3	0.00172
1.67	0.09893	2.08	0.04586	2.49	0.01797	2.9	0.00595	3.31	0.00167
1.68	0.09728	2.09	0.04491	2.5	0.01753	2.91	0.00578	3.32	0.00161
1.69	0.09566	2.1	0.04398	2.51	0.01709	2.92	0.00562	3.33	0.00156
1.7	0.09405	2.11	0.04307	2.52	0.01667	2.93	0.00545	3.34	0.00151
1.71	0.09246	2.12	0.04217	2.53	0.01625	2.94	0.0053	3.35	0.00146
1.72	0.09089	2.13	0.04128	2.54	0.01585	2.95	0.00514	3.36	0.00141
1.73	0.08933	2.14	0.04041	2.55	0.01545	2.96	0.00499	3.37	0.00136
1.74	0.0878	2.15	0.03955	2.56	0.01506	2.97	0.00485	3.38	0.00132
1.75	0.08628	2.16	0.03871	2.57	0.01468	2.98	0.0047	3.39	0.00127
1.76	0.08478	2.17	0.03788	2.58	0.01431	2.99	0.00457	3.4	0.00123
1.77	0.08329	2.18	0.03706	2.59	0.01394	3.	0.00443	3.41	0.00119
1.78	0.08183	2.19	0.03626	2.6	0.01358	3.01	0.0043	3.42	0.00115
1.79	0.08038	2.2	0.03547	2.61	0.01323	3.02	0.00417	3.43	0.00111
1.8	0.07895	2.21	0.0347	2.62	0.01289	3.03	0.00405	3.44	0.00107
1.81	0.07754	2.22	0.03394	2.63	0.01256	3.04	0.00393	3.45	0.00104
1.82	0.07614	2.23	0.03319	2.64	0.01223	3.05	0.00381	3.46	0.001
1.83	0.07477	2.24	0.03246	2.65	0.01191	3.06	0.0037	3.47	0.00097
1.84	0.07341	2.25	0.03174	2.66	0.0116	3.07	0.00358	3.48	0.00094
1.85	0.07206	2.26	0.03103	2.67	0.0113	3.08	0.00348	3.49	0.0009
1.86	0.07074	2.27	0.03034	2.68	0.011	3.09	0.00337	3.5	0.00087
1.87	0.06943	2.28	0.02965	2.69	0.01071	3.1	0.00327	3.51	0.00084
1.88	0.06814	2.29	0.02898	2.7	0.01042	3.11	0.00317	3.52	0.00081
1.89	0.06687	2.3	0.02833	2.71	0.01014	3.12	0.00307	3.53	0.00079
1.9	0.06562	2.31	0.02768	2.72	0.00987	3.13	0.00298	3.54	0.00076
1.91	0.06438	2.32	0.02705	2.73	0.00961	3.14	0.00288	3.55	0.00073
1.92	0.06316	2.33	0.02643	2.74	0.00935	3.15	0.00279	3.56	0.00071
1.93	0.06195	2.34	0.02582	2.75	0.00909	3.16	0.00271	3.57	0.00068
1.94	0.06077	2.35	0.02522	2.76	0.00885	3.17	0.00262	3.58	0.00066
1.95	0.05959	2.36	0.02463	2.77	0.00861	3.18	0.00254	3.59	0.00063

Приложение 2. Таблица значений функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.	0.	0.31	0.12172	0.62	0.23237	0.93	0.32381	1.24	0.39251
0.01	0.00399	0.32	0.12552	0.63	0.23565	0.94	0.32639	1.25	0.39435
0.02	0.00798	0.33	0.1293	0.64	0.23891	0.95	0.32894	1.26	0.39617
0.03	0.01197	0.34	0.13307	0.65	0.24215	0.96	0.33147	1.27	0.39796
0.04	0.01595	0.35	0.13683	0.66	0.24537	0.97	0.33398	1.28	0.39973
0.05	0.01994	0.36	0.14058	0.67	0.24857	0.98	0.33646	1.29	0.40147
0.06	0.02392	0.37	0.14431	0.68	0.25175	0.99	0.33891	1.3	0.4032
0.07	0.0279	0.38	0.14803	0.69	0.2549	1.	0.34134	1.31	0.4049
0.08	0.03188	0.39	0.15173	0.7	0.25804	1.01	0.34375	1.32	0.40658
0.09	0.03586	0.4	0.15542	0.71	0.26115	1.02	0.34614	1.33	0.40824
0.1	0.03983	0.41	0.1591	0.72	0.26424	1.03	0.34849	1.34	0.40988
0.11	0.0438	0.42	0.16276	0.73	0.2673	1.04	0.35083	1.35	0.41149
0.12	0.04776	0.43	0.1664	0.74	0.27035	1.05	0.35314	1.36	0.41309
0.13	0.05172	0.44	0.17003	0.75	0.27337	1.06	0.35543	1.37	0.41466
0.14	0.05567	0.45	0.17364	0.76	0.27637	1.07	0.35769	1.38	0.41621
0.15	0.05962	0.46	0.17724	0.77	0.27935	1.08	0.35993	1.39	0.41774
0.16	0.06356	0.47	0.18082	0.78	0.2823	1.09	0.36214	1.4	0.41924
0.17	0.06749	0.48	0.18439	0.79	0.28524	1.1	0.36433	1.41	0.42073
0.18	0.07142	0.49	0.18793	0.8	0.28814	1.11	0.3665	1.42	0.4222
0.19	0.07535	0.5	0.19146	0.81	0.29103	1.12	0.36864	1.43	0.42364
0.2	0.07926	0.51	0.19497	0.82	0.29389	1.13	0.37076	1.44	0.42507
0.21	0.08317	0.52	0.19847	0.83	0.29673	1.14	0.37286	1.45	0.42647
0.22	0.08706	0.53	0.20194	0.84	0.29955	1.15	0.37493	1.46	0.42785
0.23	0.09095	0.54	0.2054	0.85	0.30234	1.16	0.37698	1.47	0.42922
0.24	0.09483	0.55	0.20884	0.86	0.30511	1.17	0.379	1.48	0.43056
0.25	0.09871	0.56	0.21226	0.87	0.30785	1.18	0.381	1.49	0.43189
0.26	0.10257	0.57	0.21566	0.88	0.31057	1.19	0.38298	1.5	0.43319
0.27	0.10642	0.58	0.21904	0.89	0.31327	1.2	0.38493	1.51	0.43448
0.28	0.11026	0.59	0.2224	0.9	0.31594	1.21	0.38686	1.52	0.43574
0.29	0.11409	0.6	0.22575	0.91	0.31859	1.22	0.38877	1.53	0.43699
0.3	0.11791	0.61	0.22907	0.92	0.32121	1.23	0.39065	1.54	0.43822

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.55	0.43943	1.76	0.4608	1.97	0.47558	2.36	0.49086	2.78	0.49728
1.56	0.44062	1.77	0.46164	1.98	0.47615	2.38	0.49134	2.8	0.49744
1.57	0.44179	1.78	0.46246	1.99	0.4767	2.4	0.4918	2.82	0.4976
1.58	0.44295	1.79	0.46327	2.	0.47725	2.42	0.49224	2.84	0.49774
1.59	0.44408	1.8	0.46407	2.02	0.47831	2.44	0.49266	2.86	0.49788
1.6	0.4452	1.81	0.46485	2.04	0.47932	2.46	0.49305	2.88	0.49801
1.61	0.4463	1.82	0.46562	2.06	0.4803	2.48	0.49343	2.9	0.49813
1.62	0.44738	1.83	0.46638	2.08	0.48124	2.5	0.49379	2.92	0.49825
1.63	0.44845	1.84	0.46712	2.1	0.48214	2.52	0.49413	2.94	0.49836
1.64	0.4495	1.85	0.46784	2.12	0.483	2.54	0.49446	2.96	0.49846
1.65	0.45053	1.86	0.46856	2.14	0.48382	2.56	0.49477	2.98	0.49856
1.66	0.45154	1.87	0.46926	2.16	0.48461	2.58	0.49506	3.	0.49865
1.67	0.45254	1.88	0.46995	2.18	0.48537	2.6	0.49534	3.2	0.49931
1.68	0.45352	1.89	0.47062	2.2	0.4861	2.62	0.4956	3.4	0.49966
1.69	0.45449	1.9	0.47128	2.22	0.48679	2.64	0.49585	3.6	0.49984
1.7	0.45543	1.91	0.47193	2.24	0.48745	2.66	0.49609	3.8	0.49993
1.71	0.45637	1.92	0.47257	2.26	0.48809	2.68	0.49632	4.	0.49997
1.72	0.45728	1.93	0.4732	2.28	0.4887	2.7	0.49653	4.5	0.5
1.73	0.45818	1.94	0.47381	2.3	0.48928	2.72	0.49674	5.	0.5
1.74	0.45907	1.95	0.47441	2.32	0.48983	2.74	0.49693	5.5	0.5
1.75	0.45994	1.96	0.475	2.34	0.49036	2.76	0.49711	6.	0.5

Приложение 3. Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы n	Доверительная вероятность β			Число степеней свободы n	Доверительная вероятность β		
	0.95	0.99	0.999		0.95	0.99	0.999
1	12.7	63.7	637.	18	2.1	2.88	3.92
2	4.3	9.92	31.6	19	2.09	2.86	3.88
3	3.18	5.84	12.9	20	2.09	2.85	3.85
4	2.78	4.6	8.61	21	2.08	2.83	3.82
5	2.57	4.03	6.87	22	2.07	2.82	3.79
6	2.45	3.71	5.96	23	2.07	2.81	3.77
7	2.36	3.5	5.41	24	2.06	2.8	3.75
8	2.31	3.36	5.04	25	2.06	2.79	3.73
9	2.26	3.25	4.78	26	2.06	2.78	3.71
10	2.23	3.17	4.59	27	2.05	2.77	3.69
11	2.2	3.11	4.44	28	2.05	2.76	3.67
12	2.18	3.05	4.32	29	2.05	2.76	3.66
13	2.16	3.01	4.22	30	2.04	2.75	3.65
14	2.14	2.98	4.14	40	2.02	2.70	3.55
15	2.13	2.95	4.07	60	2.00	2.66	3.46
16	2.12	2.92	4.01	120	1.98	2.62	3.37
17	2.11	2.9	3.97	∞	1.96	2.58	3.29
	0.05	0.01	0.001		0.05	0.01	0.001
	Уровень значимости 2α				Уровень значимости 2α		

Приложение 4. Критические точки распределения χ^2 Пирсона (*Решение уравнения* $F_{\chi^2}(x) = 1 - \alpha$)

Число степеней свободы n	Уровень значимости α					
	0.005	0.025	0.05	0.95	0.975	0.995
1	7.88	5.02	3.84	0.0039	0.001	0.0000
2	10.6	7.38	5.99	0.1026	0.0506	0.01
3	12.84	9.35	7.81	0.3518	0.2158	0.0717
4	14.86	11.14	9.49	0.7107	0.4844	0.207
5	16.75	12.83	11.07	1.1455	0.8312	0.4117
6	18.55	14.45	12.59	1.6354	1.2373	0.6757
7	20.28	16.01	14.07	2.17	1.69	0.99
8	21.95	17.53	15.51	2.73	2.18	1.34
9	23.59	19.02	16.92	3.33	2.7	1.73
10	25.19	20.48	18.31	3.94	3.25	2.16
11	26.76	21.92	19.68	4.57	3.82	2.6
12	28.3	23.34	21.03	5.23	4.4	3.07
13	29.82	24.74	22.36	5.89	5.01	3.57
14	31.32	26.12	23.68	6.57	5.63	4.07
15	32.8	27.49	25.	7.26	6.26	4.6
16	34.27	28.85	26.3	7.96	6.91	5.14
17	35.72	30.19	27.59	8.67	7.56	5.7
18	37.16	31.53	28.87	9.39	8.23	6.26
19	38.58	32.85	30.14	10.12	8.91	6.84
20	40.	34.17	31.41	10.85	9.59	7.43
21	41.4	35.48	32.67	11.59	10.28	8.03
22	42.8	36.78	33.92	12.34	10.98	8.64
23	44.18	38.08	35.17	13.09	11.69	9.26
24	45.56	39.36	36.42	13.85	12.4	9.89
25	46.93	40.65	37.65	14.61	13.12	10.52
29	52.34	45.72	42.56	17.71	16.05	13.12
30	53.67	46.98	43.77	18.49	16.79	13.79
39	65.48	58.12	54.57	25.7	23.65	20.
40	66.77	59.34	55.76	26.51	24.43	20.71
49	78.23	70.22	66.34	33.93	31.55	27.25
50	79.49	71.42	67.5	34.76	32.36	27.99
59	90.72	82.12	77.93	42.34	39.66	34.77
60	91.95	83.3	79.08	43.19	40.48	35.53
99	139.	128.4	123.2	77.05	73.36	66.51
100	140.2	129.6	124.3	77.93	74.22	67.33

Приложение 5. Критические точки распределения Фишера-Снедекора

Уровень значимости $2\alpha = 0.005$

k_2 \ k_1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	14.9	14.5	14.2	14.	13.8	13.6	13.5	13.4	13.3	13.2	13.1	13.1	13.	13.	12.9	12.9
6	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4	10.3	10.1	10.	9.95	9.88	9.81	9.76	9.71	9.66	9.62	9.59
7	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.27	8.18	8.1	8.03	7.97	7.91	7.87	7.83	7.79	7.75
8	8.3	7.95	7.69	7.5	7.34	7.21	7.1	7.01	6.94	6.87	6.81	6.76	6.72	6.68	6.64	6.61
9	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.31	6.23	6.15	6.09	6.03	5.98	5.94	5.9	5.86	5.83
10	6.87	6.54	6.3	6.12	5.97	5.85	5.75	5.66	5.59	5.53	5.47	5.42	5.38	5.34	5.31	5.27
11	6.42	6.1	5.86	5.68	5.54	5.42	5.32	5.24	5.16	5.1	5.05	5.	4.96	4.92	4.89	4.86
12	6.07	5.76	5.52	5.35	5.2	5.09	4.99	4.91	4.84	4.77	4.72	4.67	4.63	4.59	4.56	4.53
13	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.72	4.64	4.57	4.51	4.46	4.41	4.37	4.33	4.3	4.27
14	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.6	4.51	4.43	4.36	4.3	4.25	4.2	4.16	4.12	4.09	4.06
15	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.33	4.25	4.18	4.12	4.07	4.02	3.98	3.95	3.91	3.88
16	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.18	4.1	4.03	3.97	3.92	3.87	3.83	3.8	3.76	3.73
17	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	4.05	3.97	3.9	3.84	3.79	3.75	3.71	3.67	3.64	3.61
18	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.79	3.73	3.68	3.64	3.6	3.56	3.53	3.5
19	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.84	3.76	3.7	3.64	3.59	3.54	3.5	3.46	3.43	3.4
20	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.76	3.68	3.61	3.55	3.5	3.46	3.42	3.38	3.35	3.32

Уровень значимости $2\alpha = 0.05$

k_2 \ k_1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.7	4.68	4.66	4.64	4.62	4.6	4.59	4.58	4.57	4.56
6	4.39	4.28	4.21	4.15	4.1	4.06	4.03	4.	3.98	3.96	3.94	3.92	3.91	3.9	3.88	3.87
7	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.6	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44
8	3.69	3.58	3.5	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.2	3.19	3.17	3.16	3.15
9	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.1	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94
10	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83	2.81	2.8	2.79	2.77
11	3.2	3.09	3.01	2.95	2.9	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.7	2.69	2.67	2.66	2.65
12	3.11	3.	2.91	2.85	2.8	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.6	2.58	2.57	2.56	2.54
13	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.6	2.58	2.55	2.53	2.51	2.5	2.48	2.47	2.46
14	2.96	2.85	2.76	2.7	2.65	2.6	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.4	2.39
15	2.9	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.4	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33
16	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.4	2.37	2.35	2.33	2.32	2.3	2.29	2.28
17	2.81	2.7	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23
18	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22	2.2	2.19
19	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.2	2.18	2.17	2.16
20	2.71	2.6	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.2	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12

Литература

[1] М. Холл. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[2] Н. Я. Виленкин. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

[3] Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.

[4] В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1979.

[5] В. П. Чистяков. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.

[6] Сборник задач по математике для вузов. Специальные курсы. / Под ред. А. В. Ефимова. М.: Наука, 1984.

[7] Н. Я. Сотникова. Первоапрельский задачник по теории вероятностей для студентов-нематематиков. http://www.astro.spbu.ru

[8] Н. Я. Виленкин, В. Г. Потапов. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. М.: Просвещение, 1979.

[9] А. А. Боровиков. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

Оглавление

Попов Владимир Александрович
Бренерман Марк Хаимович

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Подписано в печать 30.11.08. Форм. 60×84 1/16. Гарнитура «Литературная».
Печать офсетная. Печ. л. 7,5. Тираж 100 экз. Заказ 336.
Лаборатория оперативной полиграфии КГУ
420045, Казань, ул. Кр. Позиция, 2а
Тел. 231–52–12