КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математической статистики

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

для студентов экономического факультета

КАЗАНЬ − 2010

**УДК 519.21**

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

*методической комиссии факультета ВМК*
*Протокол № 1 от 31 августа 2010 г.*

*заседания кафедры математической статистики*
*Протокол № 3 от 11 ноября 2010 г.*

*Автор-составитель*
ст.преподаватель Е.К.Каштанова

*Научный редактор*
канд. физ.мат. наук, доц. Беговатов Е.А.
*Рецензент*
канд. физ.мат. наук, доц. С.В.Симушкин

**Название:** Сборник задач по теории вероятностей для студентов экономического факультета/ Е.К.Каштанова – Казань: Казанский университет, 2010. – 44 с.

Сборник задач по теории вероятностей предназначен для студентов экономического факультета. Учебно-методическое пособие содержит теоретический материал, разбор типовых задач, задачи. При разработке учебно-методического пособия была учтена специфика будущей профессиональной деятельности. Большое внимание уделяется практической направленности курса. Данное учебно-методическое пособие соответствует требованиям, предъявляемым к учебно-методическим работам такого типа, может быть рекомендовано к использованию преподавателями данной дисциплины и студентами в течение семестра и при подготовке к зачету.

СОДЕРЖАНИЕ

# 1. Случайные события. Классическое определение вероятности

Теория вероятностей − математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Предметом теории вероятностей является модель экспериментов со случайными исходами (случайных экспериментов). При этом рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять при неизменном комплексе условий произвольное число раз. Под неизменным комплексом условий понимается постоянство значений всех факторов, контролируемых в данном испытании. Но при этом, как правило, имеет место большое число неконтролируемых факторов, которые трудно или невозможно учесть. Значения неконтролируемых факторов могут быть различными при каждом повторении испытания, поэтому результаты испытания оказываются случайными.

Классические примеры случайных событий – выпадение герба при бросании монеты, извлечение туза из колоды карт, выпадение шестерки при бросании кости и т.д. Другие примеры – поступление выпускника средней школы в ВУЗ, удовлетворенность работника, выбираемого наугад из некоторого коллектива, своей специальностью и т.п.

Событие, которое обязательно происходит в результате данного испытания называется ***достоверным*** и обозначается $\Omega$.

Если при данном комплексе условий некоторое событие заведомо не может произойти, оно называется ***невозможным*** и обозначается $O$.

***Противоположным*** к $A$ событием ( $\bar{A}$ ) называется событие, состоящее в непоявлении события $A$ (Рис.1).

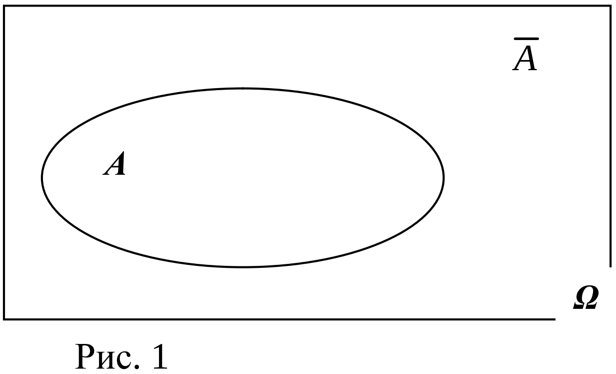



Рис. 1

События бывают составными и элементарными. Элементарные события нельзя разложить на более простые, а составные можно разложить на элементарные. Например, составное событие $A$ = {при бросании кости выпадет не более двух очков} можно разложить на два элементарных:
$\omega_1$ = {выпадет одно очко} и $\omega_2$ = {выпадет два очка}.

Таким образом, $A = \{\omega_1, \omega_2\}$.

***Объединение событий*** $A$ *и* $B$ ($A \bigcup B$) представляет собой сложное событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий $A$ и $B$ (Рис.2).

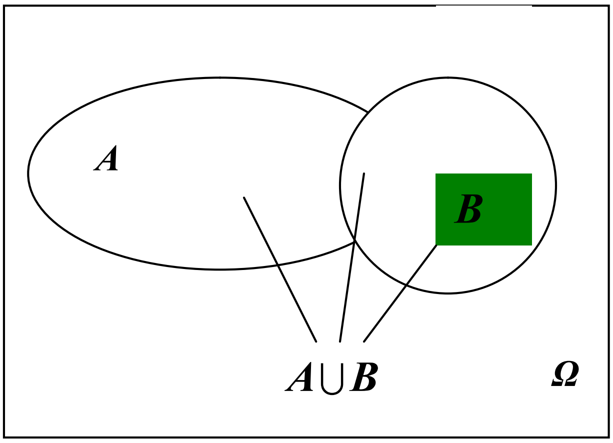



Рис.2

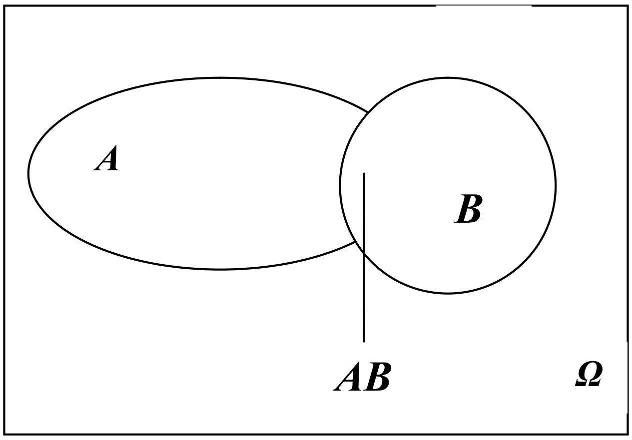



Рис.3

***Пересечением событий*** *A* и *B* (*AB* или $A \bigcap B$) называется их совместное появление (Рис.3).

***Несовместными*** называются события, которые в результате данного испытания не могут произойти вместе.

**Пример 1.** Бросается игральная кость. Описать следующие события: а) выпадет не менее пяти очков; б) выпадет четное число очков. , Опишите операции между событиями.

Решение. Обозначим через $\omega_1$ = {выпадет одно очко},

$\omega_2$ = {выпадет два очка} и т.д.

Тогда достоверное событие имеет вид $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$.

$A$ = {выпадет не менее пяти очков} = $\{\omega_5, \omega_6\}$,

$B$ = {выпавшее число очков - четное} = $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$,

$\bar{A}$ = {выпадет менее 5 очков} = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$,

$A \bigcup B$ = {выпадет не менее пяти очков или выпадет четное число очков} = $=\{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$,

$AB$ = {выпавшее число очков – четное и не меньше 5} = $\{\omega_6\}$.

События изображены на рис.4 с помощью диаграммы Эйлера-Венна

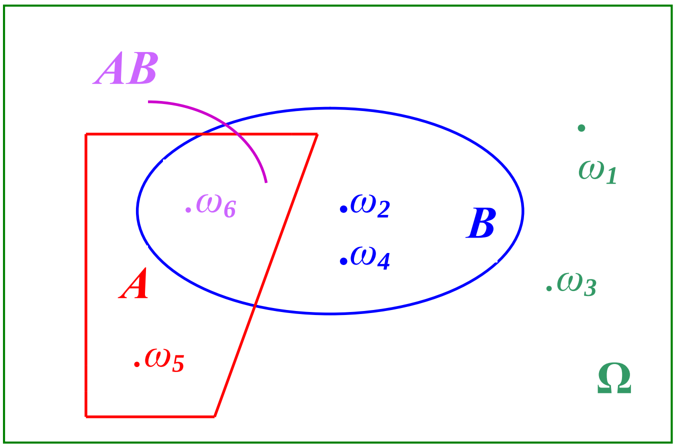



Рис.4

Классическое определение вероятности пришло из азартных игр, где теория вероятностей применялась для определения перспективы выигрыша. Поэтому применение этой формулы ограничивается некоторыми простыми моделями, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) число исходов конечно ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$),

2) все исходы несовместны и равновозможны:

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\ldots=P(\omega_N)=\frac{1}{N(\Omega)}.$$

Тогда вероятность определяется по формуле

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

где $N(A)$ - число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A$,

$N(\Omega)$ - общее число элементарных исходов.

Эту формулу можно охарактеризовать, как отношение «желаемого к возможному».

Свойства вероятности.

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т.е. $0 \le P(A) \le 1$.
2. Вероятность достоверного события равна единице, т.е.
   $P(\Omega)=1$.
3. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.
   $P(O)=1$.

При решении задач на классическую схему часто используются комбинаторные формулы. Мы рассмотрим только одну из них – число сочетаний. Например, для проведения социологического исследования нужно выбрать 100 человек из совокупности в 1000 человек. Порядок, в котором выбирают этих людей, по-видимому, безразличен. Нас скорее интересует число способов, которыми может быть выбрана группа в 100 человек.

***Сочетание из n объектов по k*** – это любой выбор $k$ объектов из $n$ безотносительно к порядку выбора.

Число сочетаний $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Число $C_n^k$ называется также ***биномиальным коэффициентом***.

Свойства факториала:

$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$,

$n! = n(n-1)!$,

$0! = 1$,

$1! = 1$.

**Пример 2.** Правильная монета подбрасывается 2 раза. Найти вероятность того, что монеты выпали на разные стороны.

Решение. Будем считать, что при бросании монеты у нас возможны только 2 исхода: $\omega_1$ = Г (выпадет герб) и $\omega_2$ = Р (выпадет решка). Варианты типа «монета упала на ребро или закатилась под стол» мы учитывать не будем. Тогда достоверное событие содержит четыре события:

$\Omega$ = {ГГ, ГР, РГ, РР} и $N(\Omega) = 4$,

$A$ = {выпали разные стороны} = {ГР, РГ} и $N(A) = 2$.

Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N(\Omega)}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

**Пример 3.** Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) выпало четное число очков на обеих костях; б) сумма числа очков на выпавших гранях равна 6; в) выпали одинаковые грани.

Решение. На «первой» игральной кости может выпасть любое число очков 1, 2, 3, 4, 5, 6. То же самое и на «второй» игральной кости. Следовательно, если мы бросаем две игральные кости, то результат мы можем представить в виде пары чисел $(x, y)$, где $x$ и $y$ могут принимать любые целые значения от 1 до 6.

Тогда

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix} \text{ и } N(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36.$$

а) $A$={выпало четное число очков}. Следуя приведенным выше рассуждениям, событие $A$ будет состоять из пар чисел, принимающих значения 2, 4, 6, т.е.

$$A = \begin{Bmatrix} (2,2)\ (2,4)\ (2,6) \\ (4,2)\ (4,4)\ (4,6) \\ (6,2)\ (6,4)\ (6,6) \end{Bmatrix}.$$

Число «благоприятных» для события $A$ исходов равно $N(A) = 3 \cdot 3 = 9$.

Искомая вероятность равна $\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N(\Omega)}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

б) $B$ = {сумма числа очков равна 6}. Существует только пять возможностей, при которых может произойти событие $B$={(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}.

Следовательно $N(B) = 5$ и $\mathrm{P}(B) = \frac{\mathrm{N}(B)}{\mathrm{N(\Omega)}} = \frac{5}{36}$.

в) $C$ = {выпали одинаковые грани} = {(1,1), (2,2), …, (6,6)},

$N(C) = 6$ и $\mathrm{P}(C) = \frac{\mathrm{N}(C)}{\mathrm{N(\Omega)}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

**Пример 4.** На тепловой электростанции 10 сменных инженеров, четыре из которых – женщины. В смену заняты три человека. Какова вероятность того, что в случайно выбранную смену будут заняты: а) все женщины; б) все мужчины?

Решение. В задаче никак не оговариваются льготы (например, для имеющих детей или по здоровью), следовательно, шансы попасть на дежурство у всех инженеров одинаковые и мы можем использовать классическое определением вероятности.

Начнем решение с достоверного события. Нам нужно выбрать 3 человека из 10 возможных кандидатур. Сделать это можно $C_{10}^{3}$ способами. Следовательно, $N(\Omega)=C_{10}^{3}$.

а) $A$ = {в смену работают три женщины}.

Если бы мы хотели, чтобы все три инженера смены были женщинами, то мы бы выбирали 3 человека не из общего списка в 10 фамилий, а из 4 фамилий женщин. Число способов выбора трех человек из четырех равно $N(A)=C_4^3$.

$$\mathrm{P}\,(A) = \frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{\dfrac{4!}{3!(4-3)!}}{\dfrac{10!}{3!(10-3)!}} = \frac{4!}{3!1!}\cdot\frac{3!7!}{10!} = \frac{4!7!}{10!}.$$

По определению факториала:

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$,

$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$,

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot7!}{10\cdot9\cdot8\cdot7!} = \dfrac{1}{30}$.

б) $B$ = {в смену работает трое мужчин}.

Существует $C_6^3$ вариантов выбора из шести мужчин-инженеров трех инженеров в смену. Искомая вероятность равна

$$\mathrm{P}(B) = \frac{\mathrm{N(B)}}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{\dfrac{6!}{3!(6-3)!}}{\dfrac{10!}{3!(10-3)!}} = \frac{6!}{3!3!}\cdot\frac{3!7!}{10!}.$$

Запишем $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!$,

$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$,

и $\mathrm{P}(B) = \dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3!\cdot7!}{3!\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7!} = \dfrac{1}{6}$.

## Задачи к § 1.

**1.** Бросаются 2 монеты. Какое из событий является более вероятным:

$A$ = {монеты выпадут одинаковыми сторонами},

$B$ = {монеты выпадут разными сторонами}.

**2.** Бросаются две игральные кости. Найти вероятность: а) на одной из костей выпадет четыре очка; б) выпавшее число очков будет кратно 2; в) сумма числа очков на выпавших гранях равна 7.

**3.** В группе, состоящей из 16 мужчин и 8 женщин был проведен опрос. Для опроса случайным образом выбрали 4 человека. Какова вероятность того, что: а) все опрошенные были женщины; б) все опрошенные были мужчины; в) среди опрошенных было двое мужчин и две женщины?

**4.** На столе лежат в произвольном порядке 32 экзаменационных билета. Чему равна вероятность того, что номер взятого наугад билета будет числом, кратным 3 или 7?

**5.** Комитет состоит из 12 членов. Минимальный кворум на заседаниях этого комитета должен насчитывать 8 членов.

а) Сколькими способами может достигаться минимальный форум?

б) Сколькими способами достигается какой-нибудь кворум?

**6.** На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2,4,6,7,8,11,12,13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь несократима

**7.** Известно, что мастер допускает в своей работе брак в среднем в 3 изделиях из 100 штук, а его ученик − в 6 изделиях из 100 штук. Каковы шансы выбрать случайным образом 7 качественных изделий из ящика мастера, если в ящике находятся 100 изделий? Как изменяться наши шансы, если мастер и ученик свою продукцию (каждый по 100 изделий) складывали в один ящик?

**8.** В библиотеке имеется 15 задачников по теории вероятностей нового издания и 10 старого. Какова вероятность того, что все студенты группы, насчитывающей 15 человек, получат задачники нового издания.

**9.** Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок нового календаря соответствует первому числу месяца? Год считать не високосным.

**10.** К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, из которых 50 спелые. Покупатель выбирает 2 арбуза. Найти вероятность, что оба арбуза спелые.

**11.** Найти вероятность того, что абонент наберет правильно четырехзначный номер, если он знает, что данный номер делится на 5.

**12.** Имеется 5 билетов стоимостью по 1р, три билета по 3р и два – по 5р. Наугад берутся два билета одновременно. Определить вероятность того, что эти билеты имеют одинаковую стоимость.

**13.** В магазин поступило 30 новых цветных телевизоров, среди которых 5 имеют скрытые дефекты. Наудачу выбирается два телевизора для проверки. Какова вероятность, что они не имеют скрытых дефектов?

**14.** Цех №2 считается лучшим по качеству работы: брак в его продукции в среднем составляет 2 детали на 100. Найти вероятность, что из 5 случайно выбранных деталей качественными будут а) все детали; б) хотя бы 4 детали.

**15.** Для обслуживания рейса самолета требуются три стюардессы, которых выбирают по жребию из 20 девушек, претендующих на эти места; 7 из них − блондинки, остальные − брюнетки. Найти вероятность того, что среди выбранных трех стюардесс одна блондинка и две брюнетки.

**16.** У туристов было две банки с мясом, две банки с овощами, две банки с фруктами. Во время дождя надписи на банках были смыты. Туристам нужно открыть три банки. Какова вероятность, что все три банки будут отличаться содержимым?

**17.** В автомашине 7 мест. Сколькими способами 7 человек могут усесться в эту машину, если водительские права имеют только трое из них?

**18.** Из двадцати человек, которые должны сдавать экзамены, 10 должны явиться в 10 часам утра, остальные − к 11 часам, Если 7 студентов определенно хотят быть в первой группе, 5 − во второй, а две подружки не возражают быть в любой из групп, но только обязательно вместе, то сколькими способами староста может распределить студентов по группам?

**19.** Цветочница продает розы четырех сортов. Сколько разных букетов можно составить из дюжины роз?

**20.** В студенческой столовой на обед предлагаются: 3 салата, 2 первых блюда, 4 вторых, в том числе котлеты и рыба, 3 напитка, в том числе томатный сок. Сколькими способами студент может составить обед из четырех блюд: салат, первое, второе, напиток, если котлет он опасается, а рыбу запивает только томатным соком?

**21.** В один из комитетов парламента нужно отобрать трех членов, причем выбрать нужно из пяти консерваторов, трех лейбористов и четырех либерал-демократов. Сколько различных комитетов можно составить? Тот же вопрос, если в комитет должен входить по крайней мере один либерал-демократ? Если лейбористы и консерваторы не могут одновременно входить в комитет? Если в комитет должен войти по крайней мере один консерватор и хотя бы один лейборист?

**22.** В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Сколько есть способов заказать 4 пирожных? Сколько среди них есть способов заказать пирожное одного вида? Разных видов? По 2 пирожных разных видов?

## 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

***Теорема сложения вероятностей***. Вероятность появления хотя бы одного из двух событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1)$$

Для несовместных событий $P(AB)=0$ и $P(A+B)=P(A)+P(B)$ .

Вероятность суммы (объединения) $n$ несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \qquad (2)$$

Если требуется найти вероятность события $A$ в предположении, что произошло некоторое другое событие B, то такую ситуацию характеризуют с помощью ***условной вероятности*** $P(A|B)$ ( другой вариант обозначения: $P_B(A)$).

Условная вероятность равна отношению вероятности произведения событий $A$ и $B$ к вероятности события $B$ ($P(B) > 0$):

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Эту формулу можно записать в виде ***теоремы умножения вероятностей***: $P(AB) = P(B)\,P(A|B) = P(A)\,P(B|A)$.

Теорема умножения для произвольного числа событий записывается следующим образом:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \qquad (3)$$

Два события называются ***независимыми***, если появление одного из них не изменяет вероятности другого: $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$.

Для независимых событий теорема умножения имеет вид

$$P(AB) = P(A)\,P(B), \qquad (4)$$

т.е. вероятность совместного появления событий $A$ и $B$ равна произведению вероятностей этих событий.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \ldots P(A_n).$$

**Пример 1**. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) на обеих костях выпало два очка; б) на обеих костях выпало по два очка, если известно, что выпало четное число оков.

Решение. Этот Пример является продолжением Примера 3 (§ 1), где мы нашли: $N(\Omega) = 36$,

$A$ = {выпало четное число очков}, $N(A) = 9$, $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{9}{36}$.

а) $B$ = {на обеих костях выпало по два очка}={(2,2)}, $N(B) = 1$ и

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{36}.$$

б) $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

$AB$ = {на обеих костях выпало два очка} = $B$.

Следовательно, $P(AB) = P(B) = \frac{1}{36}$.

Искомая вероятность равна:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{1}{9} = 0{,}11.$$

**Пример 2.** Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков, если каждому стрелку дается по одному выстрелу.

Решение. Введем обозначение событий:

$B_1$ = {первый стрелок попал в цель},

$B_2$ = {второй стрелок попал в цель},

$A$ = {в мишень попал хотя бы один из стрелков}.

$P(B_1) = 0{,}7$, $P(B_2) = 0{,}6$.

Эта задача может быть решена несколькими способами.

Способ 1. Событие «попал хотя бы 1 стрелок» включает в себя три возможных события:

$H_1 = B_1\overline{B}_2$ – первый стрелок попал, и одновременно второй – не попал.

$H_2 = \overline{B}_1 B_2$ – первый стрелок не попал, и одновременно второй – попал.

$H_3 = B_1B_2$ – оба стрелка попали.

События $H_1$, $H_2$, $H_3$ являются несовместными (произойдет или событие $H_1$, или событие $H_2$, или событие $H_3$). В результате события $A$ может произойти только одно из этих событий, поэтому мы можем использовать формулу (2):

$P(A) = P(H_1$ или $H_2$ или $H_3) = P(H_1 + H_2 + H_3) = P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = P(B_1\overline{B}_2) + P(\overline{B}_1 B_2) + P(B_1B_2)$.

Стрелки стреляют независимо друг от друга, следовательно, события $B_1$ и $B_2$, $B_1$ и $\overline{B}_2$, $\overline{B}_1$ и $B_2$ – независимы. Тогда по формуле (4):

$P(B_1\overline{B}_2) = P(B_1)P(\overline{B}_2) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}28$,

$P(\overline{B}_1 B_2) = P(\overline{B}_1)P(B_2) = (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}6 = 0{,}18$,

$P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$,

$P(A) = 0{,}28 + 0{,}18 + 0{,}42 = 0{,}88$.

Способ 2. Найдем вероятность события $A$ через противоположное событие: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

$\overline{A}$ = {никто не попал} и $\overline{A} = \overline{B}_1\overline{B}_2$.

Тогда $P(A) = 1 - P(\overline{B}_1\overline{B}_2) = 1 - P(\overline{B}_1)\, P(\overline{B}_2) = 1 - (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}6) = 0{,}88$.

Способ 3. Событие $A$: «попал хотя бы один из стрелков» означает, что в мишень попал или первый стрелок, или второй стрелок, или оба стрелка, т.е. $A = B_1 + B_2$.

По формуле (1) сложения вероятностей получаем:

$P(A) = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1B_2) = 0,7 + 0,6 - 0,7 \cdot 0,6 = 0,88$.

**Пример 3.** Слово «МАТЕМАТИКА» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами тщательно перемешиваются и из них извлекаются по очереди и раскладываются в ряд какие-то четыре. Какова вероятность получить таким путем слово «КАМА»?

Решение. Если бы мы хотели получить слово «КАМА», то первая буква, которую надо выбрать – это буква «К», вторая буква – «А» и т.д.

Введем обозначение событий:

$A$ = {первой извлекается буква «К»},

$B$ = {второй извлекается буква «А»},

$C$ = {третьей извлекается буква «М» },

$Д$ = {четвертой извлекается буква «А» }.

Для получения слова «КАМА» события $A$, $B$, $C$, $Д$ должны произойти совместно.

P (получить слово «КАМА») = P($A$ и $B$ и $C$ и $Д$) = $P(ABCД)$.

События $A$, $B$, $C$, $Д$ зависимые, поэтому используем формулу (3):

$P(ABCД) = P(A)\, P(B|A)\, P(C|AB)\, P(Д|ABC)$.

Вероятности событий находятся по формуле классического определения вероятности. Тогда, $P(A)=\frac{1}{10}$. После того как мы извлечем первую букву (букву «К») у нас останется 9 букв, среди которых 3 буквы «А». Поэтому условная вероятность равна $P(B|A)=\frac{3}{9}$. Аналогично, $P(C|AB)=\frac{2}{8}$. Найдем последнюю вероятность $P(Д|ABC)$. После извлечения трех букв у нас останется 7 букв. Изначально было три буквы «А», но одну букву мы уже извлекли, поэтому этих букв осталось две.

Тогда $P(Д|ABC) = \frac{2}{7}$.

Искомая вероятность равна:

$$P(ABCД) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{420} = 0,002.$$

## Задачи к § 2.

**1.** В некоторой школе 10% учащихся не сдали экзамены по математике, 12% − по физике, 2% «провалили» как математику, так и физику. Наугад выбирается один ученик. Будут ли события {этот ученик не сдал математику} и {этот ученик не сдал физику} независимы?

**2.** Ожидается прибытие двух судов с апельсинами. Статистика показывает, что в одном из 100 случаев груз апельсинов портится в дороге. Какова вероятность того, что а) оба судна довезут свой груз неиспорченным; б) только одно судно прибудет с неиспорченным грузом; в) оба судна прибудут с испорченным грузом?

**3.** Невыход автобуса в рейс может произойти по двум независимым причинам: из-за неисправности автобуса и, что случается значительно реже, из-за неявки водителя на работу. Вероятность неисправности автобуса равна 0,04, а неявки водителя – 0,01. Найти вероятность того, что автобус в рейс не выйдет.

**4.** В ОТК обувной фабрики просматриваются 100 пар обуви, из них 70 пар – фасона «А», а 30 пар - фасона «Б». Определить вероятность, того, что первые две просмотренные пары: а) одного фасона; б) разных фасонов.

**5.** Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, 0,7; вторым – 0,4. Первый стрелок сделал 2 выстрела, второй – 3. Определить вероятность того, что цель не поражена.

**6.** Опрос Исследовательского центра портала SuperJob.ru 12 мая 2009 года показал, что 17% опрошенных узнаёт прогноз погоды по телевизору, 4% − по радио, 70% − в Интернете, 1% − от знакомых, 1% − по народным приметам, 2% − другое (точный прогноз погоды можно узнать только выйдя на улицу или взглянув на термометр, установленный за окном). Самым популярным интернет-ресурсом, предоставляющим метеопрогнозы, оказался «Яндекс-погода» (39%). Каждый четвёртый респондент (25%) выбирает Gismeteo.ru, а 15% участников исследования – Mail.ru. Сервис «Rambler-погода» предпочитают 7% россиян, а сайт Гидрометцентра (meteoinfo.ru) – 2%. Найдите вероятность того, что а) случайно выбранный человек узнает метеопрогноз на «Яндекс-погода»; б) два случайно опрошенных человека предпочитают традиционные СМИ (телевизор и радио); в) все пять случайно опрошенных человека используют разные Интернет-ресурсы.

**7.** Задача о конкуренции. В ванну, где содержатся 3 рыбы А, В и С, время от времени помещают кусочки пищи. Каждый раз, когда бросают кусочек, рыбы конкурируют за него. Допустим, что за длительный период наблюдения было установлено, что А или В добивались успеха в течение 1/2 времени, а А или С в течение 3/4 всего времени наблюдения. а) Какова вероятность того, что добивается успеха рыба А? б) Какая рыба накормлена лучше всех?

**8.** Студент, оценивая свои возможности, пришел к выводу, что он может набрать не менее 8 баллов по первому тесту с вероятностью 0,8, по второму − с вероятностью 0,9 и по третьему − с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что студент хотя бы по одному тесту получит не менее 8 баллов.

**9.** Проведенный Исследовательским центром рекрутингового портала SuperJob.ru опрос на тему «Как Вы считаете, для того чтобы выезжать на дорогу, достаточно ли пройти курс обучения в автошколе?» в январе 2010г дал следующие результаты

| **Вариант ответа** | **Все** | **Пол** | |
|---|---|---|---|
| | | **муж** | **жен** |
| да, автошколы вполне достаточно | 14% | 16% | 12% |
| нет, помимо автошколы необходимы дополнительные практические занятия | 84% | 81% | 87% |
| затрудняюсь ответить | 2% | 3% | 1% |

Случайным образом было выбрано 4 человека. Найти вероятность того, что половине опрошенных достаточно автошколы, а другая половина опрошенных нуждается в дополнительных практических занятиях. Найти эту вероятность, если известно, что все опрошенные были а) мужчинами; б) женщинами.

**10.** Монету бросают несколько раз либо до выпадения первого герба, либо до четырехкратного выпадения цифры. Если известно, что в первых двух бросаниях выпала цифра, найти вероятности того, что: а) монета была брошена 4 раза; б) монета брошена 3 раза.

**11.** В группе из ста человек 42 никогда не читали Шекспира, 58 никогда не летали на самолете, 29 читали Шекспира и летали на самолете. Что более вероятно: встретить читавшего Шекспира, но не летавшего на самолете, или летавшего на самолете и читавшего Шекспира?

**12.** В одном маленьком городке полиция разыскивает бродягу. Можно считать, что есть 4 шанса из 5, что он находится в одном из восьми баров городка, ни одному из которых он не отдает предпочтения. Двое полицейских посетили 7 баров, но бродягу не обнаружили. Каковы шансы найти его в восьмом баре?

**13.** Всем целым числам от единицы до $n$ приписаны вероятности, пропорциональные этим числам. Найти эти вероятности.

**14.** На большой улице расположены один за другим 2 светофора. Каждый из них устроен так, что промежуток времени, когда в нем горит зеленый свет, составляет 2/3 всего времени работы светофора. Автомобилист заметил, что когда он, двигаясь с обычной скоростью, проезжает на зеленый свет первого светофора, то в трех случаях из четырех второй светофор его не задерживает. Пусть автомобилист проскочил первый светофор при красном свете. Чему равна вероятность того, что и на втором будет гореть красный свет?

**15.** Некоторое событие может произойти в любой из дней недели с одинаковыми вероятностями. Рассмотрим для примера всем известное и не столь частое событие – проверку дымоходов в квартирах (или внеплановое отключение горячей воды). Предполагается, что день проверки дымоходов выбирается случайно и закономерности тут нет никакой. Пусть последние 12 проверок приходились либо на вторники, либо на четверги. Согласуется ли этот случай с нашим предположением о том, что событие может равновероятно случится в любой день недели.

**16.** В условиях предыдущей задачи проверить вероятность гипотезы о равновероятности осуществления события в любой день недели, если при 12 осуществлениях событие ни разу не произошло в воскресенье.

**17.** Игрок бросает 2 кости, и если сумма очков равна 7 или 11, то он выигрывает. Если же она равна 2, 3 или 12, то он проигрывает. В случае выпадения всех оставшихся вариант сумм (4,5,6,8,9,10) игрок продолжает бросать кости, пока при некотором броске не выпадает та же сумма очков, что и при первом броске. В этом случае он выигрывает. Если же во время этих попыток выпадает 7 очков, то игрок проигрывает. Найти вероятность: а) проигрыша при первом бросании; б) выигрыша игрока при первом бросании; в) выпадении 4 очков при бросании и выигрыш впоследствии ; г) выпадение 8 очков при первом бросании и выигрыш впоследствии; д) выпадение 9 очков и проигрыш впоследствии.

**18.** Студент сдает экзамен до первой удовлетворительной оценки, но не более 3 раз. Вероятность сдать экзамен с первой попытки равна 0,5, со второй попытки (после неудавшейся первой) − 0,7, а с третьей − 0,7. Какова вероятность сдать экзамен? Не сдать экзамен?

## 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называют ***полной группой событий***, если
а) они несовместны: $H_iH_j = O$ при $i \neq j,\ i, j=1..n$;
б) покрывают все пространство элементарных исходов:

$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$.

Пусть событие $A$ может наступить при условии появления одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Вероятность события $A$ можно найти по следующей формуле.

***Формула полной вероятности***: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$.

Поскольку заранее не известно, какое из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ произойдет, то эти события принято называть гипотезами по отношению к событию $A$. Безусловные вероятности $P(H_i)$ трактуются как ***доопытные (априорные)*** вероятности гипотез. Допустим, событие $A$ осуществилось. Какова после ***опытная (апостериорная)*** вероятность осуществления гипотезы $H_i$ при условии, что событие $A$ имело место? Ответ дает ***формула Байеса***:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)},$$

где $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$ - формула полной вероятности.

**Пример 1.** Часы, относящиеся к сегменту бюджетных моделей, поступают в магазин с трех заводов. Завод I поставляет 35% всей продукции, завод II – 45% и завод III – 20%. Доля бракованной продукции составляет для них соответственно 6%, 4% и 7%.
а) Какова вероятность того, что купленные часы окажутся бракованными?
б) Купленные часы оказалась бракованными. Какова вероятность того, что эта часы произведены заводом I ?

Решение. Представим исходные данные в виде таблицы.

| | Завод I | Завод II | Завод III |
|---|---|---|---|
| Доля продукции | 35% | 45% | 20% |
| Брак (%) | 6% | 4% | 7% |

а) Пусть $A$ = { купленные часы оказались бракованными },

$H_1$ = {часы произведены заводом I },

$H_2$ = {часы произведены заводом II },

$H_3$ = {часы произведены заводом III }.

События $H_1$, $H_2$, $H_3$ образуют полную группу событий, т.к. часы производится только одним заводом. Поскольку доля завода I в ассортименте магазина (для бюджетных часов) составляет 35%, то безусловная вероятность равна $P(H_1) = 0{,}35$.

Аналогично, $P(H_2) = 0{,}45$ и $P(H_3) = 0{,}20$.

Завод I производит 5% брака, следовательно, вероятность случайно выбрать бракованные часы при условии, что они произведены заводом I, равна $P(A|H_1) = 0{,}06$.

$P(A|H_2) = 0{,}04$ и $P(A|H_3) = 0{,}07$

Применяя формулу полной вероятности, получаем

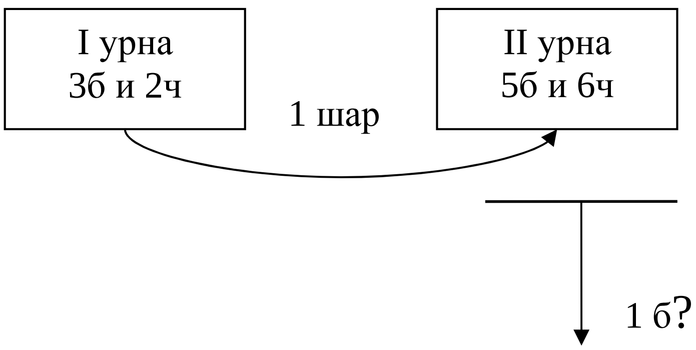
$P(A) = P(H_1)\ P(A|H_1) + P(H_2)\ P(A|H_2) + P(H_3)\ P(A|H_3) = 0{,}35 \cdot 0{,}06 + +0{,}45 \cdot 0{,}04 + 0{,}20 \cdot 0{,}07 = 0{,}053$.

б) Вероятность того, что бракованные часы произведены заводом I, будем искать по формуле Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}06}{0{,}0495} = 0{,}396.$$

**Пример 2.** Имеются 2 урны, содержащие белые и черные шары. В первой урне – 3 белых и 2 черных шара, во второй – 5 белых и 6 черных шаров. Из первой урны наудачу извлекается шар и перекладывается во 2 урну. Затем из второй урны наудачу извлекается шар. Найти вероятность того, что из второй урны вынули белый шар.

Решение. Представим условие задачи в виде следующей схемы.




Эта задача решается по формуле полной вероятности.

$A$ = {из урны II вынули белый шар}.

Мы не знаем, какой шар переложили из первой урны во вторую, поэтому за гипотезы возьмем следующие события.

$H_1$ = {из урны I в урну II переложили белый шар} и

$H_2$ = {из урны I в урну II переложили черный шар}.

Вероятность из урны I вынуть белый шар равна $P(H_1) = \frac{3}{5}$, а черный – $P(H_2) = \frac{2}{5}$. Условная вероятность вынуть из урны II белый шар, если мы положили туда белый шар, равна $P(A|H_1) = \frac{6}{12}$. Если же в урну II мы положим черный шар, то всего шаров в урне стало 12, а белых шаров осталось прежнее количество – 5 шаров. Поэтому $P(A|H_2) = \frac{5}{12}$.

$$P(A) = P(H_1)\,P(A|H_1) + P(H_2)\,P(A|H_2) = \frac{3}{5}\cdot\frac{6}{12} + \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{12} = \frac{7}{15}.$$

**Пример 3.** Три стрелка произвели залп, причем только одна пуля поразила мишень. Найти вероятность того, что попал третий стрелок, если вероятности попадания первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,4.

Решение. Пусть $A$ = {один стрелок попал в мишень}.

В качестве гипотез возьмем следующие события:

$H_1$ = {третий стрелок попал в цель} и

$H_2 = \overline{H}_1$ = {третий стрелок промахнулся}.

По условию, $P(H_1) = 0{,}4$ и $P(H_2) = 1 - P(\overline{H}_1) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Событие $\{A|H_1\}$ означает, что было одно попадание в мишень, причем попал третий стрелок. Следовательно первый и второй стрелки промахнулись и, используя теорему умножения для независимых событий, получаем $P(A|H_1) = P(\overline{1}\ и\ \overline{2}) = (1 - 0{,}6)(1 - 0{,}7) = 0{,}12$.

Найдем условную вероятность $P(A|H_2)$. Событие $\{A|H_2\}$ означает, что в мишень попал один стрелок, причем третий стрелок промахнулся. Это означает, что либо первый стрелок попал и второй промахнулся, либо первый стрелок промахнулся и второй стрелок попал. Тогда (аналогично Примеру 2, § 2).

$$P(A|H_2) = P(1\ и\ \overline{2}\ или\ \overline{1}\ и\ 2) = 0{,}6\cdot(1 - 0{,}7) + (1 - 0{,}6)\cdot 0{,}7 = 0{,}46.$$

Применяя формулу Байеса, получаем

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}12}{0{,}4\cdot 0{,}12 + 0{,}6\cdot 0{,}46} = \frac{4}{27}.$$

Таким образом, с вероятностью $\frac{4}{27}$ можно ожидать, что в мишень попал третий стрелок.

**Задачи к § 3.**

**1.** Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, второго − 0,03, третьего − 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в 3 раза больше, чем второго, а третьего в 2 раза меньше, чем второго. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет обработана на третьем станке, если она оказалась бракованной.

**2.** На одном производстве было установлено, что 3% рабочих являются алкоголиками с показателями прогулов втрое выше, чем у остальных рабочих. Если случайно выбранный рабочий отсутствует на работе, то какова вероятность того, что он алкоголик? Отв.: 0,085.

**3.** Установлено, что курящие мужчины в возрасте свыше 40 лет умирают от рака легких в 10 раз чаще, чем некурящие мужчины. В предположении, что 60% этой популяции курящие, какова вероятность того, то мужчина, умерший от рака легких, был курящим? Отв.: 0,9375.

**4.** Среди деталей, поступающих на сборку, с первого станка 0,1% бракованных, со второго − 0,2%, с третьего − 0,5%. Производительность станков относится как 4:3:2 соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что эта деталь была изготовлена на 3-м станке.

**5.** Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную − 0,05. Определить вероятность, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

**6.** В магазине продается 4 модели утюга. Вероятность того, что они выдержат гарантийный срок, соответственно равны: 0,91; 0,95; 0,9; 0,94. Найти вероятность того, что взятый наудачу утюг выдержит гарантийный срок.

**7.** Компания владеет 3 легковыми и 19 грузовыми автомобилями. Вероятность поломки легковых автомобилей равна 0,2, а грузовых − 0,4. Найти вероятность того, что случайно выбранный автомобиль не потребует услуг автосервиса.

**8.** Опрос, проведённый Исследовательским центром рекрутингового портала SuperJob.ru (http://www.superjob.ru) в ноябре 2009г показал, что наши сограждане крайне отрицательно относятся к использованию в продуктах питания генномодифицированных организмов (ГМО). Причем, женщины в этом вопросе немного более категоричны, чем мужчины (60% и 57% соответственно). Доля опрошенных, которые характеризуют свою позицию, как «скорее отрицательно», равна 25% (мужчины) и 27% (женщины). Найти вероятность того, что случайно выбранный человек относитесь к использованию ГМО а) крайне отрицательно; б) скорее отрицательно. Считать, что мужчин − 46%, а женщин − 54%.

**9.** Некоторое заболевание, встречающееся у 5% населения, с трудом поддается диагностике. Один грубый тест на это заболевание дает положительный результат (указывает на наличие заболевания) в 60% случаев, когда пациент действительно болен и в 30% случаев когда у пациента нет этого заболевания. Пусть для конкретного пациента этот тест дает положительный результат. Какова вероятность, что у него действительно есть заболевание?

**10.** Согласно опросу Исследовательского центра рекрутингового портала SuperJob.ru (май 2009 г) женщины, занимающие руководящие должности, чаще мужчин-руководителей, считают, что карьерный рост подрывает здоровье (38% против 32%). В то время как о положительном влиянии карьеры на здоровье говорят примерно равные количества респондентов − 45% мужчин и 44% женщин. В одной компании на руководящих должностях заняты 62 мужчины и 25 женщин. Найти вероятность того, что два случайно выбранных руководителя а) согласны с мнением, что интересная работа «лечит лучше любых лекарств»; б) придерживаются разных мнений.

**11.** Обычно Олег дарит Татьяне к каждому празднику букет цветов: в 30% случаев − из гвоздик, в 70% случаев − из роз. В зимний период букет из роз может простоять неделю с вероятностью 0,4, а букет из гвоздик − с вероятностью 0,9. Татьяна сообщила Олегу, что в этот раз букет простоял целую неделю. Какие цветы наиболее вероятно были подарены?

**12.** В одной урне 2 белых и 3 черных шара, в другой − 3 белых и $x$ черных. Чему равно число $x$, если полная вероятность вынуть белый шар из второй урны равна 17/30?

**13.** Имеются 2 урны. В первой 3 белых и 4 черных шара, во второй − 2 белых и 3 черных. Из первой урны переложили во вторую 2 шара, а затем извлекли из второй урны один шар, Он оказался белым. Какой цвет переложенных шаров наиболее вероятен?

**14.** Чтобы узнать, как избиратели относятся к деятельности народного депутата А, исследователи общественного мнения выбрали для опроса три города. В первом городе проживает 50000 избирателей, во втором − 150000, в третьем − 500000. Оказалось, что в первом городе депутата поддерживают 10% избирателей, во втором − 30%, в третьем − 70%. Найти вероятность, что наудачу выбранный избиратель, проживающий в одном из этих трех городов, поддерживает депутата А.

**15.** Выбирают букву из слов ГОД. Если выбранной оказалась гласная буква, то выбирают 2 буквы из слова САД. Если выбрана согласная буква, выбирают 2 буквы из слова РОЙ. Какова вероятность сложить из трех выбранных букв трехбуквенной существительное?

**16.** В одной урне находятся 6 белых и 4 черных шара, во второй − 3 белых и 2 черных. Из первой урны извлекают 3 шара. Шары того цвета, которые окажутся в большинстве, опускают во вторую урну. После этого из второй урны вынимают шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

**17.** Каждое изделие завода может с вероятностью 0,02 иметь дефект. При проверке качества котроллер может обнаружить дефект с вероятностью 0,9. Кроме того, котроллер по ошибке может забраковать качественное изделие с вероятностью 0,03. Найти вероятность того, что а) изделие забраковано; б) изделие забраковано по ошибке; в) изделие с дефектом пропущено в готовую продукцию.

**18.** На предприятии работают 10 рабочих шестого разряда, 15 рабочих пятого разряда и 5 рабочих четвертого разряда. Вероятность того, что изделие, изготовленное рабочим соответствующего разряда, будет одобрено ОТК, равна, соответственно, 0,95, 0,9 и 0,8. Найти вероятность того, что изделие, проверенное ОТК, будет одобрено, при условии, что производительность всех рабочих одинакова.

**19.** Две машинистки печатали рукопись, посменно заменяя друг друга. Первая в конечном итоге напечатала 1/3 всей рукописи, а вторая − остальную часть. Первая машинистка делает ошибки с вероятностью 0,15, а вторая — с вероятностью 0,1. При проверке на 13-й странице обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая машинистка.

**20.** В торговую фирму поступили телевизоры от трех фирм изготовителей в соотношении 2:5:3. Телевизоры, поступающие от первой фирмы, требуют ремонта в течение гарантийного срока в 15% случаев, от второй и третьей — соответственно в 8% и 6% случаев. Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока.

**21.** При автоматизированном приеме зачета необходимо выбрать правильный ответ из 3 вариантов. Хороший студент знает 90 % ответов. Какова вероятность того, что хороший студент угадал ответ, если он ответил правильно?

**22.** Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: класс A (мало рискует), класс B (рискует средне), класс C (рискует часто). Агентство предполагает, что среди водителей, застраховавших автомобили, 30% принадлежит классу A, 50% - классу B и 20% - классу C. Вероятность того, что в течение года водитель класса A попадет хотя бы в одну аварию равна 0,01, для водителей класса B эта вероятность равна 0,02, а для водителей класса C эта вероятность равна 0,08. Какова вероятность того, что некий водитель принадлежит классу A, если в течение года он ни разу не попал в аварию?

**23**. Вероятность боя стеклянных банок при транспортировке консервов на автомашинах равна 0,01, а по железной дороге – в 5 раз меньше. Определить вероятность того, что наудачу взятая банка оказалась разбитой, если на автомашинах перевезено консервов в 4 раза меньше, чем по железной дороге.

**24.** а) Вероятность того, что лось переносит зиму, оценивается в 80%, если лось здоров, и в 30%, если лось болен. Если в популяции больны 20% лосей, то какая доля популяции перенесет зиму?

б) Если волки убивают 80% здоровых и 70% больных лосей из тех, что не выживают за зиму, то какую долю убитые волками за зиму лоси составляют во всей популяции?

**25.** Имеется 5 урн. В первой, второй и третьей находятся 4 белых и 6 черных шаров, в четвертой и пятой урнах − по 2 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова вероятность, что выбрана 5-я урна, если извлеченный шар оказался белым?

## 4. Повторные испытания:

## биномиальное и полиномиальное распределения

До сих пор мы изучали вероятности, связанные с одним проведением какого-либо эксперимента. В данной главе мы рассмотрим ситуацию, когда один и тот же эксперимент выполняется несколько раз подряд. Рассмотрим случайный эксперимент с двумя исходами $A$ и $\overline{A}$, где $A$ будем условно считать «успехом», а противоположное событие $\overline{A}$ – «неудачей». Допустим, что при одном проведении эксперимента вероятность успеха есть $p$, а вероятность неудачи есть $q = 1 - p$.

Схема повторных независимых испытаний, в каждом из которых событие $A$ появляется с одной и той же вероятностью $p$, независящей от номера испытания, называется ***схемой Бернулли***.

Вероятность того, что в схеме Бернулли при $n$ независимых испытаниях событие $A$ наступит $k$ раз, равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Эта формула носит название ***формулы Бернулли***, а соответствующее распределение – *биномиальное*.

В схеме Бернулли число $\boldsymbol{k_0}$ называют ***наивероятнейшим***, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях $k_0$ раз, превышает (или, по крайней мере, не менее) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число $k_0$ определяют из двойного неравенства $np + p - 1 \leq k_0 < np + p$, причём:

а) если число $np + p - 1$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число $k_0$;

б) если число $np + p - 1$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно $k_0$ и $k_0+1$;

в) если число $np$ – целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Биномиальное распределение применимо к повторным испытаниям для эксперимента с двумя исходами. Рассмотрим общий случай, когда результатом эксперимента может быть любой из $m$ исходов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $p_i = \mathrm{P}(A_i)$. Вероятность того, что в $n$ испытаниях событие $A_1$ появится $k_1$ раз, $A_2$ – $k_2$ раз и т.д., находится по формуле полиномиального распределения:

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m},$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$.

Биномиальное распределение − это частный случай полиномиального распределения.

**Пример 1.** Игральная кость бросается семь раз. Найти вероятность того, что пять очков выпадет: а) два раза; б) не менее двух раз и не более четырех раз; в) хотя бы один раз. Найти наивероятнейшее число выпадения пяти очков.

Решение. Так как в условии задачи два возможных исхода (либо выпадет пять очков, либо нет), то эта задача на формулу Бернулли. Обозначим за «успех» выпадение 5 очков.

$A$ = { выпало 5 очков } и $p$ = P($A$) = 1/6,

$\overline{A}$ = { выпало 1 или 2 или 3 или 4 или 6 очков); $q$ = 5/6.

$n$ = 7.

а) $k$ = 2.

P(5 очков выпадало 2 раза в 7 испытаниях) = $P_7(2) = C_7^2 p^2 q^{7-2}$ =

$= \frac{7!}{2!5!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}233$ .

б) $2 \le k \le 4$. По теореме сложения вероятностей

$P_7(2 \le k \le 4) = P_7(k=2$ или $k = 3$ или $k = 4) = P_7(k=2) + P_7(k=3) + P_7(k=4)$

$= C_7^2 p^2 q^{7-2} + C_7^3 p^3 q^{7-3} + C_7^4 p^4 q^{7-4} = \frac{7!}{2!5!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \frac{7!}{3!4!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^4 +$

$+ \frac{7!}{4!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}092$ .

в) $k \ge 1$. Найти вероятность этого события можно двумя способами. Первый способ – как в предыдущем пункте.

$$P_7(k \ge 1) = P_7(1) + P_7(2) + \ldots + P_7(7).$$

Этот способ довольно трудоемкий, поэтому в данном случае предпочтительнее искомую вероятность выразить через противоположное событие.

$P_7(k \ge 1) = 1 - P_7(k < 1) = 1 - P_7(0) = 1 - C_7^0 p^0 q^{7-0} = 1 - \frac{7!}{0!7!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^7 =$

$= 1 - 0{,}0965 = 0{,}9035.$

Найдём наивероятнейшее число $k_0$ из двойного неравенства

$$np + p - 1 \le k_0 < np + p.$$

$$7 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 1 \le k_0 < 7 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6},$$

$$\frac{2}{6} \le k_0 \le \frac{8}{6}.$$

Так как число $k_0$ – это количество «успехов», следовательно, число $k_0$ может быть только целым. В полученном интервале $\left[\frac{2}{6}; 1\frac{2}{6}\right]$ находится единственное целое число – 1. Следовательно, $k_0$ = 1. Таким образом, если игральная кость бросается семь раз, то пять очков, вероятнее всего, выпадут только один раз.

**Пример 2**. Всероссийский центр изучения общественного мнения (ВЦИОМ) в январе 2010г. провел опрос, в ходе которого, в частности, задавался следующий вопрос.

В настоящее время многие люди стремятся получить высшее образование. Как Вы думаете, зачем им это нужно?

(Опрошено 1600 человек в 140 населенных пунктах в 42 областях, краях и республиках России.)


Случайным образом выбрали восемь человек. Найти вероятность того, что а) четыре человека полагают, что главным мотивом для получения высшего образования является хорошее трудоустройство, трое − карьера и еще один − получение специальных знаний; б) половина опрошенных целью получения высшего образования считает возможность расширять кругозор, а другая половина − получение специальных знаний; в) все опрошенные выбрали в качестве мотива карьеру.

Решение. Для решения задачи используем формулу полиномиального распределения.

$A_1$ ={случайно опрошенный человек полагает, что главным мотивом для получения высшего образования является хорошее трудоустройство} и $p_1$=0,33,

$A_2$ = { .... получение специальных знаний } и $p_2$ = 0,25,

$A_3$ = { .... карьера } и $p_3$ = 0,12,

$A_4$ = { ... новые знания, расширение своего кругозора } и $p_4$ = 0,10,

$A_5$ = { ... возможность оказаться в культурной, образованной среде } и $p_5$=0,06,

$A_6$ = { ... потому что сегодня так принято } и $p_6$ = 0,06.

$A_7$ = { ....повышение своего социального статуса } и $p_7$ = 0,05,

$A_8$= { .... возможность не служить в армии } и $p_8$ = 0,02,

$A_9$ = { затрудняюсь ответить } и $p_9$ = 0,01,

$n$ = 8.

а) $n_1 = 4$, $n_2 = 1$, $n_3 = 3$, $n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = n_9 = 0$.

$$P_6(4, 1, 3, 0, 0, 0,0,0,0) = \frac{8!}{4!\,1!\,3!\,0!0!\,0!0!\,0!\,0!}(0{,}33)^4\cdot(0{,}25)^1\cdot(0{,}12)^3\cdot(0{,}10)^0\times$$

$$\times(0{,}06)^0\cdot(0{,}06)^0(0{,}02)^0\cdot(0{,}01)^0=\frac{8!}{4!3!}(0{,}33)^4(0{,}25)^1(0{,}12)^3=0{,}001434.$$

б) $n_2 = n_4 = 4$, $n_1 = n_3 = n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = n_9 = 0$.

$$P_6(0, 4, 0, 4, 0, 0,0,0,0) = \frac{8!}{0!\,4!\,0!\,4!\,0!\,0!0!\,0!0!}(0{,}33)^0\cdot(0{,}25)^4\cdot(0{,}12)^0\cdot(0{,}10)^4\times$$

$$\times(0{,}06)^0\cdot(0{,}06)^0(0{,}02)^0\cdot(0{,}01)^0=\frac{8!}{4!4!}(0{,}25)^4(0{,}10)^4=0{,}000027.$$

в) $n_3 = 8$, $n_1 = n_2 = n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = n_9 = 0$.

$$P_6(0,0,8,0,0,0,0,0,0) = \frac{8!}{0!\,0!\,8!\,0!\,0!\,0!\,0!0!\,0!}(0{,}33)^0\cdot(0{,}25)^0\cdot(0{,}12)^8\cdot(0{,}10)^0\times$$

$$\times(0{,}06)^0\cdot(0{,}06)^0(0{,}02)^0\cdot(0{,}01)^0=\frac{8!}{8!}(0{,}12)^8=0{,}000000043.$$

Здесь мы, фактически, рассматривали два противоположных события: люди, которые выбрали в качестве мотива карьеру (их 12%), и люди, которые считают более важными другие цели для получения высшего образования (88%). Поэтому эту вероятность можно было вычислить и по формуле Бернулли ( $n = 8$; $k = 8$; $p = 0{,}12$; $q = 0{,}88$).

## Задачи к § 4.

**1.** Лечение одного заболевания приводит к выздоровлению в 75% случаев. Лечилось 4 больных. Какова вероятность того, что а) вылечатся все четверо; б) не вылечится ни один; в)вылечатся по крайней мере 3 человека?

**2.** Известно, что в среднем 3/5 всего числа выпускаемых заводом телефонных аппаратов является продукцией 1 сорта. Найти вероятность того, что в партии из 200 аппаратов окажется наивероятнейшее число аппаратов 1 сорта.

**3.** Вакансия, предлагаемая безработному биржей труда, удовлетворяет его с вероятностью 0,01 . Сколько нужно обслужить безработных, чтобы вероятность того, что хотя бы один из них найдет работу, была бы не ниже 0,95?

**4.** Отдел надзора отделения центрального банка курирует деятельность ряда коммерческих банков. При сдаче квартальной отчетности серьезные финансовые нарушения обнаруживаются в среднем у 5% банков. На проверку выбрано три банка. Найти наиболее вероятное число банков с серьезными нарушениями финансовой отчетности среди выбранных.

**5.** Три независимых эксперта делают прогноз стоимости акции компании, ошибаясь при этом с одинаковой вероятностью р. Найти р, если вероятность того, что хотя бы один из них ошибается, равна 0,271.

**6.** Фирма рассылает рекламные проспекты восьми потенциальным партнерам. В результате такой рассылки в среднем у каждого пятого потенциального партнера возникает интерес к фирме. Найти вероятность того, что это произойдет: а) в трех случаях; б) не более чем в трех.

**7.** Лицензия отбирается у любого торгового предприятия, как только торговая инспекция в третий раз обнаружит серьезное нарушение правил торговли. Найти вероятность того, что лицензия будет отобрана после пятой проверки. Известно, что вероятность обнаружения нарушения при одной проверке равна 0,2 и не зависит от результатов предыдущих проверок.

**8.** Опрос Исследовательского центра портала SuperJob.ru (октябрь 2008 г, 1800 респондентов из семи округов РФ) показал, что почти каждый второй участник опроса (48%) не сомневается в пользе рекламы. Причем, некоторые считают, что пользу получают скорее рекламодатели, чем потребители рекламируемых товаров и услуг.

«23 октября – День работников рекламы. По Вашему мнению, реклама приносит больше пользы или вреда?»

| | | |
|---|---|---|
| Больше пользы | 48% | |
| Больше вреда | 25% | |
| Затрудняюсь ответить | 27% | |

Найти вероятность того, что из четырёх случайно выбранных людей а) все считают, что реклама полезна; б) двое считают полезной, один – вредной и еще один не определился с ответом; в) половина считает полезной, а другая половина не согласна с этим мнением.

**9.**

Если Вы заботитесь о своем здоровье, то в чем это проявляется?
(всероссийский опрос ВЦИОМ, апрель 2009 г., %)

| | Мужчины | Женщины |
|---|---|---|
| Не пью и не курю | 20 | 38 |
| В случае болезни сразу обращаюсь к врачам, выполняю все их требования | 25 | 31 |
| Смотрю передачи о здоровье по телевидению, читаю медицинские книги и журналы | 9 | 25 |
| Правильно питаюсь | 13 | 19 |
| Занимаюсь физкультурой, спортом | 17 | 13 |
| Регулярно проверяю свое здоровье, прохожу диспансеризацию | 9 | 14 |
| Я здоров, заботиться о здоровье не приходится | 12 | 4 |
| Не могу назвать себя здоровым, но на болезни, недомогания не обращаю внимания | 25 | 22 |
| затрудняюсь ответить | 6 | 4 |

Найти наиболее вероятное число людей регулярно проверяющих свое здоровье и проходящих диспансеризацию среди 4500 человек, если известно, что в исследовании принимают участие а) только мужчины; б) только женщины; в) мужчины составляют третью часть опрошенных.

**10.** Опрос ВЦИОМ о вреде табака (май 2009г) показал, что подавляющее большинство населения (91%) признают вред курения. Однако по сравнению с 2007г число курильщиков среди россиян увеличилось с 32% до 39%. Ответы на вопрос «Выкуриваете ли Вы обычно хотя бы одну сигарету в день?» распределились следующим образом:

32% − да;

7% − курю редко, время от времени, реже одной сигареты в день;

61% − не курю совсем.

Найти вероятность того, что из четырёх пассажиров купе а) все являются некурящими; б) половина − некурящие, а половина курят редко.

**11.** При выпуске приборов на заводе 25% бывают недостаточно точными. Берут наудачу 12 приборов. Найти вероятность наивероятнейшего числа точных приборов.

**12.** К Новому году группа получила ответственное поручение – сформировать праздничные подарки. В каждом пакете должно быть 4 конфеты. Конфеты выбирают наугад из большой коробки, где 2/3 конфет – «Барбарис» и 1/3 – «Дюшес». Найти вероятность того, что в подарке будет: а) одна конфета «Дюшес» и три – «Барбарис»; б) конфет поровну.

**13.** Исследовательский центр портала SuperJob.ru провел опрос на тему «Какой день недели, по Вашему мнению, является самым продуктивным рабочим днём?». Ответы представлены в таблице.

| **Вариант ответа** | **Все** | **Пол** | |
|---|---|---|---|
| | | **муж** | **жен** |
| Понедельник | 10% | 11% | 9% |
| Вторник | 31% | 31% | 30% |
| Среда | 30% | 28% | 32% |
| Четверг | 14% | 15% | 14% |
| Пятница | 8% | 7% | 9% |
| Затрудняюсь ответить | 7% | 8% | 6% |

Руководитель отдела решил назначить обсуждение нового проекта на вторник. Учитывая, что в отделе работают 12 человек, определите наивероятнейшее число людей, которые считают этот день самым продуктивным для себя. Как измениться этот показатель, если известно, что женщины составляют четвертую часть всех сотрудников.

**14.** Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4, независимо от заявок от других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.

**15.** Проведенный ВЦИОМ в ноябре 2007г опрос молодых россиян (18-35 лет) показал, что современная молодежь достаточно скептически оценивает перспективы своего карьерного роста. В частности, отвечая на вопрос «Как Вы считаете, легко ли сегодняшним молодым людям сделать карьеру, добиться успеха в административной деятельности, сфере управления?» респонденты дали следующие ответы:

14% − достаточно легко;
50% − достаточно сложно;
24% − практически невозможно;
12% − затрудняюсь ответить.

В группе учатся 12 студентов. Найти вероятность того, что а) равные количества опрошенных придерживаются разных точек зрения; б) половина опрошенных являются оптимистами, полагая, что сделать карьеру достаточно легко, 4 человека смотрят пессимистично на свою будущую карьеру и 2 человека затруднились ответить.

## 5. Случайные величины

Случайная величина (коротко с.в.) является некоторой функцией, приписывающей действительные числа каждому исходу эксперимента. В предыдущих главах мы занимались случайными величинами, не употребляя этого термина. Например, случайными величинами являются: число выпадений «герба» при $n$ подбрасываниях монеты, число «успехов» в $n$ испытаниях схемы Бернулли.

Чтобы избежать путаницы, будем обозначать случайные величины греческими буквами ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) или прописными латинскими буквами (X,Y,Z), а принимаемые ими значения – строчными латинскими ($x$,$y$,$z$).

*Функцией распределения* случайной величины $\xi$ называется функция $F(x) = \text{P}(\xi < x)$.

Свойства функции распределения $F(x)$:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
3. $F(x)$ – неубывающая функция;
4. $F(x)$ – непрерывна слева.

Вероятность того, что случайная величина $\xi$ примет значение, заключенное в интервале [a; b], определяется формулой

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Обычно рассматривают два типа случайных величин: дискретные и непрерывные.

Случайная величина $\xi$ имеет *дискретное распределение*, если множество всевозможных значений $\{x_1, x_2, \ldots\}$ конечно или счетно.

*Законом распределения* дискретной случайной величины называют перечень её возможных значений и соответствующих им вероятностей.

Закон распределения можно задать в виде таблицы:

| ξ | $x_1$ | $x_2$ | ... |
|---|---|---|---|
| p | $p_1$ | $p_2$ | ... |

где P(ξ = $x_i$)= $p_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Случайная величина ξ имеет *непрерывное распределение*, если её функция распределения представлена в виде

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Функция $f(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* (или *плотностью вероятностей*).

Плотность вероятностей обладает следующими свойствами:

1. $f(x) \leq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

$$P(a \leq \xi < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (2)$$

Дискретные случайные величины принимают в результате испытания одно значение из некоторого дискретного множества. Непрерывные случайные величины в результате испытания могут принимать любые значения из некоторого интервала.

**Пример 1.** Стрелок попадает в цель в одном случае из пяти. Составить закон распределения случайной величины ξ – числа попаданий в цель, если охотнику предоставляется четыре попытки. Найти вероятность того, что число попаданий будет не более одного.

Решение. Случайная величина ξ (число попаданий в цель) является дискретной и принимает следующие возможные значения: $x_1$ = 0 (ни одного попадания), $x_2$ = 1 (одно попадание), $x_3$ = 2 (два попадания), аналогично $x_4$ = 3 и $x_5$ = 4.

Стрелок попадает в цель с одной и той же вероятностью $p$ = 1/5, причём результаты выстрелов никак между собой не зависят, следовательно случайная величина ξ имеет биномиальное распределение. За «успех» обозначим событие $A$ = { охотник попал в цель },

$$p = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ и } q = 1 - p = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

По условию у охотника четыре попытки, следовательно, $n$ = 4.

P(ξ = 0) = $P_4(0)$ = $C_4^0 p^0 q^{4-0}$ = $(0{,}8)^4$ = 0,4096;

P(ξ = 1) = $P_4(1)$ = $C_4^1 p^1 q^{4-1}$ = $\frac{4!}{1!3!}$ $0{,}2 \cdot (0{,}8)^3$ = 0,4096;

$P(\xi = 2) = P_4(2) = C_4^2 p^2 q^{4-2} = \frac{4!}{2!2!}(0,2)^2 \cdot (0,8)^2 = 0,1536;$

$P(\xi = 3) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!1!}(0,2)^3 \cdot (0,8) = 0,0256;$

$P(\xi = 4) = P_4(4) = C_4^0 p^0 q^{4-0} = (0,2)^4 = 0,0016.$

Для большей наглядности представим закон распределения в виде следующей таблицы:

| ξ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 0,4096 | 0,4096 | 0,1536 | 0,0256 | 0,0016 |

По определению закона распределения должно выполняться равенство $\sum_i p_i = 1$.

Сделаем проверку: $\sum_i p_i = 0,4096 + 0,4096 + 0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 1.$

Для вычисления вероятности события {число попаданий не более 1} = ={$\xi \le 1$} будем использовать теорему сложения:

$P(\xi \le 1) = P(\xi = 0 \text{ или } \xi = 1) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0,4096 + 0,4096 = 0,8192.$

**Пример 2.** Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < -1 \\ a(x+1); & -1 \le x \le \frac{1}{3} \\ 1; & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения *f(x)*; б) коэффициент *a*; в) вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (0; 1/4); г) вероятность, что случайная величина ξ примет значение не меньшее 1/5.

Решение. а) Согласно определению:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0; & x < -1 \\ a; & -1 \le x \le \frac{1}{3} \\ 0; & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

б) Коэффициент *a* легче искать, используя свойство 2: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Так как функция *f(x)* имеет разрывы в точках – 1 и 1/3, то исходный интеграл будет распадаться на три интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{1/3} adx + \int_{1/3}^{+\infty} 0dx = \int_{-1}^{1/3} adx = ax\Big|_{-1}^{1/3} = a\,\frac{4}{3} = 1$$

Отсюда $a = \frac{3}{4}$.

в) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (0; 1/4), то есть P(0 < ξ < 1/4), можно найти двумя способами.

Способ 1. Используем формулу (1).

$$P\left(0 < \xi < \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) = \frac{3}{4}(x+1)\Big|_{x=1/4} - \frac{3}{4}(x+1)\Big|_{x=0} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right) - \frac{3}{4}(0+1) = \frac{3}{16}.$$

Способ 2. Используем формулу (2).

$$P\left(0 < \xi < \frac{1}{4}\right) = \int_{0}^{1/4} f(x)dx = \int_{0}^{1/4} \frac{3}{4}dx = \frac{3}{4}x\Big|_{0}^{1/4} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{3}{16}.$$

г) Найдём P(ξ ≤ 1/5). Если мы представим условие в виде двойного неравенства 1/5 ≤ ξ < + ∞, то можно использовать любой из указанных выше способов.

Для разнообразия найдём искомую вероятность через противоположное событие: $P\left(\xi \geq \frac{1}{5}\right) = 1 - P\left(\xi < \frac{1}{5}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{3}{4}(x+1)\Big|_{x=\frac{1}{5}} =$

$$= 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}+1\right) = \frac{1}{10}.$$

## Задачи к § 5.

**1.** Вероятность успешной сдачи экзамена первым студентом составляет 0,7, а вторым − 0,8. Составить закон распределения случайной величины *X* − числа студентов, успешно сдавших экзамен, если каждый из них может пересдать один раз экзамен, если он его первый раз не сдал.

**2.** Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовили две детали, а на втором – одну. Составить закон распределения числа первосортных деталей.

**3.** Опрос студентов в сентябре 2008г показал, что 18% респондентов хотят работать в органах муниципальной и государственной власти. Случайным образом было выбрано 3 студента. Составить закон распределения случайной величины *X* - числа студентов, желающих работать в органах муниципальной и государственной власти.

**4.** Группа состоит из 7 студентов и 4 девушки. Составить закон распределения случайной величины *X* − числа девушек из случайно отобранных двух студентов

**5.** В группе из 10 спортсменов 7 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) 2 спортсмена. Составить закон распределения случайной величины X - числа мастеров спорта из отобранных спортсменов.

**6.** Стрелок начинает стрелять по движущейся цели до первого попадания, имея четыре патрона. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,8, а при каждом последующем уменьшается вдвое. Составить закон распределения числа сделанных выстрелов. Найти вероятность того, что выстрелов будет не более двух.

**7.** Из каждой сотни изделий 90 изделий являются первосортными. Случайным образом отобраны 5 изделий. Составить закон распределения с.в. $\xi$, равной числу изделий первого сорта.

**8.** Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что первый вызов будет принят равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. Составить закон распределения числа принятых вызовов, если после первого же принятого вызова прием заканчивается.

**9.** «Коррупция в принципе непобедима» − считают 58% россиян (опрос ВЦИОМ, апрель 2009г). Случайным образом было выбрано 4 человека. Составьте закон распределения случайной величины X – числа людей, несогласных с этим мнением. Найти вероятность того, что более половины респондентов будут иметь другое мнение по этому вопросу.

**10.** Известно, что среднее время ожидания очередного покупателя, подошедшего к кассе, равно 0,2 минуты. Время ожидания кассиром очередного покупателя можно считать случайной величиной, имеющей показательный закон распределения. Кассиру нужно сменить ленту кассового аппарата. На это ему требуется две минуты. Какова вероятность того, что за это время не образуется очередь?

**11.** Вероятность того, что кошка поймает мышь, со временем погони возрастает и задается величиной $F(t) = 1 - e^{-t/10}$, где $t$ выражается в минутах. Допустим, что после 15 минут погони кошка всегда устает и отказывается от преследования. Какой процент мышей избегает поимки? Чему равны в процентах доли мышей, пойманных за 5, 10 и 15 мин?

**12.** Дискретная с.в. $X$ задана таблицей распределения:

| $X$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,3 |

а) для с.в. $Y=X^2$ найти: 1) закон распределения; 2) вероятность попадания с.в. $Y$ в интервал (0,5; 1,5); 3) вероятность того, что с.в.$Y$ не превосходит 3.

б) для с.в. $Z=|X|$ найти: 1) закон распределения; 2) вероятность того, что с.в. $Z$ принадлежит интервалу (-1; 1.2); 3) вероятность того, что с.в. $Z$ не превосходит 1.5.

**13.** Случайная величина X задана следующим распределением:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 2\\ 0.3, & \text{если } 2<x\le 3\\ 0.5, & \text{если } 3<x\le 4\\ 1, & \text{если } \quad x>4\end{cases}$$

Вычислить $P\{X\ge 3{,}5\}$ *и* $P\{|X|<2{,}5\}$.

В задачах 14,15 требуется найти неизвестную константу в выражении для функции распределения, определить функцию плотности и вероятность указанного интервала.

**14.**

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{2}, & -2\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

[-1; 1]

**15.**

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ a(1-\cos x), & 0\le x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

[0; π/4]

В задачах 16-19 требуется найти неизвестную константу в выражении для функции плотности, определить функцию распределения и вероятность указанного интервала. Найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях с.в. ξ примет ровно два раза значение, заключенное в указанном интервале.

**16.**

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ a(3-x), & 3\le x\le 5\\ 0, & x>5\end{cases}$$

(3; 14)

**17.**

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ a(3x-x^2), & 0\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

(1; 2)

**18.**

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 2, & 2\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

(2,7; 3)

**19.**

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1, & a\le x\le 2{,}8\\ 0, & x>2{,}8\end{cases}$$

(2; 3)

## 6. Числовые характеристики случайных величин

В предыдущем разделе мы видели, что наиболее полная характеристика случайной величины дается её функцией распределения. Если она известна, то мы можем сказать, какие значения принимает случайная величина и с какими вероятностями. Однако при решении некоторых задач такая подробная информация не требуется, нам достаточно некоторое суммарное представление. Для этой цели служат различные числовые характеристики случайной величины. Наиболее важные из них – математическое ожидание и дисперсия.

*Математическим ожиданием (средним)* дискретной случайной величины ξ называют число

$$\mathrm{E}\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots = \sum_k x_k p_k . \qquad (1)$$

Для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения *f(x)*

$$\mathrm{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx . \qquad (2)$$

Математическое ожидание показывает «средний» исход эксперимента, то есть какие значения случайной величины являются наиболее характерными.

Свойства математического ожидания.

1. Если $C$ – постоянная, то $\mathrm{E}C = C$.
2. Если $C$ – постоянная, то $\mathrm{E}\,(C\xi) = C\,\mathrm{E}\,\xi$.
3. $\mathrm{E}(\xi + \eta) = \mathrm{E}\xi + \mathrm{E}\eta$.
4. Если $\xi, \eta$ – независимы, то $\mathrm{E}(\xi \cdot \eta) = \mathrm{E}\xi \cdot \mathrm{E}\eta$.

Если $\eta = g(\xi)$ есть функция от случайной величины ξ, то математическое ожидание случайной величины $\eta$ находится по следующим формулам.

$\mathrm{E}\eta = \mathrm{E}g(\xi) = \sum_k g(x_k) p_k$, если ξ – дискретная с.в.

$\mathrm{E}\eta = \mathrm{E}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$, если ξ – непрерывная с.в.

Математическое ожидание или ожидаемое значение дает среднее тех значений, которые принимаются случайной величиной, если эксперимент повторяется много раз. Это дает нам важную, но не достаточную информацию. Часто бывает необходимо знать, насколько широко разбросаны значения случайной величины относительно её математического ожидания. Так как отклонения значений случайной величины от её математического ожидания могут быть как положительными, так и отрицательными, то мы будем рассматривать квадрат отклонения.

*Дисперсией* с.в. ξ называется математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной ξ и ее математическим ожиданием:

$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2$.

*Стандартным отклонением (или средним квадратическим отклонением)* называется положительный квадратный корень из дисперсии:

$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\xi} = \sqrt{\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2}$.

Дисперсия и стандартное отклонение характеризуют рассеяние (разброс, вариативность) значений случайной величины. Чем меньше дисперсия, тем меньше рассеяние значений случайной величины и тем «ближе» они к своему математическому ожиданию.

Свойства дисперсии.

1. $\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}\xi^2 - (\mathrm{E}\xi)^2$.
2. Если $C$ – постоянная, то $\mathrm{D}C = 0$.
3. Если $C$ – постоянная, то $\mathrm{D}(C\xi) = C^2\mathrm{D}\xi$.
4. Если $\xi$ и $\eta$ – независимы, то $\mathrm{D}(\xi \pm \eta) = \mathrm{D}\xi + \mathrm{D}\eta$.

Запишем формулы дисперсии с.в. $\xi$ согласно определению и свойству 1.

Для дискретной с.в. $\xi$

$$\mathrm{D}\xi = \sum_k (x_k - \mathrm{E}\xi)^2 p_k = \sum_k x_k^2 p_k - (\mathrm{E}\xi)^2. \qquad (3)$$

Для непрерывной с.в. $\xi$ с плотностью распределения $f(x)$

$$\mathrm{D}\xi = \int_{+\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}\xi)^2 f(x)dx = \int_{+\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathrm{E}\xi)^2. \qquad (4)$$

Для некоторых распределений выведены более простые формулы для вычисления математического ожидания и дисперсии.

Например, если $\xi$ имеет биномиальное распределение: $\xi \sim B(n; p)$,

то $\mathrm{E}\xi = np$ и $\mathrm{D}\xi = npq$, где $n$ – число экспериментов, $p$ – вероятность «успеха».

**Пример 1.** Найти математическое ожидание, дисперсию, стандартное отклонение с.в. $\xi$, заданной следующим законом

| $\xi$ | 1 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| p | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

Решение. Так как $\xi$ – дискретная случайная величина, то используем формулы (1) и (3).

$$\mathrm{E}\xi = \sum_{k=1}^{3} x_k p_k = 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}6 + 6 \cdot 0{,}3 = 4{,}3.$$

$$\mathrm{D}\xi = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 p_k - (\mathrm{E}\xi)^2 = \left(1^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}6 + 6^2 \cdot 0{,}3\right) - (4{,}3)^2 = 2{,}01.$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\xi} = \sqrt{2{,}01} = 1{,}42.$$

**Пример 2.** Найти математическое ожидание, дисперсию, стандартное отклонение с.в. $\xi$, заданной функцией распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x < 2 \\ 6 - 2x; & 2 \le x \le 3 \\ 0; & x > 3 \end{cases}$$

Решение. С.в. $\xi$ имеет непрерывное распределение, поэтому мы будем использовать формулы (2) и (4).

$$\mathrm{E}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{2}0+\int_{2}^{3}x(6-2x)dx+\int_{3}^{+\infty}0=\int_{2}^{3}\left(6x-2x^2\right)dx=\frac{6x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\Bigg|_2^3==$$

$$\left(3\cdot 3^2-2\cdot\frac{3^3}{3}\right)-\left(3\cdot 2^2-2\cdot\frac{2^3}{3}\right)=\frac{7}{3}.$$

$$\mathrm{D}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(\mathrm{E}\xi)^2=\int_{2}^{3}x^2(6-2x)dx-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\int_{2}^{3}\left(6x^2-2x^3\right)dx-\frac{49}{9}=$$

$$=\frac{6x^3}{3}-\frac{2x^4}{4}\Bigg|_2^3-\frac{49}{9}=\left(2\cdot 3^2-\frac{3^4}{2}\right)-\left(2\cdot 2^3-\frac{2^4}{2}\right)-\frac{49}{9}=\frac{1}{18}.$$

$$\sigma=\sqrt{\mathrm{D}\xi}=\sqrt{\frac{1}{18}}\approx 0{,}24.$$

**Пример 3**. Всероссийский центр изучения общественного мнения (ВЦИОМ) в феврале 2009г провел опрос о том, какие автомобили - отечественные или иностранные - планируют покупать наши сограждане. Результаты опроса представлены в таблице.

| **Какой автомобиль Вы хотите приобрести?** *(закрытый вопрос, один ответ, от тех, кто собирается покупать автомобиль)* | | |
|---|---|---|
| | **2006** | **2009** |
| *Новый, отечественной марки* | 35 | 12 |
| *Подержанный, отечественной марки* | 19 | 10 |
| *Новую «иномарку»* | 19 | 24 |
| *Подержанную «иномарку»* | 20 | 25 |
| *затрудняюсь ответить* | 7 | 29 |

Согласно прогнозу маркетингового исследования, количество потенциальных покупателей составляет 8 600 человек для данного региона.

1) Каково ожидаемое число покупателей, предпочитающих новые отечественные автомобили (2009г)? Найдите дисперсию и стандартное отклонение.
2) Каково предполагаемое число людей, планирующих приобрести «иномарку»? Сравните показатели за 2006 и 2009гг

Решение. 1) Пусть с.в. $\xi$ – число людей, которые собираются купить новый отечественный автомобиль. Поскольку с.в. $\xi$ имеет биномиальное распределение, то $\mathrm{E}\xi = np$, $\mathrm{D}\xi = npq$.
В нашей задаче $n$=8 600. $p$=0,12; $q$=0,88 и, следовательно,
$\mathrm{E}\xi = 8600\cdot 0{,}12 = 1032$. $\mathrm{D}\xi = 8600\cdot 0{,}12\cdot 0{,}88 = 908{,}16$;
$\sigma=\sqrt{\mathrm{D}\xi}=\sqrt{908{,}16}=30{,}14.$

Таким образом, в 2009г из 8 600 потенциальных покупателей в среднем 1032 человек предполагают купить новый отечественный автомобиль.

2) Пусть $\eta$ – число людей, планирующих приобрести «иномарку».
В 2006г. приобрести новую «иномарку» собирались 19% покупателей и еще 20% − подержанную «иномарку». Следовательно, в целом 19%+20%=39% планировали приобрести «иномарку». Тогда $p$=0,39; $E\eta$ = 8600 · 0,39 =3354. Аналогично для 2009г.: $p$=0,49; $E\eta$ = 8600 · 0,49 =4214.

Итак, ожидаемое число покупателей «иномарок» за 3 года увеличилось с 3354 до 4214 человек.
Примечание. Давая экономическую интерпретацию данной задачи, следует упомянуть следующий факт. С целью поддержки отечественного автопрома были введены льготы на покупку отечественный автомобилей, что в значительной степени увеличило объемы их продаж.

## Задачи к § 6.

В задачах 1 – 6 требуется найти неизвестные вероятности, математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение, вероятность указанного интервала.

**1.**

| ξ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| p | ? | 0,5 | 0,3 |

[–0,5; 1,5]

**2.**

| ξ | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|
| p | 0,2 | ? | 0,5 |

[1,4; 6,8]

**3.**

| ξ | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| p | 0,2 | 0,6 | ? |

[2,5; 4,5]

**4.**

| ξ | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|
| p | 0,2 | 0,6 | ? |

[8; 11]

В задачах 5,6 перейти к новой переменной $\eta$.

**5.**

| ξ | 10 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|
| p | 0,3 | 0,5 | ? |

[15; 25]

**6.**

| ξ | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 0,4 | 0,3 | 0,2 | ? | 0,05 |

[132; 259]

**7.** Найти неизвестную вероятность и дисперсию. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. Z=2 ξ +4.

| ξ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| p | ? | 0,6 | 0,1 |

**8.** Составить закон распределения дискретной случайной величины ξ, которая может принимать только два значения: $x_1$ с вероятностью $p_1 = 0,2$ и $x_2$ с вероятностью $p_2$, причём $x_1 < x_2$. Математическое ожидание равно 2,8, а дисперсия – 0,16.

**9.** Случайная величина ξ принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и $x_3$ с вероятностью $p_3$. Найти $x_3$ и $p_3$, если известно, что $E\xi = 8$.

**10.** Найти среднее и дисперсию с.в. $Z$, если известны средние и дисперсии с.в. $X$ и $Y$ : а) $Z=X+3Y+2$, E$X$=4, E$Y$=5, D$X$=4, D$Y$=2;
б) $Z=6X+2Y-6$, E$X$=3, E$Y$=6 D$X$=8, D$Y$=6.

**11.** Согласно опросу Всероссийского центра изучения общественного мнения (ВЦИОМ), проведенного по заказу исследовательской компании IFORS в августе 2009г., 60% опрошенных не могут прожить без мобильного телефона ни дня. Случайно выбирают 3 человека. Построить закон распределения числа  людей, согласных с этим мнением. Найти среднее, дисперсию и стандартное отклонение.

**12.** Опрос Левада-центр.


Найти предполагаемое число людей, имеющих мобильные телефоны, среди 17 200 человек.

**13.** Вероятность связаться с абонентом по телефону при каждой попытке равна 0,7. Составить закон распределения числа попыток до первого ответа абонента, если известно, что число попыток не превосходит четырех. Найти вероятность того, что попыток будет не менее двух. Каково математическое ожидание числа попыток?

**14.** В группе из 10 спортсменов 6 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) 2 спортсмена. Составить закон распределения случайной величины $X-$ числа мастеров спорта из отобранных спортсменов. Найти математическое ожидание случайной величины $X$. Найти вероятность того, что среди отобранных будет хотя бы один мастер спорта.

**15.** В партии 6% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения числа нестандартных деталей среди трех отобранных. Найти среднее и дисперсию.

**16.** Даны законы распределения двух неизвестных с.в. $X$ и $Y$:

а)

| $X$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,1 | 0,6 | 0,2 | 0,4 |

б)

| $Y$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

Составить закон распределения с.в. $Z=X+Y$. Проверить справедливость свойства дисперсии суммы.

**17.** Допустим, что для хищника вероятность поимки отдельной жертвы составляет 0,4 при каждом столкновении с жертвой. Каково ожидаемое число пойманных жертв в 20 столкновениях?

**18.** Согласно опросу ВЦИОМ в июле 2008г на вопрос «Что предпринимается Вами, членами Вашей семьи для того, чтобы улучшить материальное положение?» 18% респондентов ответили, что работают дополнительно (по совместительству, по контракту, по устной договоренности и т.п.). Для описания ситуации на рынке труда определите предполагаемое число людей, работающих дополнительно, среди 15 000 жителей микрорайна.

**19.** Обработка результатов одной переписи показала, что функция плотности распределения возраста лиц, занимающихся научной работой, может быть представлена формулой: $f(t) = k(t - 22{,}5)(97{,}5 - t)^5$, где $t \in (22{,}5;\ 97{,}5)$, $t$ – время в годах. Определить, во сколько раз число научных работников в возрасте ниже среднего превышает число научных работников в возрасте выше среднего.

В задачах 20, 21 необходимо найти а) неизвестный параметр $a$; б) функцию распределения; в) числовые характеристики случайной величины; г) вероятность указанного интервала.

**20.** $f(x)=\begin{cases} 0; & x<0 \\ a(3x-x^2); & 0 \le x \le 3 \\ 0; & x>3 \end{cases}$ [1; 2]

**21.** $f(x)=\begin{cases} 0; & x<3 \\ a(3-x); & 3 \le x \le 5 \\ 0; & x>5 \end{cases}$ [3; 14]

В задачах 22, 23 необходимо найти: а) неизвестный параметр $a$; б) функцию плотности; в) числовые характеристики случайной величины; г) вероятность указанного интервала; д) зная E$X$ и D$X$ и используя свойства среднего и дисперсии, найти среднее и дисперсию с.в. $Y=2X+5$.

**22.** $F(x)=\begin{cases} 0; & x<0 \\ ax^2(8-x^2); & 0 \le x \le 2 \\ 1; & x>2 \end{cases}$ [1; 15]

**23.** $F(x)=\begin{cases} 0; & x<2{,}5 \\ ax-5; & 2{,}5 \le x \le 3 \\ 1; & x>3 \end{cases}$ [1; 3]

**24.** Исследовательский центр портала SuperJob.ru в июне 2006г проводил опрос на тему: «Ваша работа для Вас, прежде всего...».
Были получены следующие результаты.

45% − средство зарабатывания денег для возможности развития ВНЕ профессиональной деятельности; в более важных мне областях (семья, увлечения и т.п.);

46% − средство самореализации, раскрытия своего потенциала ВНУТРИ профессиональной деятельности, которая меня привлекает;;

9% − затрудняюсь ответить.

Каково ожидаемое число людей, которые больше нацелены на раскрытие своего профессионального потенциала, среди 7000 человек. Сравните полученный результат с аналогичным исследованием аналитической компании Ipsos во Франции (2006г). Для французских респондентов материальное благополучие и развитие вне профессиональной деятельности оказалось гораздо важнее самореализации на работе (64% против 34%).

## 7. Нормальное распределение

Непрерывная случайная величина ξ имеет *нормальное распределение* со средним $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$ ($\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$), если её функция плотности вероятностей записывается в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

в диапазоне $-\infty < x < +\infty$.

Нормальное распределение – одно из наиболее часто используемых распределений. Нормальное распределение хорошо подходит в качестве аппроксимации (приближенного описания) других распределений (например, биномиального). Значения его функций распределения и плотности представлены в таблицах. Но поскольку составить таблицы для всевозможных значений $\mu$ и $\sigma$ нереально, то таблицы составлены для стандартного нормального распределения: $\eta \sim N(0,1)$. В этом случае плотность вероятностей равна

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

а функция распределения – $\Phi(x) = \mathrm{P}(\eta < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

В таблицах нормального распределения приводятся только положительные значения аргументов. Для нахождения значений от отрицательного аргумента следует воспользоваться свойством симметричности:

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Рассмотрим использование таблицы в общем случае: $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$. Функция распределения будет иметь вид:

$$\mathrm{P}(\xi < a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \quad (1)$$

Очень часто исследователя интересует вопрос: какова вероятность того, что изучаемый признак находится в заданных границах. Другими словами, надо найти вероятность того, что с.в. ξ примет значение, принадлежащее интервалу $(a,\ b)$:

$$\mathrm{P}(a < \xi < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \qquad (2)$$

**Пример.** Известно, что рост человека подчиняется нормальному закону распределения. Для некоторой группы средний рост оказался равным 165 см, стандартное отклонение – 5,2 см. Найти вероятность того, что рост случайно выбранного человека оказался а) меньше 167 см; б) от 164 см до 168 см; в) не менее 163 см.

Решение. Определим с.в. ξ как рост человека. Для решения задачи будем использовать формулы (1) и (2), где $\mu$ = Eξ = 165 и $\sigma$ = 5,2.

а) $\mathrm{P}(\xi < 167) = \Phi\left(\dfrac{167-165}{5{,}2}\right)$ = Φ(0,384).

По таблице Приложения находим Φ(0,384) = 0,6480.

б) $\mathrm{P}(164 < \xi < 168) = \Phi\left(\dfrac{168-165}{5{,}2}\right) - \Phi\left(\dfrac{164-165}{5{,}2}\right)$ = Φ(0,58) – Φ(–0,19).

По таблице Приложения находим Φ(0,58) = 0,7190 и Φ(–0,19) = =1– Φ(0,19) = 1 – 0,5753 = 0,4247.

Искомая вероятность P(164 < ξ < 168)= = 0,7190 – 0,4247 = 0,2943.

в) $\mathrm{P}(\xi \geq 163) = 1 - \mathrm{P}(\xi < 163) = 1 - \Phi\left(\dfrac{163-165}{5{,}2}\right) = 1 - \Phi(-0{,}384) =$

$= 1 - (1 - \Phi(0{,}384)) = \Phi(0{,}384) = 0{,}6480.$

## Задачи к § 7.

**1.** Жирность молока в хозяйствах области (%) есть нормально распределенная с.в. ξ с математическим ожиданием, равным 3,8%, и стандартным отклонением, равным 0,15%. Написать функцию плотности. Вычислить вероятность того, что в наудачу взятой пробе жирность молока будет от 3% до 4%.

**2.** По наблюдениям предыдущего месяца бригадир выявил следующую закономерность: в среднем каждый работник его бригады ежедневно тратит на перекуры 30 мин со стандартным отклонением 5мин. Найти вероятность того, что у случайно выбранного работника перекур составит а) более 40 мин; б) от 20мин до 35 мин. Случайным образом выбрали 2 работника. Найти вероятность того, что у каждого из них перекур в 1,5 раза превысит «среднее» значение.

**3.** Рост взрослых женщин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Среднее ее равно 164см, а стандартное отклонение – 5,5см. Вычислить вероятность того, что только две из пяти наудачу выбранных женщин будет иметь рост более 160см.

**4.** Пусть доход на душу населения является нормально распределённой случайной величиной со средним значением 760 рублей и дисперсией 3600. Найти вероятность того, что доход случайно выбранного человека не превысит 700 руб (бедный). Выбрали наугад три человека и подсчитали число бедных людей. Найти распределение и среднее значение числа бедных людей.

**5.** Найти вероятность того, что число мальчиков среди 1000 новорожденных заключено между 480 и 540. (Вероятность рождения мальчиков принять равно 0,515).

**6.** Исследовательский центр портала SuperJob.ru (октябрь 2007 г, 1800 респондентов из всех округов РФ) провел опрос на тему: «Как Вы считаете, должен ли студент дневного отделения работать?»
Ответы респондентов распределились следующим образом:

| | | |
|---|---|---|
| да | 39% | |
| нет | 44% | |
| затрудняюсь ответить | 17% | |

Найти вероятность того, что среди 450 случайно выбранных людей а) не менее 200 и не более 280 считают, что студент дневного отделения должен работать; б) более половины уверены, что работа студентов − это их учеба; в) число противников работы студентов находится в интервале от 300 до 350.

**7.** Число шурупов в ящике является случайной величиной, имеющее нормальное распределение со средним значением 300 и дисперсией 100. Какова вероятность того, что случайным образом выбрали ящик второго сорта (число шурупов в ящике меньше 285). Взяли два ящики. Найти распределение и среднее число ящиков второго сорта.

**8.** Наиболее посещаемой социальной площадкой Рунета является сеть «ВКонтакте», которую указали 63% участников исследования (SuperJob.ru, 2009), хотя еще год назад участников было 48%. Найти вероятность, что число посетителей сайта «ВКонтакте» среди 950 случайно выбранных российских интернет-пользователей будет а) более половины; б) не менее 600 человек.

**9.** Годовое количество осадков, выпадающих в некотором районе, является нормально распределенной величиной со средним значением $m$ =80 см и стандартным отклонением 8 см. Найти вероятность выпадения в данный год менее 86 см осадков? В каких пределах ($m$-$a$, $m$+$a$) будут находиться годовые количества осадков с вероятностью 0.90 (найти $a$).
опрошенных.

**10.** Диаметр гайки задан полем допуска 80-85мм; в некоторой партии гаек средний размер оказался равным 82,6мм, а стандартное отклонение – 1,2мм. Считая, что размер диаметра гайки подчиняется закону нормального распределения, вычислить вероятность брака по размеру гайки.

**11.** Опрос, проведённый Исследовательским центром портала SuperJob.ru в феврале 2009 года на тему «Готовы ли Вы сейчас к переквалификации?», дал следующие результаты.

| Вариант ответа | Все | Пол | |
|---|---|---|---|
| | | муж | жен |
| да, готов(а) к повышению квалификации, но сферу деятельности менять не намерен(а) | 23% | 24% | 22% |
| да, готов(а) к обучению смежным с моей основной профессией специальностям | 29% | 29% | 30% |
| да, готов(а) осваивать новую специальность с нуля | 35% | 34% | 37% |
| нет, я и так достаточно квалифицирован(а) | 5% | 5% | 4% |
| нет, не хочу / нет возможности | 4% | 3% | 4% |
| затрудняюсь ответить | 4% | 5% | 3% |

Найти вероятность того, что более 75% из 460 человек готовы к обучению смежным с основной профессией специальностям, если а) опрашиваются только мужчины; б) среди опрошенных мужчин и женщин одинаковые количества.

**12.** Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со стандартным отклонением, равным 5мм, и среднем, равным 0. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

## Список литературы.

Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон. Введение в конечную математику. – 2-е изд. – М.:Мир,1965.

Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математическая статистика// Под общ. ред. А.В.Ефимова. – 2-е изд. – М:Наука, 1990.

Тимофеева Л.К., Суханова Е.И., Сафиуллин Г.Г. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – Самара: Изд-во Самарского экономического института, 1992.

Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – 3-е изд. – М.: Наука, 1987.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Нормальное распределение $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

| x | Сотые доли | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 5398 | 5438 | 5478 | 5517 | 5557 | 5596 | 5636 | 5675 | 5714 | 5753 |
| 0,2 | 5793 | 5832 | 5871 | 5910 | 5948 | 5987 | 6026 | 6164 | 6103 | 6141 |
| 0,3 | 6179 | 6217 | 6293 | 6255 | 6331 | 6368 | 6406 | 6443 | 6480 | 6517 |
| 0,4 | 6554 | 6591 | 6628 | 6664 | 6700 | 0736 | 6772 | 6808 | 6844 | 6974 |
| 0,5 | 6915 | 6950 | 6985 | 7019 | 7054 | 7088 | 7123 | 7157 | 7190 | 7224 |
| 0,6 | 7257 | 7291 | 7324 | 7357 | 7389 | 7422 | 7454 | 7486 | 8517 | 7549 |
| 0,7 | 7580 | 7611 | 7642 | 7673 | 7704 | 7734 | 7764 | 7794 | 7823 | 7852 |
| 0,8 | 7881 | 7910 | 7939 | 7967 | 7995 | 8023 | 8051 | 8078 | 81 06 | 8133 |
| 0,9 | 8159 | 8186 | 8212 | 8238 | 8264 | 8389 | 8315 | 8340 | 8365 | 8389 |
| 1,0 | 8413 | 8438 | 8461 | 8485 | 8508 | 8531 | 8554 | 8577 | 8599 | 8621 |
| 1,1 | 8643 | 8665 | 8686 | 8708 | 8729 | 8749 | 8770 | 8790 | 8810 | 8830 |
| 1,2 | 8849 | 8869 | 8888 | 8907 | 8925 | 8944 | 8963 | 8980 | 8997 | 9015 |
| 1,3 | 9032 | 9049 | 9066 | 9082 | 9099 | 9115 | 9131 | 9147 | 9162 | 9177 |
| 1,4 | 9192 | 9207 | 9222 | 9236 | 5921 | 9265 | 9279 | 9292 | 9306 | 9319 |
| 1,5 | 9332 | 9345 | 9357 | 9370 | 9382 | 9394 | 9406 | 9418 | 9429 | 9441 |
| 1,6 | 9452 | 9463 | 9474 | 9484 | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 |
| 1,7 | 9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 |
| 1,8 | 9641 | 9649 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9G86 | 9693 | 9699 | 9706 |
| 1,9 | 9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9756 | 9761 | 9767 |
| 2,0 | 9772 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 |
| 2,1 | 9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 |
| 2,2 | 9861 | 9864 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2,3 | 9493 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2,4 | 9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2,5 | 9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2,6 | 9953 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2,7 | 9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2,6 | 9974 | 9973 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 |
| 2,9 | 9981 | 9982 | 9982 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |
| 3,0 | 9987 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |
| 3.1 | 9990 | 9991 | 9991 | 9991 | 9992 | 9992 | 9992 | 9992 | 9993 | 9993 |
| 3,2 | 9993 | 9993 | 9994 | 9994 | 9994 | 9994 | 9994 | 9995 | 9995 | 9495 |
| 3,3 | 9995 | 9995 | 9995 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9997 |
| 3.4 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9998 |