

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**БЕЗМЕНОВ В.М.**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ КООРДИНАТ**

Казань 2007

Печатается по решению Редакционно-издательского совета физического факультета КГУ.

УДК 528.72

Методические указания разработаны в соответствии с программой курса "Фотограмметрия" и «Космическая фотограмметрия».

В методическом указании изложены теоретические основы преобразования геоцентрических систем координат, применяемых в фотограмметрии и геодезии.

Рецензент: к.ф.-м.н. В.С. Боровских

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
1. МЕТОД ГЕЛЬМЕРТА .....	5
2. МЕТОД, ОСНОВАННЫЙ НА НЬЮТОНОВСКОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ .....	6
3. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА ЛИНЕЙНОЙ ПРОЦЕДУРЕ.....	14
4. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРИМЕНЕНИИ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ .....	18
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	27
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	28

**Памяти выдающегося ученого и педагога,  
профессора М.С. Урмаева**

**ВВЕДЕНИЕ**

В связи с широким использованием спутниковых навигационных систем в геодезии и других науках, актуальной становится задача определения параметров преобразования при переходе от одной квазигеоцентрической системы координат к другой.

Эта же задача также возникает в таких науках как фотограмметрия, спутниковая астрометрия и других технических дисциплинах - космической навигации, баллистике и т.п.

В космической геодезии основной обычно является квазигеоцентрическая геодезическая система координат  $X, Y, Z$ , заданная относительно некоторого референцного или общего земного эллипсоида. Но в разных странах используются различные референц-эллипсоиды, поэтому вследствие различий в их параметрах, а также ошибок ориентировки их осей, координаты одних и тех же пунктов, определенные в различных референцных системах, иногда различаются между собой на сотни метров. Современные спутниковые навигационные системы – российская “ГЛОНАСС” и американская “GPS” также работают в различных системах координат - первая в системе ПЗ-90, а вторая в системе WGS-84. Параметры этих координатных систем хорошо известны. От системы координат ПЗ-90 можно перейти к системе координат WGS-84, используя формулы:

$$M=1$$

$$X_{WGS}=X_{ПЗ-90}-0,0000003685 \cdot Y_{ПЗ-90}$$

$$Y_{WGS}=-0,0000003685 \cdot X_{ПЗ-90}+Y_{ПЗ-90}$$

$$Z_{WGS}=0,5+Z_{ПЗ-90}$$

Основной задачей космической геодезии является создание единой глобальной геоцентрической системы координат, изменения которой, обусловленные геодинамическими эффектами должны фиксироваться и изучаться. Необходимы две системы – глобальная геоцентрическая для решения задач космической геодезии и референцная для картографирования. Соответственно, всегда будут возникать задачи по определению параметров преобразования систем координат.

В аналитической и космической фотограмметрии при развитии обширных фототриангуляций также приходится решать задачу определения параметров преобразования геоцентрических систем координат. Точно такие же задачи возникают и в фотографической астрометрии при определении координат звезд и спутников.

## 1. МЕТОД ГЕЛЬМЕРТА

Ранее сравнительно невысокая точность определения координат в референцных системах позволяла широко использовать известную процедуру Гельмерта для определения параметров преобразования систем координат. В процессе этого метода ортогональная матрица заменялась кососимметрической. Определение кососимметрической матрицы не сложно. Повышение точности измерений до сантиметровой, а в перспективе и миллиметровой, требует строгого решения задачи, а не ее линейного варианта по Гельмерту. Кроме того, в практике, особенно в фотограмметрии, встречаются задачи, в которых параметры преобразования могут принимать любые значения.

В работе В.Г.Кириллова, [7], который занимался рассматриваемой проблемой, приводится следующая таблица:

Таблица 1.

**Погрешности, вызываемые заменой ортогональной матрицы кососимметрической.**

Ошибки, м	Углы между осями							
	1 сек	2 сек	3 сек	4 сек	5 сек	6 сек	7 сек	8 сек
$\delta X$	0,1	0,5	1,1	1,9	2,9	4,2	5,8	7,5
$\delta y$	0,2	0,9	2,1	3,8	5,9	8,5	11,5	15,0
$\delta Z$	0,3	1,4	3,2	5,6	8,8	12,7	17,3	22,6
Общий сдвиг	0,3	1,75	3,98	7,03	10,98	15,84	21,56	28,14

## 2. МЕТОД, ОСНОВАННЫЙ НА НЬЮТОНОВСКОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ.

Общая формула перехода от одной прямоугольной геодезической системы координат к другой имеет вид:

$$\begin{pmatrix} XN \\ YN \\ ZN \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XC \\ YC \\ ZC \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $XC, YC, ZC$  – координаты в старой системе координат,

$XN, YN, ZN$  – координаты в новой системе координат,

$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  – составляющие сдвига начала новой системы координат относительно начала старой,

$M$  – масштабный коэффициент,

$a_{ik} = a_{ik}(\omega_y, \omega_x, \omega_z)$ ,  $i=1,2,3$ ;  $k=1,2,3$ . - элементы ортогональной матрицы поворота, которые являются нелинейными функциями углов  $\omega_y, \omega_x, \omega_z$

вращения вокруг соответствующих осей координат. Этот метод основан на

итерационной процедуре Ньютона-Рафсона и требует знания некоторых априорных значений семи параметров преобразования (1).

Формула (1) учитывает и сдвиг начал координат и развороты осей системы координат при помощи ортогональной матрицы поворота  $P$  на 3 Эйлерах угла.

Матрицы вращения вокруг соответствующих осей имеют следующий вид:

Вокруг оси  $x$ :

$$\Omega_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_x & \sin \omega_x \\ 0 & -\sin \omega_x & \cos \omega_x \end{pmatrix},$$

вокруг оси  $y$ :

$$\Omega_y = \begin{pmatrix} \cos \omega_y & 0 & -\sin \omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega_y & 0 & \cos \omega_y \end{pmatrix},$$

вокруг оси  $z$ :

$$\Omega_z = \begin{pmatrix} \cos \omega_z & \sin \omega_z & 0 \\ -\sin \omega_z & \cos \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Совершив повороты сначала вокруг оси  $z$ , затем  $x$ , и  $y$  образуем матрицу  $P$ :

$$P = \Omega_y \Omega_x \Omega_z.$$

Выполнив умножение матриц в указанном порядке, получим элементы ортогональной матрицы  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где  $a_{ir}$  – элементы ортогональной матрицы вращения. Они определяются по следующим формулам:

$$a_{11} = \cos \omega_z \cos \omega_y - \sin \omega_z \sin \omega_x \sin \omega_y$$

$$a_{12} = \sin \omega_z \cos \omega_y + \cos \omega_z \sin \omega_x \sin \omega_y$$

$$a_{13} = -\cos \omega_x \sin \omega_y$$

$$a_{21} = -\sin \omega_z \cos \omega_x$$

$$a_{22} = \cos \omega_z \cos \omega_x$$

$$a_{23} = \sin \omega_x$$

$$a_{31} = \cos \omega_z \sin \omega_y + \sin \omega_z \sin \omega_x \cos \omega_y$$

$$a_{32} = \sin \omega_z \sin \omega_y - \cos \omega_z \sin \omega_x \cos \omega_y$$

$$a_{33} = \cos \omega_x \cos \omega_y$$

Чтобы перейти от ортогональной матрицы поворота  $P$  к углам вращения вокруг осей  $\omega_z, \omega_x, \omega_y$ , используются формулы:

$$\operatorname{tg} \omega_z = \frac{-a_{21}}{a_{22}}$$

$$\sin \omega_x = a_{23}$$

$$\operatorname{tg} \omega_y = \frac{-a_{13}}{a_{33}}$$

Предположим, что известны некоторые априорные значения параметров преобразования координат (1) – приближенные значения кардановых углов  $\omega_x^0, \omega_y^0, \omega_z^0$  масштабного коэффициента  $M^0$ , а также элементов сдвига начала новой системы координат относительно старой  $\Delta X^0, \Delta Y^0, \Delta Z^0$ . С этими значениями семи параметров линеаризуем выражение (1), принимая во внимание, что элементы матрицы вращения  $a_{ik}$  являются нелинейными функциями кардановых углов:

$$a_{ik} = a_{ik}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3$$

В результате получим для каждой точки, имеющей координаты, как в старой, так и в новой системах три уравнения поправок. В матричной форме они имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} A_x & B_x & C_x & D_x & 1 & 0 & 0 \\ A_y & B_y & C_y & D_y & 0 & 1 & 0 \\ A_z & B_z & C_z & D_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dM \\ d\omega_x \\ d\omega_y \\ d\omega_z \\ d\Delta x \\ d\Delta y \\ d\Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $A_x, A_y, \dots, A_z, \dots, D_z$  - частные производные от координат по  $M, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ ,  $l_x, l_y, l_z$  - свободные члены уравнений поправок:

$$l_x = XN - XN^0, l_y = YN - YN^0, l_z = ZN - ZN^0, \quad (3)$$

причем величины  $XN^0, YN^0, ZN^0$  вычисляются по формулам (1) с априорными значениями параметров преобразования (1) -

$M^0, \omega_x^0, \omega_y^0, \omega_z^0, \Delta X^0, \Delta Y^0, \Delta Z^0$  и должны им точно соответствовать.

Величины  $v_x, v_y, v_z$  - поправки координат точек в новой системе

координат. Они определяются по методу наименьших квадратов под условием  $\sum v^2 = \min$ .

Объединяя уравнения поправок для  $i=1,2,3 \dots n$  точек, включенных в обработку, получается система нормальных уравнений, которая решается по методу наименьших квадратов:

$$\Delta \bar{X} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{L}, \quad (4)$$

где  $\Delta \bar{X}$  - вектор поправок к априорным значениям параметров преобразования (1), причем

$$\Delta \bar{X}^T = (\Delta M \quad \Delta \omega_x \quad \Delta \omega_y \quad \Delta \omega_z \quad \Delta(\Delta X) \quad \Delta(\Delta Y) \quad \Delta(\Delta Z)), \quad (5)$$

после чего получим значения уточняемых параметров в первом приближении:

$$M^1 = M^0 + \Delta M, \omega_x^1 = \omega_x^0 + \Delta\omega_x, \omega_y^1 = \omega_y^0 + \Delta\omega_y, \omega_z^1 = \omega_z^0 + \Delta\omega_z, \dots \quad (6)$$

Теперь принимаем параметры  $M^1, \omega_x^1, \dots, \Delta X^1$  в качестве исходных, повторяем весь процесс (1)-(6) снова. В результате этого получим уточняемые параметры во втором приближении:

$$M^{(2)}, \omega_x^{(2)}, \dots, \Delta Z^{(2)} \quad (7)$$

Будем действовать так до тех пор, пока не выполняются условия:

$$|\bar{X}^{K+1} - \bar{X}^K| < |\bar{\varepsilon}| \quad (8)$$

где  $\bar{X}^K$  - вектор неизвестных  $\bar{X}^K = (M^K, \omega_x^K, \omega_y^K, \omega_z^K, \Delta X^K, \Delta Y^K, \Delta Z^K)^T$ ,

$K$  - номер приближения,

$\bar{\varepsilon}$  – вектор, характеризующий точность вычислений.

При организации итерационного процесса можно не исправлять элементы матрицы, входящей в уравнение (2), а принять их постоянными, вычисленными с априорными значениями определяемых параметров, принятых в начальном приближении. Процесс итераций в этом случае называется модифицированным методом. Он будет сходиться со скоростью арифметической прогрессии. Но удобнее исправлять элементы этой матрицы, тогда процесс будет быстрее сходиться со скоростью геометрической прогрессии.

После выполнения условий (8) нужно перейти к оценке точности, для чего в заключительной итерации вычисляется вектор поправок  $\bar{V}$ :

$$\bar{V} = A\Delta\bar{X} - \bar{L}, \quad (9)$$

после чего вычисляется ошибка единицы веса:

$$\mu^2 = \frac{V^T V}{n - 7} \quad (10)$$

и определяются средние квадратические ошибки параметров преобразования:

$$m_{(M)} = \mu\sqrt{Q_{11}}, m_{(\omega_x)} = \mu\sqrt{Q_{22}}, \dots, m_{(\Delta Z)} = \mu\sqrt{Q_{77}} \quad (11)$$

где  $Q_{11}, Q_{22}, \dots, Q_{77}$  - диагональные элементы обратной матрицы нормальных уравнений:

$$N = (A^T A)^{-1}.$$

Формулы для вычисления элементов матрицы уравнений поправок, которые получаются дифференцированием основного соотношения метода (1) по параметрам преобразования, выглядят следующим образом:

$$A_X = \frac{\partial XN}{\partial M} = a_{11}XC + a_{12}YC + a_{13}ZC$$

$$B_X = \frac{\partial XN}{\partial \omega_x} = M \left( \frac{\partial a_{11}}{\partial \omega_x} XC + \frac{\partial a_{12}}{\partial \omega_x} YC + \frac{\partial a_{13}}{\partial \omega_x} ZC \right)$$

$$C_X = \frac{\partial XN}{\partial \omega_y} = M \left( \frac{\partial a_{11}}{\partial \omega_y} XC + \frac{\partial a_{12}}{\partial \omega_y} YC + \frac{\partial a_{13}}{\partial \omega_y} ZC \right)$$

$$D_X = \frac{\partial XN}{\partial \omega_z} = M \left( \frac{\partial a_{11}}{\partial \omega_z} XC + \frac{\partial a_{12}}{\partial \omega_z} YC + \frac{\partial a_{13}}{\partial \omega_z} ZC \right)$$

$$A_Y = \frac{\partial YN}{\partial M} = a_{21}XC + a_{22}YC + a_{23}ZC$$

$$B_Y = \frac{\partial YN}{\partial \omega_x} = M \left( \frac{\partial a_{21}}{\partial \omega_x} XC + \frac{\partial a_{22}}{\partial \omega_x} YC + \frac{\partial a_{23}}{\partial \omega_x} ZC \right)$$

$$C_Y = \frac{\partial YN}{\partial \omega_y} = M \left( \frac{\partial a_{21}}{\partial \omega_y} XC + \frac{\partial a_{22}}{\partial \omega_y} YC + \frac{\partial a_{23}}{\partial \omega_y} ZC \right)$$

$$D_Y = \frac{\partial YN}{\partial \omega_z} = M \left( \frac{\partial a_{21}}{\partial \omega_z} XC + \frac{\partial a_{22}}{\partial \omega_z} YC + \frac{\partial a_{23}}{\partial \omega_z} ZC \right)$$

$$A_Z = \frac{\partial ZN}{\partial M} = a_{31}XC + a_{32}YC + a_{33}ZC$$

$$B_Z = \frac{\partial ZN}{\partial \omega_x} = M \left( \frac{\partial a_{31}}{\partial \omega_x} XC + \frac{\partial a_{32}}{\partial \omega_x} YC + \frac{\partial a_{33}}{\partial \omega_x} ZC \right)$$

$$C_Z = \frac{\partial ZN}{\partial \omega_y} = M \left( \frac{\partial a_{31}}{\partial \omega_y} XC + \frac{\partial a_{32}}{\partial \omega_y} YC + \frac{\partial a_{33}}{\partial \omega_y} ZC \right)$$

$$D_Z = \frac{\partial ZN}{\partial \omega_z} = M \left( \frac{\partial a_{31}}{\partial \omega_z} XC + \frac{\partial a_{32}}{\partial \omega_z} YC + \frac{\partial a_{33}}{\partial \omega_z} ZC \right)$$

В эти формулы входят двадцать семь производных  $\frac{\partial(a_{ik})}{\partial(\omega_x, \omega_y, \omega_z)}$ :

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial \omega_y} = -\cos \omega_z \sin \omega_y - \sin \omega_z \sin \omega_x \cos \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial \omega_x} = -\sin \omega_z \cos \omega_x \sin \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial \omega_z} = -\sin \omega_z \cos \omega_y - \cos \omega_z \sin \omega_x \sin \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial \omega_x} = \cos \omega_z \cos \omega_x \sin \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial \omega_y} = -\sin \omega_z \sin \omega_y + \cos \omega_z \sin \omega_x \cos \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial \omega_z} = \cos \omega_z \cos \omega_y - \sin \omega_z \sin \omega_x \sin \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial \omega_x} = \sin \omega_x \sin \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial \omega_y} = -\cos \omega_x \cos \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial \omega_z} = 0$$

$$\frac{\partial a_{21}}{\partial \omega_x} = \sin \omega_z \sin \omega_x$$

$$\frac{\partial a_{21}}{\partial \omega_y} = 0$$

$$\frac{\partial a_{21}}{\partial \omega_z} = -\cos \omega_z \cos \omega_x$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial \omega_x} = -\cos \omega_z \sin \omega_x$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial \omega_y} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial \omega_z} = -\sin \omega_z \cos \omega_x$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial \omega_x} = \cos \omega_x$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial \omega_y} = 0$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial \omega_z} = 0$$

$$\frac{\partial a_{31}}{\partial \omega_x} = \sin \omega_z \cos \omega_x \cos \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{31}}{\partial \omega_y} = \cos \omega_z \cos \omega_y - \sin \omega_z \sin \omega_x \sin \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{31}}{\partial \omega_z} = -\sin \omega_z \sin \omega_y + \cos \omega_z \sin \omega_x \cos \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{32}}{\partial \omega_x} = -\cos \omega_z \cos \omega_x \cos \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{32}}{\partial \omega_y} = \sin \omega_z \cos \omega_y + \cos \omega_z \sin \omega_x \sin \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{32}}{\partial \omega_z} = \cos \omega_z \sin \omega_y + \sin \omega_z \sin \omega_x \cos \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial \omega_x} = -\sin \omega_x \cos \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial \omega_y} = -\cos \omega_x \sin \omega_y$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial \omega_z} = 0$$

Если в начальном приближении положить

$M^0 = 1, \omega_x^0 = 0, \omega_y^0 = 0, \omega_z^0 = 0, \Delta X^0 = 0, \Delta Y^0 = 0, \Delta Z^0 = 0$ , то уравнения

поправок совпадут с соответствующими формулами метода Гельмерта, в котором ортогональная матрица заменяется кососимметрической:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} XC & 0 & -ZC & YC & 1 & 0 & 0 \\ YC & ZC & 0 & -XC & 0 & 1 & 0 \\ ZC & -YC & XC & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Delta M \\ \Delta \omega_x \\ \Delta \omega_y \\ \Delta \omega_z \\ \Delta(\Delta X) \\ \Delta(\Delta Y) \\ \Delta(\Delta Z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} XC - XN \\ YC - YN \\ ZC - ZN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (13)$$

При малых параметрах преобразования итерационный процесс можно выполнять на основании формулы (13).

### 3. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА ЛИНЕЙНОЙ ПРОЦЕДУРЕ.

В уравнениях (1) вносится масштабный коэффициент в элементы ортогональной матрицы и сформируется три системы линейных уравнений:

$$Q \begin{pmatrix} Ma_{11} \\ Ma_{12} \\ Ma_{13} \\ \Delta X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -XN_1 \\ -XN_2 \\ \dots \\ -XN_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{x2} \\ \dots \\ v_{xn} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$Q \begin{pmatrix} Ma_{21} \\ Ma_{22} \\ Ma_{23} \\ \Delta Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -YN_1 \\ -YN_2 \\ \dots \\ -YN_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{y1} \\ v_{y2} \\ \dots \\ v_{yn} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$Q \begin{pmatrix} Ma_{31} \\ Ma_{32} \\ Ma_{33} \\ \Delta Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ZN_1 \\ -ZN_2 \\ \dots \\ -ZN_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{z1} \\ v_{z2} \\ \dots \\ v_{zn} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Для всех трех систем матрица Q общая:

$$Q = \begin{pmatrix} XC_1 & YC_1 & ZC_1 & 1 \\ XC_2 & YC_2 & ZC_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ XC_n & YC_n & ZC_n & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Введя обозначения для вектора свободных членов:

$$\bar{L}_X = \begin{pmatrix} -XN_1 \\ -XN_2 \\ \dots \\ -XN_n \end{pmatrix}, \quad \bar{L}_Y = \begin{pmatrix} -YN_1 \\ -YN_2 \\ \dots \\ -YN_n \end{pmatrix}, \quad \bar{L}_Z = \begin{pmatrix} -ZN_1 \\ -ZN_2 \\ \dots \\ -ZN_n \end{pmatrix}, \quad (18)$$

из решения систем линейных уравнений поправок (14), (15) и (16) по методу наименьших квадратов определим девять элементов неортогональной матрицы и составляющие сдвигов по осям координат  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ :

$$\begin{pmatrix} Ma_{11} \\ Ma_{12} \\ Ma_{13} \\ \Delta X \end{pmatrix} = -(Q^T Q)^{-1} Q^T \bar{L}_X, \quad \begin{pmatrix} Ma_{21} \\ Ma_{22} \\ Ma_{23} \\ \Delta Y \end{pmatrix} = -(Q^T Q)^{-1} Q^T \bar{L}_Y, \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} Ma_{31} \\ Ma_{32} \\ Ma_{33} \\ \Delta Z \end{pmatrix} = -(Q^T Q)^{-1} Q^T \bar{L}_Z$$

В этом решении связь систем координат определяется двенадцатью параметрами - девятью элементами матрицы П:

$$P = \begin{pmatrix} Ma_{11} & Ma_{12} & Ma_{13} \\ Ma_{21} & Ma_{22} & Ma_{23} \\ Ma_{31} & Ma_{32} & Ma_{33} \end{pmatrix} \quad (20)$$

и параметрами сдвига  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ . Разномасштабность систем координат автоматически учитывается структурой матрицы  $P$ .

Этот метод удобнее модифицировать, используя не координаты, а разности координат в старой системе  $XC_{i+1} - XC_i$  и в новой системе координат  $XN_{i+1} - XN_i$ . Если образовать соответствующие разности

$$\begin{aligned} \Delta XC_{i,i-1} &= XC_i - XC_{i-1}, \Delta YC_{i,i-1} = YC_i - YC_{i-1}, \Delta ZC_{i,i-1} = ZC_i - ZC_{i-1}; \\ \Delta XN_{i,i-1} &= XN_i - XN_{i-1}, \Delta YN_{i,i-1} = YN_i - YN_{i-1}, \Delta ZN = ZN_i - ZN_{i-1}; \end{aligned} \quad (21)$$

то, очевидно, что в разностях сдвиги исчезают и из решения можно определить элементы матрицы  $P$ .

И в этом случае будем иметь три системы уравнений поправок:

$$\begin{aligned} Ma_{11}\Delta XC_{i,i-1} + Ma_{12}\Delta YC_{i,i-1} + Ma_{13}\Delta ZC_{i,i-1} - \Delta XN_{i,i-1} &= v_{xi}, \\ Ma_{21}\Delta XC_{i,i-1} + Ma_{22}\Delta YC_{i,i-1} + Ma_{23}\Delta ZC_{i,i-1} - \Delta YN_{i,i-1} &= v_{yi}, \\ Ma_{31}\Delta XC_{i,i-1} + Ma_{32}\Delta YC_{i,i-1} + Ma_{33}\Delta ZC_{i,i-1} - \Delta ZN_{i,i-1} &= v_{zi}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$i = 1, 2, \dots, n..$$

Из решения этих уравнений по методу наименьших квадратов мы можем определить элементы матрицы, а также составляющие сдвига новой системы координат относительно начала старой  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ .

Для этого вычислим вспомогательные (без сдвигов) новые координаты  $x_1, y_1, z_1 \dots x_n, y_n, z_n$   $i = 1, 2 \dots n$ , по формулам

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} XC_i \\ YC_i \\ ZC_i \end{pmatrix} \quad . \quad (23)$$

Затем

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = (H^T H)^{-1} H^T \bar{L}_\Delta, \quad (24)$$

где

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{L}_\Delta = \begin{pmatrix} XN_1 - x_1 \\ YN_1 - y_1 \\ ZN_1 - z_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ XN_n - x_n \\ YN_n - y_n \\ ZN_n - z_n \end{pmatrix} \quad (25)$$

#### **4. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРИМЕНЕНИИ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ.**

Этот метод требует знания координат всего трех точек, как в старой, так и в новой системах координат. В нем используются разности старых и разности новых координат. Метод дает возможность установления априорных (предварительных) координат для дальнейшей реализации нелинейной процедуры, то есть метода, основанного на итерационной процедуре Ньютона-Рафсона.

Кватернионом называется гиперкомплексное число, реализуемое геометрически в четырехмерном пространстве. С середины 60-х годов кватернионы интенсивно применяются в аналитической фотограмметрии и других прикладных науках. Сегодня кватернионное исчисление является

составной частью математического аппарата современной космической фотограмметрии и космической геодезии. Кватернионы позволяют весьма эффективно решать задачи, связанные с вращениями трехмерного пространства.

Они имеют ряд преимуществ по сравнению с описанием вращений при помощи эйлеровых углов, поскольку дают возможность сразу получить координаты вектора в новой системе координат одним поворотом пространства на угол  $\theta$  вокруг некоторой инвариантной оси вращения  $\bar{C}_0$ , причем ортогональная матрица вращения  $M$  связана с направляющими косинусами  $c_x, c_y, c_z$  следующим фундаментальным уравнением теории вращений:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (1 - \cos\theta) \begin{pmatrix} c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z \\ c_y c_x & c_y^2 & c_y c_z \\ c_z c_x & c_z c_y & c_z^2 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -c_z & c_y \\ c_z & 0 & -c_x \\ -c_y & c_x & 0 \end{pmatrix}$$

В свою очередь, направляющие косинусы оси вращения можно выразить через элементы ортогональной матрицы вращения и угол поворота пространства  $\theta$ :

$$c_x = \frac{a_{32} - a_{23}}{2 \sin \theta}, c_y = \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \sin \theta}, c_z = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \sin \theta}.$$

Кватернионы образуют четырехмерную алгебру над полем действительных чисел с базисом  $(1, e_x, e_y, e_z)$ . Любое вращение трехмерного пространства можно задать при помощи кватерниона с нормой равной единице, то есть единичным кватернионом.

Единичный кватернион можно представить в виде:

$$\bar{q}_0 = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (c_x \bar{e}_x + c_y \bar{e}_y + c_z \bar{e}_z) = d + a \bar{e}_x + b \bar{e}_y + c \bar{e}_z, \quad (26)$$

где  $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$  – орты в ортонормированном базисе осей системы координат.

Теперь элементы ортогональной матрицы можно выразить через компоненты кватерниона (матрица Родригеса-Гамильтона):

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2(ab + cd) & 2(ac - bd) \\ 2(ab - cd) & d^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2(bc + ad) \\ 2(ac + bd) & 2(bc - ad) & d^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

после чего значения кардановых углов вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-a_{21}}{a_{22}}\right), \\ \omega_x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin(a_{23}), \\ \omega_z &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-a_{13}}{a_{33}}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

В этом виде решение может быть получено только в случае, когда начала координат совпадают.

Чтобы определить направляющие косинусы оси вращения и угла поворота пространства, нужно использовать следующий алгоритм.

Пусть в старой и новой системах координат известны координаты двух пунктов.

$XC1, YC1, ZC1; XC2, YC2, ZC2$  – старая система координат;

$XN1, YN1, ZN1; XN2, YN2, ZN2$  – новая система координат.

Соответствующие векторы координат выглядят следующим образом:

$$\bar{R}C1 = \begin{pmatrix} XC1 \\ YC1 \\ ZC1 \end{pmatrix}; \bar{R}C2 = \begin{pmatrix} XC2 \\ YC2 \\ ZC2 \end{pmatrix}; \bar{R}N1 = \begin{pmatrix} XN1 \\ YN1 \\ ZN1 \end{pmatrix}; \bar{R}N2 = \begin{pmatrix} XN2 \\ YN2 \\ ZN2 \end{pmatrix}$$

При вращении пространства все точки будут перемещаться по своим траекториям в параллельных плоскостях, перпендикулярных оси

вращения  $\bar{C}$ . Поэтому, если образовать векторы разностей новых и старых координат двух пунктов:

$$\Delta\bar{R}1 = \begin{bmatrix} XN1 - XC1 \\ YN1 - YC1 \\ ZN1 - ZC1 \end{bmatrix}; \Delta\bar{R}2 = \begin{bmatrix} XN2 - XC2 \\ YN2 - YC2 \\ ZN2 - ZC2 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

то ось вращения определится как векторное произведение векторов (29):

$$\bar{C} = [\Delta\bar{R}1 \times \Delta\bar{R}2], \quad (30)$$

модули векторов разностей новых и старых координат определяются по формулам:

$$\begin{aligned} |\Delta\bar{R}1| &= \sqrt{(XN1 - XC1)^2 + (YN1 - YC1)^2 + (ZN1 - ZC1)^2} \\ |\Delta\bar{R}2| &= \sqrt{(XN2 - XC2)^2 + (YN2 - YC2)^2 + (ZN2 - ZC2)^2} \end{aligned} \quad (31)$$

Далее вычисляются направляющие косинусы этих векторов:

$$\begin{aligned} l1 &= \frac{XN1 - XC1}{\Delta R1} & m1 &= \frac{YN1 - YC1}{\Delta R1} & n1 &= \frac{ZN1 - ZC1}{\Delta R1} \\ l2 &= \frac{XN2 - XC2}{\Delta R2} & m2 &= \frac{YN2 - YC2}{\Delta R2} & n2 &= \frac{ZN2 - ZC2}{\Delta R2} \end{aligned}, \quad (32)$$

и угол между векторами разностей новых и старых координат:

$$\varphi = \arccos(l1l2 + m1m2 + n1n2), \quad (33)$$

Единичный вектор оси вращения определяется векторным произведением:

$$\bar{C}_0 = \frac{1}{\sin \varphi} \begin{bmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ l1 & m1 & n1 \\ l2 & m2 & n2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}, \quad (34)$$

Из формулы (34) получаем направляющие косинусы оси вращения:

$$c_x = \frac{m1n2 - m2n1}{\sin \varphi}, \quad c_y = \frac{-(l1n2 - l2n1)}{\sin \varphi}, \quad c_z = \frac{l1m2 - l2m1}{\sin \varphi} \quad (35)$$

Остается определить угол поворота пространства  $\theta$  вокруг некоторой инвариантной оси вращения.

Если задать направления нормалей  $\bar{G}$  и  $\bar{H}$  к плоскостям, образованным осью вращения  $\bar{C}$ , соответственно с векторами координат первого пункта в старой и новой системах  $\bar{RN1}, \bar{RC1}$ :

$$\bar{G} = [\bar{R} \times \bar{RN1}] , \quad \bar{H} = [\bar{C} \times \bar{RC1}] , \quad (36)$$

причем, модули этих векторов выглядят следующим образом:

$$|\bar{RN1}| = \sqrt{XN1^2 + YN1^2 + ZN1^2} , \quad |\bar{RC1}| = \sqrt{XC1^2 + YC1^2 + ZC1^2} , \quad (37)$$

то косинус угла поворота пространства  $\theta$  получится из скалярного произведения векторов нормалей  $\bar{G}$  и  $\bar{H}$ , а синус из их векторного произведения:

$$|\bar{G}| \cdot |\bar{H}| \cdot \cos \theta = \bar{G} \cdot \bar{H} , \quad |\bar{G}| \cdot |\bar{H}| \cdot \sin \theta = [\bar{G} \times \bar{H}] , \quad (38)$$

при этом, как следует из (36),

$$\begin{aligned} \cos \varphi_N &= c_x l_N + c_y m_N + c_z n_N & \sin \varphi_N &= \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_N} , \\ \cos \varphi_C &= c_x l_C + c_y m_C + c_z n_C & \sin \varphi_C &= \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_C} , \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$l_N = \frac{XN1}{RN1} , m_N = \frac{YN1}{RN1} , n_N = \frac{ZN1}{RN1} , l_C = \frac{XC1}{RC1} , m_C = \frac{YC1}{RC1} , n_C = \frac{ZC1}{RC1} , \quad (40)$$

компоненты векторов  $\bar{G}$  и  $\bar{H}$ :

$$G_X = \frac{c_y n_N - c_z m_N}{\sin \varphi_N} , G_Y = \frac{-(c_x n_N - c_z l_N)}{\sin \varphi_N} , G_Z = \frac{c_x m_N - c_y l_N}{\sin \varphi_N} , \quad (41)$$

$$H_X = \frac{c_y n_C - c_z m_C}{\sin \varphi_C} , H_Y = \frac{-(c_x n_C - c_z l_C)}{\sin \varphi_C} , H_Z = \frac{c_x m_C - c_y l_C}{\sin \varphi_C} , \quad (42)$$

Далее имеем для угла поворота пространства  $\theta$ :

$$\cos \theta = G_X H_X + G_Y H_Y + G_Z H_Z , \quad \sin \theta = \frac{G_Y H_Z - G_Z H_Y}{c_x} , \quad (43)$$

Таким образом, определены направляющие косинусы  $c_x, c_y, c_z$  инвариантной оси вращения пространства  $\bar{C}$  и угол  $\theta$  поворота пространства вокруг инвариантной оси вращения.

Теперь можно вычислить компоненты кватерниона:

$$d = \cos \frac{\theta}{2}, a = c_x \sin \frac{\theta}{2}, b = c_y \sin \frac{\theta}{2}, c = c_z \sin \frac{\theta}{2}, \quad (44)$$

после чего ортогональная матрица вращения  $M$  преобразования пространственных систем координат вычисляется по формуле (27), то есть через компоненты кватерниона.

Для полного решения задачи с использованием алгебры кватернионов для определения параметров преобразования пространственных систем координат с одновременным определением ортогональной матрицы вращения и элементов сдвига новой системы координат относительно старой необходимо перейти к разностной форме представления рассмотренного алгоритма.

Для этого применяется в обработку минимум три пункта, определенных как в старой так и новой системах:

$$\begin{aligned} &XC1, YC1, ZC1; XC2, YC2, ZC2; XC3, YC3, ZC3; \\ &XN1, YN1, ZN1; XN2, YN2, ZN2, XN3, YN3, ZN3. \end{aligned}$$

Образует разности старых координат:

$$\begin{aligned} \Delta_{xc1} &= XC2 - XC1, \Delta_{yc1} = YC2 - YC1, \Delta_{zc1} = ZC2 - ZC1, \\ \Delta_{xc2} &= XC3 - XC2, \Delta_{yc2} = YC3 - YC2, \Delta_{zc2} = ZC3 - ZC2, \\ \Delta_{xc3} &= XC1 - XC3, \Delta_{yc3} = YC1 - YC3, \Delta_{zc3} = ZC1 - ZC3 \end{aligned}$$

Считая эти разности “координатами”, выполняются вычисления по рассмотренному выше кватернионному алгоритму (29)-(44). В результате этого получаются элементы ортогональной матрицы преобразования  $M$ , далее, определяются сдвиги:

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XN1 \\ YN1 \\ ZN1 \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} XC1 \\ YC1 \\ ZC1 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Алгоритм и программа определения ортогональной матрицы вращения  $M$  и элементов сдвига по разностям координат трех точек, заданных в старой и новой системах выглядят следующим образом.

После перехода к новой системе координат  $XN, YN, ZN$  в принципе может возникнуть задача определения большой полуоси и эксцентриситета эллипсоида вращения, относительно которого задана новая система координат. Кроме того, определение параметров нового эллипсоида является окончательным контролем точности всех преобразований, если его параметры известны *a priori*.

Если задана большая полуось  $a_c$  и квадрат эксцентриситета  $e_c^2$  старого эллипсоида, тогда старые прямоугольные координаты  $XC, YC, ZC$  связаны с геодезической широтой  $B_c$ , геодезической долготой  $L_c$  и геодезической высотой  $H_c$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} XC &= (N_c + H_c) \cos B_c \cos L_c, \\ YC &= (N_c + H_c) \cos B_c \sin L_c, \\ ZC &= (N_c + H_c - N_c e_c^2) \sin B_c, \end{aligned} \quad (46)$$

где  $N_c = \frac{a_c}{\sqrt{1 - e_c^2 \sin^2 B_c}}$  - длина нормали в старой системе координат.

Положим также, что определены параметры перехода к новой системе координат  $m, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ .

С этими значениями параметров перехода определены координаты в новой системе  $XN, YN, ZN$ . Будем считать, что большая полуось  $a_N$  и квадрат эксцентриситета  $e_N^2$  нового эллипсоида, соответствующего новой системе координат, известны.

Необходимо проверить, получаются ли эти же параметры эллипсоида, если определить их по новым координатам  $X_N, Y_N, Z_N$ .

Сначала нужно вычислить с помощью параметров нового эллипсоида новые геодезические координаты: долготу, широту и высоту (соответственно  $B_N, L_N, H_N$ ).

Формула широты выглядит следующим образом:

$$L_N = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y_N}{X_N}\right), \quad (47)$$

а длина нормали в новой геодезической системе координат представляется в виде:

$$N_N = \frac{a_N}{\sqrt{1 - e_N^2 \sin^2(B_N)}} \quad (48)$$

Для этого нужно вычислить геодезическую широту методом последовательных приближений по формуле:

$$B_N^{(j+1)} = \operatorname{arctg} \frac{Z_N + N_N^{(j)} e^2 \sin B_N^{(j)}}{\sqrt{X_N^2 + Y_N^2}}, \quad (49)$$

где  $j$ -номер приближения.

В качестве первого приближения принимаем геоцентрическую широту:

$$B_N^{(1)} = \operatorname{arctg} \frac{Z_N}{\sqrt{X_N^2 + Y_N^2}} \quad (50)$$

Высота определяется по формуле:

$$H_N = \frac{X_N}{\cos(B_N) \cos(L_N)} - N_N. \quad (51)$$

Теперь редуцируем все точки, полученные в новой системе координат на поверхность нового эллипсоида, для чего вычисляются величины:

$$\delta X = H_N \cos(B_N) \cos(L_N), \quad \delta Y = H_N \cos B_N \sin L_N, \quad \delta Z = H_N \sin B_N \quad (52)$$

После чего, определим координаты точек на поверхности нового эллипсоида ( $H = 0$ ):

$$X_N^E = X_N - \delta X, Y_N^E = Y_N - \delta Y, Z_N^E = Z_N - \delta Z \quad (53)$$

Получив ряд точек, лежащих на новом эллипсоиде, определим вновь его параметры. Для этого, используя несколько пар точек, составим для каждой пары систему двух, нелинейных относительно параметров эллипсоида, канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{(X_{N1}^E)^2}{a_N^2} + \frac{(Y_{N1}^E)^2}{a_N^2} + \frac{(Z_{N1}^E)^2}{b_N^2} &= 1 \\ \frac{(X_{N2}^E)^2}{a_N^2} + \frac{(Y_{N2}^E)^2}{a_N^2} + \frac{(Z_{N2}^E)^2}{b_N^2} &= 1 \end{aligned} \quad (54)$$

Они решаются относительно большой  $a_N$  и малой  $b_N$  осей нового эллипсоида.

Составив ряд разностей  $\Delta_{1n} = a_{Nn} - a_N$ ,  $\Delta_{2n} = b_{Nn} - b_N$ , где  $a_N, b_N$  - априорные значения параметров нового эллипсоида, получим среднеквадратические ошибки определения параметров нового эллипсоида:

$$m_a = \sqrt{\sum_1^n \Delta_{1n}^2 / n}, m_b = \sqrt{\sum_1^n \Delta_{2n}^2 / n} \quad (55)$$

Этот метод дает наиболее объективный контроль всей работы по определению параметров преобразования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методическом указании рассмотрены методы определения параметров преобразования квазигеоцентрических декартовых систем координат, используемых в геодезии. Эти методы предполагают, что параметры преобразования могут быть как угодно велики.

К числу рассмотренных вопросов, относятся следующие:

-итерационный ньютоновский процесс строгого определения параметров по методу наименьших квадратов, который, в общем случае, требует знания предварительных значений уточняемых параметров,

- линейная процедура, в процессе которой определяются *двенадцать параметров* - девять элементов неортогональной матрицы вращения, которая автоматически учитывает разномасштабность систем координат, и три составляющие сдвига начала новой системы координат относительно старой.

Для получения предварительных значений уточняемых параметров преобразования рассматривается метод, основанный на алгебре кватернионов. Этот метод дает возможность определить *шесть параметров преобразования*, полагая, что масштабный коэффициент равен единице. При этом необходимо знать координаты только трех общих пунктов.

Рассмотрена процедура заключительного контроля определения параметров преобразования координат, в процессе которой определяются по полученным в новой системе координат большая полуось и эксцентриситет нового эллипсоида. Поскольку параметры нового эллипсоида обычно известны, это дает возможность объективного контроля всей проделанной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Галазин В.Ф., Базлов Ю.А., Каплан Б.Л., Максимов В.Г. Совместное использование GPS и ГЛОНАСС: Оценка точности различных способов установления связи между ПЗ-90 и WGS-84. Доклад, Москва, 1998.
2. Митрикас В.В., Ревнивых С.Г., Быханов Е.В. Определение параметров перехода из системы координат ПЗ-90 в WGS-84 для совместного использования систем Глонасс и GPS.
3. Урмаев Н.А. Сфероидическая геодезия. РИО ВТС, Москва, 1955.
4. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. М., Недра 1979.
5. Урмаев М.С. О применении алгебры кватернионов в фотограмметрии. Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка. №2, 1986
6. Урмаев М.С., Таран В.В. Определение геодезических координат пункта по результатам радиотехнических наблюдений навигационных спутников. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. №6, 1991.
7. Кириллов В.Г. Трехмерные отображения декартовых координатных систем. Рукопись диссертации. Новополоцк. 1983.
8. Параметры общего земного эллипсоида и гравитационного поля Земли. (Параметры Земли 1990 года). М., РИО ТС ВС РФ, 1991.
9. Бойков В.В., Галазин В.Ф., Кораблев Е.В. Применение геодезических спутников для решения фундаментальных и прикладных задач. Геодезия и картография. №11, 1996.
10. Щербаков М.И. Прямой способ определения кватерниона поворота системы координат снимка. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. №№ 4-5., 1994.

11. Бовшин Н.А., Зубинский В.И., Остач О.М. Совместное уравнивание общегосударственных опорных геодезических сетей. Геодезия и картография. №7, 1996.
12. Жонголович И.Д. Об определении размеров общего земного эллипсоида. Труды института теоретической астрономии, вып.6, изд. АН СССР, 1956.
13. P. Misra, R. Abbot, E. Gafoshkin. Integrated use of GPS and GLONASS: Transformation between WGS-84 and PZ-90. MIT Lincoln Laboratory. Proceedings of ION GPS-96.
14. IERS Annual Report 1995. Central Bureau of IERS. 1996. Paris.
15. GLONASS Issues Remain Unresolved. Dee Ann Divis. GPS World. March 1997.
16. Comparison of GPS-35 Orbits form GPS&SLR Tracking Data. Erricos C. Pavlis. Proceedings of 9-th International Workshop on Laser Ranging Instrumentation.