КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Игудесман К.Б.

ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ЧАСТЬ 2.

Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия»

Казань — 2007

Печатается по решению учебно-методической комиссии механико-математического факультета КГУ

Игудесман К.Б. Задачи по аналитической геометрии. Часть 2. Казань, 2007. 63 с.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук Шурыгин В.В.

Учебное пособие предназначено для студентов I курса механико-математического факультета КГУ

Предисловие

В настоящем "Пособии"подобраны и методически распределены задачи по аналитической геометрии.

В начале каждого параграфа приведены формулы, определения и другие краткие пояснения теории, необходимые для решения последующих задач.

В конце каждого параграфа приведены (после черты) задачи для повторения. Эта особенность поможет преподавателю в подборе задач для работы в классе и для домашних заданий или для повторений перед контрольными работами.

1 Векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (или $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$) вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ (в случае, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны) называется вектор, модуль которого равен площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, отложенные от одной и той же точки, ортогональный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, и направленный так, что упорядоченная тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ одинаково ориентирована с тройкой векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ некоторого ортонормированного базиса. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ по определению.

Свойства вектороного произведения:

1. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$.
2. $[(\lambda\mathbf{a}), \mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.
3. $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$.
4. $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$.
5. $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc})$.
6. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\ [\mathbf{c}, \mathbf{d}] = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc})$.

Если в ортонормированном базисе $\mathbf{a} = \{X, Y, Z\}$, $\mathbf{b} = \{X', Y', Z'\}$, то

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z & X \\ Z' & X' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix} \right\}.$$

Смешанным произведением $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ трех некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется число, абсолютная величина которого равна объему параллепипеда, ребрами которого являются эти векторы, отложенные от одной и той же точки; это число положительное, если упорядоченная тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ одинаково ориентирована с ортонормированным базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, и отрицательное в противном случае. Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ по определению.

Свойства смешанного произведения:

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c}$.
2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$.

Если в ортонормированном базисе $\mathbf{a} = \{X, Y, Z\}$, $\mathbf{b} = \{X', Y', Z'\}$, $\mathbf{c} = \{X'', Y'', Z''\}$, то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} X & Y & Y \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}.$$

ЗАДАЧИ

1. Зная два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, найти:

$$1)\ [(\mathbf{a}+\mathbf{b}), (\mathbf{a}-\mathbf{b})]; \quad 2)\ [\mathbf{a}, (\mathbf{a}+\mathbf{b})]; \quad 3)\ \left[\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}, \left(\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}}{2}\right)\right].$$

2. Показать, что если три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не коллинеарны, то из равенств $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ вытекает соотношение $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, и обратно.

3. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Показать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$.

4. Найти векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в каждом из нижеследующих случаев:

$$\begin{aligned} &1)\ \mathbf{a} = \{2, 3, 1\}, && \mathbf{b} = \{5, 6, 4\}; \\ &2)\ \mathbf{a} = \{5, -2, 1\}, && \mathbf{b} = \{4, 0, 6\}; \\ &3)\ \mathbf{a} = \{-2, 6, -4\}, && \mathbf{b} = \{3, -9, 6\}. \end{aligned}$$

5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \{8, 4, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, -2, 1\}$.

6. Даны векторы $\mathbf{a} = \{3, 1, 2\}$, $\mathbf{b} = \{2, 7, 4\}$, $\mathbf{c} = \{1, 2, 1\}$. Найти: 1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$; 2) $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]$; 3) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$.

7. Две тройки векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ называются взаимными, если векторы этих троек связаны соотношениями:

$$\mathbf{a_i b_k} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq k \\ 1, & \text{если} \quad i = k\ . \end{cases}$$

Пользуясь операциями скалярного векторного умножения, найти векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ тройки, взаимной тройке векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{AD} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$, где $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 3$ и $(\widehat{\mathbf{mn}}) = \frac{\pi}{6}$.

9. Вычислить объем параллепипеда, построенного на векторах:
1) $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \mathbf{r}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q} - 3\mathbf{r}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q} + \mathbf{r}$, где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, и $\mathbf{r}$ — взаимно перпендикулярные орты;
2) $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 5\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{m} + 7\mathbf{n}$, где $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{mn}}) = 135°$.

———————————————

10. Показать, что $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]^2 + (\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$.

11. Показать, что $[\mathbf{a}, (\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a})] = [(\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}), \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

12. Показать, что если $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = 0$, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны.

13. Показать, что если векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

14. При каких условиях $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$?

15. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий системе уравнений

$$\mathbf{ax} = \alpha,\ \mathbf{bx} = \beta,\ \mathbf{cx} = \gamma.$$

16. Для тройки векторов $\mathbf{a}_1 = \{2, 1, -1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{-3, 0, 2\}$, $\mathbf{a}_3 = \{5, 1, -2\}$ найти взаимную тройку.

2 Плоскость в аффинной системе координат

Всякая плоскость относительно аффинной системы координат определяется уравнением первой степени относительно координат x, y, z, т.е. уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ ,$$

где A, B, C не равны нулю одновременно. Обратно, всякое такое уравнение определяет плоскость. Это уравнение называется *общим* уравнением плоскости.

Если плоскость задана своим общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ ,$$

то для координат всех точек, лежащих по одну сторону от нее,

$$Ax + By + Cz + D > 0 \ ,$$

а для координат всех точек, лежащих по другую сторону,

$$Ax + By + Cz + D < 0 \ .$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\mathbf{a} = \{l, m, n\}$ и $\mathbf{b} = \{l', m', n'\}$, записывается так:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0 \ .$$

В *параметрической форме* уравнение плоскости выглядит так:

$$\begin{cases} x = x_0 + ul + vl' \\ y = y_0 + um + vm' \\ z = z_0 + un + vn' \end{cases} .$$

Здесь u и v — общие декартовы координаты точки M плоскости относительно системы координат с началом в точке M_0 и базисными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Уравнение плоскости в *отрезках* таково:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \ ,$$

где a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью соответственно на осях Ox, Oy, Oz.

Собственным пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну прямую. Если

$$Ax+By+Cz+D=0 \ , \quad A'x+B'y+C'z+D'=0$$

— две пересекающиеся плоскости, то уравнение

$$\alpha(Ax+By+Cz+D)+\beta(A'x+B'y+C'z+D')=0 \ ,$$

где α и β не равны нулю одновременно, определяет плоскость пучка, заданного двумя начальными плоскостями. Обратно, любая плоскость этого пучка может быть определена таким уравнением.

Несобственным пучком плоскостей называется множество всех плоскостей параллельных данной плоскости. Уравнение

$$Ax+By+Cz+\gamma=0 \ ,$$

где γ — произвольно, определяет плоскость пучка, заданного начальной плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$. Обратно, любая плоскость этого пучка может быть определена таким уравнением.

ЗАДАЧИ

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки:
1) $M_1(2,3,1)$, $M_2(3,1,4)$, $M_3(2,1,5)$;
2) $M_1(2,0,-1)$, $M_2(-2,4,1)$, $M_3(0,2,-1)$.

18. Составить уравнения плоскостей, проходящих через оси координат и параллельных вектору $\{2, 1, -4\}$.

19. Даны вершины тетраэдра $A(5, 1, 3)$, $B(1, 6, 2)$, $C(5, 0, 4)$, $D(4, 0, 6)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD.

20. Составить параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $(2, 3, -5)$ и параллельной векторам $\{-5, 6, 4\}$ и $\{4, -2, 0\}$.

21. В плоскости, проходящей через три точки $A(2, 1, 3)$, $B(2, 4, 0)$, $C(-3, 0, 4)$, выбрана аффинная система координат с началом в точке A и единичными векторами $\overrightarrow{AB} = \mathbf{e}_1$ и $\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_2$. Найти:

1) пространственные координаты точки M, имеющей в плоскостной системе координаты $u = 5,\ v = 3$;

2) плоскостные координаты u и v точки пересечения данной плоскости с осью Oz.

22. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям в каждом из следующих случаев:

1) $x = 2 + 3u - 4v,\ y = 4 - v,\ z = 2 + 3u$;

2) $x = u + v,\ y = u - v,\ z = 5 + 6u - 4v$.

23. Определить положение точек $A(-3, 3, 5)$, $B(0, -7, -4)$, $C(6, 5, 1)$, $D(-3, -5, 2)$, $E(4, -7, 10)$, $F(2, 6, 1)$ относительно плоскости $2x - 3y + 6z - 1 = 0$.

24. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через линию пересечения плоскостей

$$2x + 5y - 6z + 4 = 0, \quad 3y + 2z + 6 = 0.$$

25. Через линию пересечения плоскостей

$$6x - y + z = 0, \quad 5 + 3z - 10 = 0$$

провести плоскость, параллельную оси Ox.

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения трех плоскостей

$$x - y = 0,\ x + y - 2z = 1 = 0,\ 2x + z - 4 = 0 \quad \text{и}$$

1) проходящей через ось Oy;

2) параллельной плоскости Oxz;

3) проходящей через начало координат и точку $(2, 1, 7)$.

---

27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3, 7, 2)$ и параллельной векторам $\{4, 1, 2\}$ и $\{5, 3, 1\}$.

28. Даны вершины тетраэдра $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$, $D(0, -7, 8)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и через середину ребра CD.

29. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $(1, 7, 8)$, $(2, -6, -6)$ и параллельной оси Oz.

30. В плоскости $2x + 3y - 4z + 12 = 0$ выбрана аффинная система координат, начало которой находится в точке C пересечения этой плоскости с осью Oz, а концы единичных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно в точках A и B пересечения плоскости с осями Ox и Oy.

1) Найти пространственные координаты точки E, имеющей в плоскостной системе координаты $u = 1,\ v = 1$.

2) Написать в плоскостной системе координат уравнения прямых AB, BC и CA.

3) Написать в плоскостной системе уравнение линии пересечения данной плоскости с плоскостью $5x + 3z - 8 = 0$.

31. Даны уравнения трех граней параллепипеда $2x+3y+4z-12 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$, $z + 5 = 0$, и одна из его вершин $(6, -5, 1)$. Составить уравнениях трех других граней параллепипеда.

32. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-3, 1, 0)$

и через линию пересечения плоскостей

$$x + 2y - z + 4 = 0, \quad 3x - y + 2z - 1 = 0.$$

33. Определить взаимное расположение плоскостей в каждой из нижеследующих троек плоскостей:

1) $2x - 4y + 5z - 21 = 0,\ x - 3z + 18 = 0,\ 6x + y + z - 30 = 0;$

2) $x + 2y - 3z = 0,\ 3x + 6y - 9z + 10 = 0,\ 2x + 4y - 6z - 1 = 0;$

3) $3x - y + 2z + 1 = 0,\ 7x + 2y + z = 0,\ 15x + 8y - z - 2 = 0;$

4) $5x - 2y + 4 = 0,\ 3x + z - 5 = 0,\ 8x - 2y + z + 7 = 0;$

5) $6x + 2y + 12z - 3 = 0,\ 5y - 7z - 10 = 0,\ 3x + y + 6z + 12 = 0.$

3 Прямая в аффинной системе координат

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно вектору $\mathbf{a} = \{l, m, n\}$, определяется уравнениями:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + lt \\ y & = & y_0 + mt \\ z & = & z_0 + nt \end{array}\right.$$

— *параметрические* уравнения прямой, или

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

— *канонические* уравнения прямой.

Прямая может быть также задана уравнениями

$$\left\{\begin{array}{rcl} Ax + By + Cz + D & = & 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' & = & 0 \end{array}\right.$$

двух плоскостей, пересекающихся по этой прямой. Эта система называется *общим* уравнением прямой.

ЗАДАЧИ

34. Составить уравнение прямой M_1M_2 в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(2,3,1),\ M_2(4,6,9)$;

2) $M_1(7,-1,2),\ M_2(5,-1,4)$;

3) $M_1(1,5,1),\ M_2(1,-5,1)$.

35. Составить параметрические уравнения прямых

$$1)\ \begin{cases} x-2y+4z = 0 \\ 3x-2y+5z = 0\ , \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y-z+5 = 0 \\ 2x-y+2z-2 = 0\ . \end{cases}$$

36. Установить, какие из следующих точек $A(5,8,15)$, $B(-1,-1,-3)$, $C(5,7,1)$, $D(0,\frac{1}{2},0)$, $E(0,0,1)$ лежат на прямой

$$x=1+2t,\ y=2+3t,\ z=3+6t.$$

37. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через прямую

$$x=3-2t,\ y=1+t,\ z=t.$$

38. Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, написать уравнение плоскости через них проходящей; если прямые пересекаются, написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку.

$$1)\ \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 7+t \\ z = 3+4t\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6+3t \\ y = -1-2t \\ z = -2+t\ ; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-2t \\ z = -t\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2t \\ y = -1+3t \\ z = 4\ ; \end{cases}$$

3) $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = -6t \\ z = -1-8t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 7-6t \\ y = 2+9t \\ z = 12t \end{cases};$

4) $\begin{cases} x = 1+9t \\ y = 2+6t \\ z = 3+3t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 7+6t \\ y = 6+4t \\ z = 5+2t \end{cases}.$

39. Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости.

1) $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$, $\quad 3x+5y-z-2=0$;

2) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$, $\quad 3x-3y+2z-5=0$;

3) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$, $\quad x+2y-4z+1=0$;

4) $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$, $\quad 3x-y+2z-5=0$.

40. Найти точку встречи прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ с плоскостью $x+y+z-10=0$.

41. Составить уравнение прямой, коллинеарной прямой

$$\begin{cases} x-3y+z = 0 \\ x+y-z+4 = 0 \end{cases}$$

и пересекающей две прямые

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+2t \\ z = 4t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -2+3t \\ y = -1 \\ z = 4-t \end{cases}.$$

---

42. Установить, какие из следующих точек лежат на одной прямой:

1) (3,0,1), (0,2,4), (-3,4,7);

2) (1,2,3), (10,8,4), (3,0,2);

3) (2,6,4), (5,7,1), (5,7,1).

43. Написать уравнения прямой:

1) проходящей через точку (3,5,1) параллельно прямой

$$x = 2 + 4t,\ y = -3t,\ z = -3;$$

2) проходящей через точку (0,-5,4) параллельно прямой

$$x + 2y + 6 = 0,\ z = 5.$$

44. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$x = 2 + 3t,\ y = -1 + 6t,\ z = 4t$$

и коллинеарной прямой

$$x = -1 + 2t,\ y = 3t,\ z = -t.$$

45. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-2, 3, 0)$ и через прямую

$$x = 1,\ y = 2 + t,\ z = 2 - t.$$

Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, написать уравнение плоскости через них проходящей; если прямые пересекаются, написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку.

46.

1) $\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + y - z + 13 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases};$

2) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ z - 4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + z - 8 = 0 \\ 2y + 3z - 7 = 0 \end{cases};$

3) $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 7z = 0 \end{cases};$

4) $\begin{cases} 3x + y - 2z - 6 = 0 \\ x - 2y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 41x - 19y + 52z - 68 = 0 \\ 33x + 4y - 5z - 63 = 0 \end{cases}$.

47.

1) $\begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases}$, $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x = t \\ y = -8 - 4t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$, $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -1 \\ z = 4 - t \end{cases}$, $\begin{cases} 2y - z + 2 = 0 \\ x - 7y + 3z - 17 = 0 \end{cases}$.

48.

Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости.

1) $\begin{cases} 3x + 5y - 7z + 16 = 0 \\ 2x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$, $5x - z - 4 = 0$;

2) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0 \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases}$, $y + 4z + 17 = 0$;

3) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 8 = 0 \\ 5x + 3y + z - 16 = 0 \end{cases}$, $2x - y - 4z - 24 = 0$;

49. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2, 3, 1)$

и пересекающей прямые

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ x-y+z+4 &=& 0\ , \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+3y-1 &=& 0 \\ y+z-2 &=& 0\ . \end{array}\right.$$

4 Плоскость и прямая в прямоугольной системе координат

Для плоскости π, имеющей уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ в прямоугольной системе координат, вектор $\mathbf{N}=\{A,B,C\}$ является нормальным вектором.

Если плоскости π_1 и π_2 заданы, соответственно, уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то косинус угла между ними равен

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\ .$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости, заданной относительно прямоугольной системы координат уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ .$$

Уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0$$

плоскости в прямоугольной системе координат называется *нормальным*, если

$$A^2+B^2+C^2=1\ ;$$

в этом случае A,B,C — косинусы углов единичного вектора $\{A,B,C\}$, перпендикулярного к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, с осями координат, а $|D|$ — расстояние от начала координат до этой плоскости.

Углы между двумя прямыми

$$\begin{cases} x = x_1 + l_1 t \\ y = y_1 + m_1 t \\ z = z_1 + n_1 t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_2 + l_2 t \\ y = y_2 + m_2 t \\ z = z_2 + n_2 t \end{cases}$$

в прямоугольной системе координат определяется соотношениями:

$$\cos\varphi = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \ .$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

определяется в прямоугольной системе координат соотношением

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \ .$$

Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

$$\begin{cases} x = x_1 + l_1 t \\ y = y_1 + m_1 t \\ z = z_1 + n_1 t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_2 + l_2 t \\ y = y_2 + m_2 t \\ z = z_2 + n_2 t \end{cases}$$

в прямоугольной системе координат определяется соотношением

$$d = \frac{\operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}} \ .$$

Угол между прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

в прямоугольной системе координат определяется из соотношения

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} .$$

ЗАДАЧИ

50. Даны две точки $A(3, -2, 1), B(6, 0, 5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку B и перпендикулярной к прямой AB.

51. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, через точку $(1, 2, 3)$ и перпендикулярной к плоскости $x - y + 2z - 4 = 0$.

52. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $5x - 2y + 5z - 10 = 0$ и образующую с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$ угол 45°.

53. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей $2x - z = 0,\ x + y - z + 5 = 0$ и перпендикулярной к плоскости $7x - y + 4z - 3 = 0$.

54. Определить расстояния точек $A(3, 5, 1), B(7, -1, 2), C(2, 0, 4)$ до плоскости $x + 2y - 2z + 5 = 0$.

55. Составить уравнения биссекторных плоскостей углов между плоскостями $7x + y - 6 = 0, 3x + 5y - 4z + 1 = 0$.

56. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $(2, 3, 4)$ и от плоскости $2x + 3y + z - 17 = 0$.

57. Составить уравнения проекции прямой $2x+y-z+4 = 0,\ x+y = 0$ на плоскость Oxz.

58. Определить угол между двумя прямыми

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 &= 0 \\ y - 3z + 2 &= 0 . \end{cases}$$

59. Из точки $(3,-2,4)$ опустить перпендикуляр на плоскость $5x+3y-7z+1=0$.

60. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к прямой

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}\ .$$

61. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(3,2,1)$ на ось Ox.

62. Найти расстояние от точки $(1,3,5)$ до прямой, по которой пересекаются две плоскости $2x+y+z-1=0,\ 3x+y+2z-3=0$.

63. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}\quad \text{и}\quad \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}\ .$$

64. Найти кратчайшее расстояние между диагональю ромба и непересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 1.

---

65. Найти косинусы углов между двумя плоскостями

$$1)\quad \begin{aligned} 2x-y+3z &= 0\\ x+4y-6z &= 0\ , \end{aligned}\qquad\qquad 2)\quad \begin{aligned} x+3y-4z+5 &= 0\\ 2x+2y+2z-7 &= 0\ . \end{aligned}$$

66. Составить уравнение плоскости, зная, что точка $P(2,6,-4)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

67. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $x+3y+5z-10=0$ и проходящей через линию пересечения данной плоскости с плоскостью Oxy.

68. Через линию пересечения плоскостей $x+5y+z=0$ и $x-z+4=0$ провести плоскость, образующую угол $\frac{\pi}{4}$ с плоскостью $x-4y-8z+12=0$.

69. Через ось z провести плоскость, образующую с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ угол $\frac{\pi}{3}$.

70. Составить уравнение биссекторной плоскости того угла между плоскостями $3x+5y-4z+1=0$ и $x-z-5=0$ в котором лежит начало координат.

71. Определить угол, образованный прямыми

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}\ .$$

72. Найти угол между прямой $x=5+6t,\ y=1-3t,\ z=2+t$ и плоскостью $7x+2y-3z+5=0$.

73. Найти проекцию прямой на плоскость Oxy в каждом из следующих случаев:

1) $5x+8y-3z+9=0,\ 2x-4y+z-1=0$;

2) $\frac{x-3}{-5}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-6}{8}$.

74. Найти проекцию точки (1,2,-3) на плоскость $6x-y+3z-41=0$.

75. Найти точку, симметричную данной относительно прямой $x=1+2t,\ y=2+4t,\ z=3+5t$.

76. Провести через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямой $y=1,\ z+1=0$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную к данной прямой.

77. Найти расстояние от точки (1,2,5) до каждой из следующих прямых:

1) $x=t,\ y=1-2t,\ z=3+t$;

2) $x+y-z+2=0,\ 4x-3z+3=0$.

78. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

$$1)\ \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+2t \\ y &=& 1-t \\ z &=& 2+2t \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -t \\ y &=& 2+3t \\ z &=& 3t\ ; \end{array}\right.$$

$$2)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z+1 &=& 0 \\ x+y &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z-6 &=& 0 \\ 2x-y+3z-6 &=& 0\ ; \end{array}\right.$$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+1 & = & 0 \\ 2x-3y+z-4 & = & 0 \end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-9 & = & 0 \\ 2x-y-z & = & 0\,. \end{array}\right.$

5 Аффинные векторные пространства

Линейным подпространством векторного пространства $\mathbf{V}$ называется непустое множество $\mathbf{L}$ векторов из $\mathbf{V}$, обладающее следующими свойствами:

1) сумма $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ двух любых векторов из $\mathbf{L}$ снова принадлежит $\mathbf{L}$;

2) произведение $\alpha\mathbf{x}$ любого вектора из $\mathbf{L}$ на любое число α снова принадлежит $\mathbf{L}$.

Аффинным подпространством векторного пространства $\mathbf{V}$ называется совокупность $\mathbf{P}$ векторов из $\mathbf{V}$, полученная прибавлением ко всем векторам какого-нибудь подпространства $\mathbf{L}$ из $\mathbf{V}$ одного и того же вектора $\mathbf{x}_0$. Эта связь $\mathbf{L}$ и $\mathbf{P}$ будет обозначаться так: $\mathbf{P}=\mathbf{L}+\mathbf{x}_0$ или $\mathbf{L}=\mathbf{P}-\mathbf{x}_0$. Мы будем говорить, что аффинное подпространство $\mathbf{P}$ получено из линейного подпространства $\mathbf{L}$ параллельным сдвигом на вектор $\mathbf{x}_0$.

Размерностью аффинного подпространства называется размерность того линейного подпространства, параллельным сдвигом которого оно получено. Одномерные линейные подпространства будут называться прямыми, а двумерные — плоскостями.

Суммой двух линейных подпространств $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ векторного пространства $\mathbf{V}$ называется совокупность $\mathbf{S}=\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2$ всех векторов из $\mathbf{V}$, каждый из которых представляется в виде $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1\in\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{x}_2\in\mathbf{L}_2$.

Пересечением двух линейных подпространств $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ векторного пространства $\mathbf{V}$ называется совокупность $\mathbf{D}=\mathbf{L}_1\bigcap\mathbf{L}_2$ всех векторов из $\mathbf{V}$, каждый из которых принадлежит как $\mathbf{L}_1$, так и $\mathbf{L}_2$.

ЗАДАЧИ

79. Найти какой-нибудь базис и размерность линейного подпространства $\mathbf{L}$ пространства $\mathbb{R}^n$, если $\mathbf{L}$ задано уравнением $x^1+x^2+\ldots+x^n=0$.

80. Найти размерность и базис линейного подпространства, натянутого на следующую систему векторов: $\mathbf{a}_1=\{1,0,0,-1\}$, $\mathbf{a}_2=\{2,1,1,0\}$, $\mathbf{a}_3=\{1,1,1,1\}$, $\mathbf{a}_4=\{1,2,3,4\}$, $\mathbf{a}_5=\{0,1,2,3\}$.

81. Найти систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, натянутое на следующую систему векторов:
$\mathbf{a}_1=\{1,-1,1,0\}$, $\mathbf{a}_2=\{1,1,0,1\}$, $\mathbf{a}_3=\{2,0,1,1\}$.

82. Найти базис суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы векторов
$\mathbf{a}_1=\{1,1,0,0\}$, $\mathbf{a}_2=\{0,1,1,0\}$, $\mathbf{a}_3=\{0,0,1,1\}$;
$\mathbf{b}_1=\{1,0,1,0\}$, $\mathbf{b}_2=\{0,2,1,1\}$, $\mathbf{b}_3=\{1,2,1,2\}$.

83. Найти точку пересечения двух прямых $\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1t$ и $\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_1t$:
$\mathbf{a}_0=\{2,1,1,3,-3\}$, $\mathbf{a}_1=\{2,3,1,1,-1\}$;
$\mathbf{b}_0=\{1,1,2,1,2\}$, $\mathbf{b}_1=\{1,2,1,0,1\}$.

84. Доказать, что точки $A(2,1,-2,0)$, $B(1,-3,-3,1)$, $C(4,9,0,-2)$ принадлежат одной прямой.

85. Даны три точки $A(1,-1,4,-2)$, $B(0,3,-4,3)$, $C(2,1,0,-1)$, не принадлежащие одной прямой, и еще три точки $A_1(0,1,-1,3)$, $B_1(-6,-1,-2,-3)$, $C_1(-4,0,-1,0)$, также не принадлежащие одной прямой. Найти координаты точки пересечения плоскостей (ABC) и $(A_1B_1C_1)$.

86. Доказать, что плоскость (ABC) параллельна плоскости $(A_1B_1C_1)$:
$A(2,-1,0,4)$, $B(-1,2,0,3)$, $C(3,0,1,1)$;
$A_1(1,1,1,1)$, $B_1(8,-4,-4,6)$, $C_1(-3,3,3,0)$.

87. Прямая m проходит через точку $M(10,3,-9,-13)$ и пересекает данную прямую (AB) и данную плоскость Π_2. Вычислить координаты точек $m\bigcap(AB)$ и $m\bigcap\Pi_2$, если $A(-1,0,2,3)$, $B(2,1,-1,0)$,

$$\Pi_2:\left\{\begin{array}{rcl} x^1+x^2-x^3 &=& 0\\ 2x^2+2x^3-x^4+3 &=& 0\ . \end{array}\right.$$

---

88. Найти размерность и базис линейного подпространства, натянутого на следующую систему векторов:
$\mathbf{a}_1=\{1,1,1,1,0\}$, $\mathbf{a}_2=\{1,1,-1,-1,-1\}$, $\mathbf{a}_3=\{2,2,0,0,-1\}$, $\mathbf{a}_4=\{1,1,5,5,2\}$, $\mathbf{a}_5=\{1,-1,-1,0,0\}$.

89. Найти систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, натянутое на следующую систему векторов:
$\mathbf{a}_1=\{1,-1,1,-1,1\}$, $\mathbf{a}_2=\{1,1,0,0,3\}$, $\mathbf{a}_3=\{3,1,1,-1,7\}$, $\mathbf{a}_4=\{0,2,-1,1,2\}$.

90. Найти базис суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы векторов
$\mathbf{a}_1=\{1,2,1,-2\}$, $\mathbf{a}_2=\{2,3,1,0\}$, $\mathbf{a}_3=\{1,2,2,-3\}$;
$\mathbf{b}_1=\{1,1,1,1\}$, $\mathbf{b}_2=\{1,0,1,-1\}$, $\mathbf{b}_3=\{1,3,0,-4\}$.

91. Доказать, что пространство $\mathbb{R}^n$ есть прямая сумма двух линейных подпространств: $\mathbf{L}_1$, заданного уравнением $x^1+x^2+\ldots+x^n=0$, и $\mathbf{L}_2$, заданного системой уравнений $x^1=x^2=\ldots=x^n$.

92. Найти точку пересечения двух прямых $\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1t$ и $\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_1t$:
$\mathbf{a}_0=\{3,1,2,1,3\}$, $\mathbf{a}_1=\{1,0,1,1,2\}$;
$\mathbf{b}_0=\{2,2,-1,-1,-2\}$, $\mathbf{b}_1=\{2,1,0,1,1\}$.

93. Доказать, что точки $A(0,-3,0,2)$, $B(1,1,-1,-2)$, $C(-1,-7,1,6)$ принадлежат одной прямой.

94. Доказать, что плоскость (ABC) параллельна плоскости $(A_1B_1C_1)$:
$A(1,2,0,-1)$, $B(2,1,-1,0)$, $C(0,3,-4,1)$;
$A_1(2,0,1,-3)$, $B_1(2,0,11,-9)$, $C_1(3,-1,-5,1)$.

95. Найти пересечение гиперплоскости Π и луча $[AM)$:
1) $\Pi: 3x^1+2x^2+x^3-2x^4+4=0$,

$[AM): x^1 = 1 + t,\ x^2 = -1 - 2t,\ x^3 = 3t,\ x^4 = 2 + t,\ t \geq 0;$

2) $\Pi : x^1 - 2x^2 + x^3 + x^4 - 13 = 0,$

$[AM): x^1 = t,\ x^2 = 1 - t,\ x^3 = 2 + t,\ x^4 = -1 + 3t,\ t \geq 0.$

96. Доказать, что плоскости Π_2 и Π_2' пространства P_4, заданные в репере $(O, \mathbf{e}_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ уравнениями:

$$\Pi_2 : \begin{cases} x^1 - 3x^2 - 2x^3 + 3 = 0 \\ 3x^2 + 2x^3 - x^4 - 4 = 0 \end{cases}, \qquad \Pi_2' : \begin{cases} x^1 + x^2 - 3x^3 + x^4 = 0 \\ 2x^1 + x^2 - 3x^3 - 1 = 0 \end{cases},$$

пересекаются по прямой, и найти уравнения этой прямой.

6 Евклидовы векторные пространства

Евклидовым пространством $\mathbf{E}_n$ называется n-мерное векторное пространство в котором каждой паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ поставлено в соответствие вещественное число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, называемое скалярным произведением этих векторов, причем выполнены следующие условия:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

2) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$;

3) $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;

4) если $\mathbf{x} \neq 0$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$.

Базис (или вообще система векторов) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ называется *ортонормированным*, если

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Если нет других указаний, то координаты всех векторов предполагаются взятыми в ортонормированном базисе.

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются *ортогональными*, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Ортогональным дополнением подпространства $\mathbf{L}$ пространства $\mathbf{E}_n$ называется совокупность $\mathbf{L}^*$ всех векторов из $\mathbf{E}_n$, каждый из которых ортогонален ко всем векторам из $\mathbf{L}$.

Определителем Грама векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ евклидова пространства $\mathbf{E}_n$ называется определитель

$$g(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_p) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_p) \end{vmatrix} .$$

Определитель Грама векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ равен квадрату p-мерного объема параллепипеда, построенного на этих векторах.

ЗАДАЧИ

97. Найти базис ортогонального дополнения $\mathbf{L}^*$ подпространства $\mathbf{L}$, натянутого на векторы $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, -2, 1)$.

98. Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$ вектора $\mathbf{x} = (4, -1, -3, 4)$ на линейное подпространство $\mathbf{L}$, натянутое на векторы $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 0, 3)$.

99. Найти угол между вектором $\mathbf{x} = (2, 2, 1, 1)$ и линейным подпространством $\mathbf{L}$, натянутым на векторы $\mathbf{a}_1 = (3, 4, -4, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1, 2)$.

100. Вычислить координаты ортогональной проекции M_1 точки $M(1, 1, 1, -1)$ на гиперплоскость $\Pi: \ x^1 + x^2 - 2x^3 + x^4 - 1 = 0$.

101. Вычислить расстояние от точки $A(1, -1, 2, 1)$ до гиперплоскости $\Pi: \ x^1 + 3x^2 - x^3 - x^4 + 2 = 0$.

102. Вычислить координаты ортогональной проекции M_1 точки $M(1, -2, 3, -1)$ на прямую

$$x^1 = \lambda - 2, \ x^2 = -\lambda + 2, \ x^3 = 2\lambda + 1, \ x^4 = -3\lambda .$$

103. Вычислить расстояние от точки $A(1, 1, -2, 1)$ до прямой l:

$$x^1 = \lambda, \ x^2 = -\lambda + 1, \ x^3 = \lambda + 2, \ x^4 = 2\lambda - 1 .$$

104. Написать уравнения общего перпендикуляра прямой (AB) и плоскости (PQR):
1) $A(1,1,1,1),\ B(-2,-1,1,3),\ P(2,1,-1,0),\ Q(3,1,0,-1),\ R(0,0,-1,1)$;
2) $A(0,0,1,1),\ B(2,-1,0,0),\ P(3,1,0,-2),\ Q(-2,0,-1,3),\ R(1,1,1,-1)$.

———————————————

105. Линейное подпространство $\mathbf{L}$ задано уравнениями:

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 + 3x^3 - x^4 &= 0 \\ 3x^1 + 2x^2 - 2x^4 &= 0 \\ 3x^1 + x^2 + 9x^3 - x^4 &= 0\ . \end{cases}$$

Найти уравнения, задающие ортогональное дополнение $\mathbf{L}^*$.

106. Найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$ вектора $\mathbf{x} = (5,2,-2,2)$ на линейное подпространство $\mathbf{L}$, натянутое на векторы $\mathbf{a}_1 = (2,1,1,-1),\ \mathbf{a}_2 = (1,1,3,0),\ \mathbf{a}_3 = (1,2,8,1)$.

107. Найти угол между вектором $\mathbf{x} = (1,0,3,0)$ и линейным подпространством $\mathbf{L}$, натянутым на векторы $\mathbf{a}_1 = (5,3,4,-3),\ \mathbf{a}_2 = (1,1,4,5),\ \mathbf{a}_3 = (2,-1,1,2)$.

108. Вычислить координаты ортогональной проекции M_1 точки $M(0,-1,2,1)$ на гиперплоскость $\Pi:\ 2x^1 + x^2 + x^4 - 3 = 0$.

109. Вычислить расстояние от точки $A(2,3,-1,4)$ до гиперплоскости $\Pi:\ x^1 - x^2 + 2x^3 + x^4 + 1 = 0$.

110. Вычислить координаты ортогональной проекции M_1 точки $M(2,-1,3,1)$ на плоскость

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 - x^4 + 1 &= 0 \\ 2x^1 + x^2 - 2x^3 + x^4 + 2 &= 0\ . \end{cases}$$

111. Вычислить расстояние от точки $A(3,1,-1,1)$ до прямой l:

$$x^1 = -\lambda,\ x^2 = \lambda + 2,\ x^3 = -\lambda + 1,\ x^4 = 2\lambda\ .$$

112. Вычислить расстояние от точки A до плоскости Π_2:

1) $A(2,3,-1,1), \quad \Pi_2 : \begin{cases} \;\; x^1 + x^2 - x^3 + x^4 & = \; 0 \\ -x^1 + 2x^2 + x^3 - 1 & = \; 0 \; ; \end{cases}$

2) $A(3,-1,1,0), \quad \Pi_2 : \begin{cases} x^1 + 2x^2 + x^4 & = \; 0 \\ \quad -2x^1 + 1 & = \; 0 \; . \end{cases}$

7 Аффинные преобразования

Аффинным преобразованием плоскости называется такое преобразование, при котором каждой точке $M(x,y)$ плоскости, заданной относительно аффинной системы координат, ставится в соответствие точка $M'(x',y')$, координаты которой являются линейными функциями координат точки M:

$$\begin{cases} x' & = \; a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' & = \; a_{21}x + a_{22}y + a_2 \; , \end{cases}$$

причем определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \; .$$

Параметры, входящие в данное соотношение, имеют следующий геометрический смысл: точка $O'(a_1, a_2)$ — образ начала координат; вектор $e'_1 = \{a_{11}, a_{12}\}$ — образ базисного вектора $e_1 = \{1, 0\}$ оси Ox; $e'_2 = \{a_{11}, a_{12}\}$ — образ базисного вектора $e_2 = \{0, 1\}$ оси Oy.

Аффинное преобразование взаимно-однозначно, сохраняет коллинеарность трех точек (т.е. принадлежность трех точек одной прямой), параллельность двух прямых, простое отношение трех точек и отношение площадей.

Всякое взаимно-однозначное преобразование множества всех точек плоскости, сохраняющее коллинеарность трех любых точек, будет аффинным преобразованием.

ЗАДАЧИ

113. Аффинное преобразование переводит точки $A(2,1)$, $B(3,0)$, $C(1,4)$ соответственно в точки $A'(1,6)$, $B'(1,9)$, $C'(3,1)$. Куда перейдет при этом преобразовании точка $M(5,7)$? Какая точка останется неподвижной?

114. Дано аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' &= 2x+3y+5 \\ y' &= 4x-3y-2 \,. \end{cases}$$

В какие прямые перейдут при этом преобразовании

1) оси Ox и Oy;

2) прямые $2x+3y+5=0$, $4x-3y-2=0$;

3) прямая $2x-6y-7=0$.

115. Определить двойные прямые аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' &= 7x-y+1 \\ y' &= 4x+2y+4 \,. \end{cases}$$

116. Как запишется аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' &= x+2y \\ y' &= 4x+3y \,, \end{cases}$$

если за новые оси аффинной системы координат принять двойные прямые данного преобразования.

117. Найти аффинное преобразование, обратное преобразованию

$$\begin{cases} x' &= 2x+3y-7 \\ y' &= 3x+5y-9 \,. \end{cases}$$

118. Даны два аффинных преобразования A и B.

$$A: \begin{cases} x' &= 2x+y-5 \\ y' &= 3x-y+7 \,, \end{cases} \qquad B: \begin{cases} x' &= x-y+4 \\ y' &= -x+2y+5 \,. \end{cases}$$

Найти преобразования AB и BA.

119. Доказать, что площадь треугольника, сторонами которого являются два сопряженных полудиаметра эллипса и хорда, соединяющая их концы, есть величина постоянная.

120. Вычислить площадь эллипса с полуосями a и b.

121. Определить вид и расположение линии второго порядка $x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, пользуясь приведением многочлена к сумме квадратов методом Лагранжа.

122. Доказать, что при любом аффинном преобразовании плоскости, отличном от подобия, через каждую точку плоскости проходит единственная пара перпендикулярных прямых, переходящих в перпендикулярные прямые.

---

123. Определить аффинное преобразование, которое три данные точки $A_1(1,0)$, $A_2(0,2)$, $A_3(-3,0)$ переводит соответственно в точки $A_1'(2,3)$, $A_2'(-1,4)$, $A_3'(-2,-1)$.

124. Определить двойную точку аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' &= 4x + 5y - 11 \\ y' &= 2x + 4y - 7\ . \end{cases}$$

125. Дано аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' &= 2x + y - 2 \\ y' &= x - 5y - 1 \end{cases}$$

и точка $A(1,1)$. Найти прямую, проходящую через точку A, которая при этом преобразовании переходит в прямую, также проходящую через точку A.

126. Доказать, что аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' &= ax - by \\ y' &= ax + by\ , \end{cases} \qquad a^2 + b^2 \neq 0$$

не имеет двойных прямых.

127. Образует ли группу множество множество аффинных преобразований

$$\begin{cases} x' &= r(x\cos\varphi - y\sin\varphi) \\ y' &= r(x\sin\varphi + y\cos\varphi) \end{cases},$$

где r принимает все действительные положительные значения, а φ принимает все действительные значения. В чем геометрический смысл указанных преобразований? Система координат прямоугольная.

128. Доказать, что диагонали параллелограмма, стороны которого касаются эллипса, являются сопряженными диаметрами этого эллипса.

129. Доказать, что два сопряженных диаметра эллипса делят его на четыре равновеликие части.

130. Определить вид и расположение линий второго порядка, пользуясь приведением многочлена к сумме квадратов методом Лагранжа:

1) $x^2 - 2xy + 4y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$;

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 8y = 0$.

8 Поверхности второго порядка, заданные каноническими уравнениями

Для любой поверхности второго порядка существует прямоугольная система координат в пространстве, в которой уравнение этой поверхности имеет канонический вид. Существует 17 типов поверхностей.

1. *Мнимый эллипсоид* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$.

2. *Действительный эллипсоид* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3. *Двуполостный гиперболоид* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

4. *Однополостный гиперболоид* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

5. *Мнимый конус* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$

6. *Действительный конус* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

7. *Мнимый цилиндр* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$

8. *Эллиптический цилиндр* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

9. *Гиперболический цилиндр* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

10. Пара *мнимых пересекающихся плоскостей* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$

11. Пара *действительных пересекающихся плоскостей* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$

12. Пара *мнимых параллельных плоскостей* $\frac{x^2}{a^2} = -1.$

13. Пара *действительных параллельных плоскостей* $\frac{x^2}{a^2} = 1.$

14. Пара *совпадающих плоскостей* $\frac{x^2}{a^2} = 0.$

15. *Эллиптический параболоид* $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$

16. *Гиперболический параболоид* $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}.$

17. *Параболический цилиндр* $z = \frac{x^2}{2p}.$

Если прямая имеет с поверхностью более двух общих точек, то она целиком лежит на поверхности и называется *прямолинейной образующей* этой поверхности.

Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ имеет две серии прямолинейных образующих, которые определяются уравнениями:

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) & = & \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) & = & \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) & = & \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) & = & \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases},$$

где α и β — произвольные параметры, взятые с точностью до общего множителя.

Гиперболический параболоид $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$ также содержит две серии прямолинейных образующих:

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}}\right) = \beta \\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}}\right) = \alpha z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}}\right) = \beta \\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}}\right) = \alpha z \end{cases}.$$

Поверхность второго порядка пересекается всякой плоскостью по кривой второго порядка (действительной или мнимой). Сечения поверхности ее плоскостями симметрии называются *главными сечениями*; вершины и оси главных сечений называются *вершинами* и *осями* поверхности. Плоскость, проходящая через центр, называется *диаметральной плоскостью.*

Касательная плоскость поверхности в данной точке есть геометрическое место прямых, касающихся поверхности в этой точке. Уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) определяется следующим образом:

Уравнение поверхности	Уравнение касательной плоскости
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} \pm \frac{zz_0}{c^2} = \pm 1$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0$	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} \pm \frac{zz_0}{c^2} = 0$
$z = \frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q}$	$z = \frac{xx_0}{2p} \pm \frac{yy_0}{2q}$

Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку прикосновения, называется *нормалью* к поверхности в данной точке.

ЗАДАЧИ

131. В плоскости (yz) дана неподвижная парабола $y^2 = 2qz$, и по ней скользит вершина другой неизменной параболы, параметр которой равен p и которая перемещается так, что плоскость ее остается все время перпендикулярной к оси y, а ось ее параллельна оси z. Найти поверхность, описанную подвижной параболой.

132. Через точку $(5, 1, 2)$ провести прямую так, чтобы она пересекала поверхность $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ лишь в одной точке.

133. Найти прямые, проходящие через точку $(6, 2, 8)$ и лежащие целиком на поверхности $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$.

134. Доказать, что однополостный гиперболоид вращения может быть описан прямой, вращающейся около оси, не лежащей с ней в одной плоскости.

135. К однополостному гиперболоиду $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ провести касательные плоскости через точки пересечения гиперболоида и прямой:

$$1)\ \frac{x}{3} = \frac{y+9}{3} = \frac{z}{1}\ ; \quad 2)\ \frac{x-9}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}\ ; \quad 3)\ \frac{x}{6} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}\ .$$

136. Дан гиперболический параболоид $x^2 - \frac{y^2}{4} = z$ и одна из его касательных плоскостей: $10x - 2y - z - 21 = 0$. Найти уравнения каждой из тех двух прямых, по которым они пересекаются.

137. Определить вид поверхности, пользуясь приведением левой части ее уравнения к сумме квадратов методом Лагранжа:

1) $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$;

2) $xy + xz + yz + 2x + 2y - 2z = 0$.

---

138. Найти геометрическое место касательных к поверхности $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$, проведенных из точки $(5, 1, 0)$.

139. На параболоиде $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ найти прямолинейные образующие, параллельные плоскости $3x + 2y - 4z = 0$.

140. Доказать, что прямолинейные образующие однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ проектируются на координатные плоскости в касательные к соответствующим главным сечениям.

141. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ для того, чтобы она касалась: 1) центральной поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$; 2) параболоида $\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = z$.

142. Прямая $x = 1 + 2t,\ y = -3 + 3t,\ z = t$ вращается вокруг оси Oz. Составить уравнение поверхности вращения.

143. Определить вид поверхности, пользуясь приведением левой части ее уравнения к сумме квадратов методом Лагранжа:
1) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y - 10z = 0$;
2) $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$;
3) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + x + y - z = 0$;
4) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$.

9 Кривые и поверхности второго порядка, заданные общими уравнениями

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \ .$$

Если кривая обладает центром симметрии, то его координаты определяются из уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} &= 0 \ . \end{cases}$$

Диаметр линии второго порядка, сопряженный хордам, параллельным вектору $\{l, m\}$, определяется уравнением:

$$l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + m(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0 \ .$$

В случае центральной кривой все диаметры проходят через центр.

Направляющие векторы $\{l_1, m_1\}$ и $\{l_2, m_2\}$ двух *сопряженных* относительно линии второго порядка направлений удовлетворяют условию

$$a_{11}l_1l_2 + a_{12}(l_1m_2 + l_2m_1) + a_{22}m_1m_2 = 0 \ .$$

Направление, определяемое вектором $\{l, m\}$, называется *асимптотическим*, если оно сопряжено самому себе, то есть

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0 \ .$$

Асимптоты гиперболы проходят через ее центр; их направляющие вектора имеют асимптотические направления. Кроме того, асимптоты можно определить как диаметры, сопряженные асимптотическим направлениям. Уравнения асимптот можно записать в виде:

$$l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + m(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0 \ ,$$

где вектор $\{l, m\}$ имеет асимптотическое направление.

Касательная к кривой второго порядка в ее точке $M_0(x_0, y_0)$ определяется уравнением

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0 \ .$$

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \ .$$

Если поверхность обладает центром симметрии, то его координаты определяются из уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} & = & 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} & = & 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} & = & 0 \ . \end{cases}$$

Если мы рассмотрим все хорды поверхности параллельные вектору $\{l, m, n\}$, то геометрическое место середин этих хорд есть плоскость — *диаметральная плоскость*, сопряженная данным хордам. Уравнение этой плоскости

$$l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + m(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) +$$

$$+n(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_{34}) = 0 \ .$$

В случае центральной поверхности все диаметральные плоскости проходят через центр.

Сопряженными диаметрами называются такие два диаметра, из которых каждый лежит в диаметральной плоскости, сопряженной другому. Координаты векторов $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$, имеющих взаимно сопряженные относительно поверхности направления, связаны соотношением

$$a_{11}l_1l_2 + a_{22}m_1m_2 + a_{33}n_1n_2 +$$

$$+a_{12}(l_1m_2+l_2m_1)+a_{13}(l_1n_2+l_2n_1)+a_{23}(m_1n_2+m_2n_1) = 0 \ .$$

Направление, определяемое вектором $\{l, m, n\}$, называется *асимптотическим*, если оно сопряжено самому себе, то есть

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn = 0 \ .$$

Если провести прямые асимптотического направления через центр поверхности, то их уравнения окажутся несовместными с уравнениями поверхности, то есть эти прямые не будут иметь ни одной общей точки с поверхностью. Такие прямые называются *асимптотами* поверхности. Совокупность всех асимптот поверхности составляет *асимптотический конус.*

Касательная плоскость к поверхности второго порядка в ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ определяется уравнением

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})y +$$

$$+ (a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})z + a_{14}x_0 + a_{24}y_0 + a_{34}z_0 + a_{44} = 0 \ .$$

Главными направлениями относительно данной поверхности называются направления хорд, перпендикулярных к сопряженным им диаметральным плоскостям; эти последние называются тогда *главными* *диаметральными плоскостями. Главными осями* поверхности называются диаметры, имеющие главные направления.

ЗАДАЧИ

144. Определить центр линии второго порядка

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 11 = 0 \ .$$

145. Найти центр поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6xz + 2x - 6y - 2z = 0 \ .$$

Какой вид примет уравнение поверхности после переноса начала координат в центр?

146. Дана линия второго порядка $4xy - 5y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$. Написать уравнение диаметра этой линии, проходящего через точку $(-4, 2)$.

147. Найти асимптоты гиперболы $x^2 - 3xy - 10y^2 + 6x - 8y = 0$.

148. В точках пересечения кривой $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$ с осью абсцисс провести касательные к этой кривой.

149. К кривой $x^2+xy+y^2+2x+3y-3 = 0$ провести касательные, параллельные прямой $3x + 3y - 5 = 0$.

150. Найти уравнение диаметра поверхности

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0 \ ,$$

сопряженного плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

---

151. Определить центр линии второго порядка $4x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 5y + 6 = 0$.

152. Найти центр поверхности

$$4xy + 4xz - 4x - 4z - 1 = 0 \ .$$

Какой вид примет уравнение поверхности после переноса начала координат в центр?

153. Найти диаметральную плоскость поверхности

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz - 2xz - 4x - 1 = 0 \ ,$$

параллельную плоскости $x + y + z = 0$.

154. Найти асимптоты гиперболы $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y - 14 = 0$.

155. Дана линия второго порядка $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$. Написать уравнения касательных к этой линии, параллельных оси Oy.

156. Составить уравнение диаметра поверхности

$$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz + 8y - 4z = 3 = 0 \ ,$$

параллельного оси Oy.

157. Найти диаметральную плоскость поверхности

$$2x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 2xy + 6xz + 12yz + 8x + 14y + 18z = 0 \ ,$$

сопряженную хордам, параллельным вектору $\{3, 2, -5\}$.

10 Евклидова классификация кривых и поверхностей второго порядка

Пусть задано общее уравнение линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \ .$$

Следующие выражения:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} \ , \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \ , \quad K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \ ,$$

являются *инвариантами* по отношению к преобразованию одной прямоугольной системы координат в другую прямоугольную.

Следующее выражение, называемое *семиинвариантом*, является инвариантом поворота прямоугольной системы координат:

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \ .$$

Уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

называется *характеристическим*. Его корни λ_1 и λ_2 всегда действительны.

Линии второго порядка можно разбить на три группы.

1. К первой группе отнесем линии, имеющие единственный центр симметрии: эллипс, мнимый эллипс, гипербола, две пересекающиеся прямые, две мнимые пересекающиеся прямые.

   Необходимое и достаточное условие того, что линия второго порядка имеет единственный центр симметрии: $I_2 \neq 0$.

   При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение линии первой группы может быть приведено к виду:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0 \ .$$

2. Ко второй группе отнесем линии, не имеющие центра симметрии, то есть одну параболу.

   Необходимое и достаточное условие того, что линия второго порядка является параболой: $I_2 = 0, \ K_3 \neq 0$.

   При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение линии второй группы может быть приведено к виду:

$$I_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\ Y = 0 \ .$$

3. К третьей группе отнесем линии, имеющие прямую центров симметрии: две параллельные прямые, две мнимые параллельные прямые, две совпадающие прямые.

   Необходимое и достаточное условие того, что линия второго порядка имеет прямую центров симметрии: $I_2 = 0,\ K_3 = 0$.

   При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение линии третьей группы может быть приведено к виду:

$$I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0 \ .$$

Пусть задано общее уравнение поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$

$$+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \ .$$

Следующие выражения:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \ , \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \ ,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \ , \quad K_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \ ,$$

являются *инвариантами* по отношению к преобразованию одной прямоугольной системы координат в другую прямоугольную.

Следующие два выражения, называемые *семиинвариантами*, являются инвариантами поворота прямоугольной системы координат:

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \ ,$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} .$$

Уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

называется *характеристическим.* Его корни λ_1, λ_2 и λ_3 всегда действительны.

Поверхности второго порядка можно разбить на пять групп.

1. К первой группе отнесем поверхности, имеющие единственный центр симметрии: эллипсоид, мнимый эллипсоид, мнимый конус, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, конус.

   Необходимое и достаточное условие того, что линия второго порядка имеет единственный центр симметрии: $I_3 \neq 0$.

   При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение поверхности первой группы может быть приведено к виду:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{K_4}{I_3} = 0 \ .$$

2. Ко второй группе отнесем поверхности, не имеющие центра симметрии: эллиптический параболоид и гиперболический параболоид.

   Необходимое и достаточное условие того, что поверхность второго порядка является параболоидом: $I_3 = 0, \ K_4 \neq 0$.

   При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение поверхности второй группы может быть приведено к виду:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}} \ Z = 0 \ .$$

3. К третьей группе отнесем поверхности, имеющие прямую центров симметрии: эллиптический цилиндр, мнимый эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, две пересекающиеся плоскости, две мнимые пересекающиеся плоскости.

   Необходимое и достаточное условие того, что поверхность второго порядка имеет прямую центров симметрии: $I_3 = 0,\ K_4 = 0,\ I_2 \neq 0$.

   При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение поверхности третьей группы может быть приведено к виду:
$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0\ .$$

4. К четвертой группе отнесем параболический цилиндр.

   Необходимое и достаточное условие того, что поверхность второго порядка является параболическим цилиндром: $I_3 = 0,\ K_4 = 0,\ I_2 = 0,\ K_3 \neq 0$.

   При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение поверхности четвертой группы может быть приведено к виду:
$$\lambda_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\ Y = 0\ .$$

5. К пятой группе отнесем поверхности, имеющие плоскость центров симметрии: две параллельные плоскости, две мнимые параллельные плоскости, две совпадающие плоскости.

   Необходимое и достаточное условие того, что поверхность второго порядка имеет плоскость центров симметрии: $I_3 = 0,\ K_4 = 0,\ I_2 = 0,\ K_3 = 0$.

   При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение поверхности третьей группы может быть приведено к виду:

$$I_1X^2+\frac{K_2}{I_1}=0\ .$$

ЗАДАЧИ

Определить форму, размеры и расположение линий второго порядка, заданных следующими уравнениями:

158. $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$.

159. $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.

160. $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$.

Определить каноническое уравнение линий второго порядка, заданных следующими уравнениями:

161. $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$.

162. $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$.

163. $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$.

164. Определить форму, размеры и расположение поверхности второго порядка

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0\ .$$

Определить каноническое уравнение поверхностей второго порядка, заданных следующими уравнениями:

165. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0$.

166. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$.

Определить форму, размеры и расположение линий второго порядка, заданных следующими уравнениями:

167. $9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$.

168. $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

169. $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$.

Определить каноническое уравнение линий второго порядка, заданных следующими уравнениями:

170. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.

171. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.

172. $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$.

173. Определить форму, размеры и расположение поверхности второго порядка

$$2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y + 8z - 1 = 0 \ .$$

Определить каноническое уравнение поверхностей второго порядка, заданных следующими уравнениями:

174. $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 6yz + 4x - 6y + 2z - 5 = 0$.

175. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

11 Проективная прямая и плоскость

Проективной прямой называется множество, состоящее из точек обыкновенной прямой и еще одного элемента, называемого *несобственной* или *бесконечно удаленной точкой* этой прямой. Все прочие точки проективной прямой называются *собственными* точками этой прямой.

Однородными координатами собственной точки M проективной прямой называется любая пара чисел $(x^1 : x^2)$, таких, что $x^2 \neq 0$ и отношение $\frac{x^1}{x^2} = x$, где x — декартова координата точки M. Если x — декартова координата собственной точки проективной прямой, то ее однородные координаты будут $(kx : k)$, где k — любое число, не равное нулю, в частности $(x : 1)$. Однородными координатами несобственной точки, по определению, является любая пара чисел $(k : 0)$, где $k \neq 0$, в частности $(1 : 0)$. Из определения однородных координат следует, что координаты точки $M(x^1 : x^2)$ определяются с точностью до общего множителя.

Система *проективных координат* на проективной прямой определяется тремя точками этой прямой: O_1, O_2 и E. Точки O_1 и O_2 называются базисными, а точка E единичной.

Если однородные координаты точек O_1, O_2 и E суть соответственно: $(a_1^1 : a_1^2)$, $(a_2^1 : a_2^2)$ и $(b^1 : b^2)$, а точка M имеет однородные координаты $(x^1 : x^2)$, то ее проективные координаты $(y^1 : y^2)$ определяются из следующих соотношений:

$$\begin{cases} x^1 &= a_1^1\rho^1 y^1 + a_2^1\rho^2 y^2 \\ x^2 &= a_1^2\rho^1 y^1 + a_2^2\rho^2 y^2 \end{cases},$$

где числа ρ^1 и ρ^2 определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1^1\rho^1 + a_2^1\rho^2 &= b^1 \\ a_1^2\rho^1 + a_2^2\rho^2 &= b^2 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что проективные координаты точек O_1, O_2 и E будут: $(1 : 0)$, $(0 : 1)$ и $(1 : 1)$.

Однородные координаты есть частный случай проективных координат, когда точка O_1 — несобственная точка проективной прямой, O_2 — начало декартовой системы координат, E — единичная точка этой декартовой системы.

Проективная плоскость. Присоединим к множеству точек каждой проективной прямой обыкновенной (евклидовой) плоскости новый элемент, который будем называть несобственной или бесконечно удаленной точкой этой прямой. Если две прямые пересекаются, то будем присоединять к ним различные несобственные точки. Ко всем параллельным между собой прямым мы будем присоединять одну и ту же несобственную точку.

Множество всех точек обыкновенной (евклидовой) плоскости, пополненное указанным образом множеством несобственных точек, называется проективной плоскостью. Точки евклидовой плоскости мы будем называть собственными точками той проективной плоскости, которая получается из данной евклидовой плоскости присоединением несобственных элементов.

Прямые евклидовой плоскости, пополненные несобственными точками, мы будем называть собственными прямыми той проективной плоскости, которая получается из данной евклидовой плоскости присоединением несобственных элементов.

Множество всех несобственных точек проективной плоскости называется *несобственной* или *бесконечно удаленной прямой.*

Однородными координатами собственной точки M проективной плоскости, которая в общей декартовой системе координат Oxy имеет координаты (x, y), называется тройка чисел $(x : y : 1)$, а также любая тройка чисел $(x^1 : x^2 : x^3)$ им пропорциональная. Таким образом, $\frac{x^1}{x^3} = x$ и $\frac{x^2}{x^3} = y$.

Однородными координатами несобственной точки, присоединенной к данному пучку параллельных прямых, называются три числа $(x^1 : x^2 : 0)$, где $\{x^1, x^2\}$ — координаты любого ненулевого вектора, параллельного прямым этого пучка. Из определения однородных координат следует, что координаты точки $M(x^1 : x^2 : x^3)$ определяются с точностью до общего множителя.

Всякая прямая на проективной плоскости в однородных координатах определяется линейным однородным уравнением

$$a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$$

и обратно. В частности, уравнение несобственной прямой будет $x^3 = 0$, а уравнения $x^1 = 0$ и $x^2 = 0$ суть соответственно уравнения осей Oy и Ox.

Система *проективных координат* на проективной плоскости определяется четырьмя точками этой: O_1, O_2, O_3 и E, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Точки O_1, O_2 и O_3 называются базисными, а точка E единичной. Треугольник $O_1O_2O_3$ называется базисным или координатным.

Если однородные координаты точек O_1, O_2, O_3 и E суть соответственно: $O_1(a_1^1 : a_1^2 : a_1^3)$, $O_2(a_2^1 : a_2^2 : a_2^3)$, $O_3(a_3^1 : a_3^2 : a_3^3)$ и $E(b^1 : b^2 : b^3)$, а точка M имеет однородные координаты $(x^1 : x^2 : x^3)$, то ее проективные координаты $(y^1 : y^2 : y^3)$ определяются из следующих соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^1 & = & a_1^1\rho^1 y^1 + a_2^1\rho^2 y^2 + a_3^1\rho^3 y^3 \\ x^2 & = & a_1^2\rho^1 y^1 + a_2^2\rho^2 y^2 + a_3^2\rho^3 y^3 \\ x^3 & = & a_1^3\rho^1 y^1 + a_2^3\rho^2 y^2 + a_3^3\rho^3 y^3 \ , \end{array} \right.$$

где числа ρ^1, ρ^2 и ρ^3 определяются из системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1\rho^1 + a_2^1\rho^2 + a_3^1\rho^3 & = & b^1 \\ a_1^2\rho^1 + a_2^2\rho^2 + a_3^2\rho^3 & = & b^2 \\ a_1^3\rho^1 + a_2^3\rho^2 + a_3^3\rho^3 & = & b^3 \ . \end{array} \right.$$

Отсюда следует, что проективные координаты точек O_1, O_2, O_3 и E будут: $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и $(1 : 1 : 1)$. Однородные координаты есть частный случай проективных координат, когда точки O_1 и O_2 — несобственные точки осей Ox и Oy, O_3 — начало координат, E — единичная точка общей декартовой системы координат Oxy.

Если

$$\begin{array}{lcl} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 & = & 0 \ , \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 & = & 0 \ , \\ a_1^3 x^1 + a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3 & = & 0 \end{array}$$

суть соответственно уравнения сторон O_2O_3, O_3O_1 и O_1O_2 базисного треугольника, а $(b^1 : b^2 : b^3)$ — однородные координаты единичной точки E, то проективные координаты $(y^1 : y^2 : y^3)$ произвольной точки M выражаются через ее однородные координаты $(x^1 : x^2 : x^3)$ соотношениями:

$$y^1 = \frac{a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3}{a_1^1 b^1 + a_2^1 b^2 + a_3^1 b^3} \ , \qquad y^2 = \frac{a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3}{a_1^2 b^1 + a_2^2 b^2 + a_3^2 b^3} \ ,$$

$$y^3 = \frac{a_1^3 x^1 + a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3}{a_1^3 b^1 + a_2^3 b^2 + a_3^3 b^3} \ .$$

Проективная прямая на проективной плоскости определяется линейным однородным уравнением

$$u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 = 0 \ ,$$

называемым уравнением этой прямой.

Числа $(u_1 : u_2 : u_3)$ называются координатами прямой или тангенциальными координатами.

В случае, если точка M лежит на прямой l, то говорят, что прямая и точка *инцидентны*.

Если фиксировать $(x^1 : x^2 : x^3)$, то соотношению

$$u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 = 0$$

удовлетворяют координаты всех прямых, проходящих через точку $(x^1 : x^2 : x^3)$. В этом случае это уравнение называется уравнением точки.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(a^1 : a^2 : a^3)$ и $B(b^1 : b^2 : b^3)$, будет

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Уравнение точки пересечения двух прямых $L(l_1 : l_2 : l_3)$ и $M(m_1 : m_2 : m_3)$, будет

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарность трех точек $A(a^1 : a^2 : a^3)$, $B(b^1 : b^2 : b^3)$, $C(c^1 : c^2 : c^3)$ таково:

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Необходимое и достаточное условие того, что три прямые $L(l_1 : l_2 : l_3)$, $M(m_1 : m_2 : m_3)$, $N(n_1 : n_2 : n_3)$ имеют общую точку, является равенство

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки $A(a^1 : a^2 : a^3)$ и $B(b^1 : b^2 : b^3)$, записываются так:

$$\begin{cases} x^1 &= \alpha a^1 + \beta b^1 \\ x^2 &= \alpha a^2 + \beta b^2 \\ x^3 &= \alpha a^3 + \beta b^3 \ , \end{cases}$$

где α и β принимают все действительные значения, не равные нулю одновременно.

Параметрические уравнения точки пересечения двух прямых $L(l_1 : l_2 : l_3)$ и $M(m_1 : m_2 : m_3)$ (или координаты любой прямой пучка, определяемого этими прямыми), будут:

$$\begin{cases} u_1 &= \alpha l_1 + \beta m_1 \\ u_2 &= \alpha l_2 + \beta m_2 \\ u_3 &= \alpha l_3 + \beta m_3 \ , \end{cases}$$

где α и β принимают все действительные значения, не равные нулю одновременно.

ЗАДАЧИ

176. На проективной прямой заданы точки: $O_1(1:0)$, $O_2(0:1)$ и $E(1:1)$. Построить точки $A(2:3)$, $B(-2:3)$, $C(1:-1)$, $D(1:4)$, $K(-4:1)$.

177. Выбрав на прямой произвольно две различные собственные фундаментальные точки $O_1(1 : 0)$ и $O_2(0 : 1)$ и считая фундаментальную точку $E(1 : 1)$ несобственной, построить точки $A(1 : 2)$, $B(-3 : 2)$, $C(-1 : 1)$, $D(1 : 4)$, $F(3 : -4)$, $G(4 : -1)$.

178. Сторонами O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 базисного треугольника проективной системы координат служат прямые

$$x - 4 = 0, \qquad y - 3 = 0, \qquad 3x + 4y - 12 = 0,$$

а единичной точкой — точка $E(3, 2)$. Найти:

1) проективные координаты точки M, декартовы координаты которой $(1, 1)$;

2) декартовы координаты точки N, проективные координаты которой $(4 : 3 : -6)$;

3) проективные координаты несобственной точки оси абсцисс;

4) однородные координаты точки P, проективные координаты которой $(5 : 5 : -7)$.

179. Найти координаты и уравнение прямой, проходящей через точки $(1 : 2 : -1)$, $(3 : 5 : -2)$.

180. Найти координаты и уравнение точки пересечения прямых $(1 : -1 : 2)$, $(2 : 5 : 4)$.

---

181. Выбрав на прямой произвольно две собственные фундаментальные точки $O_1(1 : 0)$ и $E(1 : 1)$ и считая точку $O_2(0 : 1)$ несобственной, построить точки $A(1 : 2)$, $B(-3 : 2)$, $C(-1 : 1)$, $D(2 : 1)$, $F(2 : -1)$.

182. Построить фундаментальную точку $E(1 : 1)$ прямой, если на ней дана две собственные фундаментальные точки O_1 и O_2 и собственная точка $(2 : 1)$.

183. Сторонами O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 базисного треугольника проективной системы координат служат прямые $y = 2$, ось Oy и ось Ox, а единичной точкой — точка $E(1, 1)$. Найти в этой системе координат центр пучка прямых, параллельных оси Oy.

184. Доказать, что точки $(5:1:3)$, $(-2:4:-3)$, $(8:6:3)$ лежат на одной прямой. Составить уравнение этой прямой.

185. Доказать, что три прямые $(1:1:0)$, $(2:-1:3)$, $(5:2:3)$ принадлежат одному пучку. Найти координаты и уравнение центра этого пучка.

186. Найти координаты точки встречи прямой, проходящей через точки $A(3:1:5)$ и $B(-2:0:7)$, с прямой $7x^1-2x^2+4x^3=0$.

187. Составить уравнения и найти координаты прямых, соединяющих точку $A(3:-1:2)$ с точками O_1, O_2, O_3 и E.

12 Проективные преобразования

Ангармоническое отношение $(ABCD)$ упорядоченной четверки точек

$$A(a^1:a^2:a^3)\ , \quad B(b^1:b^2:b^3)\ ,$$

$$C(\alpha a^1+\beta b^1:\alpha a^2+\beta b^2:\alpha a^3+\beta a^3)\ ,$$

$$D(\lambda a^1+\mu b^1:\lambda a^2+\mu b^2:\lambda a^3+\mu b^3)\ ,$$

лежащих на одной проективной прямой, определяется следующим образом:

$$(ABCD)=\frac{\beta\lambda}{\alpha\mu}\ .$$

Если $(ABCD)=-1$, то четверка точек A,B,C,D называется *гармонической*.

Если A,B,C,D — гармоническая четверка точек, точки A,B,C собственные, причем точка C — середина отрезка AB, то D — несобственная точка.

Преобразование проективной системы координат $O_1O_2O_3E$ в систему $O_1'O_2'O_3'E'$, где базисные точки новой системы координат заданы относительно старой системы своими координатами $O_1'(b^1_{1'}:b^2_{1'}:b^3_{1'})$,

$O'_2(b^1_{2'}:b^2_{2'}:b^3_{2'})$, $O'_3(b^1_{3'}:b^2_{3'}:b^3_{3'})$, $E'(c^1:c^2:c^3)$, определяется соотношениями:

$$\begin{cases} x^1 &= b^1_{1'}\rho^{1'}x^{1'} + b^1_{2'}\rho^{2'}x^{2'} + b^1_{3'}\rho^{3'}x^{3'} \\ x^2 &= b^2_{1'}\rho^{1'}x^{1'} + b^2_{2'}\rho^{2'}x^{2'} + b^2_{3'}\rho^{3'}x^{3'} \\ x^3 &= b^3_{1'}\rho^{1'}x^{1'} + b^3_{2'}\rho^{2'}x^{2'} + b^3_{3'}\rho^{3'}x^{3'} \ , \end{cases}$$

где $\rho^{1'}$, $\rho^{2'}$, $\rho^{3'}$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} b^1_{1'}\rho^{1'} + b^1_{2'}\rho^{2'} + b^1_{3'}\rho^{3'} &= c^1 \\ b^2_{1'}\rho^{1'} + b^2_{2'}\rho^{2'} + b^2_{3'}\rho^{3'} &= c^2 \\ b^3_{1'}\rho^{1'} + b^3_{2'}\rho^{2'} + b^3_{3'}\rho^{3'} &= c^3 \ . \end{cases}$$

Проективным преобразованием множества точек проективной плоскости называется такое взаимно-однозначное преобразование, при котором любые три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также лежащие на одной прямой.

При проективном преобразовании ангармоническое отношение четырех точек, лежащих на одной прямой, не изменяется.

Проективное преобразование определяется соотношениями:

$$\begin{cases} x^{1'} &= a^{1'}_1x^1 + a^{1'}_2x^2 + a^{1'}_3x^3 \\ x^{2'} &= a^{2'}_1x^1 + a^{2'}_2x^2 + a^{2'}_3x^3 \\ x^{3'} &= a^{3'}_1x^1 + a^{3'}_2x^2 + a^{3'}_3x^3 \ , \end{cases} \qquad \text{где} \quad \begin{vmatrix} a^{1'}_1 & a^{1'}_2 & a^{1'}_3 \\ a^{2'}_1 & a^{2'}_2 & a^{2'}_3 \\ a^{3'}_1 & a^{3'}_2 & a^{3'}_3 \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Формулы проективного преобразования собственных точек проективной плоскости в аффинных координатах принимают вид:

$$x' = \frac{a^{1'}_1x + a^{1'}_2y + a^{1'}_3}{a^{3'}_1x + a^{3'}_2y + a^{3'}_3} \ , \qquad y' = \frac{a^{2'}_1x + a^{2'}_2y + a^{2'}_3}{a^{3'}_1x + a^{3'}_2y + a^{3'}_3} \ .$$

Пусть заданы четыре пары соответственных точек:

$$A(a^1:a^2:a^3) \mapsto A'(a^{1'}:a^{2'}:a^{3'}) \ ,$$

$$B(b^1:b^2:b^3) \mapsto B'(b^{1'}:b^{2'}:b^{3'}) \ ,$$

$$C(c^1:c^2:c^3) \mapsto C'(c^{1'}:c^{2'}:c^{3'}) \ ,$$

$$D(d^1 : d^2 : d^3) \mapsto D'(d^{1'} : d^{2'} : d^{3'}) \ .$$

Пусть $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$ — уравнения прямых BC, CA, AB, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$; тогда уравнения

$$\begin{cases} u' &= pu \\ v' &= qv \\ w' &= rw \end{cases}$$

определяют проективное преобразование, переводящее точки A, B, C соответственно в точки A', B', C'. Подставляя в левые части этих уравнений координаты точки D', а в правые — координаты D, найдем p, q, r.

Общее уравнение линии второго порядка в проективных координатах имеет вид:

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0 \ .$$

Преобразованием проективной системы координат это уравнение может быть приведено к одному из следующих видов:

1. $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$ — мнимая линия;
2. $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ — действительная линия;
3. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ — две действительные пересекающиеся прямые;
4. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ — две мнимые пересекающиеся прямые;
5. $(x^1)^2 = 0$ — две совпадающие прямые.

ЗАДАЧИ

188. Даны точки $A(1 : 1 : 2)$, $B(3 : -1 : 2)$, $C(11 : -1 : 10)$, $D(3 : 7 : 10)$. Доказать, что они лежат на одной прямой. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$.

189. Даны точки $A(1:2:3)$, $B(-3:2:4)$, $C(-2:4:7)$. Доказать, что они лежат на одной прямой, и найти к ним четвертую гармоническую $(ABCD)=-1$.

190. Найти четвертую гармоническую к двум сторонам угла и его биссектрисе.

191. Относительно некоторой системы проективных координат O_1, O_2, O_3, E даны вершины базисного треугольника и единичная точка другой системы: $O_1'(4:1:1)$, $O_2'(4:4:1)$, $O_3'(0:4:1)$, $E'(2:1:1)$. Найти формулы, выражающие координаты произвольной точки относительно первой системы через ее координаты во второй системе.

192. В какие прямые переходят фундаментальные прямые при проективном преобразовании

$$(x^{1'}:x^{2'}:x^{3'})=(x^1+2x^2-4x^3:2x^1-3x^2+5x^3:2x^1-2x^2+x^3)\ .$$

193. В какие прямые переходят прямые $a(1:-2:4)$ и $b(2:5:-1)$ при проективном преобразовании

$$(u_{1'}:u_{2'}:u_{3'})=(3u_1-2u_2:2u_1-u_3:u_2+u_3)\ .$$

194. Определит проективный класс кривой, пользуясь приведением квадратичной формы к сумме квадратов методом Лагранжа

$$2(x^1)^2+3x^1x^2-5x^1x^3+4(x^2)^2+2x^2x^3-(x^3)^2=0\ .$$

195. Найти проективное преобразование, переводящее одну линию в другую:

1) окружность $x^2+y^2=1$ в гиперболу $x^2-y^2=1$;

2) гиперболу $x^2-y^2=1$ в параболу $y=x^2$.

---

196. Доказать, что прямые $a(0:1:-1)$, $b(1:2:-1)$, $c(1:1:0)$, $d(4:9:-5)$ принадлежат одному пучку, и найти ангармоническое отношение $(abcd)$.

197. Даны прямые $a(1 : 2 : 1)$, $b(3 : -1 : 2)$, $c(5 : 3 : 4)$. Доказать, что они принадлежат одному пучку, и найти к ним четвертую гармоническую $(abcd) = -1$.

198. Найти четвертую гармоническую к двум сторонам треугольника и медиане, проведенной к третьей стороне.

199. Найти связь между старыми и новыми координатами прямой, если за новые фундаментальные точки принимаются $O'_1(2 : 1 : 0)$, $O'_2(3 : 0 : 1)$, $O'_3(1 : 2 : 4)$, $E'(1 : -1 : 4)$.

200. Найти связь между новыми и старыми проективными координатами точки, если за новые фундаментальные точки O'_1, O'_2, O'_3 и E принимаются соответственно точки O_2, O_3, O_1 и E.

201. В какие точки переходят точки $A(1 : -2 : 3)$ и $B(2 : -1 : 4)$ при проективном преобразовании

$$(u_{1'} : u_{2'} : u_{3'}) = (2u_1 - u_2 + u_3 : u_1 - 4u_2 + u_3 : 3u_1 + 2u_2 - 3u_3)\ .$$

202. Определить проективный класс кривой, пользуясь приведением квадратичной формы к сумме квадратов методом Лагранжа

$$x^1x^2 + x^2x^3 + x^3x^1 = 0\ .$$

203. Найти проективное преобразование, переводящее одну линию в другую:

1) окружность $x^2 + y^2 = 1$ в параболу $y = x^2$;

2) пару пересекающихся прямых $x^2 - y^2 = 0$ в пару параллельных прямых $x^2 - 1 = 0$.

ОТВЕТЫ

1. 1) $-2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$; 2) $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$; 3) $\frac{3}{4}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. **4.** $\{6,-3,-3\}$, $\{-12,-26,-8\}$, $\{0,0,0\}$. **5.** $18\sqrt{2}$. **6.** 1) -7; 2) $\{-46,29,-12\}$; 3) $\{-7,7,7\}$. **7.** $\mathbf{b}_1 = \frac{[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]}{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)}$, $\mathbf{b}_2 = \frac{[\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1]}{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)}$, $\mathbf{b}_3 = \frac{[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]}{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)}$. **8.** 37,5. **9.** 1) 25; 2) 0. **14.** Равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполнено, по крайней мере, одно из двух условий: 1) вектор $\mathbf{b}$ перпендикулярен к векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$; 2) векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны. **15.** $\mathbf{x} = \frac{\alpha[\mathbf{b},\mathbf{c}]+\beta[\mathbf{c},\mathbf{a}]+\gamma[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$. **16.** $\mathbf{b}_1 = \{-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-1\}$, $\mathbf{b}_2 = \{\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\}$, $\mathbf{b}_3 = \{\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\}$. **17.** 1) $x+2y+z-9=0$; 2) $x+y-2=0$. **18.** $x-2y=0$, $2x+z=0$, $4y+z=0$. **19.** $10x+9y+5z-74=0$. **20.** $x=2-5u+4v$, $y=3+6u-2v$, $z=-5+4u$. **21.** 1) $x=-13$, $y=13$, $z=-9$; 2) $u=-\frac{1}{5}$, $v=\frac{2}{5}$. **22.** 1) $x-4y-z+16=0$; 2) $x+5y-z+5=0$. **23.** Точки A и B лежат в данной плоскости, точки D и E — по одну сторону от плоскости, а точки C и F — по другую сторону от нее. **24.** $6x+9y-22z=0$. **25.** $5y+13z-60=0$. **26.** 1) $10x-7z=0$; 2) $6y-7=0$; 3) $39x-29y-7z=0$. **27.** $5x-6y-7z+41=0$. **28.** $27x+11y+z-65=0$. **29.** $13x+y-20=0$. **30.** 1) $x=-6$, $y=-4$, $z=-3$; 2) $u+v-1=0$, $u=0$, $v=0$; 3) $39u+9v-1=0$. **31.** $2x+3y+4z-1=0$, $x+3y+9=0$, $z-1=0$. **32.** $20x+19y-5z+41=0$. **33.** 1) Три плоскости пересекаются в точке $(3,5,7)$; 2) три плоскости попарно параллельны; 3) три плоскости проходят через одну прямую; 4) плоскости попарно пересекаются и линия пересечения каждых двух плоскостей параллельна третьей плоскости; 5) первая и третья плоскости параллельны, вторая плоскость их пересекает. **34.** 1) $x=2+2t$, $y=3+3t$, $z=1+8t$; 2) $x=7-2t$, $y=-1$, $z=2+t$; 3) $x=1$, $y=t$, $z=1$. **35.** 1) $x=-2t$, $y=7t$, $z=4t$; 2) $x=t$, $y=-8-4t$, $z=-3-3t$. **36.** Точки A, B и D лежат на прямой, точки C и E нет. **37.** $x-3y+5z=0$. **38.** 1) пересекаются в точке $(-3,5,-5)$

и лежат в плоскости $9x + 10y - 7z - 58 = 0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $5x - 22y + 19z + 9 = 0$; 4) совпадают. **39.** 1) Прямая и плоскость пересекаются в точке $(0, 0, -2)$; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости; 4) прямая и плоскость пересекаются в точке $(2, 3, 1)$. **40.** $(6, -2, 6)$. **41.** $2y - z + 2 = 0$, $x - 7y + 3z - 17 = 0$. **42.** 1) лежат на одной прямой; 2) образуют треугольник; 3) лежат на одной прямой. **43.** 1) $x = 3 + 4t$, $y = 5 - 3t$, $z = 1$; 2) $x + 2y + 10 = 0$, $z - 4 = 0$. **44.** $18x - 11y + 3z - 47 = 0$. **45.** $x - 3y - 3z + 11 = 0$. **46.** 1) пересекаются в точке $(-3, 0, 4)$ и лежат в плоскости $3x + 4y + 5z - 11 = 0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $4x + 3y = 0$; 4) совпадают. **47.** 1) совпадают; 2) параллельны и лежат в плоскости $12x - 3y + 8z = 0$; 3) скрещиваются; 4) пересекаются в точке $(10, -1, 0)$ и лежат в плоскости $x - 7y + 3z - 17 = 0$. **48.** 1) Прямая и плоскость пересекаются в точке $(2, 4, 6)$; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости. **49.** $x - 9y + 5z + 20 = 0$, $x - 2y - 5z + 9 = 0$. **50.** $3x + 2y + 4z - 38 = 0$. **51.** $7x + y - 3z = 0$. **52.** $x + 20y + 7z = 0$ и $x - z = 0$. **53.** $3x + 5y - 4z + 25 = 0$. **54.** 1) $\frac{16}{3}$; 2) 2; 3) $\frac{1}{3}$. **55.** $4x - 4y + 4z - 7 = 0$, $10x + 6y - 4z - 5 = 0$. **56.** (0,0,3). **57.** $x - z + 4 = 0$, $y = 0$. **58.** $\cos\varphi = \pm\frac{98}{195}$. **59.** $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-7}$. **60.** $4x + 5y - 2z = 0$. **61.** $y - 2z = 0$, $x = 3$. **62.** $\sqrt{14}$. **63.** 3. **64.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **65.** 1) $\pm\frac{20}{\sqrt{14}\,\sqrt{53}}$; 2) плоскости взаимно перпендикулярны. **66.** $2x + 6y - 4z - 56 = 0$. **67.** $x + 3y - 2z - 10 = 0$. **68.** $x + 20y + 7z - 12 = 0$, $x - z + 4 = 0$. **69.** $x + 3y = 0$ и $3x - y = 0$. **70.** $8x + 5y - 9z - 24 = 0$. **71.** $\cos\varphi = \pm\frac{72}{77}$. **72.** $\arcsin\frac{33}{\sqrt{46}\,\sqrt{62}}$. **73.** 1) $11x - 4y + 6 = 0$, $z = 0$; 2) $6x + 5y - 38 = 0$, $z = 0$. **74.** (7,1,0). **75.** (2,9,6). **76.** $x + y + z - 1 = 0$, $x - 1 = 0$. **77.** 1) $\sqrt{\frac{35}{6}}$; 2) $8\sqrt{\frac{3}{26}}$. **78.** 1) $\frac{18}{\sqrt{110}}$; 2) 0 (прямые пересекаются). **79.** Базис образуют, например, векторы $(1, 0, 0, \ldots, 0, -1)$,

$(0,1,0,\dots,0,-1)$, …, $(0,0,0,\dots,1,-1)$. **80.** Размерность равна 3. Базис образуют, например, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$. **81.** Например, $x^1 - x^3 - x^4 = 0$, $x^2 + x^3 - x^4 = 0$. **82.** Базис суммы состоит, например, из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1$. Базис пересечения, например, из векторов $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = (1,2,2,1)$; $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 = (2,2,2,2)$. **83.** (-2,-5,-1,1,-1). **85.** $M(-2,1,0,3)$. **87.** $(5,2,-4,-3)$, $(0,1,1,7)$. **88.** Размерность равна 3. Базис образуют, например, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5$. **89.** Например, $x^1 - x^2 - 2x^3 = 0$, $x^1 - x^3 + 2x^4 = 0$, $2x^1 + x^2 - x^5 = 0$. **90.** Базис суммы состоит, например, из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2$. Базис пересечения, например, $\mathbf{b}_1 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$; $\mathbf{b}_3 = 5\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3$. **91.** Проекция вектора e_i на $\mathbf{L}_1$ параллельно $\mathbf{L}_2$ имеет i-ую координату $\frac{n-1}{n}$, а остальные — $\frac{-1}{n}$, проекция на $\mathbf{L}_2$ параллельно $\mathbf{L}_1$ имеет все координаты равными $\frac{1}{n}$. **92.** $(0,1,-1,-2,-3)$. **95.** 1) $\emptyset$, 2) точка $(2,-1,4,5)$. **96.** $x^1 - 3x^2 - 2x^3 + 3 = 0$, $3x^2 + 2x^3 - x^4 - 4 = 0$, $x^1 + x^2 - 3x^3 + x^4 = 0$. **97.** Например: $\mathbf{b}_1 = (2,-2,-1,0)$, $\mathbf{b}_2 = (1,1,0,-1)$. **98.** $\mathbf{y} = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 = (1,-1,-1,5)$, $\mathbf{z} = (3,0,-2,-1)$. **99.** $\frac{\pi}{3}$. **100.** $M_1(\frac{9}{7}, \frac{9}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{5}{7})$. **101.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **102.** $(-\frac{16}{15}, \frac{16}{15}, \frac{43}{15}, -\frac{42}{15})$. **103.** $\frac{\sqrt{1022}}{7}$. **104.** $x^1 = 1$, $x^2 = \lambda + 1$, $x^3 = \lambda + 1$, $x^4 = \lambda + 1$. **105.** Например: $6x^1 - 9x^2 - x^3 = 0$, $x^2 + x^4 = 0$. **106.** $\mathbf{y} = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = (3,1,-1,-2)$, $\mathbf{z} = (2,1,-1,4)$. **107.** $\frac{\pi}{6}$. **108.** $M_1(1, -\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2})$. **109.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **110.** $(1,-2,2,2)$. **111.** $\sqrt{15}$. **112.** 1) $\frac{\sqrt{465}}{6}$, 2) $\frac{\sqrt{670}}{10}$. **113.** $M'(10,6)$, $P(\frac{1}{2}, 2)$. **114.** 1) $2x - y - 12 = 0$, $x + y - 3 = 0$; 2) $x = 0$, $y = 0$; 3) $x - y = 0$. **115.** $2x - 2y - 3 = 0$, $4x - y = 0$. **116.** $\widetilde{x}' = -\widetilde{x}$, $\widetilde{y}' = 5\widetilde{y}$. **117.** $x' = 5x - 3y + 8$, $y' = -3x + 2y - 3$. **118.** 1) $x' = x + 8$, $y' = 4x - 5y + 14$; 2) $x' = -x + 2y - 8$, $y' = 4x - 3y + 24$. **120.** πab. **121.** Гипербола. **123.** $x' = x - y + 1$, $y' = x + y + 2$. **124.** $(2,1)$. **125.** $2x + y - 3 = 0$. **127.** Образует. Поворот плоскости вокруг начала координат на угол φ, соединенный с гомотетией

(r — коэффициент гомотетиии; если $r < 0$, то добавляется еще симметрия относительно начала координат). **130.** 1) Эллипс; 2) парабола. **131.** Эллиптический параболоид или гиперболический параболоид. **132.** Таких прямых можно провести бесчисленное множество; их геометрическое место есть конус $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} - (z-2)^2 = 0$. **133.** $\frac{x-6}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-8}{4}$ и $\frac{x-6}{9} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-8}{20}$. **135.** 1) $x - 3z = 0$ и $3x - 2y - 3z - 18 = 0$; прямая пересекает поверхность в двух действительных точках; 2) действительных касательных плоскостей провести нельзя; прямая не имеет действительных точек пресечения с поверхностью; 3) $x - 2y - 3z - 6 = 0$; прямая касается поверхности и через нее можно провести только одну касательную. **136.** $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-21}{6}$ и $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-21}{14}$. **137.** 1) Эллипсоид; 2) однополостный гиперболоид. **138.** Конус: $10(x-5)^2 + 20(x-5)(y-1) - 34(y-1)^2 - 55z^2 = 0$. **139.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. **141.** 1) $A^2a^2 + B^2b^2 \pm C^2c^2 = \pm D^2$; 2) $A^2p \pm B^2q = 2CD$. **142.** $x^2 + y^2 = 13z^2 - 14z + 10$. **143.** 1) Однополостный гиперболоид; 2) двуполостный гиперболоид; 3) гиперболический параболоид 3) параболический цилиндр. **144.** (1,1). **145.** $C(1,1,-1)$; $X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY - 2YZ + 6XZ - 1 = 0$. **146.** $2x + y + 6 = 0$. **147.** $7x - 35y + 22 = 0$, $7x + 14y + 20 = 0$. **148.** $x - 4y - 2 = 0$, $x + 4y - 3 = 0$. **149.** $x + y - 1 = 0$, $3x + 3y + 13 = 0$. **150.** $z = 1$; $2x - 3y = 0$. **151.** Прямая центров $4x + 2y - 5 = 0$. **152.** Прямая центров $x = 1$, $y = t$, $z = -t$, $4XY + 4XZ - 1 = 0$. **153.** $X + Y + Z = 0$. **154.** $6x - 2y + 19 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$. **155.** $7x + 1 = 0$. **156.** $3x + 1 = 0$, $3z - 2 = 0$. **157.** $7x + 17y + 19z + 19 = 0$. **158.** Эллипс $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$; центр $C(2,3)$, угловой коэффициент большей оси $-\frac{1}{2}$. **159.** Гипербола $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$; центр $C(1,1)$, угловой коэффициент действительной оси $\frac{2}{3}$. **160.** Пара действительных пересекающихся прямых $x - y - 1 = 0$, $x - 4y + 2 = 0$. **161.** Парабола, $X^2 = 2Y$. **162.** Эллипс $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{4} = 1$. **163.** Гипербола $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{25} = 1$.

164. Однополостный гиперболоид $\frac{X^2}{1/3}+\frac{Y^2}{1/6}-\frac{Z^2}{1/2}=1$, центр $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$; координаты единичных векторов новой системы $e_1'=\{\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$, $e_2'=\{\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\}$, $e_3'=\{\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. **165.** Параболический цилиндр $6X^2-2\sqrt{3}\,Y=0$. **166.** Конус вращения $X^2+Y^2-2Z^2=0$. **167.** Парабола $X^2=10Y$, вершина параболы имеет координаты $C(-1,2)$, вектор $\{\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\}$ имеет направление оси и направлен в сторону вогнутости. **168.** Парабола $X^2=4\sqrt{2}\,Y$, вершина $C(2,1)$, вектор $\{1,1\}$ параллелен оси и направлен в сторону вогнутости. **169.** Пара действительных параллельных прямых $2x-3y+1=0$, $2x-3y-2=0$. **170.** Эллипс $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{1}=1$. **171.** Гипербола $\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{9}=1$. **172.** Гипербола $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1$. **173.** Гиперболический параболоид $7X^2-2Y^2-\frac{8Z}{\sqrt{14}}=0$. Вершина $(-\frac{183}{784},-\frac{499}{784},\frac{509}{392})$. Координаты единичных векторов новой системы $e_1'=\{\frac{}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}}\}$, $e_2'=\{\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\}$, $e_3'=\{-\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\}$. **174.** Две параллельные плоскости $X^2=1$. **175.** Двуполостный гиперболоид $\frac{X^2}{4/5}+\frac{Y^2}{4/15}-\frac{Z^2}{4/25}=1$. **178.** 1) $M(3:2:-1)$; 2) $N(12,9)$; 3) $R(5:0:-3)$; 4) $P(1:1:0)$. **179.** $x^1-x^2-x^3=0$. **180.** $(2:0:-1)$, $2u_1-u_3=0$. **183.** $(0:1:-1)$. **184.** $15x^1-9x^2-22x^3=0$. **185.** $(1:-1:-1)$, $u_1-u_2-u_3=0$. **186.** $(120:14:-203)$. **187.** $2x^2+x^3=0$, $2x^1-3x^3=0$, $x^1+3x^2=0$, $3x^1+x^2-4x^3=0$; $(0:2:1)$, $(2:0:-3)$, $(1:3:0)$, $(3:1:-4)$. **188.** $(ABCD)=-9$. **189.** $D(4:0:-1)$. **190.** Биссектриса угла, смежного с данным. **191.** $x^1=8x^{1'}-4x^{2'}$, $x^2=2x^{1'}-4x^{2'}+4x^{3'}$, $x^3=2x^{1'}-x^{2'}+x^{3'}$. **192.** $O_1'O_2'(2:6:-7)$, $O_2'O_3'(7:6:-2)$, $O_3'O_1'(8:9:-13)$. **193.** $a'(7:-2:2)$, $b'(-4:5:4)$. **194.** Действительная нераспадающаяся линия. **195.** 1) $x'=\frac{1}{y}$; $y'=\frac{x}{y}$; 2) $x'=\frac{1}{x+y}$; $y'=\frac{x-y}{x+y}$. **196.** $(abcd)=-\frac{1}{4}$. **197.** $d(-1:5:0)$. **198.** Прямая, параллельная третьей стороне, проходящая через противоположную вершину треугольника. **199.** $u_{1'}=-11(2u_1+u_2)$, $u_{2'}=8(3u_1+u_3)$, $u_{3'}=3(u_1+2u_2+4u_3)$. **200.** $(x^{1'}:x^{2'}:x^{3'})=(x_2:x_3:x_1)$.

201. $A'(-10:1:4)$, $B'(-10:3:3)$. **202.** Действительная нераспадающаяся линия. **203.** 1) $x' = \frac{x}{y+1}$; $y' = \frac{1-y}{y+1}$; 2) $x' = \frac{x}{y}$; $y' = \frac{1}{y}$.

Список литературы

[1] Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. *Сборник задач по аналитической геометрии.* М. Наука. 1964.

[2] Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* М. Наука. 1967. 384 с.

[3] Цубербиллер О.Н. *Задачи и упражнения по аналитической геометрии.* М. Наука. 1964.

[4] Шурыгин В.В. *Векторная алгебра и ее применение в аналитической геометрии плоскости.* Учебное пособие к курсу аналитической геометрии. Казанск. ун-т. 2001. 50 с.

[5] Шурыгин В.В. *Векторная алгебра и ее применение в аналитической геометрии пространства.* Учебное пособие к курсу аналитической геометрии. Казанск. ун-т. 2002. 72 с.

Содержание