

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.В. Зубков, М.Х. Файзрахманов

Случайность по Мартин-Лефу:
упражнения и задачи

Учебно-методическое пособие

Казань – 2014

УДК 510.5

*Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
КФУ*

протокол №5 от 13.03.2014

Рецензент:

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики и математического
моделирования КФУ **А. Н. Фролов**

М.В. Зубков, М.Х. Файзрахманов

Случайность по Мартин-Лефу: упражнения и задачи. Учебно-методическое пособие / М.В. Зубков, М.Х. Файзрахманов; Казанский федеральный университет. – Казань, 2014. – 38 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов старших курсов Института математики и механики КФУ. Оно содержит в виде задач изложение дополнительного раздела теории алгоритмов — теории алгоритмической случайности. Данное пособие может быть использовано при чтении специальных курсов.

УДК 510.5

© М.В. Зубков, 2014

© М.Х. Файзрахманов, 2014

© Казанский университет, 2014

Содержание

Введение	4
1 Топологические и метрические пространства.	6
1.1 Топологические пространства.	6
1.2 Метрические пространства.	8
2 Канторовское пространство	11
2.1 Деревья	11
2.2 Компактность и открыто-замкнутые множества	14
2.3 Метрика и непрерывные функции на канторовском пространстве	15
2.4 Мера на канторовском пространстве	16
3 Колмогоровская сложность конечных строк	19
3.1 Определение и основные свойства колмогоровской слож- ности	19
3.2 Беспрефиксная колмогоровская сложность	26
3.3 Условная колмогоровская сложность	31
4 Случайность по Мартин-Лефу	32
4.1 Определение случайности по Мартин-Лефу	32
4.2 Тесты Соловея	33
4.3 Вещественные числа случайные по Мартин-Лефу	34
4.4 Колмогоровская сложность и случайность	35

Введение

Данное пособие предназначено для студентов старших курсов Института математики и механики КФУ и содержит в виде задач изложение теории алгоритмической случайности. Мартин-Леф ввел понятие бесконечной последовательности, случайной относительно заданного вероятностного распределения. В начале 60-х гг. XX в. А. Н. Колмогоров ввел понятие алгоритмической сложности и алгоритмической случайности. Идея Колмогорова, опубликованная в статье [1], заключалась в том, чтобы признаком случайности конечной последовательности символов x считать отсутствие в ней закономерностей, что выражается в невозможности более короткого описания этой последовательности, чем ее длина. А. Н. Колмогоров придавал большое значение изучению понятия алгоритмической случайности конечного объекта. Независимо от Колмогорова понятие алгоритмической сложности было также введено Г. Чейтиным [2], [3]. Однако основное развитие в этой области пошло другим путем. В качестве случайных объектов стали рассматриваться бесконечные последовательности (обычно из 0 и 1). При таком подходе исчезают технические трудности, характерные при реализации колмогоровского подхода для конечных объектов. Параллельно с колмогоровским сложностным подходом Мартин-Леф предложил алгоритмическо-вероятностный подход к определению случайных последовательностей. Мартин-Леф ввел понятие бесконечной последовательности, случайной относительно заданного вероятностного распределения. Бесконечная последовательность называется алгоритмически случайной, если она выдерживает любой вычислимый тест Мартин-Лефа. Определение и свойства случайных по Мартин-Лефу последовательностей можно найти в [4], [5], [6].

Как оказалось, понятие случайной по Мартин-Лефу последовательности допускает эквивалентное описание в терминах алгоритмической сложности. Левин и Шнорр ввели в работах [7], [8], [9], [10] и

[11] новые версии колмогоровской сложности — монотонную и префиксные версии колмогоровской сложности. Данные виды сложности позволяют дать определение бесконечной случайной последовательности, эквивалентное определению Мартин-Лефа. Таким образом, эти два подхода к определению случайных последовательностей совпадают.

Использование данного пособия предполагает знакомство читателя со стандартным университетским курсом теории алгоритмов, в частности, с книгой [12] и с первыми четырьмя главами книги [13].

1 Топологические и метрические пространства.

1.1 Топологические пространства.

Топологическое пространство — это пара (X, \mathcal{T}) , где X — множество, а \mathcal{T} — семейство подмножеств множества X удовлетворяющее следующим трем условиям:

1. $X \in \mathcal{T}, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. Если $U_i \in \mathcal{T}$, для любого $i \in I$, то $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.
3. Если $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$, то $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

То есть семейство \mathcal{T} содержит пустое множество, все пространство и замкнуто относительно произвольных объединений и конечных пересечений. Семейство \mathcal{T} называется *топологией*, а множества из \mathcal{T} называются *открытыми множествами топологического пространства* (X, \mathcal{T}) . Дополнения открытых множеств называются *замкнутыми*.

Топологическое пространство (X', \mathcal{T}') называется *подпространством пространства* (X, \mathcal{T}) , если $X' \subseteq X$ и $\mathcal{T}' = \{U \cap X' \mid U \in \mathcal{T}\}$. В этом случае говорим, что топология \mathcal{T}' является *ограничением топологии* \mathcal{T} на X' и записываем $\mathcal{T}' = \mathcal{T}|X'$ (обозначение $\mathcal{A}|Y = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$, в общем случае, будем применять для произвольных семейства \mathcal{A} и множества Y).

Базой (базисом) топологии \mathcal{T} называется семейство множеств $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, со свойством, что любое множество из \mathcal{T} является объединением множеств из \mathcal{B} (считаем, что объединение пустого семейства множеств дает пустое множество).

Предбазой топологии \mathcal{T} называется семейство множеств $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, со свойством, что семейство пересечений конечного числа множеств из \mathcal{S} образует базу топологии \mathcal{T} (считаем, что пересечение пустого

семейства множеств дает X).

Если X топологическое пространство и $x \in X$, *окрестностью точки x* называется любое открытое множество содержащее точку x . *Базисом системы окрестностей точки x* называется семейство открытых множеств \mathcal{U} со свойством: для любой окрестности V точки x найдется такое $U \in \mathcal{U}$, что $U \subseteq V$.

Пусть (X, \mathcal{T}) и (Y, \mathcal{S}) — топологические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества в топологии \mathcal{S} открыт в топологии \mathcal{T} . Отображение называется *открытым (замкнутым)*, если образ открытого (замкнутого) множества открыт (замкнут). Биективное отображение называется *гомеоморфизмом топологических пространств* если оно само и обратное отображение непрерывны. Если отображение $f : X \rightarrow Y$, является гомеоморфизмом пространства X на пространство $f(X)$, как подпространство Y , то f называется *вложением X в Y* .

Пусть $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ семейство топологических пространств и задано семейство отображений $f_i : X \rightarrow Y_i$. Тогда $\mathcal{S} = \{f_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I\}$ образует предбазу некоторой топологии \mathcal{T} на X . Будем говорить, что *топология \mathcal{T} порождена семейством отображений $(f_i)_{i \in I}$* .

Произведением топологических пространств $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ называется топологическое пространство $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T})$, с базисом топологии — семейством произведений вида $\prod_{i \in I} U_i$, где $U_i \in \mathcal{T}_i$ и $U_i = X_i$ возможно, за исключением конечного числа индексов.

Упражнения.

1.1. Покажите, что семейство множеств \mathcal{U} является базой некоторой топологии тогда и только тогда, когда для любых двух множеств A, B из \mathcal{U} их пересечение $A \cap B$, можно представить в виде объединения множеств из \mathcal{U} .

1.2. Покажите, что семейство множеств \mathcal{B} образует базу топологии пространства (X, \mathcal{T}) тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ семейство множеств $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ образует базу системы окрестностей точки x .

1.3. Покажите, что множество открытых шаров образует базу некоторой топологии.

1.4. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *непрерывным* в точке x , если прообраз любой окрестности точки $f(x)$ является окрестностью точки x . Покажите что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке.

1.5. Покажите, что топология порожденная семейством отображений $(f_i)_{i \in I}$ является наименьшей топологией (по включению), относительно которой все отображения $(f_i)_{i \in I}$ непрерывны.

1.6. Покажите, что топология произведения семейства $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ топологических пространств порождается семейством проекций $\pi_j : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j, (j \in I)$.

1.2 Метрические пространства.

Пусть \mathbb{R}_0^+ обозначает множество неотрицательных вещественных чисел.

Метрическим пространством называется пара (X, d) множества и функции, где функция $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Функция d называется метрикой.

Открытым шаром с центром в точке x радиуса r называется множество $B(x, r) = \{y \mid d(x, y) < r\}$. *Замкнутым шаром* называется множество $\overline{B}(x, r) = \{y \mid d(x, y) \leq r\}$.

Открытые шары образуют базис топологии некоторой топологии, которая называется *топологией метрического пространства*. Топологическое пространство (X, \mathcal{T}) называется *метризуемым*, если существует метрика d такая, что \mathcal{T} является топологией метрического пространства (X, d) . В этом случае d называют *совместимой* с топологией \mathcal{T} .

Подпространство метрического пространства (X, d) — это подмножество $Y \subseteq X$, вместе с индуцированной метрикой $d|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ $d|_Y(x, y) = d(x, y)$ для всех $x, y \in Y$.

Биективная функция $f : X \rightarrow Y$ называется *изометрией метрических пространств* (X, d_X) и (Y, d_Y) , если выполняется равенство $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$.

Подмножество $D \subset X$ топологического пространства (X, \mathcal{T}) называется *плотным*, если $D \cap A \neq \emptyset$ для любого открытого в топологии \mathcal{T} множества A .

Произведением метрических пространств $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ называется метрическое пространство $(\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i, d)$, с метрикой произведения задаваемой $d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$.

Упражнения.

1.7. Покажите, что множество вещественных чисел \mathbb{R} вместе с функцией $d(x, y) = |x - y|$ является метрическим пространством.

1.8. Покажите, что множество \mathbb{R}^n вместе с функцией $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ является метрическим пространством. Данная метрика (и топология ей задаваемая) называется *евклидовой*.

1.9. Покажите, что если d метрика, то:
 а) $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ так же является метрикой;
 б) если топология \mathcal{T} метризуема метрикой d тогда и только тогда, когда она метризуема метрикой d' .

1.10. Покажите, что метрика произведения является метрикой.

1.11. Покажите, что топология на \mathbb{R}^{n+m} задаваемая евклидовой метрикой совпадает с топологией произведения пространств $\mathbb{R}^{n'}$ и $\mathbb{R}^{m'}$ с евклидовой топологией таких, что $n + m = n' + m'$.

1.12. Покажите, что каждая изометрия является гомеоморфизмом.

1.13. Пусть $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ последовательность метрических пространств. Покажите, что метрика произведения задает топологию произведения на $\prod_{i \in I} X_i$.

1.14. Пусть $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такое отображение, что:

- для любой точки x отображение $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задаваемое равенством $f_x(y) = f(x, y)$, непрерывно относительно евклидовой топологии;
- для любой точки y отображение $f_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задаваемое равенством $f_y(x) = f(x, y)$, непрерывно относительно евклидовой топологии.

Тогда существует точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ в которой отображение f непрерывно.

2 Канторовское пространство

2.1 Деревья

Пусть A множество и $n \in \mathbb{N}$. Обозначим A^n множество конечных последовательностей $s = (s(0), \dots, s(n-1)) = (s_0, \dots, s_{n-1})$ из n элементов множества A (мы допускаем случай $n = 0$, тогда $A^0 = \{\emptyset\}$). Элементы A^n будем называть *строками* над A . Число n называется *длиной строки* и обозначается $|s| = n$. Если $s \in A^n$ и $m < n$, то $s \upharpoonright_m = (s_0, \dots, s_{m-1})$ (если $m = 0$, то $s \upharpoonright_m = \emptyset$). Если s и t две строки над A , будем говорить, что s *начальный сегмент* (*префикс*) t или t расширяет s , если существует такое число $m \leq |t|$, что $t \upharpoonright_m = s$, обозначается $s \preceq t$. Ясно, что $\emptyset \preceq s$, для любой строки s . Строки s и t *сравнимы* если $s \preceq t$ или $t \preceq s$. Будем писать $s|t$ для обозначения несравнимых строк s и t . Обозначим $A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ множество всех

строк над A . Если $A = \{0, 1\}$, будем так же писать $\{0, 1\}^*$. Далее строки $s = (s_0, \dots, s_{n-1})$ будем записывать как $s = s_0s_1\dots s_{n-1}$. *Конкатенацией* строк $s = s_0\dots s_{n-1}$ и $t = t_0\dots t_{m-1}$ называется строка $st = s_0\dots s_{n-1}t_0\dots t_{m-1}$. Часто мы будем отождествлять элементы множества A и слова длины 1.

Пусть A , множество, тогда A^ω множество бесконечных последовательностей $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} = x_0x_1\dots x_n\dots$. Если $n \in \mathbb{N}$, как и для строк, для $x \in A^\omega$ можем определить $x \upharpoonright_m = x_0\dots x_{n-1}$. Если строка $s = x \upharpoonright_m$, то s называется *начальным сегментом* (*префиксом*) *последовательности* x . Можно определить конкатенацию строки $s = s_0\dots s_{n-1}$ и бесконечной последовательности $x = x_0\dots x_n\dots$, результатом будет последовательность $sx = s_0\dots s_{n-1}x_0x_1\dots x_n\dots$.

Определение 2.1 *Дерево над множеством A это подмножество $T \subseteq A^{<\omega}$ замкнутое относительно взятия префиксов, то есть если $s \in T$ и $t \preceq s$, то $t \in T$.*

Элементы T называются вершинами дерева T . Бесконечная ветвь дерева T — это такая бесконечная последовательность $x \in A^\omega$, что $x \upharpoonright_n \in T$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тело дерева, обозначается $[T]$, это множество бесконечных ветвей дерева T , т.е.

$$[T] = \{x \in A^\omega \mid \forall n \in \mathbb{N} (x \upharpoonright_n \in T)\}.$$

Вершина $s \in T$ называется концевой вершиной дерева, если не существует такого $t \in T$, что $s \neq t$ и $s \preceq t$.

Для каждого подмножества $P \subseteq A^\omega$ определим связанное с ним дерево $T_P = \{x \upharpoonright_n \mid x \in P, n \in \mathbb{N}\}$.

Пусть y строка над A . Обозначим $[y] = \{x \in A^\omega \mid y \preceq x\}$ множество бесконечных последовательностей для которых y является префиксом. Семейство $\{[y] \mid y \in A^{<\omega}\}$ называется стандартным базисом топологии на A^ω . Отметим, что $s \preceq t \Leftrightarrow [s] \supseteq [t]$ и $[s] \cap [t] = \emptyset \Leftrightarrow s \upharpoonright_t$.

Пространство $\{0, 1\}^\omega$ с указанной топологией называется пространством кантора и обозначается 2^ω .

Определение 2.2 Множество конечных строк $I \subseteq A^{<\omega}$ со свойствами:

1. если $x \in I$ и $x \preceq y$, то $y \in I$;
2. если $xa \in I$ и $xb \in I$ для некоторых $a, b \in A$, то $x \in I$;

называется идеалом строк.

Если R открытое подмножество A^ω , то множество префиксов последовательностей из R обозначим $A_R = \{x \in A^{<\omega} \mid [x] \in R\}$.

Пусть $F \subset A^{<\omega}$. Тогда $[F]^\prec = \{x \succ y \mid x \in A^\omega, y \in F\}$, по определению, множество бесконечных последовательностей расширяющих элементы F .

Упражнения.

2.1. Покажите, что можно определить операцию конкатенации для бесконечной последовательности строк.

2.2. Пусть конечное множество A снабжено дискретной топологией (т.е. любое множество является открытым). Покажите, что топология задаваемая на A^ω , как топология произведения совпадает с топологией задаваемой стандартным базисом.

2.3. Покажите, что если $U \subseteq A^\omega$ тогда существует такое множество $S \subseteq A^{<\omega}$, что $\forall s, t \in S (s \neq t \Rightarrow s|t)$ и $U = \bigcup_{s \in S} [s]$.

2.4. Покажите, что $(A^\omega)^n$ ($n \geq 1$), $(A^\omega)^\omega$ гомеоморфно A^ω .

2.5. (Лемма Кенига.) Пусть T конечное множество. Дерево T бесконечно тогда и только тогда, когда $[T] \neq \emptyset$.

Следующие упражнения дают описание замкнутых подмножеств.

2.6. Покажите, что если T дерево, то $[T]$ замкнутое множество.

2.7. Покажите, что если T дерево без конечных вершин, то выполняется $T_{[T]} = T$.

2.8. Покажите, что если P замкнутое подмножество A^ω , то выполняется $[T_P] = P$.

2.9. Отображение $T \mapsto [P]$, является биекцией между семейством деревьев над A без конечных элементов и семейством замкнутых подмножеств A^ω .

Следующие упражнения дают описание открытых подмножеств.

2.10. Покажите, что если R открытое подмножество A^ω , то A_R идеал и $R = [A_R]^\prec$.

2.11. Покажите, что если $F \subset A^{<\omega}$, тогда $[F]^\prec$ открытое множество.

2.12. Покажите, что если I идеал строк, то $I = A_{[I]^\prec}$.

2.2 Компактность и открыто-замкнутые множества

Семейство $(U_i)_{i \in I}$ называется открытым покрытием топологического пространства (X, \mathcal{T}) , если $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Подсемейство, которое само является покрытием, называется $i \in I$ подпокрытием.

Определение 2.3 Пространство (X, \mathcal{T}) называется компактным если из любого открытого покрытия этого пространства можно выбрать конечное подпокрытие.

Подмножество топологического пространства называется компактным, если оно является компактным как подпространство.

Если топологическое пространство имеет счетный базис топологии, то в определении, очевидно, можно ограничиться только счетными покрытиями.

Определение 2.4 Подмножество топологического пространства называется открыто-замкнутым, если оно одновременно открыто и замкнуто.

Упражнения.

2.13. Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если любые две различные точки этого пространства имеют непересекающиеся открытые окрестности. Покажите, что замкнутое подмножество компактного хаусдорфова пространства является компактным.

2.14. Пусть A конечное множество и $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ убывающая (по включению) последовательность непустых замкнутых множеств в топологическом пространстве A^ω . Покажите, что $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \neq \emptyset$.

2.15. Пусть K — конечное множество. Покажите, что подмножество $B \subseteq A^\omega$ является открыто-замкнутым тогда и только тогда, когда $B = [F]^\preceq$ для некоторого конечного множества $F \subseteq A^{<\omega}$.

2.16. Покажите, что для любого конечного множества A топологическое пространство A^ω компактно.

2.17. Дерево T над A называется конечно ветвящимся, если для любого $s \in T$, существует лишь конечное число элементов $a \in A$ таких, что $sa \in T$. Покажите, что множество $[T]$ компактно в A^ω тогда и только тогда, когда T конечно ветвящееся дерево.

2.18. Покажите, что если A — бесконечное множество, то топологическое пространство A^ω не является компактным.

2.19. Покажите, что произведение конечного числа компактных пространств является компактным.

2.20. (Теорема Тихонова.) Покажите, что произведение произвольного числа компактных пространств является компактным.

2.3 Метрика и непрерывные функции на канторовском пространстве

Введем на A^ω метрику: если $x = x_0x_1x_2\dots$, и $y = y_0y_1y_2\dots$, то определим $d(x, y) = 2^{-n}$, где n — наименьший номер такой, что $x_n \neq y_n$.

Метрика d называется *ультраметрикой*, если имеет место неравенство $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}$.

Определение 2.5 Пусть S, T — деревья. Функция $\varphi : S \rightarrow T$ называется *монотонной*, если $s \preceq t \Rightarrow \varphi(s) \preceq \varphi(t)$.

Для монотонной функции $\varphi : S \rightarrow T$ введем обозначение для множества $D(\varphi) = \{x \in [S] \mid \lim |\varphi(s)| = \infty\}$.

Если $x \in D(\varphi)$, то положим $\varphi^*(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x \upharpoonright n)$. Отметим, что $\varphi^*(x) \in [T]$.

Упражнения.

2.21. Покажите, что функция d введенная на A^ω является метрикой.

2.22. Покажите, что метрика введенная на A^ω является ультраметрикой.

2.23. Покажите, что метрическая топология на A^ω совпадает с топологией порожденной стандартным базисом.

2.24. Покажите, что если $\varphi : S \rightarrow T$ монотонная функция, тогда $\varphi^* : D(\varphi) \rightarrow [T]$ непрерывная функция.

2.25. Покажите, что если $f : G \rightarrow [T]$ непрерывная функция, где $G \subseteq [S]$ открытое множество. Тогда существует монотонная функция $\varphi : S \rightarrow T$ такая, что $f = \varphi^*$.

2.26. Решите предыдущее упражнение, в предположении, что $G = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$, где $U_i \subseteq [S]$ счетное семейство открытых множеств.

2.27. Пусть $\varphi : S \rightarrow T$ монотонная функция. Функция называется липшицевой, если $|s| = |\varphi(s)|$. Покажите, что в этом случае выполняется неравенство $d(\varphi^*(x), \varphi^*(y)) \leq d(x, y)$, для всех $x, y \in D(\varphi)$.

2.4 Мера на канторовском пространстве

Обозначим, через $\mathcal{P}(X)$ множество всех подмножеств множества X . Мы ограничимся рассмотрением случая (A^ω) .

Определение 2.6 Функция $\mu : \mathcal{P}(A^\omega) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ называется внешней мерой, если $\mu(\emptyset) = 0$ и функция счетно-аддитивная, то есть, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. $B \subseteq C \subseteq (A^\omega) \Rightarrow \mu(B) \leq \mu(C)$;
3. если $(D_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$, то $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(D_i)$.

Определение 2.7 Представлением меры называется такая функция $r : A^{<\omega} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, что для любого $s \in A^{<\omega}$ имеет место равенство $\sum_{a \in A} r(sa) = r(s)$.

По любому представлению меры r , следующий процесс позволяет определить меру μ_r :

1. Пусть $U \subseteq A^\omega$ открытое множество, тогда выберем такое конечное множество $F \subseteq A^{<\omega}$, что $U = [F]^\prec$. Положим $\mu_r(U) = \sum_{s \in F} r(s)$.

2. Для $C \subseteq A^\omega$ значение меры задается следующим равенством $\mu_r(U) = \inf\{\mu_r(U) \mid C \subseteq U, U \text{ — открыто}\}$.

Определение 2.8 Равномерной мерой на A^ω называется мера полученная по представлению меры $r(x) = 2^{-|x|}$, и обозначается λ .

Определение 2.9 Множество $A \subseteq A^\omega$ называется множеством меры нуль, если $\lambda(A) = 0$.

Для внешней меры μ , множество $G \subset A^\omega$ называется μ -измеримым, если для любого $C \subseteq A^\omega$ выполняется $\mu(G) = \mu(G - C) + \mu(C - G)$.

Определение 2.10 1. Семейство $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ называется σ -алгеброй на X , если оно не пусто и замкнуто относительно дополнений и счетных объединений.

2. Измеримым пространством называется пара (X, \mathcal{B}) , где X — множество, а \mathcal{B} — σ -алгебра на X .

3. Функция $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ называется мерой на измеримом пространстве (X, \mathcal{B}) , если $\mu(\emptyset) = 0$ и функция счетно-аддитивная,

то есть, если $(D_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ счетное семейство попарно непересекающихся множеств, то $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(D_i)$. Если $\mu(X) = 1$, мера μ называется вероятностной мерой.

Очевидно, что счетная аддитивность влечет монотонность, а именно, если $A, B \in \mathcal{B}$, и $A \subseteq B$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Упражнения.

2.28. Покажите, что для любого представления меры r функция μ_r является внешней мерой.

2.29. (Теорема Лебега о плотности.) Пусть μ — внешняя мера, $s \in A^{<\omega}$, $C \subseteq a^\omega$. Определим $\mu(C|s) = \frac{\mu(C \cap [s])}{\mu([s])}$. Покажите, что если $\mu(C) > 0$, то для любого $0 \leq \delta < 1$ существует такое $s \in A^{<\omega}$, что $\mu(C|s) \geq \delta$.

2.30. Покажите, что $A \subseteq A^\omega$ множество меры нуль тогда и только тогда, когда существует такая последовательность открытых множеств $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(U_i) = 0$, и $A \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$.

2.31. Пусть $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$. Для $C \subseteq 2^\omega$ и $x \in 2^\omega$ обозначим $C_x = \{z \in C \mid z \Delta x\}$. Для каждого измеримого $C \subseteq 2^\omega$ и каждого $x \in 2^\omega$ множество C_x измеримо и $\lambda(C_x) = \lambda(C)$.

2.32. Пусть $x, y \in A^\omega$. Положим $x =^* y \Leftrightarrow |\{i \mid x_i \neq y_i\}| < \infty$.
а) Покажите, что $=^*$ отношение эквивалентности.
б) Покажите, что если $C \subseteq A^\omega$ множество содержащее по одному представителю из каждого класса эквивалентности по $=^*$, то C не измеримое множество.

2.33. Покажите, что если множество $C \subseteq A^\omega$ замкнуто относительно конечных изменений, т.е. обладает свойством $x \in C, x =^* y \Rightarrow y \in C$, то $\lambda(C) = 1$ или $\lambda(C) = 0$.

3 Колмогоровская сложность конечных строк

3.1 Определение и основные свойства колмогоровской сложности

Пусть дана машина Тьюринга M , определяющая частично вычислимую функцию на множестве конечных двоичных строк. Если $M(\sigma) = x$, то строка σ называется M -описанием строки x . Наименьшая из длин всех M -описаний строки x есть *колмогоровская сложность* строки x относительно машины M , которая обозначается как $C_M(x)$. Таким образом,

$$C_M(x) = \min\{|\sigma| : M(\sigma) = x\},$$

где $\min \emptyset = \infty$.

Определение 3.1 *Машина Тьюринга R называется оптимальной, если для любой машины M существует такая константа e_M , что*

$$M(\sigma) = x \Rightarrow \exists \tau (R(\tau) = x \ \& \ |\tau| \leq |\sigma| + e_M)$$

для каждой пары строк σ, x .

Отметим, что машина R оптимальна тогда и только тогда, когда для каждой машины M можно найти константу e_M , удовлетворяющую для всех строк x неравенству

$$C_R(x) \leq C_M(x) + e_M.$$

Пусть $\{\varphi_e\}_{e \in \mathbb{N}}$ – геделевская нумерация всех частично вычислимых функций, областями определения и значений которых являются подмножества $\{0, 1\}^*$, причем φ_1 является тождественной всюду определенной функцией.

Определение 3.2 *Машина Тьюринга \mathbb{V} , определенная для каждого натурального $e > 0$ и каждой строки ρ равенством*

$$\mathbb{V}(0^{e-1}\rho) = \varphi_e(\rho),$$

называется стандартной оптимальной машиной.

Для обозначения колмогоровской сложности относительно машины \mathbb{V} вместо записи $C_{\mathbb{V}}(x)$ используется $C(x)$. Если дана функция

$$f : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N},$$

то условие $\exists b C(x) \leq f(x) + b$ будем кратко записывать в виде

$$C(x) \leq^+ f(x).$$

Если же при этом выполнено и обратное неравенство $\exists b f(x) \leq^+ C(x)$, то пишем $C(x) =^+ f(x)$.

Упражнения. Докажите следующие утверждения:

3.1. Для каждой строки x выполняется неравенство $C(x) \leq |x| + 1$.

3.2. Существует такая константа b , что для каждой пары строк x, σ , удовлетворяющей условиям $\mathbb{V}(\sigma) = x$ и $C(x) = |\sigma|$, справедливо неравенство $C(\sigma) > |\sigma| - b$.

3.3. Существует оптимальная машина R , такая что для каждого $m \in \mathbb{N}$ произвольная строка x имеет не более одного R -описания длины m .

3.4. Пусть $d > 0$. Существует такая оптимальная машина R , что d делит длину каждой строки из области определения R .

3.5. Пусть D – область определения оптимальной машины R . Для каждой пары $n, d \in \mathbb{N}$ введем обозначение

$$s_{n,b} = |\{\sigma \in D : n \leq |\sigma| < n + b\}|.$$

Тогда существует $b \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию

$$\forall n \ 2^n \leq s_{n,b} < 2^{n+b}.$$

3.6. Если $x(i) = 0$ для каждого четного $i < |x|$, то $C(x) \leq^+ |x|/2$.

Помимо основного определения, существуют характеристики колмогоровской сложности $C(x)$, не зависящие от оптимальной машины Тьюринга.

Определение 3.3 *Функция $D : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ называется вычислимо аппроксимируемой сверху, если существует не возрастающая по первому аргументу вычисляемая функция*

$$G : \mathbb{N} \times \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

поточечный предел которой по первому аргументу есть $D(x)$:

$$\lim_s G(s, x) = D(x).$$

Так для каждой машины M колмогоровская сложность C_M является вычислимо аппроксимируемой сверху функцией. Функцию $G(s, x)$ можно положить равной

$$C_{M_s}(x) = \min\{|\sigma| : M_s(\sigma) = x\},$$

где через M_s обозначена машина Тьюринга, ограниченная s шагами работы машины M . Обозначим через \mathfrak{F} класс всех функций $D : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющих для каждого условию

$$|\{x : D(x) < k\}| < 2^k.$$

Для фиксированного $d \in \mathbb{N}$ строку x назовем d_C -сжимаемой, если

$$C(x) \leq |x| - d.$$

Множество всех d_c -сжимаемых строк будем обозначать через Cpr_d .

Упражнения. Докажите следующие утверждения:

3.7. Для каждой машины Тьюринга M функция C_M принадлежит классу \mathfrak{F} .

3.8. Для каждой машины Тьюринга M и каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такая строка x длины n , что $C_M(x) > |x|$.

3.9. Для всех $d, n \in \mathbb{N}$ количество строк $x \in \text{Cpr}_d$ длины n меньше чем 2^{n-d+1} .

3.10. Пусть $W \subseteq \mathbb{N} \times \{0, 1\}^*$ – вычислимо перечислимое множество, удовлетворяющее для каждого n условию

$$|\{x : (n, x) \in W\}| \leq 2^n.$$

Тогда существует такая машина Тьюринга M , что

$$(n, x) \in W \Leftrightarrow \exists \sigma (|\sigma| = n \ \& \ M(\sigma) = x)$$

для всех $n \in \mathbb{N}, x \in \{0, 1\}^*$.

3.11. Пусть $D : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ – вычислимо аппроксимируемая сверху функция, принадлежащая классу \mathfrak{F} . Тогда существует такая машина Тьюринга M , что

$$C_M(x) = D(x) + 1, (\infty = \infty + 1).$$

Указание. Рассмотрите вычислимо перечислимое множество $W \subseteq \mathbb{N} \times \{0, 1\}^*$, удовлетворяющее условию

$$|\{x : (n + 1, x) \in W\}| \leq |\{x : D(x) \leq n\}|.$$

3.12. Колмогоровская сложность C является наименьшей относительно порядка \leq^+ среди всех вычислимо аппроксимируемых сверху функций, принадлежащих классу \mathfrak{F} .

3.13. Пусть дано произвольное $d \in \mathbb{N}$. Обозначим через r_n количество строк $x \notin \text{Cpr}_d$ длины n . Тогда верно неравенство $n \leq^+ C(r_n)$ (здесь и в дальнейшем, если в аргументе колмогоровской сложности находится натуральное число r , то оно отождествляется со строкой σ по правилу: строка 1σ есть двоичное представление числа $r + 1$; если встречаются арифметические выражения, зависящие от строк, то их отождествление с натуральными числами делается по этому же правилу).

3.14. Существует вычислимо аппроксимируемая сверху функция $D \in \mathfrak{F}$, для которой, какая бы ни была машина Тьюринга M , множество

$$\{x : C_M(x) \neq D(x)\}$$

бесконечно.

3.15. Это упражнение показывает, что оценка $C(x) \leq |x| + 1$ не может быть улучшена.

(i) Пусть дана функция $E \in \mathfrak{F}$. Если $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию

$$\forall x (|x| \leq n \Rightarrow E(x) \leq n),$$

то

$$\forall x (|x| \leq n \Rightarrow E(x) = n).$$

(ii) Пусть дана машина Тьюринга M . Если $C_M(x) < |x|$ для некоторой строки x длины n_0 , то для всех $n \geq n_0$ существует такая строка y длины n , что $C_M(y) > |y|$.

3.16. Для каждой машины Тьюринга N справедлива импликация

$$N(x) \text{ определено} \Rightarrow C(N(x)) \leq^+ C(x).$$

Если N инъективна, то отношение $C(N(x)) \leq^+ C(x)$ можно заметить на $C(N(x)) =^+ C(x)$.

Следующие упражнения можно решить, используя приведенные ниже утверждения, доказательства которых можно найти в книге [4].

Утверждение 3.1

- 1) Для каждой пары $p, r \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|C(p) - C(r)| \leq^+ 2 \log |p - r|$.
- 2) Если строка x получается из строки y изменением одного бита, то $|C(x) - C(y)| \leq^+ 2 \log |x|$.

Здесь через \log обозначена функция взятия целой части двоичного логарифма.

Для каждой строки x введем обозначение

$$\bar{C}(x) = \min\{C(y) : y \geq x\}.$$

Вычислимые неубывающие и неограниченные функции будем называть *порядковыми*.

Утверждение 3.2 *Каждая порядковая функция доминирует \bar{C} .*

Упражнения.

3.17. Пусть $z_m = \max\{z : C(z) < m\}$. Докажите, что существует константа d , удовлетворяющая для каждого n неравенству $C(z_{n+d}) \geq n$.

3.18. *Дефицитным* множеством машины Тьюринга R называется множество

$$D_R = \{x : \exists y > x (C_R(y) \leq C_R(x))\}.$$

Докажите, что дефицитное множество ко-бесконечно. Постройте оптимальную машину, дефицитное множество которой вычислимо перечислимо.

3.19. Пусть R – оптимальная машина. Рассмотрим перечисление дополнения его дефицитного множество по возрастанию:

$$\mathbb{N} \setminus D_R = \{p_0 < p_1 < p_2 < \dots\}.$$

Покажите, что функция $p(i) = p_i$ доминирует каждую вычислимую функцию.

Формулировки следующих утверждений используют сведения из теории алгоритмов, найти которые можно в книгах [12] [13].

Утверждение 3.3 $C_M \leq_{wtt} \emptyset'$ для каждой машины тьюринга M .

Утверждение 3.4 Множество $B = \{x : C(x) < |x|\}$ простое и wtt -полное.

Упражнения.

3.20. Докажите, что функция C невычислима.

3.21. Покажите, что множество

$$A = \{(x, n) : C(x) \leq n\}$$

вычислимо перечислимо wtt -полно.

3.22. Докажите, что для каждой вычислимой функции g , такой что $\forall n g(x) \geq n$, верно соотношение

$$\exists^\infty x C(x) < C^g(x), \tag{1}$$

где $C^g(x) = \min\{|\sigma| : \mathbb{V}(\sigma) = x \text{ за } g(|x|) \text{ работы машины } \mathbb{V}\}$. Докажите, что в общем случае условие (1) нельзя заменить на

$$\exists n \forall x \geq n C(x) < C^g(x).$$

3.2 Беспрефиксная колмогоровская сложность

Множество $S \subseteq \{0, 1\}^*$ называется *беспрефиксным*, если для любых $\sigma, \rho \in S$ строка σ не является началом строки ρ . Машина Тьюринга называется *беспрефиксной*, если ее область определения есть беспрефиксное множество. Будем обозначать через Ω_M значение равномерно распределенной вероятностной меры открытого множества, порожденного областью определения беспрефиксной машины M , а именно

$$\Omega_M = \sum_{\sigma, M(\sigma) \downarrow} 2^{-|\sigma|}.$$

Для обозначения колмогоровской сложности относительно беспрефиксных машин будем использовать K_M вместо C_M .

Определение 3.4 *Беспрефиксная машина R называется оптимальной, если для каждой беспрефиксной машины M выполняется неравенство*

$$K_R \leq^+ K_M.$$

Упражнения. Докажите следующие утверждения:

3.23. Существует эффективная нумерация $\{M_d\}_{d \in \mathbb{N}}$ всех беспрефиксных машин Тьюринга.

3.24. Машина $R(0^{d-1}x) = M_d(x)$, $d > 0$, является оптимальной беспрефиксной машиной.

3.25. Для каждой оптимальной беспрефиксной машины R справедливо неравенство

$$K_R(x) \leq^+ 2|x|.$$

Указание. Рассмотрите машину Тьюринга $M(0^{|x|}1x) = x$.

3.26. Для каждой оптимальной беспрефиксной машины R справедливы неравенства

$$K_R(x) \leq^+ K_R(|x|) + |x| \leq^+ 2 \log |x| + |x|.$$

Указание. Рассмотрите машину Тьюринга N , определенную следующим образом: для каждой строки τ перечисляются всевозможные пары строк σ, x , удовлетворяющие условиям

$$\tau = \sigma x, |x| = R(\sigma);$$

как только будет найдена первая такая пара, полагаем $N(\tau) = x$.

3.27. Существует такая оптимальная беспрефиксная машина \mathbb{U} , что

$$K_{\mathbb{U}}(x) \leq K_{\mathbb{U}}(|x|) + |x| + 1.$$

Далее вместо записи $K_{\mathbb{U}}(x)$ будем использовать просто $K(x)$.

Указание. Определите последовательность машин Тьюринга $\{N_e\}_{e \in \mathbb{N}}$, полагая

$$N_e(\sigma x) = x \Leftrightarrow M_e(\sigma) = |x|.$$

Рассмотрите вычислимую функцию q , определенную следующим образом:

$$\varphi_{q(e)}(0^{d-1}1x) = \begin{cases} N_e(\rho), & \text{если } d = 1, \\ M_d(\rho), & \text{если } d > 1. \end{cases}$$

Выбрав неподвижную точку m функции q (см. [13] гл. II, § 3), покажите, что в качестве \mathbb{U} можно взять машину Тьюринга, вычисляющую φ_m .

3.28. Существует такая константа b , что для каждой пары строк x, σ , удовлетворяющей условиям $\mathbb{U}(\sigma) = x$ и $K(x) = |\sigma|$, справедливо неравенство $K(\sigma) > |\sigma| - b$.

3.29. Существует оптимальная беспрефиксная машина R , такая что для каждого $m \in \mathbb{N}$ произвольная строка x имеет не более одного R -описания длины m .

3.30. Пусть $d > 0$. Существует такая оптимальная беспрефиксная машина R , что d делит длину каждой строки из области определения R .

3.31. Пусть дано произвольное $d \in \mathbb{N}$. Обозначим через r_n количество таких строк x длины n , что $K(x) > |x| - d$. Тогда верно неравенство $n \leq^+ K(r_n)$.

3.32. Проверьте справедливость неравенства

$$K(x) \leq^+ 2 \log \log |x| + \log |x| + |x|.$$

Как и для случая $C(x)$, существует характеристика беспрефиксной сложности, не зависящая от оптимальной машины. Обозначим через \mathfrak{W} класс всех функций $D : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_x 2^{-D(x)} \leq 1, \quad (2^{-\infty} = 0).$$

В силу справедливости неравенств

$$\sum_x 2^{-K_M(x)} \leq \sum_{\sigma, M(\sigma) \downarrow} 2^{-|\sigma|} = \Omega_M \leq 1,$$

функция K_M принадлежит \mathfrak{W} для каждой беспрефиксной машины Тьюринга M .

Определение 3.5 Вычислимо перечислимое множество $W \subseteq \mathbb{N} \times \{0, 1\}^*$ называется ограниченным, если

$$\sum_{(n, \rho) \in W} 2^{-n} \leq 1.$$

Если дано множество $S \subseteq \{0, 1\}^*$, то его вес относительно W определяется равным величине

$$\text{wgt}_W(S) = \sum_{(n, \rho) \in W, \rho \in S} 2^{-n}.$$

Величина $\text{wgt}_W(\{0, 1\}^*)$ называется абсолютным весом W .

Следующая теорема, доказательство которой можно найти в книгах [4] [5], представляет удобный способ построения беспрефиксных машин с заданными свойствами.

Теорема 3.1 *По каждому вычислимо перечислимому ограниченному множеству W можно равномерно найти беспрефиксную машину Тьюринга M , удовлетворяющую условию*

$$\forall r \forall \rho [(r, \rho) \in W \Leftrightarrow \exists w (|w| = r \ \& \ M(w) = \rho)].$$

Причем Ω_M будет совпадать с абсолютным весом W .

Упражнения. Докажите следующие утверждения:

3.33. Пусть дана вычислимо аппроксимируемая сверху функция $D \in \mathfrak{W}$. Существует беспрефиксная машина M , удовлетворяющая для каждой строки x равенству $K_M(x) = D(x) + 1$.

3.34. Функция K является наименьшей относительно порядка \leq^+ среди всех функций, принадлежащих \mathfrak{W} .

3.35. Пусть B – беспрефиксное вычислимо перечислимое множество и $b_m = |B \cap \{0, 1\}^m|$. Тогда $K(m) \leq^+ m - \log b_m$.

3.36. Покажите, что $\sum_x f(K(x))2^{-K(x)} = \infty$ для каждой порядковой функции f .

3.37. *Дискретной в.п. полумерой* на $\{0, 1\}^*$ называется такая функция $m : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, что для каждого x множество

$$\{q \in \mathbb{Q} : q < m(x)\}$$

равномерно вычислимо перечислимо по x и $\sum_x m(x) \leq 1$. Проверьте, что каждая вычислимо аппроксимируемая сверху функция D принадлежит классу \mathfrak{W} тогда и только тогда, когда $m(x) = 2^{-D(x)}$ дискретная в.п. полумера. Кроме того, докажите утверждения:

- (i) Для каждого ограниченного вычислимо перечислимого множества W функция $m(x) = \text{wgt}_W(\{x\})$ есть дискретная в.п. полумера.
- (ii) Если m – дискретная в.п. полумера, то существует такое ограниченное вычислимо перечислимое множество W , что $m(x) = \text{wgt}_W(\{x\})$.

Для каждой беспрефиксной машины M определим функцию $P_M(x)$, полагая

$$P_M(x) = \sum_{\sigma, M(\sigma)=x} 2^{-|\sigma|}.$$

Таким образом, $\Omega_M = \sum_x P_M(x)$.

Теорема 3.2 *По каждой беспрефиксной машине M можно эффективно выбрать такую константу c , что*

$$\forall x \ 2^c 2^{-K(x)} > P_M(x).$$

Упражнения. Докажите следующие утверждения:

3.38. Существует константа c , удовлетворяющая условиям:

- 1) $\forall d \forall n \ |\{x : |x| = n \ \& \ K(x) \leq n + K(n) - d\}| < 2^c 2^{n-d}$;
- 2) $\forall b \forall n \ |\{x : |x| = n \ \& \ K(x) \leq K(n) + b\}| < 2^c 2^b$.

Указание. Определите беспрефиксную машину M , полагая $M(\sigma) = |\mathbb{U}(\sigma)|$. Покажите, что константа c , удовлетворяющая условию теоремы 3.2, является искомой.

3.39. Функция $m(x) = 2^{-K(x)}$ является универсальной дискретной в.п. полумерой, а именно, для каждой дискретной в.п. полумеры v существует такая константа e , что $em(x) \geq v(x)$ для всех x .

3.3 Условная колмогоровская сложность

Пусть $\{\Phi_d^2\}_{d \in \mathbb{N}}$ и $\{M_d^2\}_{d \in \mathbb{N}}$ – геделевские нумерации всех машин Тьюринга и беспрефиксных машин соответственно. Определим оптимальные машины \mathbb{V}^2 и \mathbb{U}^2 , полагая

$$\mathbb{V}^2(0^{e-1}1\sigma, y) = \Phi_e^2(y), \quad \mathbb{U}^2(0^{d-1}1\sigma, y) = M_d^2(y).$$

Условная колмогоровская сложность $C(x|y)$ определяется следующим образом:

$$C(x|y) = \min\{|\sigma| : \mathbb{V}^2(\sigma, y) = x\}.$$

Аналогично определяется беспрефиксная сложность

$$K(x|y) = \min\{|\sigma| : \mathbb{U}^2(\sigma, y) = x\}.$$

Для каждой строки x обозначим через x^* самую левую строку σ , такую что $|\sigma| = K(x)$ и $\mathbb{U}_t(\sigma) = x$, где t – наименьший шаг, удовлетворяющий условию $K_{\mathbb{U}_t}(x) = K(x)$.

Упражнения.

3.40. Пусть дана машина Тьюринга M . Докажите утверждения:

- (i) $\forall z \forall y N(y) \downarrow \Rightarrow C(N(y)|z) \leq^+ C(y|z)$;
- (ii) $\forall y \forall z N(z) \downarrow \Rightarrow C(y|z) \leq^+ C(y|N(z))$.

3.41. Замените в предыдущем упражнении C на K .

3.42. Докажите, что для всех строк x, y выполнено соотношение $K(y|x^*) =^+ K(y, \langle x, K(x) \rangle)$.

3.43. Докажите, что для всех строк x, y, z справедливо неравенство $K(x|z) \leq^+ K(x|y) + K(y|z)$.

4 Случайность по Мартин-Лефу

4.1 Определение случайности по Мартин-Лефу

Определение 4.1 Последовательность множеств $(U_i)_{i \in \omega}$, таких что $\{\langle i, x \rangle : x \in U_i\}$ вычислимо перечислимо, называется равномерно вычислимо перечислимой.

Определение 4.2 Тест Мартина-Лефа (*Martin-Löf*) на A^ω , или коротко *ML-тест*, — это равномерно вычислимо перечислимая последовательность открытых множеств $(U_i)_{i \in \omega}$. Причем $\forall i \in \omega$ выполняется $\lambda U_i \leq 2^{-i}$.

Последовательность $x \in A^\omega$ не проходит тест, если $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$, в противном случае x проходит тест.

Последовательность x называется *ML-случайным*, если x проходит каждый *ML-тест*.

Определение 4.3 Тест Мартина-Лефа $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ называется универсальным если $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ для любого теста Мартина-Лефа $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Другими словами x проходит универсальный тест тогда и только тогда, когда x случайная по Мартин-Лефу последовательность.

Существование универсального теста доказано Мартин-Лефом (1966).

Упражнения.

4.1. Покажите, что если последовательность $x = x_0x_1x_2 \dots$ случайна по Мартин-Лефу, s — конечная строка, f — биективная вычислимая функция, то следующие последовательности случайны по Мартин-Лефу:

а) sx ;

б) $y = x_{f(0)}x_{f(1)}x_{f(2)} \dots$;

в) $y = x_0, \dots, x_{n-1}sx_nx_{n+1}\dots$;

г) $y = x_0sx_1sx_2sx_3s\dots$

4.2. Покажите, что для любого верно следующее: последовательность $x = x_0x_1x_2\dots$ случайна по Мартин-Лефу тогда и только тогда, когда последовательность $y = x_nx_{n+1}\dots$ случайна по Мартин-Лефу.

4.3. Покажите, что существует такой список всех тестов Мартин-Лефа $(G_k^e)_{k \in \mathbb{N}}$, что G_k^e равномерно перечислимы по e, k .

4.4. Покажите, что если $(G_k^e)_{k \in \mathbb{N}}$ такой список всех тестов Мартин-Лефа, что G_k^e равномерно перечислимы по e, k , то семейство множеств $G_i = \bigcup_{e \in \mathbb{N}} G_{i+e+1}^e$, ($i \in \mathbb{N}$) образует универсальный тест Мартин-Лефа.

4.2 Тесты Соловея

Определение 4.4 *Тестом Соловея называется такая вычислимая последовательность строк $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, что $\sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-|x_i|} \leq 1$.*

Определение 4.5 *Бесконечная последовательность $x \in 2^\omega$ проходит тест Соловея $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, если $x_i \preceq x$ лишь для конечного числа индексов i . В противном случае последовательность x не проходит данный тест.*

Упражнения.

4.5. Определите универсальный тест Соловея. Докажите существование универсального теста Соловея.

4.6. Покажите, что бесконечная последовательность x является случайной по Мартин-Лефу тогда и только тогда, когда она проходит любой тест Соловея.

4.7. Пусть x_1, x_2, \dots тест Соловея. Покажите, что семейство множеств $U_m = \{y \mid \text{количество } x_i \text{ расширяющих } y \text{ не меньше } 2^m\}$ образует тест Мартин-Лефа, который не проходит то же множество последовательностей.

4.8. По заданному тесту Мартин-Лефа постройте тест Соловея который не проходит то же множество последовательностей.

4.9. Покажите, что в определении теста Мартин-Лефа можно заменить условие $\lambda U_i \leq 2^{-i}$, на условие $\lambda U_i \leq \varphi(i)$, где φ вычислимая функция, стремящаяся к нулю при $i \rightarrow \infty$.

4.10. Покажите, что в определении теста Соловея, единицу можно заменить на любое вещественное число.

4.11. Используя тесты Соловея, покажите, что каждая ML -случайная последовательность элементов конечного множества A удовлетворяет закону больших чисел. Сформулируем закон больших чисел. Рассмотрим множество $\mathcal{U} = \{x \mid \forall a \in A \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n,a}(x)}{n} = \frac{1}{|A|}\}$, где $S_n = |\{i \leq n \mid x_i = a\}|$. Требуется показать, что $\lambda(\mathcal{U}) = 1$.

4.12. На какие вычислимые меры μ можно заменять равномерную меру λ в определений ML -теста, чтобы класс случайных последовательностей не изменился?

4.3 Вещественные числа случайные по Мартин-Лефу

Определение 4.6 Тест Мартина-Лёфа (Martin-Löf) на \mathbb{R} , или коротко ML -тест, — это равномерно вычислимо перечислимая последовательность открытых множеств $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, где $U_i = (a_i, b_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Причем $\forall i \in \mathbb{N}$ выполняется $\lambda U_i \leq 2^{-i}$.

Определение 4.7 Число $x \in \mathbb{R}$ не проходит тест, если $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$, в противном случае x проходит тест.

Определение 4.8 *Вещественное число x является ML -случайным, если x проходит каждый ML -тест.*

Упражнения.

4.13. Пусть x, y — случайные вещественные числа и z, u — случайные по одной из предложенных случайностей. Что можно сказать о случайности (для каждого из определений): $-x, -z, x + u, u + z, x + y, 1/x, 1/z, x \cdot z, u \cdot z, x \cdot y$?

4.14. Определите, тесты Мартин-Лефа в \mathbb{R}^2 используя в качестве базовых окрестностей:

- а) открытые квадраты, с рациональными координатами вершин;
- б) открытые круги, с рациональными координатами центра и рациональным радиусом;
- в) открытые прямоугольники, с рациональными координатами вершин.

4.15. Определите понятие случайности в \mathbb{R}^2 используя введенные тесты.

4.16. В каких из данных случаев существуют универсальные тесты?

4.17. Для каждого из полученных определений приведите необходимые и достаточные условия на случайность координат.

4.18. Покажите, что введенные определения распадаются на два класса эквивалентности.

4.4 Колмогоровская сложность и случайность

Для каждой константы b и беспрефиксной машины Тьюринга M определим множество R_b^M как открытое множество, порожденное множеством строк

$$\{x : K_M(x) \leq |x| - b\}.$$

Вместо R_b^{\cup} используется обозначение R_b .

Упражнения. Докажите следующие утверждения:

4.19. Для каждой беспрефиксной машины M последовательность $\{R_b^M\}$ является ML -тестом.

4.20. Для множества Z следующие условия эквивалентны:

- (i) Z случайно по Мартин-Лефу;
- (ii) $\exists b Z \notin R_b$ (что равносильно условию $\exists b \forall n K(Z \upharpoonright n) > n - b$).

Указание. См. [4] §3.2.

4.21. Для каждой оптимальной беспрефиксной машины R множество Z , определенное условием

$$\Omega_R = \sum_{r \in Z} 2^{-r},$$

является случайным по Мартин-Лефу.

Указание. Следующим образом определите машину Тьюринга N : для заданной строки x длины n

- 1) находим первое t , удовлетворяющее условию $\sum_{i, x(i)=1} 2^{-i} \leq \Omega_{R_t} < \sum_{i, x(i)=1} 2^{-i} + 2^{-n}$;
- 2) полагаем $N(x)$ равным наименьшему y , не принадлежащему R_t . Докажите, что существует такая константа c , что

$$K(Z \upharpoonright n) + c \geq K(N(Z \upharpoonright n)) > n$$

для всех n .

Список литературы

- [1] Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия “количество информации” // Проблемы передачи информации. – 1965. – Т. 1., N. 1. – С. 3–11.
- [2] Chaitin G. Information-theoretical limitations of formal systems // Journal of the ACM. – 1974. – V. 21. – P. 403–424.
- [3] Chaitin G. A theory of program size formally identical to information theory // J. Assoc. Comput. Mach. – 1975. – V. 22. – P. 329–340.
- [4] Nies A. Computability and Randomness . – Oxford University Press. – 2009. – P. 456.
- [5] Downey R., Hirschfeldt D. Algorithmic Randomness and Complexity. – Springer-Verlag New York, Inc. Secaucus. – 2010. – P. 855.
- [6] Вьюгин В. В. Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность: учеб. пособие. – М.: МФТИ, ИППИ РАН. – 2012. – с. 140.
- [7] Левин Л. А. О понятии случайной последовательности // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 212., N. 3. – С. 548–550.
- [8] Левин Л. А. Законы сохранения (невозрастания) информации и вопросы обоснования теории информации // Проблемы передачи информации. – 1974. – Т. 10., N. 3. – С. 30–35.
- [9] Левин Л. А. О различных мерах сложности конечных объектов (аксиоматическое описание) // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 227., N. 4. – С. 804–807.

- [10] Левин Л.А. Об одном конкретном способе задания сложностных мер // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 234., N. 3. – С. 536–539.
- [11] Schnorr C.P. Process complexity and effective random tests // Journal of Computer and System Sciences. – 1973. – V.3., N.4. – P. 376–378.
- [12] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – М.: Мир. – 1972. – с. 624.
- [13] Соар Р.И. Вычислимо перечислимые множества и степени. – Казань, Казанск. матем. о-во. – 2000. – с. 576.