КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Н.А.КОРЕШКОВ, С.М.СКРЯБИН

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие

Казань-2014

УДК 512

К66

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
Институт математики и механики
им. Н.И.Лобчевского КФУ
Протокол №3 от 28 ноября 2013г.

заседания кафедры алгебры и математической логики
Протокол №4 от 28 ноября 2013г.

Рецензент
док.физ.-мат.наук, проф. **С.Н.Тронин**

Корешков Н.А.

К66 Конечномерные алгебры: учеб.-мет.пособие / Н.А.Корешков, С.М.Скрябин. - Казань: Казан.ун-т, 2014.- 56с.

Предназначено для студентов-бакалавров старших курсов и магистров Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского.

Введение

Данное учебное пособие предназначено для студентов Института математики и механики КФУ, специализирующихся по направлению «Алгебра и математическая логика». В нем рассматриваются некоторпые понятия и конструкции теории ассоциативных алгебр и теории алгебр Ли. В частности, изучаются свойства нильпотентных и разрешимых алгебр, а также основные факты, связанные с понятием радикала и полупростой алгебры. В изложении данного материала сделан существенный акцент на определенном параллелизме в теории конечномерных ассоциативных алгебр и в теории конечномерных алгебр Ли. Для нильпотентных и разрешимых алгебр этот параллелизм выражается в виде теорем Веддерберна для ассоциативных алгебр и теорем Ли и Энгеля для алгебр Ли. Для полупростых алгебр указанных классов сходство их структур основано на существовании в этих классах билинейной симметрической инвариантной формы, индуцированной функцией следа.

С другой стороны, методы, используемые для описания структуры простых алгебр рассматриваемых классов, существенно различны. Для ассоциативных алгебр эти методы опираются на понятие модуля, а для алгебр Ли — на понятие корневого разложения. Понятие модуля демонстрирует, что обобщение определения векторного пространства позволило получить глубокие результаты в теории ассоциативных алгебр, а понятие корневого разложения относительно совокупности операторов, являющееся обобщением понятия корневого разложения относительно единственного оператора, позволило описать структуру простых конечномерных алгебр Ли над полями нулевой характеристики.

Таким образом, результаты, касающиеся строения конечномерных ассоциативных алгебр и алгебр Ли, рассмотренные в пособии, дают спектр основных фактов в теории конечномерных ассоциативных алгебр и алгебр Ли. Кроме того, приведенные в пособии результаты служат основой для изучения строения бесконечномерных алгебр.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезно студентам-бакалаврам и магистрам, специализирущимся по кафедре алгебры и математической логики.

ГЛАВА I. АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

§ 1. Разрешимые алгебры

В этом параграфе рассматриваются некоторые факты, относящиеся к произвольным алгебрам над полем. Напомним соответствующее определение.

Определение 1.1. Векторное пространство U над полем k называется алгеброй над k, если на U задано билинейное отображение $U \times U \to U$, обозначаемое $(u_1, u_1) \to u_1u_2$. т. е.

1) $u_1(u_2+u_3) = u_1u_2+u_1u_3$, $(u_1+u_2)u_3 = u_1u_3+u_2u_3$, $u_1, u_2, u_3, \in U$;
2) $(\lambda u_1)u_2 = u_1(\lambda u_2) = \lambda(u_1u_2)$, $\lambda \in k$, $u_1, u_2 \in U$.

Таким образом, на U имеется еще одна бинарная операция, называемая умножением, связанная законами дистрибутивности с операцией сложения и согласованная с умножением на элементы поля k.

Подпространство V в U называется подалгеброй, если для $x, y \in V$ всегда выполнено условие $xy \in V$.

В дальнейшем будем рассматривать исключительно такие алгебры над k, векторное пространство которых конечномерно над полем k.

Одним из основных инструментов изучения структуры алгебры является понятие идеала и фактор-алгебры.

Определение 1.2. Подпространство I в алгебре U называется левым (соответственно правым или двусторонним) идеалом, если $ua \in I$, когда $u \in U$, $a \in I$ (соответственно $au \in I$ или $ua, au \in I$).

Заметим, что сумма и пересечение левых (соответственно правых или двусторонних) идеалов является левым (соответственно правым или двусторонним) идеалом.

Пусть I — двусторонний идеал в алгебре U. Тогда фактор-алгеброй алгебры U по идеалу I будем называть фактор-пространство $U/I = \{u + I,\ u \in U\}$, умножение в котором определяется по правилу $(u_1 + I)(u_2 + i) = u_1u_2 + I$.

Если $u_1' + I = u_1 + I$, $u_2' + I = u_2 + I$, то $u_1' = u_1 + x_1$, $u_2' = u_2 + x_2$, $x_1, x_2 \in I$ и $u_1'u_2' = u_1u_2 + x_1u_2 + u_1x_2 + x_1x_2$. Поэтому $(u_1' + I)(u_2' + I) = u_1u_2 + I$, т. к. $x_1u_2 + u_1x_2 + x_1x_2 \in I$. Эта проверка доказывает корректность введенного умножения.

С понятием фактор-алгебры тесно связано понятие гомоморфизма.

Определение 1.3. Отображение $\varphi : U \to U'$ алгебры U в алгебру U' называется гомоморфизмом, если

1) $\varphi(\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2) = \alpha_1\varphi(u_1) + \alpha_2\varphi(u_2)$, $u_1, u_2 \in U$, $\alpha_1, \alpha_2 \in k$;

2) $\varphi(u_1u_2) = \varphi(u_1)\varphi(u_2)$, $u_1, u_2 \in U$.

Если отображение φ биективно, то оно называется изоморфизмом. Условие изоморфности алгебр U и U' обозначают $U \cong U'$.

Легко проверить, что ядро гомоморфизма $\operatorname{Ker}\varphi = \{u \in U,\ \varphi(u) = 0\}$ является двусторонним идеалом в U. С другой стороны, если I — двусторонний идеал в U, то отображение $\varphi : U \to U/I$, задаваемое правилом $\varphi(u) = u + I$, $u \in U$, будет гомоморфизмом алгебры U на фактор-алгебру U/I.

Имеют место следующие стандартные утверждения.

Теорема 1.1. 1) *Если φ — гомоморфизм алгебры U на алгебру U', то $U' \cong U/\operatorname{Ker}\varphi$.*

2) *Если I и J — идеалы в U, то $I + J/J \cong I/I \cap J$.*

3) *Если I и J — идеалы в U и $J \subset I$, то I/J — идеал в U/J и $U/J \Big/ I/J \cong U/I$.*

Для любых двух подпространств I и J алгебры U определим их произведение по формуле $IJ = \Big\{ \sum\limits_{\alpha} x_\alpha y_\alpha,\ x_\alpha \in I,\ y_\alpha \in J \Big\}$. Используя это понятие, рассмотрим последовательность подпространств алгебры U:

$$U^{(0)} = U,\ U^{(1)} = U^{(0)}U^{(0)}, \ldots, U^{(i+1)} = U^{(i)}U^{(i)}, \ldots$$

Очевидно, каждое подпространство $U^{(i+1)}$ является двусторонним идеалом в $U^{(i)}$. Если существует n такое, что $U^{(n)} = 0$, то алгебра U называется разрешимой.

Приведем несколько свойств разрешимых алгебр.

Предложение 1.1. 1) *Если алгебра U разрешима, то разрешима любая ее подалгебра и любой ее гомоморфный образ.*

2) *Если I — такой разрешимый идеал в U, что фактор-алгебра U/I разрешима, то разрешима и сама алгебра U.*

3) *Если I и J — разрешимые идеалы в U, то идеал $I + J$ также разрешим.*

Доказательство. 1) Пусть U — разрешимая алгебра, т. е. $U^{(n)} = 0$ для некоторого n, а B — ее подалгебра. Тогда из определения подалгебр $U^{(i)}$ следует $B^{(i)} \subseteq U^{(i)}$. В частности, $B^{(n)} \subseteq U^{(n)}$, т. е. $B^{(n)} = 0$.

Если $\varphi : U \to B$ — эпиморфизм разрешимой алгебры U на алгебру B, то $\varphi(U^{(i)}) = B^{(i)}$. Поэтому $B^{(n)} = 0$, когда $U^{(n)} = 0$.

2) Если фактор-алгебра U/I разрешима, то $U^{(n)} \subseteq I = I^{(0)}$ для некоторого n. Отсюда $U^{(n+m)} \subseteq I^{(m)}$. Из разрешимости I получаем $U^{(n+m)} = 0$ для подходящих n и m, что доказывает п. 2.

3) Так как I — разрешимый идеал, то $I/I \cap J$ — разрешимая алгебра в силу п. 1 данного предложения. Тогда $I + J/J$ — также разрешимая алгебра, что вытекает из п. 2 предыдущей теоремы. Применяя к алгебре $I+J$ и к идеалу J п. 2 данного предложения, получаем разрешимость идеала $I + J$. □

В качестве приложения рассмотрим алгебру U и ее максимальный разрешимый идеал I, т. е. такой разрешимый идеал, который не содержится ни в каком большем разрешимом идеале. Если J — любой другой разрешимый идеал в U, то из п. 3 предложения 1.1 вытекает $I + J = I$ (ввиду максимальности идеала I), т. е. $J \subseteq I$. Это доказывает существование единственного максимального разрешимого идеала, который будем называть радикалом алгебры U и обозначать $\operatorname{Rad} U$. Если $U \neq 0$ и $\operatorname{Rad} U = 0$, то алгебра U называется полупростой.

Теорема 1.2. *Если U неразрешима, то $U/\operatorname{Rad} U$ полупроста.*

Доказательство. Пусть $\overline{I}$ — разрешимый идеал фактор-алгебры $U/\operatorname{Rad} U$. Обозначим через I полный прообраз идеала $\overline{I}$ при естественном гомоморфизме из U на $U/\operatorname{Rad} U$. В силу п. 2 предложения 1.1 I — разрешимый идеал. Следовательно, $I \subseteq \operatorname{Rad} U$, т. е. $\overline{I} = \overline{0}$. □

Полученный результат показывает, что изучение структуры любой алгебры сводится к изучению строения разрешимых и полупростых алгебр.

§ 2. Нильпотентность ассоциативных алгебр

Пусть A — ассоциативная алгебра, т. е. для любых элементов $a, b, c \in A$ имеет место равенство $(ab)c = a(bc)$.

Рассмотрим следующую последовательность подпространств алгебры A:

$$A^1 = A,\ A^2 = AA^1, \ldots, A^{i+1} = AA^i, \ldots$$

Легко проверить, что в ассоциативной алгебре произведение двух двусторонних идеалов является двусторонним идеалом, содержащимся в их пересечении. Поэтому каждое подпространство A^i является идеалом в A и содержится в A^{i-1}. Алгебра A называется нильпотентной, если $A^n = 0$ для некоторого n.

Предложение 2.1. *Ассоциативная алгебра A нильпотентна тогда и только тогда, когда она разрешима.*

Доказательство. Из определения подпространств в рассматриваемых цепочках имеем $A^{(i)} \subseteq A^{i+1}$. Следовательно, из нильпотентности вытекает разрешимость.

Используя ассоциативность умножения, легко по индукции доказать, что $A^{(i)} = A^{2^i}$. Поэтому из $A^{(n)} = 0$ вытекает нильпотентность алгебры A. □

Как показывает приводимая ниже теорема, нильпотентность конечномерной ассоциативной алгебры обусловлена нильпотентностью ее элементов.

Будем говорить, что элемент a ассоциативной алгебры A нильпотентен, если $a^n = 0$ для некоторого n.

Покажем, что нильпотентность идеалов согласована с операцией сложения.

Предложение 2.2. *Конечная сумма левых нильпотентных идеалов есть нильпотентный левый идеал.*

Доказательство. Единственный нетривиальный факт в сформулированном предложении — это нильпотентность суммы идеалов. Очевидная индукция сводит это утверждение к случаю двух идеалов. Пусть I и J — левые нильпотентные идеалы. т. е. $I^n = 0$, $I^m = 0$ для некоторых n и m. Тогда $(I + J)^{n+m} = 0$.

Действительно, во-первых, заметим, что $(I+J)^{n+m} = \sum I^{k_1} J^{r_1} ... I^{k_s} J^{r_s}$, где $\sum\limits_{i=1}^{s} k_i + \sum\limits_{j=1}^{s} r_j = n+m$. Кроме того, в силу включения $AI^s \subseteq I^s$ имеем $I^{k_1} J^{r_1} \dots I^{k_s} J^{r_s} \subseteq I^k J^{r_s}$, $k = \sum\limits_{i=1}^{s} k_i$. Если $k \geq n$, то последнее произведение равно нулю. В противном случае $\sum\limits_{j=1}^{s} r_j \geq m$ и, используя включение $I^{k_1} J^{r_1} \dots I^{k_s} J^{r_s} \subseteq I^{k_1} J^r$, $r = \sum\limits_{j=1}^{s} r_j$, опять получаем равенство нулю произведения $I^{k_1} J^{r_1} \dots I^{k_s} J^{r_s}$. Приведенные рассуждения объясняют нильпотентность идеала $I + J$. □

Теорема 2.1 (Веддерберн)**.** *Конечномерная ассоциативная алгебра A нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентен любой ее элемент.*

Доказательство. Если A нильпотентна, т. е. $A^n = 0$ для некоторого n, то $a^n = 0$ для любого элемента $a \in A$.

Обратно, пусть для каждого элемента $a \in A$ существует натуральное $n = n(a)$ такое, что $a^n = 0$. Докажем нильпотентность алгебры A индукцией по ее размерности.

Если $\dim A = 1$, т. е. $A = ka$, то из условия $a^n = 0$ следует $A^n = 0$. Пусть для любой алгебры размерности меньше m утверждение теоремы справедливо. Рассмотрим алгебру A размерности m. Если $A^2 \neq A$, то подалгебра A^2 нильпотентна, т. е. $(A^2)^s = 0$ для некоторого s. Тогда $A^{2s} = 0$, т. е. A — нильпотентная алгебра.

Покажем, что случай $A^2 = A$ невозможен. Зафиксируем какой-либо базис $e_1, \dots, e_m$ алгебры A. Тогда $A^2 = Ae_1 + \dots + Ae_m$. Если $A = A^2$, то алгебра A является конечной суммой левых идеалов Ae_i, $i = 1, \dots, m$. Пусть все эти идеалы собственные. Тогда по предположению индукции каждый идеал Ae_i нильпотентен. Применяя предложение 2.2, получаем нильпотентность алгебры A. В частности, $A \supsetneq A^2$, что противоречит предположению.

Предположим теперь, что для некоторого i идеал Ae_i совпадает с A. Тогда в алгебре A существует элемент a такой, что $ae_i = e_i$. Итерируя это равенство, имеем $a^k e_i = e_i$ для любого натурального k. Так как

$a^n = 0$ для некоторого n, то $e_i = 0$, что противоречит принадлежности e_i к базису алгебры A. Итак, последний случай также невозможен. Следовательно, в условиях теоремы всегда $A \supsetneqq A^2$. Отсюда, как показано выше, вытекает нильпотентность алгебры A. $\square$

Если A является алгеброй линейных операторов, то можно получить информацию о строении матриц этих операторов.

Теорема 2.2. *Пусть A — алгебра линейных операторов, действующих на конечномерном векторном пространстве V. Если любой оператор $a \in A$ ассоциативно нильпотентен, то в пространстве V существует базис, в котором матрицы всех операторов из A имеют строго треугольный вид.*

Доказательство. Из теоремы Веддерберна следует, что алгебра A нильпотентна, т. е. существует натуральное n такое, что $A^n = 0$, но $A^{n-1} \neq 0$. Тогда в пространстве V существует строго убывающая цепочка инвариантных подпространств

$$V \supset AV \supset A^2V \supset \cdots \supset A^{n-1}V \supset A^nV = 0.$$

Выбирая в пространстве V базис, согласованный с этой цепочкой, получаем утверждение теоремы. $\square$

Рассмотрим критерий нильпотентности конечномерной ассоциативной алгебры в терминах функции следа.

Пусть U — алгебра (не обязательно ассоциативная) над k. Обозначим через L_a оператор левого умножения для элемента a алгебры U. т. е. $L_a : x \to ax$, $x \in U$.

Теорема 2.3. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль. Тогда A нильпотентна, если и только если $\operatorname{tr} L_a = 0 \quad \forall a \in A$.*

Доказательство. У нильпотентной алгебры A каждый ее элемент a нильпотентен. Используя гомоморфизм $\varphi : a \to L_a$ ассоциативной алгебры A в алгебру линейных операторов $\operatorname{End}_k A$, получаем, что каждый оператор L_a нильпотентен. Но все собственные значения нильпотентного оператора равны нулю. Поэтому $\operatorname{tr} L_a = 0$, $a \in A$.

Обратно, пусть $\operatorname{tr} L_a = 0 \quad \forall a \in A$. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $n = \dim A$ собственные значения оператора L_a. Так как $\operatorname{tr}(L_a)^k = \operatorname{tr} L_{a^k} = 0$, $k \geq 1$, то, применяя конструкцию жордановой нормальной формы, получим $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 1$, $k \geq 0$. Используя формулы Ньютона, связывающие выражения элементарных симметрических многочленов

σ_i, $i = 1, \ldots, n$, и степенных сумм, получаем (в силу того, что характеристика поля k равна нулю) $\sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому все собственные значения λ_i, $i = 1, \ldots, n$, оператора L_a нулевые, а значит, L_a — нильпотентный оператор. Если $L_a^n = 0$, то $a^{n+1} = 0$, поэтому алгебра A состоит из нильпотентных элементов. Следовательно, по теореме Веддерберна A — нильпотентная алгебра. $\square$

§ 3. Полупростые алгебры

Определение 3.1. Отображение $(\ ,\ ) : B \times B \to k$ произвольной алгебры B над полем k назовем билинейной симметричной инвариантной формой, если

1) $(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, b_3) = \beta_1(b_1, b_3) + \beta_2(b_2, b_3)$, $\beta_1, \beta_2 \in k$, $b_1, b_2, b_3 \in B$;
2) $(b_1, b_2) = (b_2, b_1)$;
3) $(b_1 b_2, b_3) = (b_1, b_2 b_3)$.

В силу симметричности формы $(\ ,\ )$ ее левое ядро $B_e^{\perp} = \{x \in B, (x, b) = 0, b \in B\}$ совпадает с ее правым ядром $B_r^{\perp} = \{x \in B, (b, x) = 0, b \in B\}$, и можно говорить просто о ядре формы $B^{\perp} = B_e^{\perp} = B_r^{\perp}$. Если ядро формы $B^{\perp}$ равно нулю, то форму будем называть невырожденной.

Алгебру будем называть простой, если она не содержит нетривиальных двусторонних идеалов.

Теорема 3.1. *Конечномерная алгебра B над полем k, обладающая невырожденной билинейной симметричной инвариантной формой, и не имеющая идеалов, квадраты которых равны нулю, является прямой суммой двусторонних идеалов, каждый из которых является простой алгеброй.*

Доказательство. Пусть I — двусторонний идеал алгебры B. Тогда $I^{\perp} = \{x \in B, (x, b) = 0, b \in I\}$ — также двусторонний идеал. Обозначим через J пересечение идеалов I и $I^{\perp}$. Пусть $a, b \in J$, $c \in B$. Тогда $(ab, c) = (a, bc) = 0$, т. к. $bc \in I^{\perp}$. Из невырожденности формы немедленно получаем $J^2 = 0$. По условию теоремы алгебра B не имеет ненулевых двусторонних идеалов, квадраты которых равны нулю. Следовательно, $J = 0$.

Покажем, что $B = I \oplus I^{\perp}$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_m$ в I. Для любого элемента $b \in B$ существуют константы $\beta_1, \ldots, \beta_m \in k$ такие, что $b - \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i e_i \in I^{\perp}$. Действительно, последнее условие принадлежности равносильно разрешимости системы линейных уравнений $\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i (e_i, e_j) =$

(b, e_j), $j = 1, \ldots, m$. Но определитель матрицы $\big((e_i, e_j)\big)$ отличен от нуля, т. к. $I \cap I^\perp = 0$. Поэтому для любого элемента $b \in B$ существуют элементы $x \in I$, $y \in I^\perp$ такие, что $b = x + y$, т. е. $B \subseteq I \oplus I^\perp$.

Предположим дополнительно, что I — минимальный двусторонний идеал. Если K — идеал алгебры I, то из условия $KI^\perp \subset I \cap I^\perp = 0$ (соответственно $I^\perp K \subset I^\perp \cap I = 0$) немедленно получим, что K — идеал всей алгебры B. Тогда из минимальности I вытекает, что либо $K = 0$, либо $K = I$. т. е. I — простая алгебра.

Из невырожденности формы (,) на B вытекает невырожденность ограничения этой формы на $I^\perp$. Кроме того, любой идеал алгебры $I^\perp$ является идеалом всей алгебры. Применяя индукционные выкладки, легко получим утверждение теоремы. $\square$

Для любой конечномерной ассоциативной алгебры A определим билинейную форму $t : A \times A \to k$ по правилу

$$t(a, b) = \operatorname{tr} L_a L_b, \quad a, b \in A.$$

Легко видеть, что и два других свойства из определения 3.1 для формы t также выполнены.

Теорема 3.2. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда ее радикал совпадает с ядром $A^\perp = \{x \in A,\ t(x, A) = 0\}$ билинейной формы t.*

Доказательство. Обозначим через R радикал алгебры A. Если $b \in R$, то для любого элемента $a \in A$ произведение ba принадлежит R и ba — нильпотентный элемент в A. Тогда L_{ba} — нильпотентный оператор, а значит $\operatorname{tr} L_{ba} = 0$. Последнее равенство можно записать в виде $t(b, A) = 0$. Таким образом, $b \in A^\perp$, или $R \subseteq A^\perp$.

Пусть теперь $b \in A^\perp$. Из этого условия, в частности, получаем $\operatorname{tr} L_{b^2}^k = \operatorname{tr} L_b L_{b^{2k-1}} = t(b, b^{2k-1}) = 0$, $k \geq 1$. Рассуждая далее, как в теореме 2.4, получим, что L_{b^2} — нильпотентный оператор, т. е. $L_{b^2}^n = 0$ для некоторого натурального n. Тогда $b^{2n+1} = 0$. Значит, по теореме Веддерберна идеал $A^\perp$ нильпотентен. Следовательно, $A^\perp \subseteq R$.

Соединяя два полученных включения, имеем $R = A^\perp$. $\square$

Следствие 3.1. Конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль полупроста тогда и только тогда, когда, когда форма t невырождена.

Используя полученные результаты, опишем строение конечномерной полупростой ассоциативной алгебры.

Теорема 3.3. *Пусть A — полупростая конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда A является прямой суммой двусторонних идеалов, каждый из которых является простой алгеброй.*

Доказательство. Так как A полупроста, то в силу следствия 3.2 форма t невырождена. Кроме того, из полупростоты алгебры A вытекает отсутствие в ней двусторонних идеалов, квадраты которых равны нулю. Поэтому, используя теорему 3.1, получаем сформулированное разложение. □

§ 4. Простые алгебры

Для описания простых конечномерных ассоциативных алгебр над алгебраически замкнутым полем рассмотрим некоторые результаты, относящиеся к произвольным ассоциативным кольцам. Для их формулировок потребуются некоторые дополнительные конструкции, в частности, понятие модуля над ассоциативным кольцом.

Определение 4.1. Пусть A — ассоциативное кольцо. Абелева группа M называется левым A-модулем, если существует отображение $A \times M \to M$, обозначаемое $(a, m) \to am$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$,
2. $(a_1 + a_2)m = a_1m + a_2m$,
3. $(a_1a_2)m = a_1(a_2m)$, где a, a_1, a_2 — любые элементы из A, m, m_1, m_2 — любые элементы из M. Так определеннное отображение называют действием кольца A на модуле M. Легко видеть, что понятие модуля над ассоциативным кольцом является обобщением понятия векторного пространства над полем.

Обозначим через $\mathrm{End}_A(M)$ совокупность всех A-гомоморфизмов A-модуля M в себя, т. е. $\varphi \in \mathrm{End}_A(M)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$, $\varphi(am) = a\varphi(m)$ $\forall m, m_1, m_2 \in M$, $\forall a \in A$.

Превратим A-модуль M в D-модуль, где $D = \mathrm{End}_A(M)$, полагая $dm = d(m)$, т. е. действие кольца D на модуле M определяем как значение отображения d на элементе m.

Для любого элемента a кольца A обозначим через a_M отображение из M в M, действующее по правилу $a_M(m) = am$. Тогда $a_M(m_1 + m_2) = a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2 = a_M(m_1) + a_M(m_2)$, $a_M(dm) = a(dm) = d(am) = da_M(m)$, где $d \in D$, т. е. $a_M \in \mathrm{End}_D(M)$.

Отображение $\varphi : A \to \mathrm{End}_D(M)$, действующее по правилу $\varphi(a) = a_M$, является гомоморфизмом кольца A в кольцо $\mathrm{End}_D(M)$. Если $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$, то, отождествляя кольцо A и его образ $\varphi(A)$, можно считать, что $A \subset \mathrm{End}_D(M)$. Для того чтобы определить какую часть кольца $\mathrm{End}_D(M)$ занимает A, введем понятие вполне приводимого A-модуля.

Определение 4.2. A-модуль M вполне приводим, если для любого A-подмодуля M_1 в M существует A-подмодуль M_2 в M такой, что $M = M_1 \oplus M_2$.

Здесь прямая сумма A-модулей понимается как прямая сумма абелевых групп, а действие кольца A на прямой сумме $M_1 \oplus M_2$ определяется правилом $a(m_1, m_2) = (am_1, am_2)$.

Имеет место следующее важное утверждение.

Теорема 4.1 (теорема плотности)**.** *Пусть M — вполне приводимый A-модуль и $f \in \mathrm{End}_D(M)$. Тогда для любого набора элементов $u_1, \ldots, u_n$ из M существует элемент $a \in A$ такой, что $f(u_i) = au_1$, $i = 1, \ldots, n$.*

Для доказательства теоремы будет использовано матричное представление гомоморфизмов A-модулей.

Пусть M является прямой суммой $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ A-модулей M_i, $i = 1, \ldots, n$, а φ — гомоморфизм A-модуля M в себя. Обозначим через φ_j ограничение гомоморфизма φ на компоненту M_j, а через π_i — проекцию A-модуля M на компоненту M_i. Любой элемент из M представим как столбец из его компонент $m_1, \ldots, m_n$. Тогда для $m_j \in M_j$ имеем

$$\varphi(m_j) = \varphi_j(m_j) = \varphi_j \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^{(j)} \\ \vdots \\ m_n^{(j)} \end{pmatrix},$$

здесь $m_i^{(j)} = \varphi_{ij}(m_j)$, где $\varphi_{ij} = \pi_i \varphi_j$. Соответственно

$$3\varphi(m) = \varphi \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \varphi \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \varphi(m_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(m_j) = \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} m_1^{(j)} \\ \vdots \\ m_n^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} m_1^{(j)} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} m_n^{(j)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_{1j}(m_j) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_{nj}(m_j) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}.$$

Заметим, что каждое φ_{ij} является гомоморфизмом A-модуля M_j в A-модуль M_i. В частности, если все A-модули M_i равны M, то $\varphi_{ij} \in D = \operatorname{End}_A M$.

Легко проверить, что отображение $\varphi \to \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{bmatrix}$ из $\operatorname{End}_A M^n$ в $\operatorname{Mat}_n(\operatorname{End}_A M)$, $M^n = \underbrace{M \oplus \dots \oplus M}_{n}$, где M — A-модуль, является изоморфизмом колец.

Доказательство теоремы 4.1.

Вначале рассмотрим случай, когда $n = 1$. Пусть u — произвольный элемент из M. Тогда для A-модуля M', порожденного элементом u, в силу полной приводимости A-модуля M существует A-подмодуль M'' такой, что $M = M' \oplus M''$, где $M' = \langle u \rangle_A$. Пусть $\pi : M \to \langle u \rangle_A$ — проекция A-модуля M на A-подмодуль M'. Тогда $\pi \in D = \operatorname{End}_A M$. Действительно, если $m \in M$, то $m = a'u + m''$ для некоторых $a' \in A$ и $m'' \in M''$. Тогда $\pi(am) = \pi(aa'u + am'') = aa'u$, так как $am'' \in M''$, $aa' \in A$.

С другой стороны, $(a\pi)(m) = a(\pi m) = aa'u$, т. е. $\pi(am) = a(\pi m)$. Используя доказанный факт имеем $f(u) = f(\pi u) = \pi f(u) = \pi(\widetilde{a}u + \widetilde{m})$ для некоторых $\widetilde{a} \in A$, $\widetilde{m} \in M'$. Так как $\pi(\widetilde{a}u + \widetilde{m}) = \widetilde{a}u$, то получаем, что элемент $\widetilde{a}$ удовлетворяет условию теоремы.

Рассмотрим случай, когда $n > 1$. Обозначим $\widetilde{M} = \underbrace{M \times \dots \times M}_{n}$. Так как M — вполне приводимый A-модуль, то $\widetilde{M}$ также вполне приводим. Обозначим через $\widetilde{f}$ отображение из $\widetilde{M}$ в $\widetilde{M}$, действующее по правилу $\widetilde{f}(m_1, \dots, m_n) = (f(m_1), \dots, f(m_n))$. Проверим, что $\widetilde{f} \in \operatorname{End}_{\widetilde{D}} \widetilde{M}$, где $\widetilde{D} = \operatorname{End}_A \widetilde{M}$.

Пусть $\widetilde{d} \in \widetilde{D}$. Тогда элементу $\widetilde{D}$ соответствует матрица

$$\widetilde{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

где каждый элемент d_{ij} является гомоморфизмом A-модуля M в себя, а элементу $\widetilde{f}$ соответствует матрица $\widetilde{f}_m = \begin{bmatrix} f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \dots & f \end{bmatrix}$.

Произведения матриц $\widetilde{d}_M \widetilde{f}_M$ и $\widetilde{f}_M \widetilde{d}_M$ равны соответственно

$$\begin{bmatrix} d_{11}f & \dots & d_{1n}f \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ d_{n1}f & \dots & d_{nn}f \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} fd_{11} & \dots & fd_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ fd_{n1} & \dots & fd_{nn} \end{bmatrix}.$$

Из условия $d_{ij}f = fd_{ij}$ следует, что $\widetilde{d}_M \widetilde{f}_M = \widetilde{f}_M \widetilde{d}_M$, а следовательно, $\widetilde{d}\,\widetilde{f} = \widetilde{f}\,\widetilde{d}$. Таким образом, $\widetilde{f} \in \operatorname{End}_{\widetilde{D}} \widetilde{M}$.

Применяя доказанный выше частный случай для $n = 1$, получаем, что для отображения $\widetilde{f} \in \operatorname{End}_{\widetilde{D}} \widetilde{M}$ существует элемент $a \in A$ такой, что $\widetilde{f}(\widetilde{u}) = a\widetilde{u}$, когда $\widetilde{u}$ — любой элемент из $\widetilde{M}$, т. е. $f(u_i) = au_i$, $i = 1, \dots, n$, если $\widetilde{u} = (u_1, \dots, u_n)$.

Используя эту теорему, можно доказать следующее увержение.

Теорема 4.2. *Пусть A — простая конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем P. Тогда $A \cong M_n(P)$ для некоторого натурального n.*

Определение 4.3. Алгебра A проста, если она не содержит нетривиальных двусторонних идеалов, причем $A^2 \neq 0$.

При доказательстве теоремы 4.2 будет использована

Лемма 4.1 (лемма Шура)**.** *Если M — неприводимый A-модуль, то $\operatorname{End}_A M$ — тело.*

Доказательство. Достаточно проверить, что любой ненулевой элемент f из $\operatorname{End}_A M$ имеет обратный. Действительно, $\operatorname{Ker} f$ является A-подмодулем в M. Поэтому либо $\operatorname{Ker} f = 0$, либо $\operatorname{Ker} f = M$ (в силу неприводимости M). Если $\operatorname{Ker} f = M$, то $f = 0$. Следовательно, f инъективно.

Аналогично, $\operatorname{Im} f = 0$, либо $\operatorname{Im} f = M$. Так как $f \neq 0$, то f сюръективно. Итак, f биективно, т. е. f имеет обратный. □

В случае, когда A — ассоциативная алгебра, понятие модуля можно уточнить следующим образом.

Определение 4.4. Пусть A — ассоциативная алгебра над полем P. Тогда векторное пространство N над тем же самым полем называется левым A-модулем, если существует отображение $A \times M \to M$, обозначаемое $(a, m) \to am$, удовлетворяющее аксиомам 1–3 определения 4.1, и, кроме того, условию $(\alpha a)m = a(\alpha m)$, где $\alpha \in P$, $a \in A$, $m \in M$.

Доказательство теоремы 4.2. Обозначим через I минимальный левый идеал в алгебре A. Тогда I является неприводимым A-модулем. Проверим, что гомоморфизм $\varphi : A \to \operatorname{End}_D I$, $D = \operatorname{End}_A I$, где $\varphi(a) = a_I$, является вложением.

Пусть $J = \operatorname{Ker} \varphi$. В силу простоты A двусторонний идеал J либо равен нулю, либо совпадает со всей алгеброй A. Если $A = J$, то $AI = 0$. В частности, $I^2 = 0$. Тогда $(IA)^2 = 0$. Так как IA — двусторонний идеал, то либо $IA = A$, либо $IA = 0$. Если $IA = A$, то $A^2 = 0$. Если $IA = 0$, то I — двусторонний идеал. Оба условия приводят к противоречию. Итак, $J = 0$, т. е. φ — вложение.

Так как I — конечномерное векторное пространство над P, то пусть $e_1, \ldots, e_n$ — его базис. В силу теоремы плотности для любого $f \in \operatorname{End}_D I$ существует $a \in A$ такой, что $f(e_i) = ae_i$, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, $f = a_I \in \varphi(A)$, т. е. $A \cong \operatorname{End}_D I$.

Докажем, что $D = P$. Очевидно, $D \supseteq PE$, где E — единичная матрица. С другой стороны, $\operatorname{End}_A I \subseteq \operatorname{End}_P I$. И так как I — конечномерное векторное пространство над P, то D — также конечномерное векторное пространство над P. Поэтому каждый элемент из D алгебраичен над P. Следовательно, для любого элемента d из D существует многочлен $f(X)$, принадлежащий $P[X]$, такой, что $f(d) = 0$. Так как P алгебраически замкнуто, то $f(X) = a_0(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_s)$, $a_0 \in P$, $\alpha_i \in P$, $i = 1, \ldots, s$, $a_0 \neq 0$. Если $d - \alpha_1 \neq 0$, то в силу леммы Шура существует обратный элемент $(d - \alpha_1)^{-1} \in D$ и, следовательно, $a_0(d - \alpha_2) \ldots (d - \alpha_s) = 0$. Поэтому существует номер j такой, что $d = \alpha_j \in P$.

Итак, $\operatorname{End}_D I = \operatorname{End}_P I$, т. е. $A \cong \operatorname{End}_P I$. Используя изоморфизм алгебры линейных операторов и алгебры матриц, имеем $A \cong M_n(P)$, где $n = \dim_P I$.

ГЛАВА II. АЛГЕБРЫ ЛИ

§ 5. Определение и примеры алгебр Ли

Определение 5.1. Алгебра L над полем k с билинейной операцией $L \times L \to L$, обозначаемой $(x, y) \to [x, y]$ и называемой коммутатором элементов x и y, называется алгеброй Ли, если выполняются следующие аксиомы:

1. $[x, x] = 0$ для всех $x \in L$;
2. $\bigl[x[y, z]\bigr] + \bigl[y[z, x]\bigr] + \bigl[z, [x, y]\bigr] = 0$ $(x, y, z \in L)$.

Последняя аксиома называется тождеством Якоби.

Заметим, что из аксиомы 2, примененной к элементу $[x + y, x + y]$, следует соотношение антикоммутативности:

$1'$). $[x, y] = -[y, x]$.

Если характеристика поля k отлична от 2, то из $1'$ следует 1.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над k. Тогда $\operatorname{End} V$ будет обозначать множество линейных преобразований $V \to V$. Оно имеет размерность n^2 как векторное пространство над k, где $n = \dim_k V$. Определим новую операцию $[x, y] = xy - yx$, $x, y \in \operatorname{End} V$. С этой операцией $\operatorname{End} V$ становится алгеброй Ли над k: аксиома 1 очевидна, а проверка аксиомы 2 требует небольшого вычисления. Эту алгебру Ли назовем полной линейной алгеброй и будем обозначать $\mathrm{gl}(V)$.

Пусть U — k-алгебра с билинейной операцией $U \times U \to U$, т. е. $(x, y) \to xy$. Дифференцированием в алгебре U назовем линейное отображение $D : U \to U$ со свойством

$$D(xy) = (Dx)y + x(Dy).$$

Легко проверить, что совокупность всех дифференцирований $\operatorname{Der} U$ алгебры U является векторным пространством над k. Кроме того, коммутатор $[D_1, D_2]$ двух дифференцирований снова является дифференцированием. Действительно,

$$\begin{aligned} D_1D_2(xy) &= (D_1D_2x)y + (D_1x)(D_2y) + (D_2x)(D_1y) + x(D_1D_2y), \\ D_2D_1(xy) &= (D_2D_1x)y + (D_1x)(D_2y) + (D_2x)(D_1y) + x(D_2D_1y). \end{aligned}$$

Поэтому

$$[D_1D_2](xy) = ([D_1, D_2]x)y + x([D_1, D_2]y).$$

Таким образом, $\operatorname{Der} U$ — подалгебра в $\mathrm{gl}(U)$. В частности, для любой алгебры Ли L определена алгебра $\operatorname{Der} L$. Некоторые элементы последней возникают вполне естественным образом. Если $x \in L$, то отображение $\operatorname{ad} x : y \to [x, y]$ является эндоморфизмом пространства L. В действительности $\operatorname{ad} x \in \operatorname{Der} L$, поскольку тождество Якоби можно переписать в виде $\big[[x,[y,z]]\big] = \big[[x,y],z\big] + \big[y[x,z]\big]$. Дифференцирования такого вида называются внутренними, а все остальные — внешними. Отображение $L \to DerL$, имеющее вид $x \to \operatorname{ad} x$, называется присоединенным представлением алгебры L.

§ 6. Идеалы и гомоморфизмы

Подпространство I алгебры Ли L называется идеалом, если $[x,a] \in I$ для любого $x \in I$ и любого $a \in L$. В отличие от общего случая (см. § 1) в алгебре Ли в силу ее антикоммутативности все идеалы двусторонние.

Важными примерами идеалов алгебры Ли L являются

1) ее центр $Z(L) = \{x \in L,\ [x,a] = 0,\ a \in L\}$,

2) ее коммутант $[L,L] = \Big\{ \sum\limits_{k \in S} [x_k, y_k],\ x_k, y_k \in L,\ S$ — любое конечное множество$\Big\}$.

Заметим, что как и в общем случае (см. § 1) сумма и пересечение двух идеалов являются идеалами. Более того, для алгебры Ли и произведение $[I,J] = \Big\{ \sum\limits_{k \in S} [x_k, y_k],\ x_k \in I,\ y_k \in J \Big\}$ двух идеалов I и J является идеалом. Коммутант $[L,L]$ — частный случай этой конструкции.

Если в алгебре Ли L нет идеалов, кроме нее самой и нуля, причем $[L,L] \neq 0$, то L называется простой алгеброй. Ясно, что если L — простая алгебра, то $Z(L) = 0$ и $L = [L,L]$.

Пример. Пусть $L = \mathrm{sl}(2,k) = \{x \in \mathrm{gl}(2,k),\ \operatorname{tr} x = 0\}$, $\operatorname{char} k \neq 2$. Выберем стандартный базис в L в виде трех матриц

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Умножение в алгебре полностью определяется равенствами

$$[e,f] = h, \quad [h,e] = 2e, \quad [h,f] = -2f.$$

Пусть I — ненулевой идеал в L и $ae + bf + ch$ — ненулевой элемент в I. Дважды применяя к этому элементу оператор $\operatorname{ad} f$, получаем $-2be \in I$, а применяя дважды оператор $\operatorname{ad} f$, получаем $-2af \in I$. Поэтому, если a или b отлично от нуля, то I содержит e или f и, значит, $I = L$. С другой стороны, если $a = b = 0$, то $0 \neq ch \in I$, т. е. $h \in I$, что снова влечет $I = L$. Заключаем, что L — простая алгебра.

Так же, как в § 1, для алгебр Ли определяется понятие фактор-алгебры, гомоморфизма и изоморфизма алгебр. Используя эти понятия для алгебр Ли, получаем утверждение, дословно повторяющее теорему 1.1.

§ 7. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли

В § 1 было введено понятие разрешимой алгебры, а именно, таковой была названа алгебра U, в которой цепочка подпространств $U^{(0)} = U$, $U^{(1)} = U^{(0)}U^{(0)}, \ldots, U^{(i+1)} = U^{(i)}U^{(i)}, \ldots$ заканчивается нулевым подпространством, т. е. существует n такое, что $U^{(n)} = 0$. Применяя это определение к алгебре Ли L, получим понятие разрешимой алгебры Ли. Следует заметить, что в случае, когда L — алгебра Ли, ее подпространства $L^{(i)}$ являются идеалами алгебры Ли.

В определенном смысле общим примером разрешимой алгебры Ли служит алгебра верхнетреугольных матриц $T(n,k) = \{(a_{ij}), i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, $a_{ij} \in k$, $a_{ij} = 0$, $i > j\}$. Очевидно, базис этой алгебры состоит из матричных единиц e_{ij}, $i \leq j$, ее размерность равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Чтобы доказать, что алгебра $L = T(n,k)$ разрешима, найдем ряд ее коммутантов при помощи формулы

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj},$$

где δ_{rs} — символ Кронекера. В частности, имеем $[e_{ii}, e_{ij}] = e_{ij}$ при $i < j$. Откуда следует $N(n,k) \subset [L,L]$, где $N(n,k) = \{(a_{ij}),\ a_{ij} = 0$, $i \geq j\}$. Так как $T(n,k) = D(n,k) + N(n,k)$, где $D(n,k)$ — алгебра диагональных матриц, то $N(n,k) = [L,L]$.

В алгебре $N(n,k)$ естественно определено понятие "уровня", а именно, уровень элемента e_{ij} равен $j - i$. В формуле для коммутаторов будем предполагать, что $i < j$, $k < l$. Без ограничения общности можно также считать, что $i \neq l$. Тогда $[e_{ij}, e_{kl}] = e_{il}$, если $j = k$ или 0 (в противном случае). Как следствие, любой элемент e_{il} является коммутатором двух матриц, уровни которых с сумме дают его уровень. Отсюда следует, что $L^{(2)}$ порождается элементами e_{ij}, уровень которых больше или равен 2, а $L^{(i)}$ — элементами, уровень которых больше или равен 2^{i-1}. Наконец, очевидно, что $L^{(i)} = 0$ при $2^{i-1} > n - 1$.

Для разрешимых алгебр Ли имеет место предложение 1.1. Поэтому так же, как в § 1, доказывается существование единственного максимального разрешимого идеала в L, называемого радикалом алгебры L и обозначаемого $\operatorname{Rad} L$. Если $L \neq 0$ и $\operatorname{Rad} L = 0$, то алгебра L называется полупростой.

Далее рассмотрим понятие нильпотентной алгебры Ли. Так же, как в § 2, определим последовательность идеалов алгебры L, полагая

$$L^0 = 0,\ L^1 = [L, L],\ L^2 = [L, L^1], \dots, L^i = [L, L^{i-1}], \dots$$

Алгебра L называется нильпотентной, если $L^n = 0$ при некотором n. Очевидно, $L^{(i)} \subset L^i$ для всех i, и поэтому нильпотентная алгебра Ли разрешима.

Приведем пример, показывающий, что класс разрешимых алгебр шире класса нильпотентных. Пусть $L = \langle e, f \rangle$ — алгебра Ли размерности два со следующей таблицей умножения: $[e, e] = [f, f] = 0$, $[e, f] = -[f, e] = f$. Тогда для любого $i \geq 1$ $L^i = L^1 = \langle f \rangle \neq 0$, но $L^{(2)} = 0$, т. е. L разрешима, но не нильпотентна.

Более того, L^1 — максимальный нильпотентный идеал, для которого фактор-алгебра L/L^1 нильпотентна. Таким образом. п. 2 предложения 1.1 неверен, если условие разрешимости идеала и фактор-алгебры заменить на условие нильпотентности. Тем не менее, сумма двух нильпотентных идеалов снова является нильпотентным идеалом, т. е. п. 3 предложения 1.1 справедлив при замене условия разрешимости на условие нильпотентности. Для проверки последнего утверждения заметим, что любое произведение элементов алгебры Ли является линейной комбинацией левонормированных произведений вида $\big[a_1[a_2 \dots [a_{n-1}, a_n]] \dots \big]$. Это легко доказывается индукцией по количеству множителей с использованием тождества Якоби. Пусть I_1 и I_2 — нильпотентные идеалы, т. е. $I_1^n = 0$ и $I_2^m = 0$ для некоторых n и m. Тогда любое произведение, входящее в $(I_1 + I_2)^{n+m}$, имеет вид $\big[a_1, [a_2 \dots [a_{n+m-1}, a_{n+m}]] \dots \big]$, где каждое a_i принадлежит либо I_1, либо I_2. Пусть для определенности количество множителей, принадлежащих I_1, в некотором произведении равно k, где $k \geq n$. Тогда, используя тот факт, что $[I_1^s, L] \subseteq I_1^s$, получим, что данное произведение принадлежит k-й степени идеала I_1, которое равно нулю. Таким образом, доказано

Предложение 7.1. *Сумма двух нильпотентных идеалов есть нильпотентный идеал.*

Применяя рассуждение, аналогичное рассуждению из § 1, для разрешимых алгебр имеем

Следствие 7.1. Любая конечномерная алгебра Ли имеет наибольший нильпотентный идеал.

Будем называть этот идеал нильрадикалом алгебры L и обозначать $\mathrm{Nil}(L)$.

Пример двумерной разрешимой алгебры показывает, что возможна ситуация, когда фактор-алгебра $L/\operatorname{Nil}(L)$ содержит ненулевой нильпотентный идеал. Следовательно, нильрадикал не обладает характеристическим свойством разрешимого идеала, но благодаря тесной связи этих радикалов нильрадикал используется при изучении структуры алгебр Ли.

Рассмотрим некоторые свойства алгебр Ли, связанные с нильпотентностью.

Предложение 7.2. *Пусть L — алгебра Ли.*

1) *Если L нильпотентна, то все ее подалгебры и гомоморфные образы нильпотентны.*

2) *Если нильпотентна алгебра $L/Z(L)$, то нильпотентна и алгебра L.*

Доказательство. 1) Нужно воспроизвести доказательство утверждения 1 предложения 1.1.

2) Если $\big(L/Z(L)\big)^n = 0$, то $L^n \subset Z(L)$. Тогда $L^{n+1} = [L, L^n] \subset [L, Z(L)] = 0$. □

Условие нильпотентности алгебры L может быть сформулировано по другому: при некотором n (зависящем только от L)

$$\operatorname{ad} x_1 \operatorname{ad} x_2 \dots adx_n(y) = 0 \text{ для всех } x_i,\ y \in L.$$

В частности, $(adx)^n = 0$ для всех $x \in L$. Если теперь x — элемент произвольной алгебры Ли L, то назовем x ad-нильпотентным, если эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Тогда предыдущее условие можно сформулировать так: если алгебра L нильпотентна, то все ее элементы ad-нильпотентны. Примечательно, что верно и обратное.

Теорема 7.1 (Энгель). *Если все элементы алгебры Ли* ad-*нильпотентны, то алгебра L нильпотентна.*

Вначале докажем следующее утверждение.

Теорема 7.2. *Пусть L — алгебра Ли линейных операторов в $\mathrm{gl}(V)$, где V — конечномерное векторное пространство. Если любой элемент x из L ассоциативно нильпотентен, то L — нильпотентная алгебра Ли.*

Доказательство. Пусть M — подпространство в L. Обозначим через $A(M)$ ассоциативную алгебру, порожденную пространством M. Докажем, что $A(L)$ — нильпотентная ассоциативная алгебра в $\operatorname{End} V$. Предположим противное. Тогда в L существует максимальная подалгебра

M такая, что $A(M)$ — нильпотентная алгебра. (Такие подалгебры существуют, например, любая одномерная подалгебра Ли kx, $x \in L$.) Пусть $\bigl(A(M)\bigr)^n=0$, тогда для любого $x \in L$ и любых $m_1, m_2, ..., m_{2n-1} \in M$ $[\ldots[x, m_1], \ldots, m_{2n-1}] = 0$. Это легко проверить, если заменить каждый коммутатор $[a, b]$ его выражением $ab - ba$.

Если $x \notin M$ и для некоторых $m_1, \ldots, m_{2n-1} \in M$ элемент $x' = [\ldots[x, m_1], \ldots, m_{2n-2}] \notin M$, то из приведенного выше равенства, в частности, следует $[x', m] \in M$ для любого $m \in M$. В противном случае в качестве x' берем элемент $[\ldots[x, m_1], \ldots, m_{2n-3}]$ и т. д. Через конечное число шагов получим, что существует элемент $y \in L$, $y \notin M$, но $[y, m] \in M$ для любого $m \in M$. Из полученных условий следует, что пространство $M' = ky \oplus M$ является алгеброй Ли.

Проверим, что $A(M')$ — нильпотентная ассоциативная алгебра. Используя условие $my = ym + m'$, $m, m' \in M$, легко показать, что любой элемент алгебры $A(M')$ является линейной комбинацией мономов вида $y^r m_1 \ldots m_s$, где $s < n$, $r < k$, и k — степень нильпотентности элемента y. В частности, любой моном a из $A(M')$, у которого количество множителей из M не меньше n, равен нулю, т. к. при перестановке элемента y с элементами из M количество множителей из M сохраняется. Поэтому одночлен a может быть отличен от нуля тогда и только тогда, когда количество множителей из M в нем меньше n и они перемежаются степенями элемента y с показателями меньшими чем k. Следовательно, общее количество множителей любого отличного от нуля одночлена a не превосходит $n - 1 + n(k - 1) = nk - 1$.

Этим доказано, что если число множителей одночлена a не меньше nk, то $a = 0$, т. е. алгебра $A(M')$ ассоциативно нильпотентна. Поскольку это противоречит максимальности подалгебры M, то $A(L)$ — нильпотентная ассоциативная алгебра. В частности L — нильпотентная алгебра Ли. □

Доказательство теоремы Энгеля. Если для некоторой алгебры Ли L любой оператор $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, нильпотентен, то алгебра Ли линейных операторов $\operatorname{ad} L$ нильпотентна в силу предыдущей теоремы. Так как ядро присоединенного представления алгебры L является центром $Z(L)$ этой алгебры, то нильпотентность алгебры $\operatorname{ad} L$ означает нильпотентность фактор-алгебры $L/Z(L)$. Отсюда в силу п. 2 предложения 6.2 имеем нильпотентность алгебры L. □

В доказанной форме теорема Энгеля аналогична теореме Веддерберна для ассоциативных алгебр.

Приведем еще одну форму теоремы Энгеля.

Теорема 7.3. *Пусть L — алгебра Ли линейных операторов пространства V. Если любой элемент из L ассоциативно нильпотентен, то существует базис в V такой, что матрицы линейных операторов из L одновременно приводятся в этом базисе к строго треугольному виду.*

Доказательство. Как было доказано в теореме 6.4, ассоциативная алгебра $A(L)$ нильпотентна. Следовательно, имеет место цепочка строгих включений $V \supset \widetilde{L}V \supset \widetilde{L}^2V \supset \cdots \widetilde{L}^nV = 0$, где $\widetilde{L}^i = \langle x_1 \ldots x_i,\ x_k \in L\rangle$. Выбирая базис, согласованный с этой цепочкой, получим утверждение теоремы. $\square$

§ 8. Теорема Ли

Аналогом матричной формы теоремы Веддерберна является теорема Ли об одновременном приведении к треугольному виду линейных операторов любой разрешимой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Теорема 8.1 (Ли)**.** *Пусть L — разрешимая алгебра Ли линейных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль. Тогда в пространстве V существует базис такой, что все матрицы линейных операторов из L имеют в нем треугольный вид.*

Доказательство. Вначале докажем существование общего собственного вектора для всех элементов из L. Для этого воспользуемся индукцией по $\dim_k L$. Если $\dim_k L = 1$, то утверждение очевидно. Так как $[L, L] \supsetneqq L$, то выбираем любое подпространство K, содержащее $[L, L]$ и имеющее коразмерность 1 в L. Очевидно, K — идеал в L. По предположению индукции у всех элементов из K существует общий собственный вектор $w \in W$, т. е. $xw = \lambda(x)w$, $x \in K$. Обозначим через $W = \{w \in V,$ $xw = \lambda(x)w,\ x \in K\}$ ненулевое подпространство в V.

Покажем, что W инвариантно относительно алгебры L. Пусть x — произвольный элемент из L. Рассмотрим подпространство, натянутое на векторы $w, xw, \ldots, x^{n-1}w$, $w \in W$, которые линейно независимы, и $x^n w = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i w$, $\alpha_i \in k$. Если $y \in K$, то $yx^i w \equiv \lambda(y)x^i w \pmod{W_{i-1}}$, $i = 0, \ldots, n-1$, где $W_j = \langle w, xw, \ldots, x^j w\rangle$, $j = 0, \ldots, n-1$, $W_{-1} = 0$.

Действительно, случай, когда $i = 0$, вытекает из определения пространства W, а переход от i к $i+1$ следует из формулы

$$yx^{i+1}w = xyx^i w + [y, x]x^i w \equiv \lambda(y)x^{i+1}w \pmod{W_i},$$

поскольку $[y, x] \in K$. Таким образом, любой элемент из K имеет в базисе $w, xw, \dots, x^{n-1}w$ пространства W_{n-1} матрицу треугольного вида. В частности, элемент $[y, x]$, $y \in K$, имеет матрицу треугольного вида с диагональными элементами $\lambda([y, x])$. Поэтому $\mathrm{tr}_{W_{n-1}}([y, x]) = n\lambda([y, x])$. С другой стороны, в силу известного свойства функции следа для коммутатора $\mathrm{tr}_{W_{n-1}}([y, x]) = 0$ (благодаря инвариантности W_{n-1} относительно y и x). Так как характеристика поля k равна нулю, то $\lambda([y, x]) = 0$.

Используя полученный факт, проверим инвариантность пространства W относительно L. Пусть $x \in L$, $y \in K$, $w \in W$. Тогда $y(xw) = x(yw) + [y, x]w = x(yw) = \lambda(y)xw$, т. к. $\lambda([y, x]) = 0$.

Пусть $L = K \oplus kz$. В силу инвариантности пространства W относительно оператора z в нем существует собственный вектор v этого оператора. Но тогда $xv = \lambda(x)v$ для любого элемента $x \in L$.

Предположим, что уже найдены i линейно независимых векторов $e_1, \dots, e_i$ таких, что $xe_j = \sum\limits_{k=1}^{j} \alpha_k e_k$. Обозначим через U подпространство, натянутое на эти векторы. Тогда алгебра L действует в фактор-пространстве V/U по правилу $x(v + u) = xv + U$, $x \in L$. Это действие определяет разрешимую алгебру линейных операторов на фактор-пространстве V/U и (по доказанному выше) в V/U существует ненулевой общий собственный вектор $v_0 + U : x(v_0 + U) = \lambda(x)(v_0 + U)$. Тогда любой представитель e_{i+1} этого класса имеет свойство $xe_{i+1} = \lambda(x)e_{i+1} + u$, $u = \sum\limits_{k=1}^{i} \alpha_k e_k \in U$. Очевидно, векторы $e_1, \dots, e_i, e_{i+1}$ линейно независимы. Через конечное число шагов получим базис, фигурирующий в утверждении теоремы. $\square$

§ 9. Разложение Жордана–Шевалле

Для получения критерия разрешимости алгебры Ли рассмотрим представление любого линейного оператора в виде суммы полупростой и нильпотентной компоненты, которое уточняет теорему о жордановой нормальной форме.

Определение 9.1. Оператор $x \in \mathrm{End}_k V$ называется полупростым, если все корни его минимального многочлена различны.

Заметим, что если поле k алгебраически замкнуто, то это определение равносильно диагонализируемости оператора x.

Теорема 9.1. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем k, $x \in \mathrm{End}_k V$.*

a) *Существуют единственные элементы* $x_s, x_n \in \operatorname{End}_k V$, *удовлетворяющие следующим условиям*: $x = x_s + x_n$, *где* x_s *— полупрост,* x_n *— нильпотентен, и* $x_s x_n = x_n x_s$.
b) *Существуют многочлены* $p(T)$, $q(T)$ *от одного переменного без свободного члена такие, что* $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$.

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_r$ (с кратностями $m_1, \dots, m_r$) — различные собственные значения отображения x, так что его характеристический многочлен равен $\prod_{i=1}^{r}(T - a_i)^{m_i}$. Если $V_i = \operatorname{Ker}(x - a_i \cdot 1)^{m_i}$, то V является прямой суммой подпространств $V_1, \dots, V_r$, каждое из которых инвариантно относительно x. Ясно, что характеристический многочлен для x на V_i равен $(T - a_i)^{m_i}$.

Так как многочлены $(T - a_i)^{m_i}$, $i = 1, \dots, r$, и T взаимно просты (если все a_i отличны от нуля), то согласно китайской теореме об остатках, гомоморфизм $\varphi : k[T] \to \oplus k[T]/I_j$, где I_j – идеалы кольца $k[T]$, порождаемые многочленами $(T - a_j)^{m_j}$ и T, является эпиморфизмом. (В случае, когда оператор x имеет нулевое собственное значение, многочлен T отбрасывается.) Поэтому существует многочлен $p(T) \in k[T]$ такой, что $p(T) \equiv a_i \pmod{(T - a_i)^{m_i}}$, $i = 1, \dots, r$, $p(T) \equiv 0 \pmod{T}$. Положим $q(T) = T - p(T)$. Очевидно, у многочленов $q(T)$ и $p(T)$ нулевой свободный член, т. к. $p(T) \equiv 0 \pmod{T}$.

Положим $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Поскольку эти эндоморфизмы являются многочленами от x, они коммутируют друг с другом. Также они оставляют инвариантными все подпространства V_i.

Сравнение $p(T) \equiv a_i \pmod{(T - a_i)^{m_i}}$ показывает, что ограничение отображения $x_s - a_i \cdot 1$ равно нулю на V_i. Следовательно, x_s действует диагонально на V_i с единственным собственным значением a_i. Используя строение жордановой нормальной формы для оператора x, немедленно получаем, что оператор $x_n = x - x_s$ нильпотентен.

Осталось доказать утверждение о единственности полученного разложения. Пусть $x = s + n$ — другое разложение оператора x, причем s — полупростой оператор, n — нильпотентный оператор и они коммутируют.

Так как n коммутирует с s, то он коммутирует с x, а следовательно, и с x_n. Аналогично, операторы s и x_s также коммутируют. Тогда оператор $n - x_n$ нильпотентен, а оператор $x_s - s$ полупрост. Первое утверждение очевидно. Проверим второе. Так как s и x_s коммутируют, то каждое пространство V_i инвариантно относительно s. Из полупростоты оператора s следует, что его ограничение на V_i также полупросто.

Поэтому существует базис в V_i, в котором матрица оператора s диагональна. Объединяя эти базисы, получим базис пространства V, в котором оба оператора s и x_s одновременно имеют диагональный вид. Следовательно, оператор $x_s - s$ диагонализируем.

Из равенства $x_s - s = n - x_n$ получаем, что один и тот же оператор одновременно полупрост и нильпотентен. Но таким может быть только нулевой эндоморфизм. Отсюда следует $s = x_s$, $n = x_n$. □

Теорема 9.2. *Пусть* $x \in \operatorname{End} V$ $(\dim V < \infty)$, $x = x_s + x_n$ *— разложение Жордана. Тогда* $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ *— разложение Жордана для* $\operatorname{ad} x$ *в* $\operatorname{End}(\operatorname{End} V)$.

Доказательство. Если элемент $y \in \operatorname{End} V$ нильпотентен, то нильпотентен и элемент $\operatorname{ad} y$. Действительно, $\operatorname{ad} y = \rho_y \lambda_y$, где $\rho_y(a) = ya$, $\lambda_y(a) = ay$, $a \in \operatorname{End} V$. Эндоморфизмы ρ_y и λ_y нильпотентны в силу нильпотентности y. Но сумма коммутирующих нильпотентов есть нильпотентный элемент. Поэтому отображение $\operatorname{ad} y$ нильпотентно.

Аналогично, если элемент y полупрост, то полупрост и элемент $\operatorname{ad} y$. Проверим это. Выберем базис $v_1, \ldots, v_n$ в V, в котором матрица y имеет вид $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Пусть $\{e_{ij}\}$ — стандартный базис в $\operatorname{End} V$, который соответствует $v_1, \ldots, v_n$: $e_{ij} v_k = \delta_{jk} v_i$. Тогда простое вычисление показывает, что $\operatorname{ad} y(e_{ij}) = (a_i - a_j) e_{ij}$. Таким образом, матрица $\operatorname{ad} y$ диагональна в выбранном базисе для $\operatorname{End} V$.

Итак, эндоморфизм $\operatorname{ad} x_s$ полупрост, а эндоморфизм $\operatorname{ad} x_n$ нильпотентен. Они коммутируют: $[\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n] = \operatorname{ad}[x_s, x_n] = 0$. Остается применить п. а) предыдущей теоремы. □

§ 10. Критерий разрешимости Картана

Здесь и всюду далее поле k алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль.

Лемма 10.1. *Пусть* $A \subset B$ *— два подпространства в* $\mathrm{gl}(V)$, $\dim_k V < \infty$. *Положим* $M = \{x \in \mathrm{gl}(V),\ [x, B] \subset A\}$. *Предположим, что для некоторого* $x \in M$ *выполняется свойство* $\operatorname{tr}(xy) = 0 \quad \forall y \in M$. *Тогда элемент* x *нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $x = s + n$ — разложение Жордана для x. (Здесь $s = x_s$, $n = x_n$.) Выберем базис $v_1, \ldots, v_m$ в V, в котором s имеет матрицу $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_m)$, где $a_1, \ldots, a_m$ — собственные значения оператора x. Пусть $E = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{Q} a_i$ — векторное подпространство над $\mathbb{Q}$ в k, порожденное собственными значениями $a_1, \ldots, a_m$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Нужно доказать, что $s = 0$, что равносильно равенству $E = 0$. Поскольку пространство E конечномерно над $\mathbb{Q}$, достаточно показать, что двойственное пространство E^* нулевое, т. е. что любая линейная функция $f : E \to \mathbb{Q}$ нулевая.

Для данной функции f пусть y — тот элемент в $\mathrm{gl}(V)$, матрица которого в выбранном базисе равна $\mathrm{diag}\big(f(a_1), \ldots, f(a_m)\big)$. Если $\{e_{ij}\}$ — соответствующий базис из матричных единиц в $\mathrm{gl}(V)$, то, как следует из доказательства теоремы 8.3, $\mathrm{ad}\, s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$, $\mathrm{ad}\, y(e_{ij}) = \big(f(a_i) - f(a_j)\big)e_{ij}$. Пусть теперь $r(T) \in K[T]$ — многочлен без свободного члена, удовлетворяющий условиям $r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$ для всех пар i, j. Существование такого многочлена следует из интерполяционной формулы Лагранжа. Неоднозначности в заданных значениях нет, поскольку из равенства $a_i - a_j = a_k - a_l$ следует (ввиду линейности f) $f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l)$. Ясно, что $\mathrm{ad}\, y = r(\mathrm{ad}\, s)$.

Согласно теореме 8.3 элемент $\mathrm{ad}\, s$ — полупростая часть элемента $\mathrm{ad}\, x$, и ее можно представить как многочлен от $\mathrm{ad}\, x$. т. е. $\mathrm{ad}\, s = h(\mathrm{ad}\, x)$, где $h(T)$ — многочлен без свободного члена. Поэтому $\mathrm{ad}\, y = r\big(h(\mathrm{ad}\, x)\big)$, причем многочлен $r\big(h(T)\big)$ — без свободного члена.

По предположению $\mathrm{ad}\, x$ отображает B в A, откуда следует $\mathrm{ad}\, y(B) \subset A$, т. е. $y \in M$. Используя предположение $\mathrm{tr}(xy) = 0$, получим $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i f(a_i) = 0$. Левая часть равенства — это $\mathbb{Q}$-линейная комбинация элементов из E. Применяя f, получим $\sum\limits_{i=1}^{m} \big(f(a_i)\big)^2 = 0$. Так как $f(a_i)$ — рациональные числа, то отсюда вытекает их равенство нулю. Поскольку a_i порождают E, функция f должна быть нулевой. $\square$

Перед тем как сформулировать критерий разрешимости, приведем тождество, аналогичное тождеству из § 3 гл. 1. Пусть $x, y, z \in \mathrm{End}\, V$. Тогда
$$\mathrm{tr}([x, y]z) = \mathrm{tr}(x[y, z]).$$
Для его проверки следует раскрыть коммутаторы и воспользоваться свойством следа $\mathrm{tr}\,\big(y(xz)\big) = \mathrm{tr}\,\big((xz)y\big)$.

Теорема 10.1 (критерий Картана). *Пусть L — подалгебра в $\mathrm{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Предположим, что $\mathrm{tr}(xy) = 0$ при всех $x \in [L, L]$, $y \in L$. Тогда L разрешима.*

Доказательство. Достаточно проверить, что алгебра $[L, L]$ нильпотентна или, что равносильно, все $x \in [L, L]$ — ассоциативно нильпотентные эндоморфизмы (см. теорему Энгеля).

Рассмотрим доказанную лемму для случая, когда $A = [L, L]$, $B = L$. Тогда $M = \{x \in \mathrm{gl}(V),\ [x, L] \subset [L, L]\}$. Ясно, что $L \subset M$.

Если теперь $[x, y]$ – один из образующих в $[L, L]$, а $z \in M$, то вышеприведенное тождество дает

$$\operatorname{tr}([x, y]z) = \operatorname{tr}(x[y, z]) = \operatorname{tr}([y, z]x) = 0,$$

т. к. $[y, z] \in [L, L]$ по определению множества M. Из полученного соотношения имеем нильпотентность элемента $[x, y]$. $\square$

Следствие 10.1. Пусть L — алгебра Ли такая, что $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$ для всех $x \in [L, L]$, $y \in L$. Тогда алгебра L разрешима.

Доказательство. В силу сформулированного равенства имеем разрешимость алгебры $\operatorname{ad} L$. Поскольку $\operatorname{Ker} \operatorname{ad} = Z(L)$ — разрешимый идеал в L, то и L разрешима (см. предложение 1.1). $\square$

§ 11. Полупростые алгебры Ли

Пусть L — произвольная алгебра Ли. Если $x, y \in L$, то положим $K(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)$. Тогда K — симметричная билинейная форма на L, которая называется формой Киллинга. Форма K также инварианта в том смысле, что $K([x, y], z) = K(x, [y, z])$. Это следует из тождества предыдущего параграфа: $\operatorname{tr}([a, b]c) = \operatorname{tr}(a[b, c])$, где a, b, c — эндоморфизмы конечномерного векторного пространства.

Теорема 11.1. *Пусть L — алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда L полупроста, если и только если ее форма Киллинга невырождена.*

Доказательство. Предположим вначале, что $\operatorname{Rad} L = 0$. Пусть $S = L^{\perp} = \{x \in L,\ K(x, y) = 0,\ y \in L\}$. По определению $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$ для любых $x \in S$, $y \in L$. В частности, $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$, когда $x \in S$, $y \in [S, S]$. По критерию разрешимости Картана алгебра $\operatorname{ad}_L S$ разрешима. Но ядро отображения $\operatorname{ad} : S \to \operatorname{ad}_L S$ равно $Z(L) \cap S$, т. е. является разрешимым идеалом в S. Поэтому S — разрешимая алгебра. Так как S — идеал в L, то $S \subset \operatorname{Rad} L = 0$, т. е. форма Киллинга алгебры L невырождена.

Обратно, пусть $S = 0$. Чтобы доказать полупростоту алгебры L, достаточно установить, что любой абелев идеал I из L содержится в S.

Предположим, что $x \in I$, $y \in L$. Тогда композиция $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ задает отображение $L \to L \to I$ и $(adx \operatorname{ad} y)^2$ отображает L в $[I, I] = 0$. Это означает, что эндоморфизм $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ нильпотентен. Отсюда следует $0 = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = K(x, y)$, т. е. $I \subset S = 0$. $\square$

Используя доказанную теорему и теорему 3.1, получим утверждение, аналогичное теореме 3.4 для ассоциативных алгебр.

Теорема 11.2. *Пусть L — полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда L есть прямая сумма идеалов, каждый из которых является простой алгеброй Ли.*

В доказательстве теоремы 3.1 используется ограничение билинейной формы на идеале алгебры B. Поэтому возникает естественный вопрос: как отличается значение формы Киллинга K_I на идеале I, рассматриваемом как самостояьельная алгебра, и значение формы Киллинга K на алгебре L в ограничении на I? Как показывает приводимая ниже лемма, эти значения совпадают.

Лемма 11.1. *Пусть I — идеал алгебры Ли L. Если K_I — форма Киллинга на идеале I (рассматриваемом как алгебра Ли), а K — форма Киллинга на алгебре L, то $K_I(x, y) = K(x, y)$, когда $x, y \in I$.*

Доказательство. Во-первых, вспомним простой факт из линейной алгебры: если W — подпространство конечномерного векторного пространства V, а φ — эндоморфизм, отображающий V в W, то $\operatorname{tr} \varphi = \operatorname{tr} \varphi|_W$. (Чтобы убедиться в этом, дополним базис пространства W до базиса в V и посмотрим на получившуюся матрицу оператора φ.) Если теперь $x, y \in I$, то $\operatorname{ad} x \ \operatorname{ad} y$ — эндоморфизм пространства L, отображающий L в I. Поэтому его след $K(x, y) = \operatorname{tr} \operatorname{ad} x \ \operatorname{ad} y$ совпадает со следом эндоморфизма $(\operatorname{ad} x \ \operatorname{ad} y)|_I = (\operatorname{ad}_I x)(\operatorname{ad}_I y)$. Так как $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_I x)(\operatorname{ad}_I y) = K_I(x, y)$, то получаем утверждение леммы. □

В § 3 было показано, что радикал конечномерной ассоциативной алгебры A над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль равен $A^\perp = \{x \in A, t(x, y) = 0, y \in A\}$, где $t(x, y) = \operatorname{tr} L_x L_y$. Для алгебры Ли ее радикал также можно описать в терминах функции следа.

Теорема 11.3. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль, а $R = \operatorname{Rad} L$ — ее радикал. Тогда $R = [L, L]^\perp = \{x \in L, \ K(x, [L, L]) = 0\}$.*

Доказательство. Если a — произвольный элемент из L то $A = ka + R$ — подалгебра Ли в L. Очевидно, A — разрешимая алгебра, а поэтому и $\operatorname{ad}_L A$ — разрешимая алгебра линейных операторов, действующих в пространстве L. В силу теоремы Ли существует базис в L, в котором все операторы из $\operatorname{ad}_L A$ одновременно приводятся к треугольному виду. Значит, для любого $b \in R$ матрица оператора $[ada, \operatorname{ad} b]$ имеет строго треугольный вид, т. е. для любого элемента x из $[L, R]$ оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Более того, строго треугольный вид имеет и матрица оператора $\operatorname{ad} a[\operatorname{ad} c, \operatorname{ad} b]$, где $b \in R$, $c \in L$. Таким образом, $K(a, [c, b]) =$

0, а значит $K([a,c],b) = 0$ для $a, c \in L$, $b \in R$. Следовательно, $R \subset [L,L]^{\perp}$.

Докажем обратное включение. Обозначим $I = [L,L]^{\perp}$. По определению ортогонального дополнения имеем $K(I,[L,L]) = 0$. Тем более, $K(I,[I,I]) = 0$. Так как значение формы Киллинга K_I на идеале I совпадает с его значением на всей алгебре (см. лемму 10.3), то $K_I(I,[I,I]) = 0$, т. е. $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_I I[\operatorname{ad}_I I,\ \operatorname{ad}_I I]) = 0$. По критерию разрешимости Картана получаем, что алгебра линейных операторов $\operatorname{ad}_I I$ разрешима, а тогда разрешима и алгебра I. Так как I — кроме того, еще и идеал, то $I = [L,L]^{\perp} \subset R = \operatorname{Rad} L$. Два полученных включения доказывают указанное в теореме равенство. $\square$

§ 12. Корневое разложение

При изучении структуры любой алгебры полезной конструкцией является понятие представления этой алгебры. Приведем соответствующее определение для алгебры Ли.

Определение 12.1. Представлением алгебры Ли L, определенной над полем k в пространстве V над тем же полем, называется гомоморфизм $\rho : L \to \mathrm{gl}_k(V)$, т. е. линейное отображение в алгебру Ли линейных операторов, для которых выполнено условие

$$\rho[x,y] = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x), \quad x, y \in L.$$

В частности, отображение $x \to \operatorname{ad} x$, $x \in L$, называется присоединенным представлением.

Как известно, конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем можно представить в виде прямой суммы корневых пространств относительно любого линейного оператора, действующего в этом пространстве. В некоторых случаях это разложение может быть обобщено.

Определение 12.2. Пусть $\rho : L \to \mathrm{gl}_k(V)$ — представление алгебры Ли L в векторном пространстве V над полем k. Тогда корневым подпространством $V_\alpha(L)$ называется множество $V_\alpha(L) = \{w \in V \mid (\rho(x) - \alpha(x)E)^n w = 0\ \forall x \in L,\ \exists n \in \mathbb{N}\}$, где $\alpha(x) \in k$, E — единичный оператор.

Легко убедиться, что $V_\alpha(L)$ является подпространством в пространстве V.

Лемма 12.1. *Пусть* $A, B \in \operatorname{End}_k V$*, где* V *— конечномерное пространство над полем* k*. Если* $(\operatorname{ad} A)^m B = 0$ *для некоторого натурального* m*, то любое корневое подпространство* $V_\alpha(A) = \{v \in V \mid (A - \alpha(A)E)^n v = 0\ \exists n \in \mathbb{N}\}$*, где* $\alpha(A) \in k$ *инвариантно относительно* B*.*

Доказательство получается с использованием формулы

$$a^k b = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} ((\operatorname{ad} a)^s b) a^{k-s},$$

справедливой для любых двух элементов a, b произвольной ассоциативной алгебры. Формула легко доказывается индукцией по k. □

Предложение 12.1. *Пусть* L *– нильпотентная алгебра Ли и* $\rho : L \to \mathrm{gl}_k V$ *— ее представление в конечномерном пространстве* V *над алгебраически замкнутым полем* k*. Тогда* $V = \bigoplus\limits_{\alpha} V_\alpha(L)$*.*

Доказательство. Как было отмечено выше, пространство V можно записать в виде прямой суммы корневых подпространств $V_\alpha(\rho(x)) = \{v \in V \mid (\rho(x) - \alpha(x)E)^n v = 0\ \exists n \in \mathbb{N}\}$, $\alpha(x) \in K$ для некоторого элемента $x \in L$. В силу нильпотентности алгебры L выполняются условия леммы 12.3. Поэтому каждое корневое подпространство $V_\alpha(\rho(x))$ инвариантно относительно операторов $\rho(y)$ для любого $y \in L$. Повторяя процедуру разложения для каждого инвариантного подпространства, через конечное число шагов получим утверждение предложения. □

Следствие 12.1. Если $\rho : L \to \mathrm{gl}_k V$ — представление нильпотентной алгебры Ли в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, то в этом пространстве существует базис, в котором матрица каждого оператора $\rho(x)$, $x \in L$, имеет вид

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha_1(x) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_1(x) \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \alpha_s(x) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_s(x) \end{matrix}} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Так как нильпотентная алгебра Ли разрешима, то, применяя теорему Ли к представлению алгебры L в каждом корневом пространстве, получим сформулированный результат. □

Функции $\alpha : L \to k$, участвующие в определении корневых подпространств, принято называть корнями. Так как в каждом корневом подпространстве V_α имеется собственный вектор, отвечающий этому корню, т. е. для любого $x \in L$ имеет место равенство $\rho(x)v = \alpha(x)v$, то легко видеть, что функция α линейна. Кроме того, так как $\rho([x, y])v = \rho(x)\rho(y)v - \rho(y)\rho(x)v = \alpha(x)\alpha(y)v - \alpha(y)\alpha(x)v = 0$, то $\alpha([x, y]) = 0$ $\forall x, y \in L$.

§ 13. Подалгебры Картана

Для изучения структуры полупростой и простой алгебр Ли будут использованы разложения, определяемые подалгебрами Картана.

Определение 13.1. Подалгеброй Картана алгебры Ли L называется нильпотентная подалгебра H, которая совпадает со своим нормализатором $N_L(H) = \{x \in L \mid [x, h] \in H \ \forall h \in H\}$.

Так же, как и ранее, в дальнейшем основное поле k предполагается алгебраически замкнутым.

Применим определение 12.2 к присоединенному представлению.

Определение 13.2. Корневым подпространством L_α относительно подалгебры Картана H в алгебре Ли L называется множество вида $\{x \in L \mid (\operatorname{ad} h - \alpha(h)E)^n)x = 0 \ \forall h \in H, \exists n \in \mathbb{N}\}$, где $\alpha(h) \in k \ \forall h \in H$.

Предложение 13.1. *Нильпотентная подалгебра H конечномерной алгебры Ли L является подалгеброй Картана тогда и только тогда, когда $H = L_0 = \{x \in L \mid (\operatorname{ad}^n h)x = 0 \ \forall h \in H, \exists n \in \mathbb{N}\}$.*

Подпространство L_0 в последнем равенстве принято называть нулькомпонентой подалгебры H. Поэтому последнее условие в рассматриваемом предложении означает, что подалгебра H совпадает со своей нулькомпонентой.

Доказательство. Так как H нильпотентна, то существует натуральное m такое, что $H^m = 0$. Поэтому для любого элемента $x \in N_L(H)$ выполняется соотношение $[\ldots[[x, h_1]h_2]\ldots h_{m+1}] = 0$ при любых элементах $h_1, h_2, \ldots, h_{m+1} \in H$. В частности, $(\operatorname{ad}^{m+1} h)x = 0 \ \forall h \in H$. Следовательно, $x \in L_0$, т. е. $N_L(H) \subseteq L_0$. Кроме того, очевидно, что $H \subseteq N_L(H)$. Поэтому если $H = L_0$, то $H = N_L(H)$, т. е. H — картановская подалгебра.

Пусть $H = N_L(H)$, но $H \neq L_0$. Так как в силу нильпотентности H $H \subseteq L_0$, то высказанное предположение о несовпадении H и L_0 равносильно строгому включению $H \subsetneqq L_0$.

Рассмотрим совокупность операторов $\widehat{H} = \{\overline{\mathrm{ad}}H,\ h \in H\}$, действующих в факторпространстве L_0/H по правилу $(\overline{\mathrm{ad}}h)\overline{x}) = \overline{[h,x]}$, где $\overline{y} = y + H$ — элемент из L_0/H. Легко убедиться, что $\widehat{H}$ — алгебра Ли линейных преобразований пространства L_0/H, причем каждый элемент этой алгебры ассоциативно нильпотентен. Используя матричную форму теоремы Энгеля, получим, что в факторпространстве L_0/H существует ненулевой элемент $\overline{x}_0 = x_0 + H$, $x_0 \notin H$, такой, что $(\overline{\mathrm{ad}}h)\overline{x}_0 = \overline{0}\ \forall h \in H$. Последнее соотношение означает, что $[h, x_0] \in H$, когда $x_0 \notin H$, т. е. $N_L(H) \supsetneqq H$. Это противоречит определению картановской подалгебры. Таким образом, предположение о том, что $H \subsetneqq L_0$, неверно, т. е. $H = L_0$. □

Покажем, что в любой конечномерной алгебре Ли существуют подалгебры Картана.

Определение 13.3. Элемент $x_0 \in L$ называется регулярным, если размерность нулькомпоненты $L_0(x_0) = \{y \in L \mid (\mathrm{ad}\, x_0)^n y = 0\ \exists n \in \mathbb{N}\}$ минимальна.

Теорема 13.1. *Пусть L — конечномерная алгебра L и a — регулярный элемент этой алгебры. Тогда нулькомпонента $L_0(\mathrm{ad}\, a) = \{x \in L \mid (\mathrm{ad}^m a)x = 0\ \exists m \in \mathbb{N}\}$ является подалгеброй Картана в L.*

Доказательство. Рассмотрим представление алгебры Ли L в виде прямой суммы $H \oplus L_1$, где $H = L_0(\mathrm{ad}\, a)$ — корневое подпространство для оператора $\mathrm{ad}_L\, a$, отвечающее нулевому корню, а L_1 — сумма корневых подпространств L_α для $\mathrm{ad}_L\, a$, когда $\alpha \neq 0$. В силу леммы 12.3 для любого элемента b из H справедливы включения $[b, H] \subseteq H$, $[b, L_1] \subseteq L_1$. Первое включение указывает, что H — подалгебра. Покажем, что $\mathrm{ad}_H\, b$ — нильпотентный оператор для любого $b \in H$. Выберем базис в алгебре L, согласованный с разложением $L = H \oplus L_1$. Тогда матрица любого оператора $\mathrm{ad}_L\, b$ в этом базисе имеет вид

$$\begin{bmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix},$$

где B_0 — матрица оператора $\mathrm{ad}_H\, b$, B_1 — матрица оператора $\mathrm{ad}_{L_1}\, b$.

Предположим, что существует такой элемент $b \in H$, для которого B_0 — ненильпотентная матрица. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

— матрица оператора $\mathrm{ad}_L\, a$, где A_0 — матрица оператора $\mathrm{ad}_{L_0}\, a$, A_1 — матрица оператора $\mathrm{ad}_{L_1}\, a$.

Из регулярности элемента a следует невырожденность матрицы A_1, т. е. характеристический многочлен $|A_1 - \lambda E|$ не делится на λ. С другой стороны, так как B_0 — ненильпотентная матрица, то λ^l не делит характеристический многочлен $|B_0 - \lambda E|$, где $l = \dim H$.

Пусть $k[\lambda, \mu, \nu]$ — кольцо многочленов от трех переменных. Обозначим $F(\lambda, \mu, \nu) = \det(\lambda E - \mu A - \nu B)$. В силу строения матриц A и B имеем $F(\lambda, \mu, \nu) = F_0(\lambda, \mu, \nu) F_1(\lambda, \mu, \nu)$, где $F_0(\lambda, \mu, \nu) = \det(\lambda E - \mu A_0 - \nu B_0)$, $F_1(\lambda, \mu, \nu) = \det(\lambda E - \mu A_1 - \nu B_1)$. (Символ E каждый раз обозначает единичную матрицу соответствующих размеров.)

Многочлен $F_1(\lambda, 0, 1) = \det(\lambda E - A_1)$ не делится на λ, а многочлен $F_0(\lambda, 0, 1) = \det(\lambda E - B_0)$ не делится на λ^l. Поэтому наибольшая степень λ, на которую делится $F(\lambda, \mu, \nu)$, равна $\lambda^{l'}$, $l' < l$. Так как поле k содержит бесконечное число элементов, то существуют константы $\mu_0, \nu_0 \in k$ такие, что многочлен $F(\lambda, \mu_0, \nu_0)$ не делится на $\lambda^{l'+1}$.

Положим $c = \mu_0 a + \nu_0 b$. Тогда характеристический многочлен

$$\det(\lambda E - \operatorname{ad} c) = \det(\lambda E - \mu_0 A - \nu_0 B) = F(\lambda, \mu_0, \nu_0)$$

не делится на $\lambda^{l'+1}$. Поэтому кратность характеристического корня 0 преобразования $\operatorname{ad} c$ строго меньше l. Это противоречит регулярности элемента a.

Таким образом, каждый оператор $\operatorname{ad}_H b$ нильпотентен для любого $b \in H$. Следовательно, по теореме Энгеля алгебра H нильпотентна. Очевидно, что $H \subseteq L_0(H) = \{y \in H \mid (\operatorname{ad}^m h) y = 0\ \forall h \in H\ \exists m \in \mathbb{N}\}$. С другой стороны, легко видеть, что $L_0(H) \subseteq L_0(\operatorname{ad} a)$. Так как $L_0(\operatorname{ad} a) = H$, то $H = L_0(H)$, т. е. в силу предложения 13.3 H — подалгебра Картана в L. □

Таким образом, для любой алгебры Ли L имеет место разложение $L = H \oplus \sum\limits_{\alpha} L_\alpha$, где H – подалгебра Картана в L, а каждое L_α — корневое подпространство относительно H, отвечающее ненулевому корню.

§ 14. Свойства корней и корневых подпространств

В этом параграфе L будет обозначать конечномерную полупростую алгебру Ли над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, H — ее подалгебру Картана, (a, b) — форму Киллинга $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} a\ \operatorname{ad} b)$ этой алгебры. Как показано в теореме 10.1, в случае когда L полупроста, ее форма Киллинга невырождена.

Для компонент картановского разложения, указанного в конце предыдущего параграфа, из формулы

$$(\operatorname{ad} x-(\alpha+\beta)E)^S[x_\alpha,x_\beta]=\sum_{k=0}^{S}\binom{S}{k}[(\operatorname{ad} x-\alpha e)^k x_\alpha,(\operatorname{ad} x-\beta E)^{S-k}x_\beta]$$

$x_\alpha\in L_\alpha$, $x_\beta\in L_\beta$, $x\in H$, следует, что $[L_\alpha,L_\beta]\subseteq L_{\alpha+\beta}$.

Будем нумеровать рассматриваемые свойства римскими цифрами.

I. Если α и β — любые два корня (включая и 0) и $\beta\neq-\alpha$, то L_α и L_β ортогональны относительно формы Киллинга, т. е. $(L_\alpha,L_\beta)=0$.

Доказательство. Вначале докажем, что $L_0\perp L_\alpha$, когда $\alpha\neq 0$. Пусть $h\in H=L_0$, $e_\alpha\in L_\alpha$, и выберем h' из H так, что $\alpha(h')\neq 0$. Так как ограничение преобразования $\operatorname{ad} h'$ на L_α есть ненулевой скаляр плюс нильпотентное преобразование, то оно невырождено. Отсюда следует, что для любого $k=1,\dots$ можно найти элемент $e_\alpha^{(k)}\in L_\alpha$ такой, что $e_\alpha=[\dots[[e_\alpha^{(k)},\underbrace{h']h']\dots h'}_{k}]$. Поскольку форма Киллинга инвариантна, то имеет место равенство

$$(e_\alpha,h)=([\dots[e_\alpha^{(k)},h'],\dots,h'],h)=(e_\alpha^{(k)},[\underbrace{h',[h',\dots[h'}_{k},h]\dots]]).$$

Так как алгебра H нильпотентна, то число k можно выбрать так, что $[h',\dots[h',h]\dots]=0$. Тогда из приведенного выше соотношения следует, что $(e_\alpha,h)=0$, т. е. $L_\alpha\perp L_0$ когда $\alpha\neq 0$.

Пусть теперь $\beta\neq-\alpha$ и пусть $e_\beta\in L_\beta$. Как и раньше, запишем $e_\alpha=[e_\alpha^{(1)},h']$. Тогда $(e_\alpha,e_\beta)=([e_\alpha^{(1)},h'],e_\beta)=-(h',[e_\alpha^{(1)},e_\beta])$. Если $\alpha+\beta$ — корень, то он не равен нулю и $[e_\alpha^{(1)},e_\beta]\in L_{\alpha+\beta}$. В силу предыдущего случая $(h',[e_\alpha^{(1)},e_\beta])=0$. Если $\alpha+\beta$ — не корень, то $L_{\alpha+\beta}=0$ и снова $(h',[e_\alpha^{(1)},e_\beta])=0$. Итак, в любом случае $(e_\alpha,e_\beta)=0$, т. е. $L_\alpha\perp L_\beta$. □

II. Ограничение формы Киллинга на подалгебре H невырождено. Если α — корень, то $-\alpha$ также корень и L_α и $L_{-\alpha}$ являются дуальными подпространствами относительно (a,b).

Доказательство. Если $z\in H$ и $z\perp H$, то $z\perp L$, поскольку ввиду свойства I $z\perp L_\alpha$ для всех $\alpha\neq 0$. Так как форма (a,b) невырождена на L, то $z=0$, т. е. форма (a,b) невырождена на H.

Если α — корень, а $-\alpha$ не корень, то $L_\alpha\perp L\beta$ для каждого корня β. Тогда $L_\alpha\perp L$, что противоречит невырожденности формы Киллинга.

Для любого $x_{-\alpha}$ из $L_{-\alpha}$ определим линейную функцию $\varphi_{x_{-\alpha}}$ на L_α по правилу $\varphi_{x_{-\alpha}}(x_\alpha)=(x_\alpha,x_{-\alpha})$, $x_\alpha\in L_\alpha$. Из невырожденности формы

Киллинга вытекает, что различным элементам из $L_{-\alpha}$ отвечают различные линейные функции. Следовательно, $\dim L_{-\alpha} \leq \dim L_{\alpha}^*$. Так как $\dim L_{\alpha}^* = \dim L_{\alpha}$, то $\dim L_{-\alpha} \leq \dim L_{\alpha}$. Аналогично, $\dim L_{\alpha} \leq \dim L_{-\alpha}$, т. е. $\dim L_{-\alpha} = \dim L_{\alpha} = \dim L_{\alpha}^* = \dim L_{-\alpha}^*$. Указанная выше конструкция позволяет с помощью формы Киллинга интерпретировать любой элемент из $L_{-\alpha}$ (соответственно из L_{α}) как линейную функцию на L_{α} (соответственно на $L_{-\alpha}$). В силу совпадения размерностей L_{α} и $L_{-\alpha}$ получаем, что эти пространства можно рассматривать как дуальные друг к другу. □

III. Существует l независимых корней, где $l = \dim H$.

Доказательство. Корни являются линейными функциями на H и, следовательно, принадлежат сопряженному к H пространству H^*, $\dim H^* = l$. Если сформулированное в п. III утверждение не верно, то подпространство в H^*, порожденное корнями, имеет размерность $l' < l$. Отсюда следует существование ненулевого вектора $h_0 \in H$ такого, что $\alpha(h_0) = 0$ для любого корня α.

С другой стороны, в силу следствия 12.5 матрицы преобразований $\mathrm{ad}_{L\alpha}\, h$, $h \in H$ одновременно приводятся к виду

$$\begin{bmatrix} \alpha(h) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha(h) \end{bmatrix}.$$

Если $\dim L_{\alpha} = n_{\alpha}$, то получим формулу

$$(h, h') = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \alpha(h) \alpha(h') \tag{1}$$

для любых $h, h' \in H$.

Из этой формулы немедленно получим, что $(h_0, h) = 0\ \forall h \in H$. Полученный результат противоречит утверждению II. □

IV. H — абелева подалгебра.

Доказательство. Как было отмечено в § 12, для любого корня α выполняется равенство $\alpha(h') = 0$ для любого $h' \in H' = [H, H]$. Тогда из формулы (1) получим, что $(h', h) = 0\ \forall h \in H$. В силу невырожденности ограничения формы Киллинга на H это означает, что $h' = 0$, т. е. $[H, H] = 0$. □

Если ρ — любой элемент из H^*, то, поскольку ограничение формы Киллинга на H невырождено, существует однозначно определенный вектор $h_\rho \in H$ такой, что

$$(h, h_\rho) = \rho(h)$$

для любого $h \in H$. Отображение $\rho \to h_\rho$ задает изоморфизм векторных пространств H^* и H. Используя его, определим билинейное отображение на $H^* \times H^*$. А именно, если $\rho, \sigma \in H^*$, то положим

$$(\rho, \sigma) = (h_\rho, h_\sigma).$$

Тогда $(\rho, \sigma) = \rho(h_\sigma) = \sigma(h_\rho)$. Отсюда непосредственно следует, что (ρ, σ) — невырожденная симметрическая билинейная форма на $H^* \times H^*$.

V. Пусть e_α — элемент подпространства L_α такой, что $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$, $h \in H$, и пусть $e_{-\alpha}$ — произвольный элемент подпространства $L_{-\alpha}$. Тогда

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = (e_\alpha, e_{-\alpha})h_\alpha. \tag{2}$$

Доказательство. Имеют место равенства

$$([e_{-\alpha}, e_\alpha], h) = (e_{-\alpha}, [e_\alpha, h]) = -(e_{-\alpha}, \alpha(h)e_\alpha) = -\alpha(h)(e_{-\alpha}, e_\alpha),$$
$$((e_{-\alpha}, e_\alpha)h_\alpha, h) = (e_{-\alpha}, e_\alpha)(h_\alpha, h) = (e_{-\alpha}, e_\alpha)\alpha(h).$$

Соотношение (2) следует из невырожденности скалярного произведения $(h, \widetilde{h})$ в H. □

VI. Каждый ненулевой корень α неизотропен относительно билинейной формы (ρ, σ) в H^*.

Доказательство. Как и в п. V, выберем вектор $e_\alpha \neq 0$ в L_α так, что $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$, и вектор $e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$, удовлетворяющий условию $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$. Последний выбор можно осуществить, поскольку L_α и $L_{-\alpha}$ — дуальные подпространства относительно формы Киллинга.

Для любого элемента ρ из H^* будем считать, что $L_\rho = 0$, если ρ не является корнем. Положим

$$R = ke_\alpha + kh_\alpha + \sum_{s \geq 1} L_{-s\alpha}.$$

Из правила умножения корневых подпространств вытекает, что $\sum\limits_{s \geq 1} L_{-s\alpha}$ является нильпотентной подалгеброй в L, а подпространство $kh_\alpha + \sum\limits_{s \geq 1} L_{-s\alpha}$ есть подалгебра, содержащая $\sum\limits_{s \geq 1} L_{-s\alpha}$ в качестве идеала. Поэтому подалгебра $kh_\alpha + \sum\limits_{s \geq 1} L_{-s\alpha}$ разрешима. Если $x_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$, то $[e_\alpha, x_{-\alpha}]$ является кратным h_α, как это следует из равенства (2). Если же $k > 1$, то $[e_\alpha, L_{-k\alpha}] \subseteq L_{-(k-1)\alpha}$. Кроме того, $[e_\alpha, h_\alpha] = \alpha(h_\alpha) = (\alpha, \alpha)e_\alpha$, т. е. R

— подалгебра в L. Предположим, что $(\alpha,\alpha)=0$. Тогда $kh_\alpha+\sum\limits_{s\geq 1} L_{-s\alpha}$ — идеал в R, т. е. R — разрешимая подалгебра.

Рассмотрим присоединенное представление алгебры R в пространстве L, т.е. каждому элементу x из R сопоставим оператор $\operatorname{ad}_L x\in \operatorname{End} L$. Так как алгебра $\operatorname{ad}_L R$ разрешима, то по теореме Ли существует базис в L, в котором все операторы $\operatorname{ad}_L x$, $x\in R$, одновременно имеют треугольный вид. Но из правила умножения корневых подпространств легко видеть, что каждый оператор $\operatorname{ad}_L e_\gamma$, $\gamma\neq 0$, нильпотентен. В частности, операторы $\operatorname{ad}_L e_\alpha$ и $\operatorname{ad}_L e_{-\alpha}$ имеют строго треугольный вид, т. е. $(e_\alpha,e_{-\alpha})=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_L e_\alpha\ \operatorname{ad}_L e_{-\alpha})=0$. Это противоречит условию $(e_\alpha,e_{-\alpha})=1$. Таким образом, $(\alpha,\alpha)\neq 0$. $\square$

VII. Если α — ненулевой корень, то $\dim L_\alpha=1$. Кроме того, целые кратные $k\alpha$ корня α являются корнями в том и только том случае, когда $k=0,1,-1$.

Доказательство. Пусть e_α, $e_{-\alpha}$, R определены, как в доказательстве утверждения VI. Тогда R будет инвариантным относительно $\operatorname{ad} H$, $h\in H$, подпространством в L, поскольку $[h,e_\alpha]=\alpha(h)e_\alpha$, $[h,h_\alpha]=0$, $[h,L_{-k\alpha}]\subseteq L_{-k\alpha}$, $k\geq 1$. Ограничение преобразования $\operatorname{ad} h$ на $L_{-k\alpha}$ имеет единственный характеристический корень $-k\alpha(h)$. Поэтому

$$\operatorname{tr}\operatorname{ad}_R h=\alpha(h)(1-n_{-\alpha}-2n_{-2\alpha}-\cdots).$$

где $n_\gamma=\dim L_\gamma$. В частности,

$$\operatorname{tr}\operatorname{ad}_R h_\alpha=(\alpha,\alpha)(1-n_{-\alpha}-2n_{-2\alpha}-\cdots). \tag{3}$$

Подалгебра R инвариантна относительно операторов $\operatorname{ad} e_{-\alpha}$ и $\operatorname{ad} e_\alpha$ и поэтому относительно их коммутатора $[\operatorname{ad}_R e_{-\alpha},\operatorname{ad}_R e_\alpha]$, который совпадает с $\operatorname{ad}_R h_\alpha$. Таким образом, $\operatorname{tr}\operatorname{ad}_R h_\alpha=0$. Так как $(\alpha,\alpha)\neq 0$, то из равенства (3) следует, что $1-n_{-\alpha}-2n_{-2\alpha}-\cdots=0$. Это возможно только в том случае, когда $n_{-\alpha}=1$, $n_{-2\alpha}=n_{-3\alpha}=\cdots=0$. Поэтому $-2\alpha,-3\alpha,\ldots$ не являются корнями и $\dim L_{-\alpha}=1$. Так как в этом рассуждении α можно заменить на $-\alpha$, то получим, что $2\alpha,3\alpha,\ldots$ не корни, а $\dim L_\alpha=1$. $\square$

Если α — ненулевой корень, то $L_\alpha=ke_\alpha$ и $[h,e_\alpha]=\alpha(h)e_\alpha$. Кроме того, как следует из равенства (2), $[e_\alpha,e_{-\alpha}]=h_\alpha$, если выбрать e_α и $e_{-\alpha}$ так, чтобы $(e_\alpha,e_{-\alpha})=1$. Тогда $[h_\alpha,e_\alpha]=(\alpha,\alpha)e_\alpha$, $[h_\alpha,e_{-\alpha}]=-\alpha(h_\alpha)e_{-\alpha}=-(\alpha,\alpha)e_{-\alpha}$.

Положим

$$e'_\alpha=e_\alpha,\quad e'_{-\alpha}=\frac{2e_{-\alpha}}{(\alpha,\alpha)},\quad h'_\alpha=\frac{2h_\alpha}{(\alpha,\alpha)}.$$

Тогда
$$[h'_\alpha, e'_\alpha] = 2e'_\alpha, \quad [h'_\alpha . e'_{-\alpha}] = -2e'_{-\alpha}, \quad [e'_\alpha, e'_{-\alpha}] = h'_\alpha.$$
Это таблица умножения простой трехмерной алгебры Ли (см. § 5). Таким образом, получено следующее утверждение.

VIII. Если α — ненулевой корень, то $kh_\alpha + L_\alpha + L_{-\alpha}$ является простой трехмерной алгеброй Ли.

Обозначим через Σ множество всех корней полупростой алгебры Ли L относительно картановской подалгебры H. Введем

Определение 14.1. Пусть $\alpha, \beta \in \Sigma$. Тогда набор функций $\beta + k\alpha$, $-r \leq k \leq q$, $r, q \in \mathbb{N}$, называется α-серией, содержащей β, если каждая из них принадлежит Σ, но $\beta - (r+1)\alpha$, $\beta + (q+1)\alpha$ не принадлежат Σ.

IX. Пусть $\{\beta + k\alpha, \ -r \leq k \leq q\}$ — α-серия, содержащая β. Тогда
$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = r - q. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим подпространство $T = \bigoplus\limits_{k=-r}^{q} L_{\beta + k\alpha}$. Из правила произведения корневых подпространств и определения α-серии вытекает, что подпространство T инвариантно относительно операторов $\operatorname{ad} e_\alpha$ и $\operatorname{ad} e_{-\alpha}$. Поэтому подпространство T инвариантно и относительно оператора $\operatorname{ad} h_\alpha = [\operatorname{ad} e_\alpha, \operatorname{ad} e_{-\alpha}]$. Так как $\operatorname{tr}[\operatorname{ad} e_\alpha, \operatorname{ad} e_{-\alpha}] = 0$, то получим
$$(\beta - r\alpha)(h_\alpha) + (\beta - (r-1)\alpha)(h_\alpha) + \dots + \beta(h_\alpha) + \\ + (\beta + \alpha)(h_\alpha) + \dots + (\beta + q\alpha)(h_\alpha) = 0$$
Заменяя $\beta(h_\alpha)$ на (β, α), а $\alpha(h_\alpha)$ на $\alpha, \alpha)$, имеем
$$(r + q + 1)(\beta, \alpha) + \frac{(r + q + 1)(q - r)}{2}(\alpha, \alpha) = 0,$$
т. е. $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = r - q$. □

X. α-серия, содержащая β, содержит не более четырех корней. Поэтому $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Доказательство. Можно считать, что $\beta \neq \alpha, -\alpha$, поскольку α-серия, содержащая α (соответственно $-\alpha$), состоит из трех корней $-\alpha$, 0, α. Предположим, что α-серия имеет по крайней мере пять корней. Изменяя обозначения, можно считать, что этими корнями являются $\beta - 2\alpha$, $\beta - \alpha$, β, $\beta + \alpha$, $\beta + 2\alpha$. Тогда функции $2\alpha = (\beta + 2\alpha) - \beta$ и $2(\beta + \alpha) = (\beta + 2\alpha) + \beta$ не могут быть корнями. Следовательно, β-серия, содержащая $\beta + 2\alpha$, состоит из одного элемента $\beta + 2\alpha$, т. е. $r = r_{\beta+2\alpha,\beta} = 0$ и $q = q_{\beta+2\alpha,\beta} = 0$. Тогда в силу формулы (4) $(\beta, \beta + 2\alpha) = 0$. Аналогично, $\beta - 2\alpha - \beta$ и $\beta - 2\alpha + \beta$ не могут быть корнями, так что $(\beta, \beta - 2\alpha) = 0$. Складывая эти соотношения, получим $(\beta, \beta) = 0$. Это противоречит факту неизотропности ненулевых корней. Таким образом, $r + q + 1 \leq 4$, где $r = r_{\alpha,\beta}$, $q = q_{\alpha,\beta}$. Из последнего неравенства следует, что $r \leq 3$, $q \leq 3$. Поэтому $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$, равное $r - q$, может принимать только значения 0, ±1, ±2, ±3. $\square$

Так как поле k имеет характеристику 0, то оно содержит в качестве подполя поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Обозначим через $H_0^* = \langle \Sigma \rangle_{\mathbb{Q}}$ Q-пространство, натянутое на корни.

XI. $\dim_{\mathbb{Q}} H_0^* = l = \dim_h H$.

Доказательство. В силу утверждения III в H^* существует l линейно независимых над k корней из Σ. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — базис пространства H^*, где все α_i принадлежат Σ. Для доказательства сформулированного утверждения достаточно показать, что каждый корень β является линейной комбинацией корней α_i с рациональными коэффициентами.

Из вышесказанного имеем, что $\beta = \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i \alpha_i$, $\lambda_i \in k$. Следовательно, $(\beta, \alpha_j) = \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i (\alpha_i, \alpha_j)$, $j = 1, \ldots, l$, и

$$\frac{2(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^{l} \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)\lambda_i}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{5}$$

Коэффициенты $\frac{2(\beta,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$ и $\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$ этой системы — целые числа. Поскольку форма (ρ, σ) невырождена и α_i, $i = 1, \ldots, l$, образуют базис в H^*, то определитель $\det\left(\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\right) = \frac{2}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\alpha_j,\alpha_j)} \det((\alpha_i, \alpha_j))$ отличен от нуля и также целое число. Поэтому система (5) имеет единственное рациональное решение, т. е. все λ_i — рациональные числа. $\square$

XII. Значение формы Киллинга (ρ, σ) является рациональным числом для $\rho, \sigma \in H_0^*$, и форма (ρ, σ) — положительно определенная симметрическая форма на H_0^*.

Доказательство. Принимая во внимание тот факт, что каждое корневое подпространство L_α одномерно, когда $\alpha \neq 0$, можно переписать формулу (1) из утверждения III в виде

$$(h, h') = \sum_{\alpha\in\Sigma} \alpha(h)\alpha(h').$$

Пусть $\rho, \sigma \in H^*$. Тогда

$$(\rho, \sigma) = (h_\rho, h_\sigma) = \sum_{\alpha\in\Sigma} \alpha(h_\rho)\alpha(h_\sigma) = \sum_{\alpha\in\Sigma}(h_\alpha, h_\rho)(h_\alpha, h_\sigma).$$

Поэтому

$$(\rho, \sigma) = \sum_{\alpha\in\Sigma}(\rho, \alpha)(\sigma, \alpha).$$

Пусть теперь β — ненулевой корень. Тогда $(\beta, \beta) = \sum\limits_{\alpha\in\Sigma}(\beta, \alpha)^2$. Предположим, что β-серией, содержащей α, является последовательность $\alpha - r_{\alpha,\beta}\beta, \ldots, \alpha, \ldots, \alpha + q_{\alpha,\beta}\beta$. Из формулы (4) немедленно следует, что $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = r_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta}$ и, соответственно, $(\alpha, \beta) = \frac{r_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta}}{2}(\beta, \beta)$. Поэтому

$$(\beta, \beta) = \sum_{\alpha\in\Sigma} \frac{(r_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta})^2}{4}(\beta, \beta)^2.$$

Так как $(\beta, \beta) \neq 0$, то $(\beta, \beta) = \frac{4}{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma}(r_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta})^2}$ — рациональное положительное число. Следовательно, $(\alpha, \beta) = \frac{r_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta}}{2}(\beta, \beta)$ — рационально для любых корней α и β. Если $\rho, \sigma \in H_0^*$, то $\rho = \sum\limits_{i=1}^{l} \mu_i\alpha_i$, $\sigma = \sum\limits_{j=1}^{l} \nu_j\alpha_j$, $\mu_i, \nu_j \in \mathbb{Q}$, $\alpha_i \in \Sigma$. Тогда $(\rho, \sigma) = \sum\limits_{i,j=1}^{r} \lambda_i\mu_j(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathbb{Q}$. Далее, $(\rho, \rho) = \sum\limits_{\alpha\in\Sigma}(\rho, \alpha)^2 \geq 0$, и из условия $(\rho, \rho) = 0$ следует, что $(\rho, \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma$. Тогда $\rho = 0$, так как Σ порождает H^*, а форма Киллинга (ρ, σ) на H^* невырождена. $\square$

§ 15. Простые системы корней

Введем отношение порядка в рациональном векторном пространстве H_0^*. Для этой цели выберем базис из корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ и назовем вектор $\rho = \sum \lambda_i\alpha_i$, $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, положительным, если первый отличный от нуля коэффициент λ_i положителен. Множество положительных векторов замкнуто относительно сложения и относительно умножения на положительные рациональные числа. Будем говорить, что $\sigma > \rho$ $(\sigma, \rho \in H_0^*)$, если $\sigma - \rho > 0$. Благодаря этому H_0^* становится линейно упорядоченным и, если $\sigma > \rho$, то $\sigma + \tau > \rho + \tau$ и $\lambda\sigma > \lambda\rho$, когда $\lambda > 0$, или $\lambda\sigma < \lambda\rho$, когда $\lambda < 0$ $(\lambda \in \mathbb{Q})$. Назовем введенное таким образом отношение порядка в H_0^* лексикографически упорядочением, определенным упорядоченным множеством корней $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (которые образуют базис пространства H_0^*).

Лемма 15.1. *Пусть $\rho_1, \dots, \rho_k \in H_0^*$. Предположим, что $\rho_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, и $(\rho_i, \rho_j) \leq 0$, если $i \neq j$. Тогда $\rho_1, \dots, \rho_k$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Предположим, что $\rho_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_i \rho_i$, $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. Тогда $\rho_k = \sum \lambda'_q \rho_q + \sum \lambda''_s \rho_s$, где $1 \leq q, s \leq k-1$, $\lambda'_q > 0$, $\lambda'_s \leq 0$. Положим $\sum \lambda'_q \rho_q = \sigma$, $\sum \lambda''_s \rho_s = \tau$. Поскольку $\rho_k > 0$, то $\sigma \neq 0$. В таком случае $(\sigma, \tau) = \sum \lambda'_q \lambda''_s (\rho_q, \rho_s) \geq 0$. Поэтому $(\rho_k, \sigma) = (\sigma, \sigma) + (\sigma, \tau) > 0$.

С другой стороны, $(\rho_k, \sigma) = \sum \lambda'_q (\rho_k, \rho_q) \leq 0$, что приводит к противоречию. Следовательно, $\rho_1, \dots, \rho_k$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. $\square$

Определение 15.1. Корень α называется простым относительно введенного упорядочения в H_0^*, если $\alpha > 0$ и α не может быть записан в виде $\beta + \gamma$, где β, γ — положительные корни.

Теорема 15.1. *Пусть π — совокупность простых корней относительно заданного лексикографического упорядочения в H_0^*. Тогда*

(1) *Если $\alpha, \beta \in \pi$, $\alpha \neq \beta$, то $\alpha - \beta$ не является корнем.*

(2) *Если $\alpha, \beta \in \pi$, $\alpha \neq \beta$, то $(\alpha, \beta) \leq 0$.*

(3) *Множество π образует базис пространства H_0^*. Любой положительный корень β имеет вид $\beta = \sum\limits_{\alpha \in \pi} k_\alpha \alpha$, где k_α — неотрицательные целые числа.*

(4) *Если β — положительный корень и $\beta \notin \pi$, то существует корень $\alpha \in \pi$ такой, что $\beta - \alpha$ является положительным корнем.*

Доказательство. (1) Если $\alpha, \beta \in \pi$ и $\alpha - \beta$ является положительным корнем, то $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$, что противоречит определению α. Если $\alpha - \beta$ — отрицательный корень, то $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$ и опять получаем противоречие.

(2) Пусть $\beta - r\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + q\alpha$ есть α-серия, содержащая β. Тогда $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = r - q$. Так как ввиду утверждения (1) $r = 0$, то $(\alpha, \beta \leq 0)$ в силу неравенства $(\alpha, \alpha) > 0$.

(3) Линейная независимость корней, содержащихся в множестве π, следует из (2) и из леммы. Пусть β — положительный корень и предположим, что каждый корень γ, удовлетворяющий условию $\beta > \gamma > 0$, может быть записан в виде $\sum\limits_{\alpha \in \pi} k_\alpha \alpha$, где k_α — неотрицательные целые

числа. Можно считать, что $\beta \notin \pi$, так что $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\beta_i > 0$. Тогда $\beta_i = \sum\limits_{\alpha \in \pi} k_\alpha^{(i)} \alpha$, где $k_\alpha^{(i)}$ — неотрицательные целые числа. Поэтому $\beta = \sum\limits_{\alpha \in \pi} (k_\alpha^{(1)} + k_\alpha^{(2)})\alpha$, т. е. β записывается в требуемом виде.

Если $\beta < 0$, то $-\beta > 0$. Отсюда $\beta = \sum\limits_{\alpha \in \pi} k_\alpha \alpha$, где k_α — целые неположительные числа. Таким образом, π — базис пространства H_0^*.

(4) Пусть β — положительный корень, $\beta \notin \pi$. Из леммы и утверждения (3) следует существования корня $\alpha \in \pi$ такого, что $(\beta, \alpha) > 0$. Тогда $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = r - q > 0$. Поэтому $r > 0$ и $\beta - \alpha$ является корнем. Если $\beta - \alpha < 0$, то $\alpha - \beta > 0$ и $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$, что противоречит простоте α. Поэтому $\beta - \alpha > 0$, т. е. $\beta - \alpha$ является положительным корнем. $\square$

Свойство (3) доказанной теоремы вполне характеризует простые системы. Действительно, пусть $\pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, $l = \dim H$, — набор корней такой, что каждый корень β может быть записан в виде $\beta = \sum\limits_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$, где k_i — целые числа одного знака. Очевидно, что тогда π — базис H_0^*. Введем лексикографическое упорядочение в H_0^* следующим образом:

$$\sum \lambda_i \alpha_i > 0, \quad \text{если} \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0, \quad \lambda_{s+1} > 0, \quad s < l.$$

Тогда положительными корнями $\beta = \sum k_i \alpha_i$ будут такие, для которых все $k_i \geq 0$ и некоторые $k_i > 0$. Очевидно, что ни один из корней α_i не может быть суммой положительных корней. Поэтому все α_i просты. Следовательно, π является простой системой, определенной этим упорядочением.

Если $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — простая система корней, то матрица (A_{ij}), $A_{ij} = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$, называется матрицей Картана алгебры Ли L (относительно H). Диагональные элементы этой матрицы $A_{ii} = 2$, а элементы вне диагонали A_{ij} равны 0, -1, -2, -3, так как $A_{ij} \leq 0$ в силу п. (2) теоремы 15.3, а в силу свойства X предыдущего параграфа $\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Если $i \neq j$, то корни α_i и α_j линейно независимы, поэтому если θ_{ij} — угол между α_i и α_j, то $0 \leq \cos^2 \theta_{ij} < 1$. Так как $A_{ij} A_{ji} = \frac{4(\alpha_i,\alpha_j)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha_j,\alpha_j)} = 4\cos^2 \theta_{ij}$, то $0 \leq A_{ij} A_{ji} < 4$. Следовательно, либо числа A_{ij} и A_{ji} одновременно равны нулю, либо одно из них равно -1, а другое равно -1, -2, -3.

Выберем элементы $e_{\alpha_i} \in L_{\alpha_i}$, $e_{-\alpha_i} \in L_{-\alpha_i}$ так, что $[e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}] = h_{\alpha_i}$. Обозначим

$$e_i = e_{\alpha_i}, \quad f_i = \frac{2e_{-\alpha_i}}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \quad h_i = \frac{2h_{\alpha_i}}{(\alpha_i, \alpha_i)}.$$

Тогда пространство $\langle e_i, h_i, f_i \rangle$ является простой трехмерной алгеброй Ли с таблицей умножения $[h_i, e_i] = 2e_i$, $[h_i, f_i] = -2f_i$, $[e_i, f_i] = h_i$. Кроме того, $[e_i, f_j] = 0$, если $i \neq j$, так как $\alpha_i - \alpha_j$ не является корнем. Наконец, $[h_j, e_i] = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} e_i = A_{ji} e_i$, $[h_j, f_i] = -A_{ji} f_i$.

Покажем, что $3r$ элементов e_i, f_i, h_i, $i = 1, \ldots, r$, порождают алгебру L. Более того, в L существует базис, таблица умножения в котором полностью определяется числами A_{ij}, т. е. матрицей Картана.

Теорема 15.2. *Множество корней определяется простой системой π и матрицей Картана, т. е. последовательности $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, соответствующие корням $\sum\limits_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$, могут быть восстановлены по матрице (A_{ij}).*

Доказательство. Назовем высотой функции $\beta = \sum\limits_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$, $k_i \in \mathbb{Z}$, число $|\beta| = \sum\limits_{i=1}^{l} |k_i|$. Высота — положительное целое число, и положительными корнями высоты один являются в точности корни из π. Очевидно, достаточно найти все положительные корни. Положительные корни высоты один исчерпываются корнями $\alpha_i \in \pi$. Предположим, что уже известны положительные корни высоты, не превосходящей n. Найдем корни высоты $n + 1$. Согласно теореме 15.3 (п. (4)) эти корни имеют вид $\beta = \alpha + \alpha_j$, где $\alpha > 0$, $|\alpha| = n$, $\alpha_j \in \pi$. Следовательно, требуется определить, какие из сумм $\alpha + \alpha_j$, где $\alpha_j \in \pi$, $|\alpha| = n$, являются корнями.

Если $\alpha = \alpha_j$, то $\alpha + \alpha_j$ не будет корнем. Поэтому можно предположить, что $\alpha = \sum k_i \alpha_i$ и некоторое $k_i > 0$ для $i \neq j$. Тогда линейные формы $\alpha - \alpha_j, \alpha - 2\alpha_j, \ldots, \alpha - k_j \alpha_j$ положительны и имеют высоту меньше n. Следовательно, известно, какие из них являются корнями, т. е. известно число r такое, что α_j-серия, содержащая α, имеет вид $\alpha - r\alpha_j, \ldots, \alpha, \ldots, \alpha + q\alpha_j$. В таком случае

$$q = r - \frac{2(\alpha, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = r - \sum_{i=1}^{l} k_i A_{ji}.$$

Условие $q > 0$ необходимо и достаточно, чтобы сумма $\alpha + \alpha_j$ была корнем. $\square$

Как показывает процедура доказательства последней теоремы, любой положительный корень β может быть записан в виде

$$\beta = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_s},$$

где $\alpha_{i_j} \in \pi$, причем каждая частичная сумма $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_t}$, $t \leq s$, будет корнем. Используя формулы, определяющие действие простой трехмерной алгебры Ли на любом неприводимом модуле, можно показать (см. [3]), что если α, β и $\alpha+\beta$ — ненулевые корни, то $[L_\alpha L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$. Поэтому базис алгебры Ли L можно выбрать в виде e_i, f_i, h_i, $i = 1, \ldots, l$, $[e_{i_1} \ldots e_{i_s}]$, $[f_{i_1} \ldots f_{_s}]$, $s \geq 2$, где набор индексов $i_1, \ldots, i_s$ соответствует номерам простых корней, участвующих в представлении положительного или отрицательного корня. (Здесь для краткости полагаем $[x_1, \ldots, x_m] = [\ldots[[x_1, x_2]x_3] \ldots x_m]$.)

Теорема 15.3. *Пусть β — положительный корень и пусть последовательность $i_1, \ldots, i_s$ определена корнем β. Пусть $1', 2', \ldots, s'$ — перестановка индексов $1, 2, \ldots, s$. Тогда $[e_{i_{1'}} \ldots e_{i_{s'}}]$ отличается от элемента $[e_{i_1} \ldots e_{i_s}]$ рациональным множителем, который определяется матрицей Картана.*

Использя эту теорему, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 15.4. *Пусть $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — простая система корней полупростой алгебры Ли L над алгебраически замкнутым полем P. Пусть e_i, f_i, h_i, $i = 1, \ldots, l$, — образующие алгебры Ли, заданные формулами*

$$\begin{aligned} &[h_i, h_j] = 0, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \quad [h_j e_i] = A_{ji} e_i, \\ &[h_j f_i] = -A_{ji} f_i, \quad i, j = 1, \ldots, l, \end{aligned} \tag{6}$$

и пусть базис h_i, $[e_{i_1} \ldots e_{i_s}]$, $[f_{i_1} \ldots f_{i_s}]$, $s \geq 1$, определен как выше. Тогда таблица умножения в этом базисе имеет рациональные коэффициенты, которые определяются матрицей Картана.

Доказательства обеих теорем (см. [3]) чисто технические, использующие комбинатороные соображения.

Теорема 15.5. *Пусть L и L' — полупростые алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 с подалгебрами Картана H и H' одинаковой размерности l. Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ и $\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l\}$ — простые системы корней алгебр Ли L и L'. Предположим, что матрицы Картана (A_{ij}) и (A'_{ij}) совпадают. Тогда существует изоморфизм φ алгебр L и L' такой, что $\varphi(e_i) = e'_i$, $\varphi(f_i) = f'_i$, $\varphi(h_i) = h'_i$, где e_i, f_i, h_i, e'_i, f'_i, h'_i — канонические образующие этих алгебр.*

Доказательство. Из теоремы 15.4 следует, что сумма $\sum k_i\alpha_i$ является корнем относительно H тогда и только тогда, когда $\sum k_i\alpha'_i$ — корень относительно H'. Если $\beta = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s}$ положительный корень, причем каждая частичная сумма $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_t}$, $t \leq s$, также является корнем, то $\beta' = \alpha'_{i_1} + \cdots + \alpha'_{i_s}$ и $\alpha'_{i_1} + \cdots + \alpha'_{i_t}$, $t \leq s$, — также корни. Тогда теорема 15.7 утверждает, что коэффициенты таблиц умножения в канонических базисах из элементов $[e_{i_1} \ldots e_{e_{i_s}}]$, $[f_{i_1} \ldots f_{i_s}]$, $[e'_{i_1} \ldots e'_{i_s}]$, $[f'_{i_1} \ldots f'_{i_s}]$ совпадают, так как определяются одинаковыми матрицами Картана. Очевидно, что линейное отображение, переводящее соответствующие базисные элементы друг в друга, определяет изоморфизм этих алгебр. $\square$

Понятие простой системы корней определено для полупростой алгебры Ли. Как показано в теореме 11.2, полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 является прямой суммой идеалов, каждый из которых есть простая алгебра. Оказывается, что простая система корней полупростой алгебры Ли является объединением непересекающихся подсистем, каждая из которых является простой системой корней для соответствующей простой алгебры Ли.

Определение 15.2. Простая система корней $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ называется неразложимой, если невозможно разбить π на непустые непересекающиеся множества π' и π'' такие, что $A_{ij} = 0$ для любых $\alpha_i \in \pi'$, $\alpha_j \in \pi''$.

Теорема 15.6. *Алгебра Ли L является простой тогда и только тогда, когда соответствующая ей простая система корней π неразложима.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \cup \{\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_l\}$, $1 \leq k < l$, так что $A_{ij} = 0$, $i \leq k$, $j > k$. Выберем канонические образующие e_i, f_i, h_i и обозначим через L_1 подалгебру, порожденную элементами e_i, f_i, h_i, $i \leq k$. Очевидно, что $L_1 = H_1 + \sum L_\gamma$, где H_1 — подпространство в H, натянутое на h_i, $i = 1, \ldots, k$, а суммирование распространено на те корни γ, которые выражаются через α_i, $i = 1, \ldots, k$. Поэтому $0 \subset L_1 \subset L$. Если $r > k$, $i \leq k$, то $A_{ir} = 0$ и, поскольку $\alpha_i - \alpha_r$ не корень, то $\alpha_i + \alpha_r$ также не будет корнем. Поэтому $[e_i, e_r] = 0$, $[f_i, e_r] = 0$, т. е. и $[h_i, e_r] = 0$. Следовательно, e_r принадлежит нормализатору $N_L(L_1)$ подалгебры L_1. Аналогично, f_r принадлежит нормализатору подалгебры L_1. Поскольку L_1 содержится в своем нормализаторе, то вся алгебра L также содержится в $N_L(L_1)$, т. е. $L = N_L(L_1)$. Поэтому L_1 является идеалом в L, т. е. алгебра L не проста.

Обратно, предположим, что алгебра L не проста. Тогда $L = L_1 \oplus L_2$, где L_i — собственные ненулевые идеалы. Пусть α — ненулевой корень и $e_\alpha \in L_\alpha$. Тогда $e_\alpha = e_\alpha^{(1)} + e_\alpha^{(2)}$, $e_\alpha^{(i)} \in L_i$ и $[h_\alpha, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$. Отсюда следует, что $[h, e_\alpha^{(i)}] = \alpha(h)e_\alpha^{(i)}$. Так как L_α одномерно, то либо $L_\alpha \subset L_1$, либо $L_\alpha \subset L_2$. Поскольку $[L_1, L_2] = 0$, а $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \neq 0$, то либо $L_\alpha + L_{-\alpha} \subset L_1$, либо $L_\alpha + L_{-\alpha} \subset L_2$. В частности, можно перенумеровать канонические образующие e_i и f_i так, что $e_1, f_1, \ldots, e_k, f_k \in L_1$, $e_{k+1}, f_{k+1}, \ldots, e_l, f_l \in L_2$. Поскольку L_i являются ненулевыми идеалами, то $1 \leq k < l$ и $0 = [e_j[e_r, f_r]] = [e_j, h_r] = -A_{jr}e_j$, если $j \leq k$ и $r > k$. Поэтому $A_{jr} = A_{rj} = 0$ и простая система корней разложима. $\square$

§ 16. Схемы Дынкина

Как показывают результаты предыдущего параграфа, для классификации простых алгебр Ли необходимо описать все возможные матрицы Картана. Для этого каждой матрице Картана сопоставляется схема Дынкина. Для этого на плоскости выбираются l точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, соответствующих простым корням, и каждая пара α_i, α_j, $i \neq j$, соединяется $A_{ij}A_{ji}$ отрезками. Кроме того, каждой точке сопоставим вес (α_i, α_i). Если $A_{ij} = 0 = A_{ji}$, то α_i и α_j не соединяются. В противном случае $A_{ij} \neq 0$ и $A_{ji} \neq 0$, поэтому $A_{ij}/A_{ji} = \frac{(\alpha_j,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$. Таким образом, A_{ij}/A_{ji} и $A_{ij}A_{ji}$ могут быть определены из схемы Дынкина. Поскольку $A_{ij} \leq 0$, то этих данных достаточно, чтобы определить A_{ij} и A_{ji}, т. е. восстановить матрицу Картана.

Корни α_i являются линейно независимыми векторами в евклидовом пространстве H_0^* со скалярным произведением (σ, ρ) над полем рациональных чисел. Это пространство может быть погружено в евклидово пространство $E = H_{0\mathbb{R}}^* = \mathbb{R} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} H_0^*$ над полем вещественных чисел. Если обозначить через θ_{ij} угол между α_i и α_j, то $A_{ij}A_{ji} = 4\cos^2\theta_{ij}$ и $\cos\theta_{ij} \leq 0$.

Будем говорить, что конечное множество $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ линейно независимых векторов в евклидовом пространстве над полем вещественных чисел образует допустимую конфигурацию, если $4\cos^2\theta_{ij} = 0, 1, 2, 3$ и $\cos\theta_{ij} \leq 0$ (или $\frac{4(\alpha_i,\alpha_j)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha_j,\alpha_j)} = 0, 1, 2, 3$ и $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$) для любых i, j, $i \neq j$. Таким образом, $\cos\theta_{ij} = 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\theta_{ij} = 90°$, $120°$, $135°$, $150°$. Заменим каждый вектор α_i единичным вектором $u_i = \frac{\alpha_i}{(\alpha_i,\alpha_i)}$.

Тогда указанное условие принимает вид

$$(u_i, u_i) = 1, \quad 4(u_i, u_j) = 0, 1, 2, 3, \quad (u_i, u_j) \leq 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, l.$$

Схема Дынкина (без весов) для допустимой конфигурации π является совокупностью точек u_i, $i = 1, \ldots, l$, и отрезков, соединяющих точки u_i и u_j в количестве $4(u_i, u_j)^2 = 0, 1, 2, 3$.

Допустимая конфигурация π называется неразложимой, если невозможно разбить π на непересекающиеся множества π' и π'' такие, что $(u_i, u_j) = 0$, когда $u_i \in \pi'$, $u_j \in \pi''$. Тогда соответствующая схема Дынкина называется связной, т. е. для любых вершин u_i и u_j существует последовательность вершин $u_{i_1} = u_i, u_{i_2}, \ldots, u_{i_s} = u_j$, такая, что u_{i_j} и $u_{i_{j+1}}$ соединены в схеме некоторым количеством отрезков.

Найдем схемы Дынкина всех неразложимых допустимых конфигураций.

Предложение 16.1. *Схема, получаемая из схемы Дынкина выбрасыванием некоторого количества вершин и инцидентных им отрезков, является схемой Дынкина допустимой конфигурации, получаемой из исходной допустимой конфигурации выбрасыванием вектором, соответствующих этим точкам.*

Доказательство очевидно.

Предложение 16.2. *Если l — число вершин в схеме Дынкина, то число пар точек, соединенных отрезками, меньше l.*

Доказательство. Пусть $u = \sum\limits_{i=1}^{l} u_i$. Тогда $0 < (u, u) = l + 2\sum\limits_{i<j}(u_i, u_j)$. Если $(u_i, u_j) \neq 0$, то $2(u_i, u_j) \leq -1$. Поэтому полученное неравенство показывает, что число пар u_i, u_j таких, что $(u_i, u_j) \neq 0$, строго меньше l. □

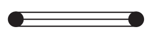
Предложение 16.3. *Схема Дынкина допустимой конфигурации не содержит циклов.*

Доказательство. Подмножество, образующее цикл, было бы схемой допустимой конфигурации, нарушающей предложение 16.2. □

Предложение 16.4. *Число отрезков, исходящих из одной вершины, не превышает трех.*

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — вершины, соединенные с вершиной u. Никакие две вершины v_i не соединены, поскольку в схеме нет циклов. Поэтому $(v_i, v_j) = 0$, $i \neq j$. В пространстве $\langle u, v_1, \ldots, v_k \rangle$, натянутом на векторы u, v_j, $j = 1, \ldots, k$, проведя процесс ортогонолизации, найдем вектор v_0 такой, что $(v_0, v_j) = 0$, $j = 1, \dots, k$, $(v_0, v_0) = 1$. Таким образом, векторы $v_0, v_1, \dots, v_k$ образуют ортонормированный базис пространства $\langle u_0, v_1, \dots, v_k \rangle$. Поскольку u и v_j, $j = 1, \dots, k$, линейно независимы, то $(u, v_0) \neq 0$. Далее, $u = \sum\limits_{j=0}^{k} (u, v_j) v_j$, следовательно, $(u, u) = (u, v_0)^2 + (u, v_1)^2 + \dots + (u, v_k)^2 = 1$. Итак, $\sum\limits_{j=1}^{k} (u, v_j)^2 < 1$, откуда $\sum\limits_{j=1}^{k} 4(u, v_j)^2 < 4$. А это и есть требуемое утверждение, так как $4(u, v_j)^2$ равно числу отрезков, соединяющих u и v_j. $\square$

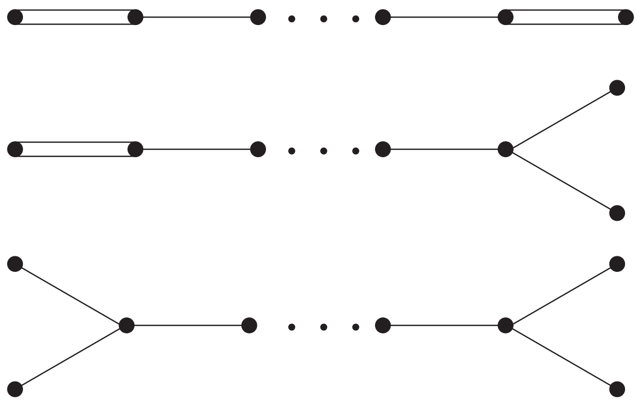
Следствие 16.1. Единственной связной схемой Дынкина, содержащей тройной отрезок, является схема следующего вида:

$G_2 :$ 

Предложение 16.5. *Пусть π — допустимая конфигурация и пусть $v_1, \dots, v_k$ – такие ее векторы, что соответствующие точки схемы образуют простую цепь, т. е. каждая точка соединяется со следующей единственным отрезком. Тогда множество π', состоящее из векторов конфигурации π, не принадлежащих простой цепи $v_1, \dots, v_k$, и вектора $v = \sum\limits_{j=1}^{k} v_j$ является допустимой конфигурацией.*

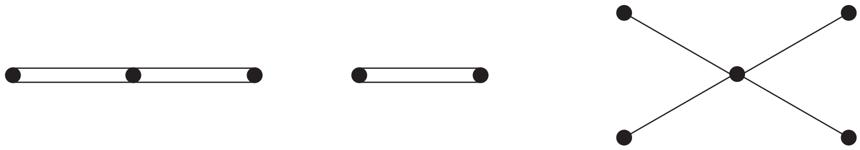
Доказательство. Поскольку в схеме не может быть циклов, то $(v_i, v_j) = 0$, если $i < j$, за исключением случая, когда $j = i + 1$. По условию $2(v_i, v_{i+1}) = -1$, $i = 1, \dots, k-1$. Поэтому $(v, v) = \sum\limits_{i=1}^{k} (v_i, v_i) + 2 \sum\limits_{i=1}^{k-1} (v_i, v_{i+1}) = k - (k-1) = 1$, т. е. v — единичный вектор. Пусть теперь $u \in \pi$, $u \notin \{v_1, \dots, v_k\}$. Тогда u соединяется не более чем с одним из множества $\{v_1, \dots, v_k\}$ опять же по причине отсутствия циклов, т. е. существует j такой, что $(u, v_j) \neq 0$, но $(u, v_i) = 0$, $i \neq j$. В таком случае $(u, v) = \left(u, \sum\limits_{s=1}^{k} v_s\right) = (u, v_j)$. Соответственно, $4(u, v)^2 = 4(u, v_j)^2 = 0, 1, 2, 3$. $\square$

Следствие 16.2. Никакая схема Дынкина не содержит подграфов следующего вида:



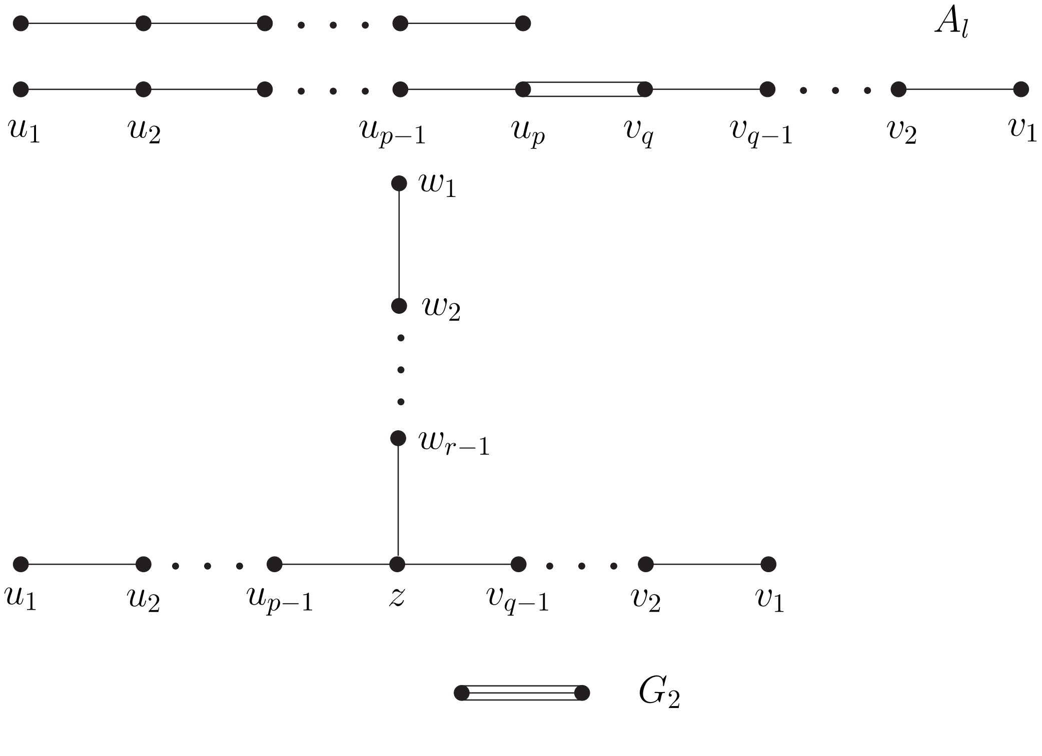
(7)

Доказательство. Если допустимая конфигурация π имеет схему Дынкина, содержащую один из подграфов вида (7), то согласно предложению 16.6 существует допустимая конфигурация π', которая имеет схему Дынкина, содержащую один из подграфов следующего вида:



Полученный результат противоречит предложению 16.4. $\square$

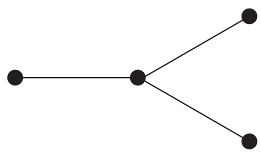
Предложение 16.6. *Любая схема Дынкина может принадлежать лишь к одному из следующих типов*:



(8)

Доказательство. Если связная схема Дынкина S содержит тройной отрезок, то в сиу следствия 16.5 она имеет тип G_2. В силу следствия

16.7 схема S может содержать либо один двойной отрезок, либо один узел, т. е. граф вида



Поэтому все возможности исчерпываются схемами, приведенными в (8). $\square$

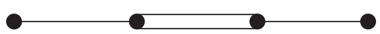
Исследуем теперь, какие значения могут принимать параметры p, q, r во втором и третьем типах в таблице (8).

Для второго типа положим $u = \sum\limits_{i=1}^{p} iu_i$, $v = \sum\limits_{j=1}^{q} jv_j$. Поскольку $2(u_i, u_{i+1}) = -1$, $2(v_j, v_{j+1}) = -1$, то $(u,u) = \sum\limits_{i=1}^{p} i^2 - \sum\limits_{i=1}^{p-1} i(i+1) = p^2 - p(p-1)/2 = \frac{p(p+1)}{2}$, $(v,v) = \frac{q(q+1)}{2}$. Кроме того, $(u,v) = pq(u_p, v_q) = \frac{pq}{2} 2(u_p, v_q)$, $(u,v)^2 = \frac{p^2q^2}{2}$. Так как $(u,v)^2 < (u,u)/(v,v)$ (неравенство строгое, когда векторы не коллинеарны), то $\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)}{2}\frac{q(q+1)}{2}$. Из этого неравенства получаем $\frac{(p+1)(q+1)}{2} > qp$. Последнее неравенство эквивалентно $(p-1)(q-1) < 2$. Поэтому единственными возможностями для положительных целых чисел p и q являются следующие: $p = 1$, q — произвольно, $q = 1$, p — произвольно, $p = q = 2$. Первые два случая отличаются только обозначением. Получаем

Предложение 16.7. *Связными схемами Дынкина второго типа в таблице* (8) *могут быть только*:

 $B_l = C_l$

(9)

 F_4

Рассмотрим третий тип из (8). Положим $u = \sum\limits_{i=1}^{p-1} iu_i$, $v = \sum\limits_{j=1}^{q-1} jv_j$, $w = \sum\limits_{k=1}^{r-1} kw_k$. Векторы u, v, w ортогональны, и z не лежит в пространстве $\langle u, v, w\rangle$. Поэтому если обозначить через θ_1, θ_2, θ_3 углы между z и u, v, w, то $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 < 1$ (см. доказательство предложения 16.4). Тогда

$$\cos^2\theta_1 = \frac{(u,z)^2}{(u,u)(z,z)} = \frac{\frac{1}{4}(p-1)^2}{\frac{p(p-1)}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Аналогично

$$\cos^2\theta_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right), \quad \cos^2\theta_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right).$$

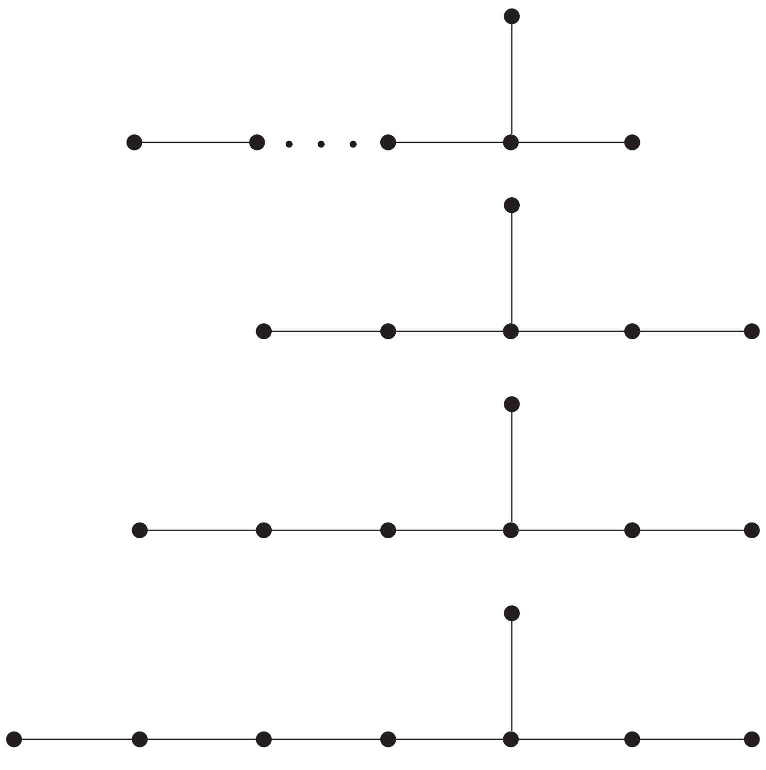
Так что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \tag{10}$$

Предположим, что $p \geq q \geq r \geq 2$. Тогда $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r}$. Из (10) следует, что $\frac{3}{r} > 1$. Поскольку $r \geq 2$, то $r = 2$. Тогда из (10) имеем $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} > \frac{1}{2}$. Поэтому $\frac{2}{q} > \frac{1}{2}$, т. е. $q < 4$. Так как $q \geq 2$, то возможны два случая. Первый случай, когда $q = 2$. Тогда соотношение (10) примет вид $\frac{1}{p} > 0$, которое выполняется при любом положительном p. Второй случай, когда $q = 3$. Тогда $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$, т. е. $p = 3, 4, 5$.

Сформулируем полученный результат.

Предложение 16.8. *Единственными связными схемами Дынкина третьего типа в таблице* (8) *являются слеюующие схемы*:



D_l

E_6

(11)

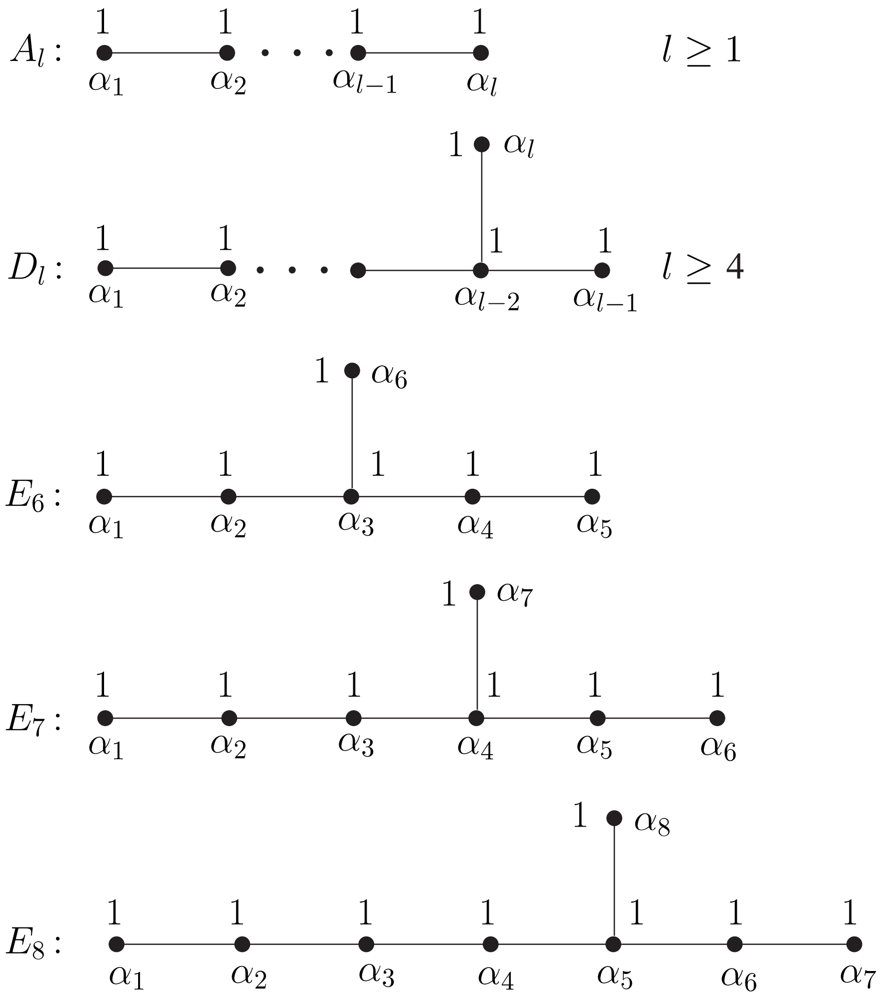
E_7

E_8

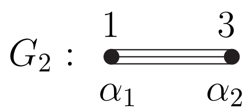
Суммируя полученные результаты, приходим к следующему утверждению.

Теорема 16.1. *Все связные схемы Дынкина исчерпываются схемами* A_l, $l \geq 1$, $B_l = C_l$, $l \geq 2$, D_l, $l \geq 4$ *и пятью “исключительными”* G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, *указанными в таблицах* (8), (9), (11).

Как было отмечено ранее, для восстановления матрицы Картана по схеме Дынкина необходимо последнюю снабдить весами. Поскольку ничего не изменится, если все корни α_i умножить на некоторое фиксированное число, отличное от нуля, то можно допустить, что один из α_i есть единичный вектор. Если в схеме встречаются только одинарные отрезки, то для ненулевых A_{ij} и A_{ji} имеем $A_{ij}A_{ji} = 1$, $\frac{A_{ij}}{A_{ji}} = \frac{(\alpha_j,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$, т. е. все веса (α_i, α_i) равны единице. Поэтому схемы типов A_l, D_l, E_6, E_7, E_8, снабженные весами имеют вид:

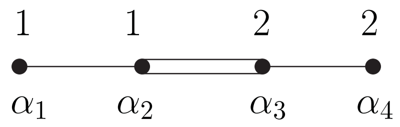


Если в схеме есть тройная связь, то она только одна, и из соотношений $A_{12}A_{21} = 3$, $\frac{A_{12}}{A_{21}} = \frac{(\alpha_2.,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)}$ вытекает схема:

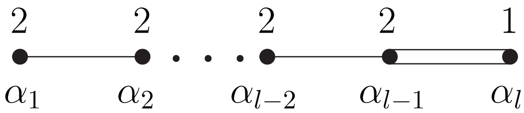


Если в схеме есть двойная связь, то она тоже только одна, и из соотношений $A_{i\,i+1}A_{i+1\,i} = 2$, $\frac{A_{i,i+1}}{A_{i+1,i}} = \frac{(\alpha_{i+1},\alpha_{i+1})}{(\alpha_i,\alpha_i)}$ вытекает следующий вид схем Дынкина:

F_4 :

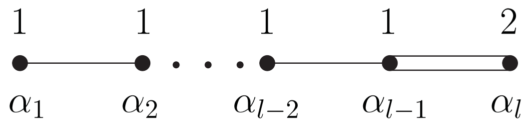


B_l :



$l \geq 2$

C_l :



$l \geq 3$

Эти схемы дают все возможные матрицы Картана.

§ 17. Построение алгебр

Для того чтобы убедиться, что лишних схем Дынкина или соответствующих матриц Картана в полученной классификации нет, необходимо определить простые алгебры Ли с заданными схемами Дынкина. Проведем это построение только для алгебр серии A_l.

Пусть M_{l+1} — алгебра квадратных матриц размера $(l+1) \times (l+1)$ над полем k, L — подпространство в M_{l+1}, состоящее из матриц со следом 0. Хорошо известно, что L — простая алгебра Ли относительно стандартной операции коммутирования, если характеристика поля k нулевая. Обозначим через e_{ij}, $i, j = 1, \ldots, l+1$, матричные единицы алгебры M_{l+1}. Для матричных единиц выполняются соотношения

$$e_{ij}e_{km} = \delta_{jk}e_{im}, \quad \sum_{i=1}^{l+1} e_{ii} = 1.$$

Базис алгебры L состоит из элементов вида

$$h_k = e_{kk} - e_{l+1,l+1}, \quad k = 1, \ldots, l; \quad e_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, l+1.$$

Положим $h = \sum\limits_{k=1}^{l} \omega_k h_k$. Тогда множество элементов h образует абелеву подалгебру H размерности l, причем

$$[h, e_{rs}] = (\omega_r - \omega_s)e_{rs},$$

$$[h, e_{r,l+1}] = (\gamma + \omega_r)e_{r,l+1}, \quad \gamma = \sum_{j=1}^{l} \omega_j,$$

$$[h, e_{l+1,r}] = -(\gamma + \omega_r)e_{l+1,r}, \quad r \neq s, \quad r, s = 1, \ldots, l.$$

Линейные функции $h \to \omega_r - \omega_s$, $h \to \gamma + \omega_r$, $h \to -(\gamma + \omega_r)$ различны и являются ненулевыми корнями относительно H. Имеет место разложение $L = H \oplus \Sigma L_\alpha$, где α пробегает множество этих корней, а $L_\alpha = ke_{rs}$. Следовательно, H — подалгебра Картана, а α — ненулевые корни. Положим

$$\alpha_1 = \omega_1 - \omega_2, \dots, \alpha_{l-1} = \omega_{l-1} - \omega_l, \quad \alpha_l = \gamma + \omega_l.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_l = \gamma + \omega_k, \quad k = 1, \dots, k-1; \\ \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j = \omega_i - \omega_{j+1}, \quad 1 \le i \le j \le l-1. \end{gathered} \tag{12}$$

Из этих формул следует, что каждый корень имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$, где k_i — целые числа, и либо $k_i \ge 0$ для всех i, либо $k_i \le 0$ для всех i. Поэтому α_i, $i = 1, \dots, l$, образуют простую систему корней алгебры L относительно H. Соотношения (12) показывают, что $\alpha_i + \alpha_{i+1}$ — корень, если $1 \le i \le l-1$, а $\alpha_i + 2\alpha_{i+1}$ не является корнем, так же как $\alpha_i + \alpha_j$, когда $j > i+1$. Это означает, что элементы A_{ij} матрицы Картана принимают следующие значения:

$$\begin{gathered} A_{i+1,i} = A_{i,i+1} = -1, \quad 1 \le i < l, \\ A_{ij} = 0, \quad \text{если} \quad j > i+1 \quad \text{или} \quad j < i-1. \end{gathered}$$

Поэтому схема Дынкина этой алгебры есть связная простая цепь:

$$A_l : \begin{array}{ccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ \bullet & \text{———} & \bullet & \cdots & \bullet & \text{———} & \bullet \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_{l-1} & & \alpha_l \end{array}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 17.1. *Пусть L — алгебра Ли всех линейных преобразований со следом 0 в $(l+1)$-мерном векторном пространстве над полем k характеристики 0. Тогда L — простая алгебра Ли типа A_l.*

Литература

[1] Хамфрис Дж. *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* – М.: МЦМНО, 2003. – 216 с.

[2] Капланский И. *Алгебры Ли и локально компактные группы.* – М.: Мир, 1974. – 148 с.

[3] Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* – М.: Мир, 1964. – 355 с.

[4] Пирс Р. *Ассоциативные алгебры.* – М.: Мир, 1986. – 541 с.

[5] Херстейн И. *Некоммутативные кольца.* – М.: Мир, 1972. – 191 с.

[6] Чеботарев Н.Г. *Введение в теорию алгебр.* – М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1949. – 88 с.

Оглавление