Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт вычислительной математики и информационных технологий

Е.Л.Столов

Алгебра и геометрия

Краткий конспект лекций

Казань 2013

Столов Е.Л. Алгебра и геометрия: Краткий конспект лекций / Е.Л. Столов.; Каз.федер.ун-т. – Казань, 2013. – 35 с.

Аннотация

В предлагаемых лекциях изучаются базовые понятия линейной алгебры и аналитической геометрии: матрицы, определители, системы линейных уравнений, векторная алгебра, прямая и плоскость. Изложение начинается с введения понятия комплексных чисел на основе вещественных чисел. Дается определение бинарной операции, формулируются ее свойства (коммутативность, ассоциативность, существование нейтрального элемента, существование обратного элемента.) Далее по этой же схеме вводится понятие матриц и определяются операции над ними. Точно так же рассматриваются операции векторной алгебры. Элементы геометрии вводятся после изложения теории систем линейных уравнений. Прямая и плоскость рассматриваются как решения линейных систем специального вида.
В процессе изучения данного курса студенты выполняют стандартные задания и проходят через тестирование в автоматическом режиме. Контрольные вопросы для самопроверки помещены на сайте курса

Принято на заседании кафедры системного анализа и информационных технологий
Протокол № XX от XX.XX.2013

©Казанский федеральный университет

©Столов Е.Л

Направление подготовки : 010300.62: "Фундаментальная информатики и информационные технологии" (бакалавариат, 1 курс, 1 семестр; очное обучение)

Дисциплина : "Алгебра и геометрия"

Количество часов : 144 (в том числе : лекции - 36, практические занятия - 54, самостоятельная работа - 54; форма контроля: экзамен (1-й семестр)).

Темы 1. Комплексные числа. 2. Алгебра матриц. 3. Определитель матрицы. 4. Обратная матрица и формулы Крамера. 5. Линейное пространство 6. Ранг матрицы. 7. Общее решение системы линейных уравнений. 8. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. 9. Уравнение прямой на плоскости. 10. Уравнения прямой и плоскости в пространстве. 11. Взаимное расположение объектов на плоскости. Вычисление площади треугольника. 12. Взаимное расположение объектов в пространстве. Вычисление объема пирамиды.

Ключевые слова : *комплексные числа, матрица, определитель, системы линейных уравнений, прямая и плоскость.*

Дата начала использования : 1 сентября 2010 г.

Автор : Столов Евгений Львович, профессор, доктор технических наук.

Содержание

1 Комплексные числа

Аннотация. Дается определение бинарной операции и ее свойств. Известные свойства вещественных чисел формулируются в терминах данных определений. Вводится понятие комплексного числа. Задаются операции над комплексными числами и доказываются основные свойства этих операций. Дается определение поля и приводятся примеры различных полей.
Ключевые слова. Бинарная операция, комплексное число, поле.

1.1 Вещественные числа

Множество вещественных чисел обозначим через R. Напомним свойства операции сложения.

1. Сумма вещественных чисел есть снова вещественное число - замкнутость
2. $a, b \in R, \quad a + b = b + a$ – коммутативность
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ – ассоциативность
4. $a + 0 = a$ – существование нуля (нейтрального элемента)
5. $a + (-a) = 0$ – существование противоположного элемента

Вычитание не является отдельной операцией, вычитание определяется через сложение: $a - b = a + (-b)$. Свойства операции умножение

1. Произведение вещественных чисел есть снова вещественное число - замкнутость
2. $ab = ba$ – коммутативность
3. $a(bc) = (ab)c$ – ассоциативность
4. $a1 = a$ – существование единицы (нейтрального элемента)
5. $aa^{-1} = 1, a \neq 0$ – существование обратного элемента

Точно так же не является отдельной операцией деление. По определению, $a/b = ab^{-1}, b \neq 0$.
Связь сложение и умножения
$a(b + c) = ab + ac$ – дистрибутивность.
Отметим неравноправность операций сложения и умножения. Она заключается в том, что

1. обратный по сложению элемент существует для всех чисел, а для умножения — требуется неравенство нулю числа
2. в законе дистрибутивности нельзя поменять местами сложение и умножение

1.2 Комплексные числа

Основная идея – определение новых объектов с помощью известных. Вещественные числа расположены на прямой. При переходе на плоскость получаем комплексные числа.

Определение 1 *Комплексным числом называется пара вещественных чисел $z = (a, b)$. Число $a = Re(z)$ называется вещественной частью, а $b = Im(z)$ – мнимой частью комплексного числа .*

В дальнейшем множество комплексных чисел обозначается через C

1.3 Операции над комплексными числами

Определение 2 *Комплексные числа z_1, z_2 равны $z_1 = z_2 \Leftrightarrow Re(z_1) = Re(z_2) \& Im(z_1) = Im(z_2)$.*

Следующие утверждения сразу вытекают из определений.
Сложение задается формулой: $z = z_1 + z_2 \Leftrightarrow Re(z) = Re(z_1) + Re(z_2) \& Im(z) = Im(z_1) + Im(z_2)$. Число$(0,0)$ обозначается через 0. Это нейтральный элемент. В геометрической интерпретации сложение комплексных чисел сводится к сложение соответствующих векторов. Операция сложения комплексных чисел обладает свойствами аналогичными свойствам 1-5 сложения вещественных чисел. Это проверяется непосредственно.
Умножение комплексных чисел $z = z_1 z_2$ задается формулой:

$$Re(z) = Re(z_1)Re(z_2) - Im(z_1)Im(z_2) \& Im(z) = Im(z_1)Re(z_2) + Im(z_2)Re(z_1).$$

Умножение комплексных чисел обладает свойствами замкнутости, коммутативности и ассоциативности. Все эти свойства следуют из свойств вещественных чисел. Число (1,0) обозначается через 1. Оно является нейтральным элементом по умножению. Для числа $z = (a, b) \neq 0$ обратный по умножению задается формулой:

$$z^{-1} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}).$$

Сложение и умножение комплексных чисел связано законом дистрибутивности.
Комплексное число $z = (a, b)$ лежит на вещественной оси, если $b = Im(z) = 0$. В этом случае это число можно рассматривать и как вещественное число и как комплексное число. Результаты операций над такими числами не зависят от точки зрения, а вместо числа $(c, 0)$ будем писать c. Если $c \in R$ и $z = (a, b) \in C$, то $cz = (ca, cb)$.

Определение 3 *Число $(0, 1)$ обозначается через i и называется мнимой единицей.*

В этих обозначениях получаем запись комплексного числа в алгебраической форме: $z = (a, b) = a + ib$. Здесь записан результат сложения комплексных чисел $(a, 0)$ и произведения $(b, 0)(0, 1)$. Исторически формула для умножения комплексных чисел возникла естественным образом из закона дистрибутивности, если учесть, что $i^2 = -1$.

Формально закон дистрибутивности выводится из формул сложения и умножения комплексных чисел.
Как было замечено ранее, множество вещественных чисел и множество комплексных чисел обладают свойствами, формулируемыми одинаково.

Определение 4 *Полем называется множество P, содержащее не менее двух элементов, в котором определены две операции: сложение и умножение. P замкнуто относительно этих операций, операции коммутативны, ассоциативны, обладают нейтральными элементами 0 по сложению и 1 по умножению. Для любого элемента есть противоположный по сложению, а для $a \in P, a \neq 0$ существует обратный по умножению. Сложение и умножение связаны законом дистрибутивности.*

Таким образом, множества вещественных и комплексных чисел являются полями. Еще один пример поля — множество рациональных чисел, которое обозначим через $\mathbf{Q}$. Другой пример — множество чисел виде $a + b\sqrt{2},\ a, b \in Q$. Доказательство последнего утверждения предоставляется читателю. Это поле обозначается символом $\mathbf{Q}[\sqrt{\mathbf{2}}]$.

1.4 Операция сопряжения

Определение 5 *Число $a - ib$ называется сопряженным к $z = a + ib$ и обозначается как $\bar{z}$.*

Из этих определений вытекают формулы

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Определение 6 *Модулем числа $z = a + ib$ называется вещественное число $\sqrt{a^2 + b^2}$ и обозначается через $|z|$*

Из определения следует, что

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \quad z\bar{z} = |z|^2$$

Равенство $z = \bar{z}$ равносильно вещественности этого числа. В этих обозначениях обратное к ненулевому числу z задается формулой $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$,

1.5 Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Аргумент числа отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки. Связь между алгебраической формой тригонометрической формой определяется формулой

$$z = a + ib = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)).$$

Из совпадения модулей и аргументов двух комплексных чисел следует совпадение этих чисел.
Замечание Из совпадения комплексных чисел следует равенство их модулей, однако, аргументы не обязаны совпадать, они могут различаться на число кратное 2π.

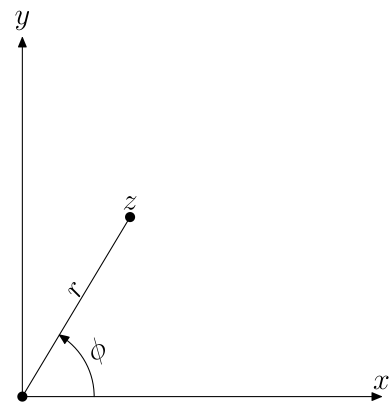

Рис. 1: Модуль и аргумент числа

Предложение 1 *Умножение двух чисел в тригонометрической форме определяется формулой*

$$z_1 z_2 = r_1(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1)) r_2(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2)) = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$$

В качестве следствия получаем формулу $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Если $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$, то $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$.

2 Алгебра матриц

Аннотация. Дается понятие прямоугольной матрицы и определяются операции над матрицами: сложение, умножение, транспонирование. Также вводится внешняя операция — умножение матрицы на число. Доказываются свойства введенных операций.
Ключевые слова. Матрица, сложение матриц, умножение матриц, умножение матрицы на число, транспонирование матрицы.

2.1 Основные определения

Определение 7 *Матрицей A размера $m \times n$ m называется таблица, состоящая из m строк и n столбцов вида*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементами матрицы являются числа или элементы произвольного поля. В дальнейшем используем обозначения $A[i|j] = a_{ij}$, $A[i|*]$ строка с номером i, $A[*|j]$ столбец с номером j.

Определение 8 *Две матрицы* A, B *одного размера называются равными, если* $A[i|j] = B[i|j], \quad i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n$

Определение 9 *Суммой двух матриц* A, B *одного размера называется матрица* $C = A + B \Leftrightarrow C[i|j] = A[i|j] + B[i|j]$

Множество матриц одного размера обладает следующими свойствами относительно операции сложения

1. замкнутость
2. коммутативность
3. ассоциативность
4. существование нейтрального элемента
5. существование противоположного элемента

Нейтральный элементом является нулевая матрица, обозначаемая через Θ.

2.2 Умножение матриц

Операция умножения матриц определяется менее очевидным образом.

Определение 10 *Матрица* C *размера* $m \times l$ *называется произведением двух матриц* A *размера* $m \times n$ *и* B *размера* $n \times l$ *если*

$$C[i|j] = \sum_{k=1}^{n} A[i|k]B[k|j]$$

Множество всех матриц размера $m \times n$ не будет замкнутым относительно операции умножения за исключением случая $m = n$. В последнем случаем операция умножения не является коммутативной при $m > 1$.

Предложение 2 *Умножение матриц ассоциативно. Если даны матрицы* A *размера* $m \times n$, B *размера* $n \times l$ *и* C *размера* $l \times q$, *то* $(AB)C = A(BC)$

2.3 Законы дистрибутивности

Сложение и умножение матриц связаны законами дистрибутивности

$$A(B + C) = AB + AC \quad (A + B)C = AC + BC$$

В этих формулах размеры матрицы согласованы таким образом, чтобы операции имели смысл. В силу отсутствия коммутативности умножения матриц, записываем обе формулы.

Определение 11 *Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы, называются главной диагональю этой матрицы, или просто диагональю.*

Иногда указанное определение распространяют и на случай прямоугольных матриц.

Определение 12 *Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется диагональной. Такая матрица задается лишь диагональными элементами* $d_1, ..., d_n$ *и обозначается как* $D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$.

Определение 13 *Единичной матрицей* I_n *называется диагональная матрица порядка* n $I_n = diag(1, 1, ..., 1)$ *, или* $I_n[i|j] = \delta_{ij}$ *, где* δ_{ij} *– символ Кронекера, то есть величина равная 1 при совпадении индексов и нулю в противном случае.*

Предложение 3 *Для матрицы* A *размера* $m \times n$ *справедливы формулы* $I_m A = AI_n = A$. *Это означает, что единичная матрица является нейтральным элементом по умножению.*

2.4 Умножение матрицы на число

Определение 14 *Матрица* A *есть произведение матрицы* B *на число* b *(* $A = bB$,*) если* $A[i|j] = bB[i|j]$

Эта операция обладает следующими очевидными свойствами

$$a(A + B) = aA + aB, (a + b)A = aA + bA, (ab)C = a(bC), a(BC) = (aB)C = B(aC)$$

Здесь имеют дело с внешней операцией, а не с бинарной операции, поскольку операнды являются разными объектами. Умножение матрицы на число a можно заменить умножением этой матрицы на диагональную матрицу, все диагональные элементы которой равны этому числу.

2.5 Транспонирование матрицы

Определение 15 *Матрица* B *называется транспонированной к матрице* A, *если* $B[i|j] = A[j|i]$. *Транспонированная матрица к* A *обозначается* A^T.

Предложение 4 *Справедливы формулы :* $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$

3 Определитель матрицы

Аннотация. Вводится понятие перестановки из n чисел и ее четности. Дается определение определителя матрицы и устанавливаются основные свойства определителя.
Ключевые слова. Перестановка, подстановка, четность перестановки, определитель матрицы, определитель треугольной матрицы.

3.1 Перестановки и подстановки

Определение 16 *Перестановкой чисел $1, ..., n$ называется запись этих чисел в произвольном порядке $i_1, i_2, ..., i_n$. Две перестановки чисел $1, ..., n$ называются равными. если в них на одинаковых местах стоят одинаковые числа.*

Всего сущестуют $n!$ различных перестановок из n чисел.

Определение 17 *Пара чисел i_k, i_j в перестановке образует инверсию, если при $k < j$ имеет место неравенство $i_k > i_j$. Четность числа инверсий в перестановке называется четностью этой перестановки.*

Определение 18 *Транспозицией в перестановке называется замена местами двух элементов этой перестановки.*

Теорема 1 *Любая транспозиция меняет четность перестановки на противоположную.*

3.2 Подстановки

Определение 19 *Подстановкой из n чисел называется взаимно однозначное отображение f множества из первых n натуральных чисел на себя.*

Подстановка задается таблицей, где верхняя строка состоит из аргументов, а нижняя из значений функции.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ f(1) & f(2) & ... & f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix}$$

Из определения следует, что меняя местами столбцы в таблице, не меняем подстановку. Подстановка называется четной, если обе строки таблицы имеют одинаковую четность, и нечетной иначе. Поскольку транспозиция столбцов таблицы сводится к одновременной транспозиции в обеих стоках таблицы, значение четности подстановки не зависит от выбора таблицы.

3.3 Определитель

Определение 20 *Определителем матрицы A порядка n называется число*

$$det(A) = |A| = \sum \pm A[1|i_1]A[2|i_2] \cdots A[n|i_n],$$

где суммирование ведется по всем перестановкам из n чисел, а каждое слагаемое берется со знаком плюс или минус в зависимости от четности перестановки.

Переставляя сомножители в каждом слагаемом, получим эквивалентную формулу. Запишем определитель в виде

$$|A| = \sum \pm A[k_1|j_1]A[k_2|j_2]\cdots A[k_n|j_n],$$

где суммирование ведется по всем подстановкам, а знак определяется четностью подстановки.
Из определения следует, что в каждом слагаемом присутствуют представители каждой строки и каждого столбца матрицы. Например,

$$det(a_{11}) = a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3.4 Свойства определителя

1. $|A| = |A^T|$. Из данного свойства вытекает, что все утверждения, сформулированные для строк, справедливы и для столбцов.
2. Если одна строка матрицы состоит из нулей, то ее определитель равен нулю
3. Если строку матрицы умножить на число, то ее определитель умножится на это число
4. Если в матрице поменять местами две строки, то ее определитель поменяет знак на противоположный.
5. Определитель матрицы с равными строками равен нулю
6. Определитель матрицы с пропорциональными строками равен нулю
7. Если $A[i|*] = A'[i|*] + A''[i|*]$, то

$$\begin{vmatrix} A[1|*] \\ \ldots\ldots \\ A[i|*] \\ \ldots.. \\ A[n|*] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A[1|*] \\ \ldots\ldots \\ A'[i|*] \\ \ldots.. \\ A[n|*] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A[1|*] \\ \ldots\ldots \\ A''[i|*] \\ \ldots.. \\ A[n|*] \end{vmatrix}$$

Каждую строку матрицы A порядка n можно рассматривать как матрицу размера $1 \times n$. В этом смысле определены сумма строк и произведение строки на число.

Определение 21 *Строка $A[i|*]$ есть линейная комбинация строк $B[1|*], ..., B[k|*]$, если существуют числа $b_1, .., b_k$ такие, что $A[i|*] = b_1B[1|*]+b_2B[2|*]+\cdots+b_kB[k|*]$.*

Из предыдущего свойства следует

1. Если какая-то строка матрицы есть линейная комбинация остальных строк, то определитель матрицы равен нулю

2. Если какой-то строке матрицы прибавить линейную комбинацию остальных строк, то определитель матрицы не изменится

Вычисление определителей высокого порядка на основе определения является неэффективным. На практике пытаются упростить вид матрицы таким образом, что в ней появились нулевые элементы. В то же время, конечный результат зависит не только от числа нулей в матрице, но и от их взаимного расположения. Особенно простой результат получается, если удается свести матрицу к треугольной форме.

Определение 22 *Матрица называется верхней треугольной, если* $A[i|j] = 0, i > j$. *Транспонированная к ней матрица называется нижней треугольной.*

Примером верхней треугольной матрицы является матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Предложение 5 *Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

4 Обратная матрица и формулы Крамера

Аннотация. Доказывается формула разложения определителя по строке, с помощью которой строится матрица обратная к невырожденной матрице. Выводятся формулы Крамера, позволяющие найти решение системы линейных уравнений с невырожденной матрицей системы. Доказывается теорема об определителе произведения матриц и устанавливается необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя **Ключевые слова.** Алгебраическое дополнение, разложение определителя по строке, обратная матрицы, формулы Кармера, определитель произведения матриц

В этой лекции рассматриваются только квадратные матрицы. Введем обозначения. Пусть A матрица размера $n \times n$. Символ $A(i|j)$ обозначает матрицу, полученную из исходной вычеркиванием стоки с номером i и столбца с номером j. Определитель этой матрицы называется минором порядка $n-1$, а число $(-1)^{i+j}|A(i|j)|$ называется алгебраическим дополнением к элементу $A[i|j] = a_{ij}$ исходной матрицы. Алгебраическое дополнение обозначается символом A_{ij}.

4.1 Разложение определителя по строке или столбцу

Теорема 2 *Справедливы формулы*

$$|A| = \sum_j a_{ij}A_{ij} = \sum_j a_{ij}A_{ij} \tag{1}$$

Первая из этих формул называется разложением определителя по строке с номером i, а вторая — разложением по столбцу с номером i.

Предложение 6 *Справедливы формулы*

$$\sum_k a_{ik}A_{jk} = \sum_k a_{ki}A_{kj} = |A|\delta_{ij}$$

Определение 23 *Матрица B называется правой обратной к матрице A, если $AB = I$. Матрица C называется левой обратной к матрице A, если $CA = I$*

4.2 Вычисление обратной матрицы

Матрица с нулевым определителем называется вырожденной, в противном случае она невырожденная.

Теорема 3 *Для любой невырожденной матрицы A существует правая обратная матрица, которая одновременно является и левой обратной матрицей, и такая матрица единственна.*

Эта единственная матрица называется обратной, обозначается символом A^{-1}, а ее элементы вычисляются по формуле

$$A^{-1}[i|j] = \frac{A_{ji}}{|A|}$$

4.3 Системы уравнений с квадратной невырожденной матрицей

Рассматривается система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \tag{2}$$

В матричной форме система записывается в виде $AX = B$

Теорема 4 *Пусть в системе уравнений (2) $|A| \neq 0$. Тогда эта система совместна и имеет единственное решение.*

Решение системы (2) представимо в форме $X = A^{-1}B$. Последняя формула, записанная в виде элементов матрицы, имеет вид

$$X[k] = \frac{1}{|A|}\sum_i B[i]A_{ik} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

В формуле (3) подсчитывается определитель матрицы, полученной из исходной матрицы заменой столбца с номером k столбцом из свободных членов. Формулу (3) называют правилом Крамера для решения систем. С вычислительной точки зрения она не очень удобна, поскольку требуется найти $n+1$ определитель порядка n. На практике для решения системы применяют метод Гаусса или его модификации.

Определение 24 *Система (2) называется однородной, если столбец свободных членов в ней состоит из нулей*

Предложение 7 *Если в однородной системе матрица системы невырождена, то эта система имеет единственное нулевое решение*

4.4 Определитель произведения матриц

Следующая теорема доказывает один из фундаментальных фактов в теории определителей.

Теорема 5 *Определитель произведения квадратных матриц одного порядка равен произведению определителей сомножителей* , $|AB| = |A||B|$

В качестве следствия получаем окончательное решение вопроса о существовании обратной матрицы

Предложение 8 *Для квадратной матрицы A обратная матрица существует т. и т. т., когда* $|A| \neq 0$

5 Линейное пространство

Аннотация. Дается определение линейного пространства над произвольным полем и приводятся примеры таких пространств. Определяется линейная зависимость векторов. Доказывается существование ранга произвольной системы векторов. Вводятся понятия размерности и базиса пространства и координат вектора в заданном базисе.
Ключевые слова. Линейное пространство, линейная зависмость размерность пространства, координаты вектора

5.1 Основные определения

Определение 25 *Линейным пространством L над полем* $\mathbf{F}$ *называется называется множество векторов, в котором заданы внутренняя операция сложение векторов и внешняя операция умножение векторов на числа из поля. Свойства сложения*

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha, \beta \in L$

2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

3. *существование нейтрального элемента* $\alpha + \Theta = \alpha$

4. *существование противоположного* $\alpha + (-\alpha) = \Theta$

Операция умножения обладает свойствами

1. $(ab)\alpha = a(b\alpha), \quad a, b \in \mathbf{F}$

2. *свойство нейтрального элемента поля* $1\alpha = \alpha, \quad 1 \in \mathbf{F}$

сложение и умножение связаны двумя законами дистрибутивности

1. $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \quad a, b \in \mathbf{F}$

2. $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$

Примерами линейных пространств является множество матриц размера $m \times n$ над произвольным полем. Интерес представляют частные случаи: пространство столбцов $m \times 1$ и пространство строк $1 \times n$. Линейное пространство над полем вещественных чисел – пространство направленных отрезков относительно обычных операций сложения и умножения на вещественные числа.

Предложение 9 *Имеют место формулы*

$$0\alpha = \Theta, \quad a\Theta = \Theta$$

Предложение 10 *Если* $a\alpha = \Theta$, *то отсюда следует, что* $a = 0$ *или* $\alpha = \Theta$.

5.2 Линейная зависимость векторов

Определение 26 *Система векторов* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ *линейного пространства называется линейно зависимой, если существует ненулевой набор чисел* $a_1, a_2, .., a_m$, *обладающий свойством*

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \cdots + a_m\alpha_m = \Theta$$

в противном случае система векторов называется линейно независимой.

Таким образом, если система векторов линейно независима и

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \cdots + a_m\alpha_m = \Theta,$$

то все коэффициенты a_i должны быть нулевыми.
Из определения следует, что система состоящая из единственного вектора, будет линейно зависимой тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой. Указанное определение эквивалентна следующему утверждению.

Предложение 11 *Система векторов, содержащая более одного вектора, будет линейно зависимой iff, когда какой-то вектор системы есть линейная комбинация остальных векторов.*

Предложение 12 *Любая система векторов, содержащая линейно зависимую подсистема, сама будет линейно зависимой.*

Теорема 6 *(Основная теорема о линейной зависимости). Пусть даны две системы векторов $\alpha_1, .., .\alpha_m$ и $\beta_1, ..., \beta_n$. Первая система векторов является линейно независимой, и каждый вектор первой системы есть линейная комбинация векторов второй системы. Тогда $m \leq n$.*

5.3 Ранг системы векторов

Определение 27 *Подсистема $\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_r}$ системы векторов $\mathbf{S} = \alpha_1, ..., \alpha_m$ называется максимальной линейно независимой подсистемой (МЛНП) в $\mathbf{S}$, если эта подсистема линейно независима, а добавление любого вектора из системы $\mathbf{S}$ превращает ее в линейно зависимую систему.*

Предложение 13 *Любой вектор системы есть линейная комбинация векторов из МЛНП*

Предложение 14 *Две МЛНП одной системы векторов содержат одинаковое число векторов.*

Определение 28 *Число векторов в МЛНП называется рангом этой системы. Если множество векторов есть линейное пространство, то МЛНП называется базисом (базой) пространства, а ранг линейного пространства называется размерностью этого пространства. Ранг системы векторов обозначается символом rank, а размерность пространства символом dim*

Определение 29 *Две системы векторов называются эквивалентными, если каждый вектор одной системы есть линейная комбинация векторов другой системы*

Предложение 15 *Ранги эквивалентных систем совпадают*

Пусть L линейное пространство, $\alpha_1, ..., \alpha_m$ – база пространства и $\alpha \in L$ – произвольный вектор.

Определение 30 *Коэффициенты разложения вектора по базе*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i$$

называются координатами вектора в данной базе

Сам вектор пространства от базы не зависит, но его координаты зависят от базы.

Предложение 16 *Координаты вектора в данной базе определены однозначно.*

6 Ранг матрицы

Аннотация. Дается определение ранга прямоугольной матрицы. Доказываются основная теорема о ранге матрицы и теорема о ранге произведения матриц. Представлены способы вычисления ранга матрицы.
Ключевые слова. Ранг матрицы, ранг произведения матриц

Определение 31 *Рангом матрицы называется ранг системы векторов, составленной из строк этой матрицы*

6.1 Основные определения

Ранг матрицы будем обозначать символом $rank(A)$. Очевидно, что перестановка строк местами не меняет ранга матрицы. Если поменяли местами столбцы, то линейная зависимость между строками, если она была, останется и после указанной перестановки с теми же самыми коэффициентами. Из этого следует, что перестановка столбцов также не меняет ранга матрицы.

Определение 32 *Элементарными преобразованиями матрицы называются*

1. *Перестановка строк*
2. *Умножение строки на число отличное от нуля*
3. *Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число*
4. *Аналогичные преобразования со столбцами*

Предложение 17 *Элементарные преобразования строк матрицы не меняют ранга матрицы*

Эти преобразования заменяют систему строк эквивалентной системой.

6.2 Вычисление ранга элементарными преобразованиями

Предложение 18 *Ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $a_{11}a_{22}\cdots a_{rr} \neq 0$, *равен* r.

Произвольную матрицу B приводим к виду (4) элементарными преобразованиями и определяем ранг матрицы.

6.3 Основная теорема о ранге

Теорема 7 *Ранг матрицы совпадает с максимальным порядком отличных от нуля миноров этой матрицы*

В качестве следствия получаем

Предложение 19 *Ранг матрицы не меняется при транспонировании матрицы*

Из теоремы следует, что для вычисления ранга на основе доказанной теоремы требуется перебрать все возможные миноры матрицы. На самом деле, этот перебор можно существенно уменьшить. Выберем в матрице A произвольные k строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и k столбцов $j_1, \ldots, j_k$. На их пересечении стоит матрица $A[i_1, \ldots, i_k | j_1, \ldots, j_k]$, которую обозначим через A'. Добавим еще одну строку с номером i и столбец с номером j. Матрицу $A[i_1, \ldots, i_k, i | j_1, \ldots, j_k, j]$ назовем окаймлением матрицы A'.

Теорема 8 *Если $|A'| \neq 0$, а все окаймления этой матрицы имеют нулевые определители, то $rank(A) = k$*

Другое замечательное следствие основной теоремы

Предложение 20 *Определитель квадратной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда строки этой матрицы линейно зависимы*

6.4 Ранг произведения матриц

Пусть матрица $C = AB$. Из определения произведения матрицы вытекает, что любая строка матрицы C есть линейная комбинация строк матрицы B, а каждый столбец матрицы C есть линейная комбинация столбцов матрицы A. Отсюда следует

Теорема 9 *Пусть $C = AB$. Тогда $rank(C) \leq \min(rank(B), rank(B))$. Если $|A| \neq 0$, то $rank(C) = rank(B)$.*

7 Общее решение системы линейных уравнений

Аннотация. Для однородной системы дается представление общего решения через фундаментальные решения этой системы. В случае неоднородной системы доказывается теорема Кронекера-Капелли о совместности, после чего дается представление общего решения через общее решение приведенной системы.
Ключевые слова. Однородные системы, теорема Кронекера-Капелли, общее решение неоднородной системы.

7.1 Однородные системы уравнений

Определение 33 *Однородной системой m уравнений с n неизвестными называется система вида*

$$A * X = \Theta, \tag{5}$$

где A $m \times n$ матрица, а X столбец длины n.

Однородная система всегда совместна, поскольку системе удовлетворяет нулевое решение.

Предложение 21 *Множество решений однородной системы образуют линейной подпространство в пространстве строк длины n*

Из доказанного утверждения следует, что любое решение однородной системы (5) представимо в виде

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_p X_p \tag{6}$$

где векторы $X_1, \ldots, X_p$ образуют базис в пространстве решений.

Определение 34 *Вектор $X(a_1, ..., a_p)$ называется общим решением системы уравнений (5), если*

1. *При любом наборе параметров получается решение системы*
2. *Любое решение системы можно получить, подобрав параметры*

Формула (6) дает пример общего решения однородной системы.

Теорема 10 *Пространство решений однородной системы имеет размерность $n-r$, где $r = rank(A)$*

7.2 Неоднородные системы уравнений

Определение 35 *Система линейных уравнений $A * X = B$ называется неоднородной системой, если $B \neq \Theta$*

В неоднородном случае система может быть несовместной. В качестве примера можно взять систему $0 * x_1 = 1$.
Пусть имеется неоднородная система уравнений

$$AX = B \tag{7}$$

Теорема 11 *(Кронекер-Капелли) Неоднородная система уравнений (7) совместна тогда и только тогда, когда $rank(A) = rank(A|B)$*

Вместе с системой (7) рассматривается однородная система

$$AY = \Theta \tag{8}$$

Теорема 12 *Общее решение совместной системы (7) представимо в виде*

$$X(a_1, ..., a_{n-r}) = X_0 + \sum_{i=1}^{n-r} a_i Y_i,$$

где X_0 *- частное решение системы (7),* $Y_i, \quad i = 1, ..., n-r$ *фундаментальное множество решений системы (8),* n *число неизвестных в системе,* $r = rank(A)$

8 Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Аннотация. Рассматриваются скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Выводятся формулы для представления результатов операции в ортонормированной системе координат. Дается содержательная интерпретация результатов вычислений.
Ключевые слова. Скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение

8.1 Скалярное произведение

Пространства векторов на плоскости и в пространстве имеют размерности 2 и 3 соответственно. В отличие от других линейных пространств той же размерности в отмеченных пространствах с каждым вектором связывается длина вектора. Имея длину отрезка, можно определить угол между векторами

Определение 36 *Скалярным произведением двух векторов называется число, определенное формулой*

$$(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta| \cos(\alpha \hat{,} \beta)$$

Определение 37 *Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно 0*

Из определения следует, что $(\alpha, \Theta) = 0$. То есть, нулевой вектор ортогонален любому вектору пространства.

Предложение 22 *Скалярное произведение обладает свойствами*

1. $(\alpha, \alpha) \geq 0$, *причем* $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \Theta$*– положительная определенность*

2. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ *– симметричность*

3. $(a\alpha + b\beta, \gamma) = a(\alpha, \gamma) + b(\beta, \gamma)$ *билинейность*

Из положительной определенности следует, что вектор ортогональный ко всем векторам пространства равен нулю (поскольку этот вектор ортогонален самому себе)
Имеют место формулы

$$|\alpha|^2 = (\alpha, \alpha) \quad \cos(\alpha \hat{,} \beta) = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$$

Площадь S параллелограмма, построенного на двух векторах определяется формулой

$$S^2 = \begin{vmatrix} (\alpha, \alpha) & (\alpha, \beta) \\ (\alpha, \beta) & (\beta, \beta) \end{vmatrix}$$

8.2 Скалярное произведение в координатах

Пусть в пространстве задана база $\{\alpha_i\}$. Два вектора определены своими координатами в этой базе

$$\beta = \sum_i b_i \alpha_i, \quad \gamma = \sum_j c_j \alpha_j$$

Из свойства билинейности вытекает формула

$$(\beta, \gamma) = \sum_{i,j} b_i c_j (\alpha_i, \alpha_j)$$

Определение 38 *Система векторов называется ортонормированной, если имеют место равенства*

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$$

Предложение 23 *Любая ортонормированная система векторов является линейно независимой.*

Из предложения следует, что ортонормированная система, в которой число векторов равно размерности пространства, образует ортонормированную базу этого пространства.

Предложение 24 *Произвольный вектор β раскладывается по ортонормированному базису с координатами*

$$\beta = \sum_i b_i \alpha_i, \quad b_i = (\beta, \alpha_i)$$

Предложение 25 *Скалярное произведение двух векторов, определенных координатами в ортонормированном базисе, задается формулой*

$$(\beta, \gamma) = \sum_i b_i c_i$$

8.3 Определение и свойства векторного произведения

Определение 39 *Пусть заданы три некомпланарных вектора α, β, γ, начала которых сведены в одну точку. Эта тройка векторов называется правой, если глядя с вершины вектора γ на биссектрису угла между векторами α, β видим вектор α справа, в противном случае система будет левой*

Из определения следует, что поменяв местами любые два вектора в тройке, меняем ориентацию тройки на противоположную.

Определение 40 *Векторным произведением двух векторов α, β называется вектор $\gamma = [\alpha, \beta]$, обладающий свойствами*

1. $\gamma \perp \alpha \quad \gamma \perp \beta$
2. $|\gamma| = |\alpha||\beta| \sin(\hat{\alpha, \beta})$
3. *тройка α, β, γ правая.*

Потребовав выполнения условия «тройка α, β, γ левая», получим эквивалентную теорию. Из определения следует, что векторное произведение обращается в ноль тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны. Длина векторного произведения двух векторов равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Предложение 26 *Векторное произведение обладает следующими свойствами*

1. $[\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha]$
2. $[a\alpha + a'\alpha', \beta] = a[\alpha, \beta] + a'[\alpha', \beta]$

8.4 Векторное произведение в координатах

Пусть имеется правая ортонормированная база $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Непосредственной проверкой проверяется справедливость равенств $[\epsilon_1, \epsilon_2] = \epsilon_3]$, $[\epsilon_2, \epsilon_3] = \epsilon_1$, $[\epsilon_3, \epsilon_1] = \epsilon_2$.

Предложение 27 *Пусть векторы заданы своими координатами в правом ортонормированном базе $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 : \alpha = (a_1, a_2, a_3)$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)$. Тогда векторное произведение получается разложением определителя*

$$[\alpha, \beta] = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \epsilon_1(a_2b_3 - a_3b_2) - \epsilon_2(a_1b_3 - a_3b_1) + \epsilon_3(a_1b_2 - a_2b_1) \tag{9}$$

по первой строке.

Пользуясь указанной формулой можно подсчитать площадь параллелограмма, когда известны координаты векторов. Для этого достаточно найти длину векторного произведения. Интересно сравнить получившийся результат с площадью параллелограмма, вычисленной с помощью скалярного произведения.

8.5 Смешанное произведение векторов

Определение 41 *Смешанным произведением трех векторов* α, β, γ *называется число* (α, β, γ) *, вычисляемое по формуле* $([\alpha, \beta], \gamma)$

Из определения следует, что смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, смежными ребрами которого являются эти векторы.

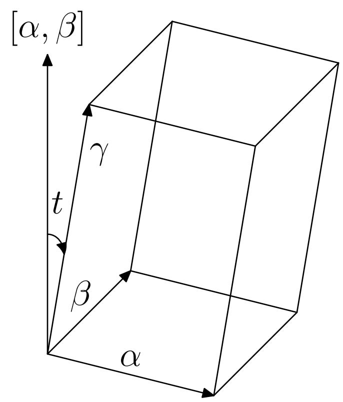

Рис. 2: Смешанное произведение $(\alpha, \beta, \gamma) = |[\alpha, \beta]||\gamma| \cos(t)$

При этом знак смешанного произведения определяется ориентацией тройки: знак положительный, если тройка правая, и отрицательный, если тройка левая. Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны.

8.6 Смешанное произведение в координатах

Из определения следует, что смешанное произведение является линейным по каждому аргументу. Это позволяет подсчитать результат, зная координаты векторов в ортонормированном базисе.

Предложение 28 *Пусть векторы заданы своими координатами в правом ортонормированном базисе* $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 : \alpha = (a_1, a_2, a_3), \beta = (b_1, b_2, b_3), \gamma = (c_1, c_2, c_3)$. *Их смешанное произведение вычисляется согласно формуле*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{10}$$

При циклической перестановке строк в определителе (10) этот определитель не меняется. Отсюда и из коммутативности скалярного произведения вытекает, что $(\alpha, [\beta, \gamma]) = ([\alpha, \beta], \gamma)$. Это замечание является основанием для обозначения смешанного произведения как последовательности трех векторов. Кроме того, поменяв местами любые два аргумента, изменяем знак смешанного произведения на противоположный.

9 Уравнение прямой на плоскости

Аннотация. Вводится понятие аффинного пространства и указывается способ построения системы координат в этом пространстве. Дается определение прямой и приводятся различные виды уравнений прямой на плоскости.
Ключевые слова. Аффинное пространство, система координат, уравнение прямой на плоскости.

9.1 Аффинное пространство

Определение 42 *Аффинным пространством называется множество точек на плоскости или в пространстве вместе с линейным пространством векторов, лежащих в этой плоскости или в пространстве*

Определение 43 *Системой координат в аффинном пространстве называется точка O(начало координат) и базис в пространстве векторов*

Часто систему координат на плоскости задают двумя пересекающимися прямыми. При этом начало координат есть точка пересечения прямых, а базисные векторы имеют единичную длину и параллельны соответствующим прямым. Это лишь частный случай такой системы координат. При изложении дальнейшего материала предполагается, что база, входящая в систему координат, является ортонормированной, хотя некоторые формулы остаются справедливыми в произвольной системе координат.
Если выбрана система координат, то каждая точка P получает координаты: это координаты вектора, идущего из начала в эту точку, подсчитанные в выбранной базе. Вектор $\overrightarrow{OP} = x_0\alpha + y_0\beta$, и числа x_0, y_0 становятся координатами точки P (Рис.3).

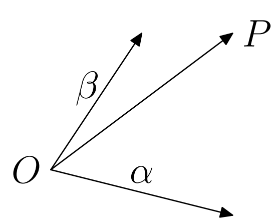

Рис. 3: Координаты точки на плоскости.

9.2 Определение прямой

Прямая на плоскости определяется какой-либо своей точкой P (опорной точкой) и направляющим вектором α параллельным этой прямой. Под уравнением прямой понимают уравнения, связывающие координаты (x, y) точки таким образом, что точка

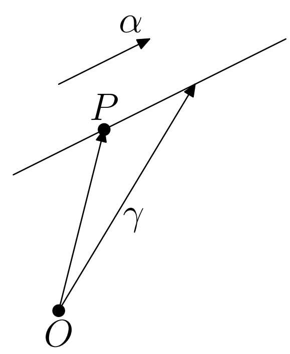

Рис. 4: Определение прямой. Вектор γ - произвольный вектор, конец которого лежит на прямой

лежит на прямой тогда и только тогда, когда координаты удовлетворяют этому уравнению. Имеем

$$\gamma = \overrightarrow{OP} + t\alpha$$

где t – произвольный параметр. Последнее равенство записываем в координатах

$$x = x_0 + at; \quad y = y_0 + tb \tag{11}$$

Зесь $P = (x_0, y_0)$; $\quad \alpha = (a, b)$. Уравнение(11) называется уравнением прямой в параметрической форме. Это основное уравнение прямой. Из него, исключая параметр t, получаем уравнение прямой в канонической форме

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

В этом уравнении обращение в ноль знаменателя влечет обращение в ноль числителя. Это следует из параметрической формы уравнения. В канонической форме решается задача: провести прямую через точку параллельно заданному вектору. В частности

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

решение задачи о проведении прямой через две точки.
Рассмотрим уравнение

$$ax + by = c, \quad a^2 + b^2 > 0 \tag{12}$$

С точки зрения теории линейных систем, это система ранга 1 от двух переменных. Решение такой системы имеет форму (11), поэтому уравнение (12) определяет прямую. Это уравнение называется уравнением прямой в общей форме.

Предложение 29 *В уравнении (12) вектор $\gamma = (a, b)$ ортогонален прямой. Он называется нормалью к прямой.*

Решение задачи: провести прямую через точку (x_0, y_0) ортогональную данному вектору $\gamma = (a, b)$ задается формулой

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

10 Уравнения прямой и плоскости в пространстве

Аннотация. В прямоугольной системе координат выводятся различные уравнения прямой и плоскости в пространстве
Ключевые слова. Уравнение прямой в пространстве, уравнение плоскости

10.1 Уравнение прямой в пространстве

Как и в случае плоскости, прямая в пространстве определяется какой-либо своей точкой P (опорной точкой) и направляющим вектором α параллельным этой прямой. В силу этого, параметрическое уравнение будет тем же, что и в двумерном случае. Различие возникает при переходе к координатной записи. Теперь присутствуют три координаты

$$x = x_0 + at \quad y = y_0 + tb \quad z = z_0 + tc \tag{13}$$

Из него, исключая параметр t, получаем уравнение прямой в канонической форме

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Беря в качестве направляющего вектора вектор, соединяющий две точки, получаем уравнение прямой, проходящей через две точки. Обращение в ноль знаменателя интерпретируется так же, как и в случае прямой на плоскости.

10.2 Уравнение плоскости в пространстве

Плоскость в пространстве задается любой своей точкой P и парой неколлинеарных векторов, параллельных этой плоскости (Рис.5)

$$\gamma = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + u\alpha + v\beta$$

Это означает, что параметрическое уравнение плоскости в координатах имеет вид

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \quad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \quad z = z_0 + ua_3 + vb_3 \tag{14}$$

Здесь $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ $\beta = (b_1, b_2, b_3)$, а точка P имеет координаты (x_0, y_0, z_0). Для исключения параметров достаточно заметить, что смешанное произведение $(X - \overrightarrow{OP}, \alpha, \beta) = 0$, или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

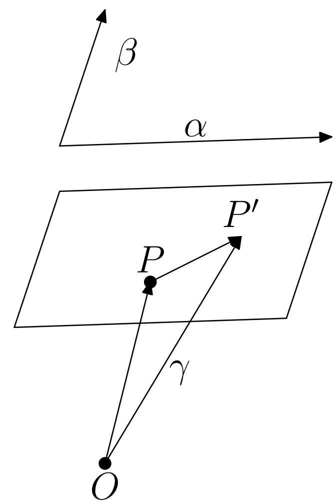

Рис. 5: Плоскость задана опорной точкой и парой неколлинеарных векторов

Еще одно уравнение плоскости получаем из условия ортогональности вектора $\overrightarrow{PP'}$ нормали $\nu = (n_1, n_2, n_3)$. В координатах это записывается так:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0 \tag{15}$$

Уравнение (15) дает решение задачи: провести плоскость через точку ортогонально заданному вектору.

10.3 Уравнение плоскости в общей форме

Рассмотрим уравнение

$$Ax + By + Cz = D, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0 \tag{16}$$

Это уравнение имеет общее решение вида (14) и поэтому определяет плоскость. Геометрический смысл коэффициентов A, B, C – координаты вектора ортогонального к плоскости.

11 Взаимное расположение объектов на плоскости. Вычисление площади треугольника

Аннотация. Даются условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Выводятся формулы для вычисления расстояния от точки до прямой и для вычисления площади треугольника.
Ключевые слова. Параллельные прямые, ортогональные прямые, расстояние от точки до прямой, площадь треугольника.

11.1 Уравнение прямой в нормальной форме

Уравнение прямой в нормальной форме имеет вид

$$x\cos(t) + y\sin(t) - r = 0, r \geq 0 \tag{17}$$

Это уравнение получается из уравнения в общей форме

$$Ax + By - C = 0$$

путем деления на $\pm\sqrt{A^2+B^2}$. Уравнение (17) имеет следующий содержательный смысл. Нормаль $\nu = (\cos(t), \sin(t))$ скалярно умножается на вектор $\gamma = (x, y)$ и в результате получается фиксированное число r. Если точка $P = (x_0, y_0)$ – произвольная точка на плоскости, то выражение

$$|x_0\cos(t) + y_0\sin(t) - r|$$

вычисляет расстояние от точки до прямой (см. Рис.6). В частности, r есть расстоя-

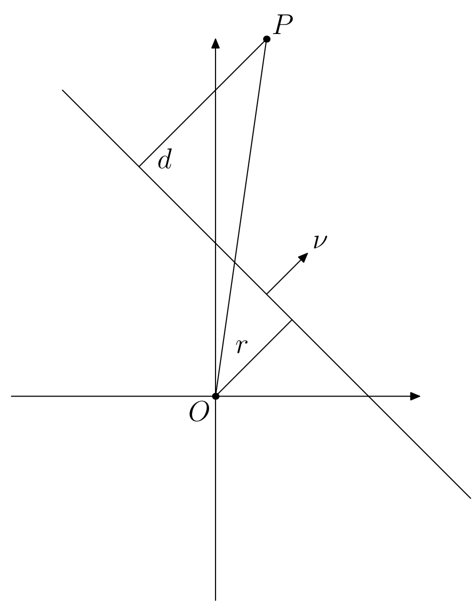

Рис. 6: Вычисление расстояния от точки до прямой

ние от прямой до начала координат. Обратим внимание на направление вектора ν. Он направлен от начала координат (если прямая не проходит через начало). Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, из которых одна содержит начало координат. Знак разности $x_0\cos(t) + y_0\sin(t) - r$ определяет, в какую полуплоскость попала точка P. При делении уравнеиия прямой на $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ знак выбирается таким образом, чтобы выполнилось неравенство $\pm\sqrt{A^2+B^2}C > 0$.

11.2 Угол между прямыми

Определение 44 *Углом между прямыми на плоскости называется наименьший из вертикальных углов, образованных при пересечении прямых*

Из определения следует, что угол между прямыми лежит в интервале $[0, \pi/2]$. Таким образом, синус этого угла совпадает с синусом угла между нормалями к эти прямым. В частности, если нормали ортогональны (обращается в ноль скалярное произведение), то и прямые ортогональны. Если одна из прямых задана уравнением в общей форме

$$Ax + By = C,$$

а другая прямая определена каноническим уравнением

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

то условие ортогональности этих прямых равносильно параллельности векторов (A, B) и (a, b). Если обе прямые заданы каноническими уравнениями, то условие параллельности прямых сводится к параллельности направляющих векторов. Чтобы различить параллельные и совпадающие прямые при условии параллельности направляющих векторов, надо опорную точку первой прямой подставить в уравнение второй приямой.

11.3 Площадь треугольника

Пусть треугольник на плоскости задан тремя вершинами с координатами (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2). Площадь S этого треугольника совпадает с площадью треугольника, построенного на векторах $\alpha = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ и $\beta = (x_2 - x_0, y_2 - y_0)$. Используя скалярное и векторное произведение указанных векторов, получим, что

$$\mathbf{S}^2 = \frac{1}{4} det \begin{pmatrix} (\alpha, \alpha) & (\alpha, \beta) \\ (\alpha, \beta) & (\beta, \beta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \left| det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \right|$$

12 Взаимное расположение объектов в пространстве. Вычисление объема пирамиды

Аннотация. Рассматриваются взаимные расположения пары плоскостей, прямой и плоскости, пары прямых. Выводятся формулы для вычисления расстояния от точки до прямой и до плоскости, а также для подсчета объема тетраэдра.
Ключевые слова. Пара прямых в пространстве, пара плоскостей, расстояние до прямой, объем тетраэдра.

12.1 Взаимное расположение плоскостей

Угол между двумя плоскостями определяется аналогично углу между прямыми на плоскости: Пусть в пространстве заданы две плоскости

$$Ax + By + Cz = D \tag{18}$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \tag{19}$$

Синус угла между ними равен синусу угла между нормалями к этим плоскостям. В частности, плоскости ортогональны, если ортогональны нормали к этим плоскостям. Если нормали параллельны, то плоскости или параллельны или совпадают.

12.2 Прямая и плоскость

Пусть заданы плоскость уравнением (18) и прямая

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \tag{20}$$

Прямая ортогональна к плоскости, если параллельны векторы (a, b, c) и (A, B, C). Если эти векторы ортогональны и точка (x_0, y_0, z_0) лежит в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости, в противном случае прямая параллельна плоскости. Если прямая не параллельна плоскости и не лежит в ней, то у нее есть единственная точка пересечения с этой плоскостью. Для отыскания этой точки запишем уравнение (20) в параметрической форме и подставим в уравнение плоскости (18). Получим

$$A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) = D$$

Из этого уравнения находим значение параметра t, по которому вычисляем саму точку.

12.3 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Условие параллельности (совпадения) двух прямых в пространстве сводится к проверке условия параллельности направляющих векторов. Если эти векторы параллельны и опорная точка одной прямой принадлежит другой, то прямые совпадают, в противном случае они параллельны. В общем случае непараллельные прямые не обязаны пересекаться и тогда они называются скрещивающимися. По определению, синус угла между такими прямыми равен синусу угла между направляющими векторами. В то же время имеется простое условие пересечения непараллельных прямых.

Предложение 30 *Пусть даны две прямые, определенные неколлинеарными направляющими векторами $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ и $\beta = (b_1, b_2, b_3)$, и двумя опорными точками P_0 и P_1. Эти прямые пересекаются тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

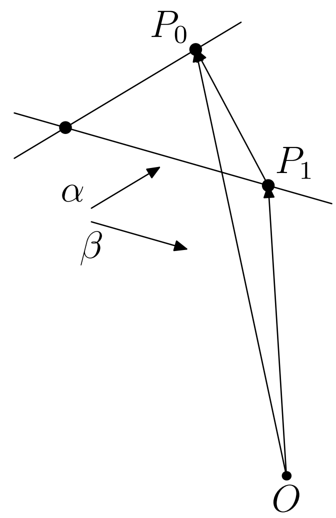

Рис. 7: К условию пересечения двух прямых в пространстве

12.4 Нахождение точки пересечения двух прямых в пространстве

Пусть имеются две пересекающиеся непараллельные прямые в пространстве. Требуется найти точку пересечения этих прямых. Рассмотрим каноническое уравнение прямой (20). На самом деле, это запись двух линейных уравнений в общей форме, каждое из которых определяет плоскость, а прямая есть пересечение этих плоскостей. Теперь отыскание точки пересечения прямых сводится к отысканию пересечения прямой с одной из плоскостей, определяющих вторую прямую.

12.5 Расстояние от точки до прямой в пространстве

Для отыскания расстояния от точки P до прямой можно провести плоскость через точку перпендикулярно этой прямой, найти точку Q пересечения этой плоскости с прямой и определить расстояние между точками. Однако, существует более элегантный способ решения указанной задачи. Пусть точка P' – опорная точка прямой, а вектор α – направляющий вектор (см. Рис.8). Обозначим через $dist$ искомое расстояние. По определению

$$|[\alpha, \overrightarrow{P'P}]| = |\alpha||\overrightarrow{P'P}| \sin(\alpha, \overrightarrow{P'P}) = dist|\alpha|$$

Это позволяет сразу найти $dist$.

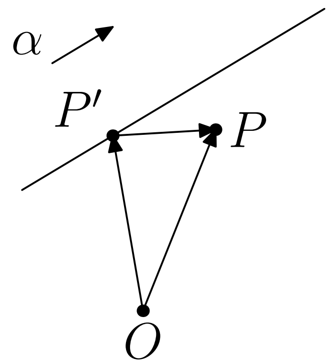

Рис. 8: К отысканию расстояния от точки до прямой в пространстве

12.6 Расстояние от точки до плоскости

Эта задача аналогична задаче, рассмотренной ранее для точки и прямой на плоскости. Пусть плоскость задана уравнением в общей форме

$$Ax + By + Cz - D = 0.$$

Приведем уравнение к нормальной форме, разделив это уравнение на $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Величина

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|$$

равна расстоянию от точки (x_0, y_0, z_0) до этой плоскости.

12.7 Объем тетраэдра

Пусть тетраэдр задан своими вершинами A, B, C, D. Объем тетраэдра равен

$$\mathbf{V} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$$

Чтобы провести высоту из вершины A достаточно найти вектор параллельный этой высоте. Этот вектор ортогонален основанию B, C, D, поэтому он параллелен векторному проведению $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]$.

13 Использованные информационные ресурсы

1. http://zilant.kpfu.ru/mod/file.php/27/lectures
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры// любое издание
3. Ильин В.А, Позняк Э.Г. Линейная алгебра// любое издание
4. Ильин В.А, Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия // любое издание

14 Список обозначений

14.1 Алгебра

1. Строчными латинскими буквами обозначаются числа или элементы поля
2. Прописными латинскими буквами обозначаются матрицы, поля, линейные пространстве
3. $[i|j]$ – элемент матрицы A, стоящий в строке с номером i и столбце с номером j
4. $A(i|j)$ – матрица, полученная из исходной вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j
5. $A[i_1, \ldots, i_k|j_1, \ldots, j_k]$ – подматрица матрицы A, стоящая на пересечении указанных строк и столбцов
6. $A[(i_1, \ldots, i_k|j_1, \ldots, j_k)$ – подматрица матрицы A, полученная удалением указанных строк и столбцов
7. $A[i|*]$ – строка матрицы с номером i
8. $|A|$ или $det(A)$ – определитель матрицы
9. $rank(A)$ – ранг матрицы
10. $dim(L)$ – размерность линейного пространства
11. строчными греческими буквами обозначаются векторы пространства

14.2 Геометрия

1. Строчными греческими буквами обозначаются векторы — направленные отрезки
2. Строчными латинскими буквами обозначаются числа или элементы поля
3. Прописными латинскими буквами обозначаются точки на плоскости и в пространстве и коэффициенты в уравнениях
4. (α, β) – скалярное произведение векторов
5. $[\alpha, \beta]$ – векторное произведение векторов
6. (α, β, γ) – смешанное произведение векторов
7. $\mathbf{S}$ – площадь фигуры
8. $\mathbf{V}$ – объем фигуры