

УДК 519.21

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЭНДОМОРФИЗМОВ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Ф.Г. Габбасов, В.Т. Дубровин

Аннотация

Пусть W – невырожденная целочисленная квадратная матрица d -го порядка такая, что $|\det W| > 1$; $f_i(x)$ – заданные на единичном гиперкубе в R^d вещественнозначные периодические по каждому аргументу липшиц-непрерывные функции. Рассматриваются m -мерные векторы $(f_1(xW^k), \dots, f_m(xW^k))$, $k = 1, 2, \dots$. Получена оценка порядка $O(n^{\varepsilon-1/2})$, ε – сколь угодно малое число, для расстояния между распределением нормированной суммы этих векторов и нормальным распределением на всех измеримых выпуклых множествах из R^m .

Ключевые слова: эндоморфизмы, предельная теорема, скорость сходимости.

Рассмотрим преобразование $T\bar{x} = \{\bar{x}W\}$ (здесь $\bar{x}$ принадлежит Ω_d – d -мерному тору, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа), задаваемое с помощью невырожденной целочисленной матрицы W . Пусть $\text{mes}(\cdot)$ – инвариантная мера на Ω_d , которую можно отождествить с мерой Лебега, определенной на единичном замкнутом гиперкубе d -мерного евклидова пространства:

$$K_d = \{\bar{x} : \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d), 0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_d \leq 1\}.$$

Указанное преобразование является эндоморфизмом, сохраняющим меру. Оно эргодично тогда и только тогда, когда среди корней характеристического многочлена матрицы W нет корней из единицы. При этом условии для $T^k\bar{x}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, справедлива центральная предельная теорема (см. [1, 2]). Исследования скорости сходимости в этой теореме были проведены в работах [3–5].

Рассмотрим m -мерные вектора

$$\bar{f}(\bar{x}W^k) = \{f_1(\bar{x}W^k), \dots, f_m(\bar{x}W^k)\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $f_i(\bar{x})$, $i = 1, 2, \dots, m$ – вещественнозначные периодические с периодом 1 по каждому аргументу функции, заданные на K_d . Предполагаем выполнение следующих условий.

1. Для некоторой постоянной A

$$|f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{x}')| \leq A \|\bar{x} - \bar{x}'\|, \quad \forall \bar{x}, \bar{x}' \in K_d, \quad \|\bar{x}\| = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2}.$$

2. Матрица W такова, что

$$\sup_{\|\bar{x}\| \leq 1} \|\bar{x}W^{-1}\| = \theta < 1, \quad |\det W| = \rho > 1.$$

3. Функции $f_i(\bar{x})$ интегрируемы по Лебегу на K_d и $\int_{K_d} f_i(\bar{x}) d\bar{x} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.
4. $\det R \neq 0$, где R – матрица с элементами

$$\rho_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{K_d} \left(\sum_{k=1}^n f_i(\bar{x} W^k) \right) \left(\sum_{k=1}^n f_j(\bar{x} W^k) \right) d\bar{x}.$$

Пусть

$$G_n(M) = \text{mes} \left(\bar{x} : \bar{x} \in K_d, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^k) \in M \right),$$

где M – измеримые множества из R^m .

Целью настоящей работы является исследование выражения

$$\rho(G_n, \Phi_R) = \sup_{M \in R^m} |G_n(M) - \Phi_R(M)| \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Здесь M – выпуклые измеримые множества, Φ_R – нормальное распределение с матрицей ковариаций R и нулевым вектором математических ожиданий.

В работе [4] было доказано, что $\rho(G_n, \Phi_R) = O(n^{-1/4})$.

В перечисленных выше условиях будет иметь место следующая теорема.

Теорема. Для каждого, сколь угодно малого ε справедлива оценка

$$\rho(G_n, \Phi_R) = O\left(\frac{1}{n^{1/2-\varepsilon}}\right).$$

Доказательство. При доказательстве теоремы используется метод «последовательных приближений», разработанный в [6, 7]. Прежде всего приведем оценки, которые нам понадобятся в ходе доказательства теоремы.

Обозначим

$$(\bar{f}(\bar{x} W^j), \bar{t}) = \sum_{i=1}^m f_i(\bar{x} W^j) t_i, \quad \bar{t} = (t_1, \dots, t_m).$$

Введем величину

$$\tau_j = (\bar{f}(\bar{x}, W^j), \bar{t} / \|\bar{t}\|).$$

Обозначим через $x_\nu(n)$ семиинвариант ν -го порядка суммы $\sum_{j=1}^n \tau_j$, то есть

$$x_\nu(n) = \frac{d^\nu}{dz^\nu} \ln E \exp \left(z \sum_{j=1}^n \tau_j \right) \Big|_{z=0}.$$

Лемма 1. При фиксированном $\nu \in [2, \omega]$ (здесь и далее ω – достаточно большое вещественное число) справедлива оценка

$$x_\nu(n) = O(n).$$

Лемма 1 доказывается так же, как и в работе [5].

Пусть

$$f(\bar{t}) = \int_{K_d} \exp\left(i\left(\bar{t}, \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{j=1}^Q \bar{f}(\bar{x} W^j)\right)\right), \quad \beta(M) = \inf_{x \in \sigma(M)} \|\bar{x}\|,$$

где $\sigma(M)$ – граница выпуклого множества M . Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Если при некотором $\alpha \in (0, 1/2]$ и некотором $\gamma > 1$ имеет место асимптотическое равенство*

$$|G_Q(M) - \Phi(M)| = O\left(\frac{1}{1 + \beta^\gamma(M)} \frac{1}{Q^\alpha}\right),$$

то для всяких C_0 и $\varepsilon_1 < \alpha/2$ найдутся такие постоянные C_1 и C_2 , что для достаточно больших Q

$$\max_{C_0 Q^{-\varepsilon_1} \leq \|t\| \leq C_1 Q^{\alpha-2\varepsilon_1}} \left| f(\bar{t}) \right| \leq 1 - C_2 / Q^{2\varepsilon_1}. \quad (1)$$

Лемма 2 доказывается так же, как и в работе [7].

Лемма 3. *При фиксированном $\nu \in [1, \omega]$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$ справедлива оценка*

$$\int_{K_d} \left(\sum_{k=1}^n f_i(\bar{x} W^k) \right)^{2\nu} dt = O\left(n^{\nu+\nu^2/\omega}\right). \quad (2)$$

Лемма 3 доказана в работе [5].

Приступим к доказательству теоремы. Так как расстояние $\rho(G_n, \Phi_R)$ между распределениями инвариантно по отношению к невырожденным линейным преобразованиям векторов, не ограничивая общности, мы будем считать матрицу R единичной. Сумма, распределение которой мы собираемся изучать, есть $S_n = \sum_{k=1}^n f(\bar{x} W^k)$. Эту сумму мы разобьем следующим образом.

Пусть Q и N – растущие вместе с n натуральные числа, $p = \left\lfloor \frac{n}{Q+N} \right\rfloor$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа.

Обозначим

$$\bar{\eta}_j = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^Q f(\bar{x} W^{(j-1)(Q+N)+r}), \quad 1 \leq j \leq p,$$

$$\bar{\eta}_j^0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^N f(\bar{x} W^{jQ+(j-1)N+r}), \quad 1 \leq j \leq p,$$

$$\bar{\eta}_{p+1}^0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=p(Q+N)+1}^n f(\bar{x} W^r).$$

Считаем, что $\bar{\eta}_{p+1}^0 = 0$, если $n = p(Q+N)$.

Получим

$$S_n = \sqrt{Q} \sum_{r=1}^p \bar{\eta}_r + \sqrt{Q} \sum_{r=1}^{p+1} \bar{\eta}_r^0 = \sqrt{Q} (\bar{\zeta}_p + \bar{\zeta}_p^0).$$

Вклад суммы $\bar{\zeta}_p^0$ в сумму S_n будет достаточно мал, если Q и N выбрать подходящим образом.

Теперь перейдем к изучению распределения значений суммы $\bar{\zeta}_p$. Обозначим

$\hat{\zeta}_p = \sum_{r=1}^p \hat{\eta}_r$, где $\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_p$ – вектора со следующими свойствами:

1) $\text{mes}(\bar{x} : \bar{x} \in K_d, \hat{\eta}_r \in M) = \text{mes}(\bar{x} : \bar{x} \in K_d, \bar{\eta}_r \in M)$, M – измеримые множества из R^m ;

$$2) \int_{K_d} \exp \left(i \left(\bar{t}, \frac{\hat{\zeta}_p}{\sqrt{p}} \right) \right) d\bar{x} = \prod_{r=1}^p \int_{K_d} \exp \left(i \left(\bar{t}, \frac{\hat{\eta}_r}{\sqrt{p}} \right) \right) d\bar{x}.$$

Обозначим через Λ матрицу ковариаций вектора $\bar{\eta}_1$. Учитывая, что матрица R является единичной, покажем, что

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 + O(1/Q) & O(1/Q) & \cdots & O(1/Q) \\ O(1/Q) & 1 + O(1/Q) & \cdots & O(1/Q) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O(1/Q) & O(1/Q) & \cdots & 1 + O(1/Q) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Из леммы 1 работы [3] следует, что

$$\int_{K_d} f_i(\bar{x}) f_j(\bar{x} W^r) d\bar{x} = \int_{K_d} f_i(\bar{x}) d\bar{x} \int_{K_d} f_j(\bar{x}) d\bar{x} + O(\theta_1^r),$$

где $0 < \theta_1 < 1$.

Элементы матрицы Λ можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{K_d} f_i(\bar{x} W) f_j(\bar{x} W) d\bar{x} + \\ &+ \sum_{n=1}^Q \left(1 - \frac{r}{Q} \right) \left[\int_{K_d} f_i(\bar{x} W) f_j(\bar{x} W^{r+1}) d\bar{x} + \int_{K_d} f_j(\bar{x} W) f_i(\bar{x} W^{r+1}) d\bar{x} \right], \end{aligned}$$

а элементы матрицы R – в виде

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \int_{K_d} f_i(\bar{x} W) f_j(\bar{x} W) d\bar{x} + \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \left[\int_{K_d} f_i(\bar{x} W) f_j(\bar{x} W^{r+1}) d\bar{x} + \int_{K_d} f_j(\bar{x} W) f_i(\bar{x} W^{r+1}) d\bar{x} \right]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |a_{ij} - \rho_{ij}| &= \sum_{r=Q+1}^{\infty} \int_{K_d} f_i(\bar{x} W) f_j(\bar{x} W^{r+1}) d\bar{x} + \\ &+ \sum_{r=Q+1}^{\infty} \int_{K_d} f_j(\bar{x} W) f_i(\bar{x} W^{r+1}) d\bar{x} - \\ &- \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^Q r \int_{K_d} f_i(\bar{x} W) f_j(\bar{x} W^{r+1}) d\bar{x} = O \left(\theta_1^Q + \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^Q r \theta_1^r \right) = O \left(\frac{1}{Q} \right). \end{aligned}$$

Далее, пусть матрица A такова, что $A'A = \Lambda^{-1}$, где A' – транспонированная матрица к A . Очевидно, что вектор $\frac{1}{\sqrt{p}} A \hat{\zeta}_p$ имеет единичную матрицу ковариаций.

Пусть теперь

$$\begin{aligned} P_p^{(1)}(M) &= \text{mes} \left(\bar{x} : \bar{x} \in K_d, \frac{\bar{\zeta}_p}{\sqrt{p}} \in M \right), \\ P_p^{(2)}(M) &= \text{mes} \left(\bar{x} : \bar{x} \in K_d, \frac{A\bar{\zeta}_p}{\sqrt{p}} \in M \right), \\ f_p(\bar{t}) &= \int_{K_d} \exp \left(i \left(\bar{t}, \frac{A\bar{\zeta}_p}{\sqrt{p}} \right) \right) d\bar{x}, \quad \hat{f}_p(\bar{t}) = \int_{K_d} \exp \left(i \left(\bar{t}, \frac{\hat{A}\bar{\zeta}_p}{\sqrt{p}} \right) \right) d\bar{x}, \\ f(\bar{t}) &= \int_{K_d} \exp (i(\bar{t}, \bar{\eta}_1)) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Ниже будем считать, что $f(\bar{t})$ удовлетворяет условию (1) леммы 2 при $\varepsilon_1 = (\nu + 3)/\omega$.

Из леммы 3 работы [3] следует, что

$$|f_p(\bar{t}) - \hat{f}_p(\bar{t})| \leq C_3 \sqrt{\frac{p}{Q}} \exp(-C_4 N). \quad (4)$$

Далее, положим

$$g_{\nu p}(\bar{t}) = \exp \left(-\frac{\|\bar{t}\|^2}{2} \right) \left(1 + \sum_{r=1}^{\nu} P_r(i\bar{t}) \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \right)^r \right),$$

где

$$\begin{aligned} P_r(i\bar{t}) &= \frac{\chi_{r+2}(i\bar{t})}{(r+2)!} + \\ &+ \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{j_l=l}^{r-1} \sum_{j_{l-1}=l-1}^{j_l-1} \dots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{(r-j_l)(j_l-j_{l-1}) \dots (j_2-j_1)}{r j_l j_{l-1} \dots j_2 j_1} \times \\ &\times \frac{\chi_{r-j_l+2}(i\bar{t}) \chi_{j_l-j_{l-1}+2}(i\bar{t}) \dots \chi_{j_2-j_1+2}(i\bar{t}) \chi_{j_1}(i\bar{t})}{(r-j_l+2)!(j_l-j_{l-1}+2)! \dots (j_2-j_1+2)!(j_1+2)!} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\chi_j(i\bar{t})$ – семиинвариант j -го порядка величины $(i\bar{t}, A\bar{\eta}_1)$.

По теореме 1 из [8] при

$$|\bar{t}| \leq \frac{\sqrt{p}}{8(h_{\nu+1}(Q))^{1/(\nu+1)}} = T_{\nu p},$$

где $h_{\nu+1}(Q) = \int_{K_d} \|A\eta_1\|^{\nu+1} d\bar{x}$, имеет место неравенство

$$|\hat{f}_p(\bar{t}) - g_{\nu p}(\bar{t})| \leq 3^{\nu+2} \frac{\|\bar{t}\|^{\nu+2} \exp(-\|\bar{t}\|^2/4)}{T_{\nu p}^{\nu+1}}. \quad (6)$$

Теперь воспользуемся следующим неравенством, полученным С.М. Садиковой [9, 10]:

$$\rho(P_p^{(2)}, \Phi) \leq C_5 \left[(\ln T)^{(m-1)/4} (J_1 + 2\sqrt{2}J_2) + \frac{\ln T}{T} \right],$$

где

$$J_1^2 = \int_{\|\bar{t}\| \leq 1} \|\bar{t}\|^{-2} \left| f_p(\bar{t}) - \exp\left(-\frac{\|\bar{t}\|^2}{2}\right) \right|^2 d\bar{t},$$

$$J_2^2 = \int_{1 < \|\bar{t}\| \leq T} \left| f_p(\bar{t}) - \exp\left(-\frac{\|\bar{t}\|^2}{2}\right) \right|^2 d\bar{t}.$$

Выберем

$$T = C_6 Q^{\alpha-2(\nu+3)/\omega} T_{\nu p} \quad (7)$$

и перейдем к нахождению необходимых нам оценок.

По неравенству Минковского имеем

$$J_1 \leq \left(\int_{\|\bar{t}\| < 1} \|\bar{t}\|^{-2} \left| f_p(\bar{t}) - \widehat{f}_p(\bar{t}) \right|^2 d\bar{t} \right)^{1/2} + \left(\int_{\|\bar{t}\| \leq 1} \|\bar{t}\|^{-2} \left| \widehat{f}_p(\bar{t}) - g_{\nu p}(\bar{t}) \right|^2 d\bar{t} \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_{\|\bar{t}\| \leq 1} \|\bar{t}\|^{-2} \left| g_{\nu p}(\bar{t}) - \exp\left(-\frac{\|\bar{t}\|^2}{2}\right) \right|^2 d\bar{t} \right)^{1/2} = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + J_2^{(3)}.$$

Для оценки интеграла $J_1^{(1)}$ при $\|\bar{t}\| \leq n^{-\omega^{3/4}}$ используем очевидную оценку

$$|f_p(\bar{t}) - \widehat{f}_p(\bar{t})| \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{K_d} \left| (\bar{t}, A\bar{\zeta}_p - A\widehat{\zeta}_p) \right| d\bar{x} \leq C_7 \|\bar{t}\|,$$

а при $n^{-\omega^{3/4}} < \|\bar{t}\| \leq 1$ – оценку (4), преобразованную следующим образом. Положим в (4) $N = 2\lceil n^{\omega^{-1/4}} \rceil$, после чего оценка (4) примет вид

$$|f_p(\bar{t}) - \widehat{f}_p(\bar{t})| \leq C_8 \sqrt{\frac{p}{Q}} \frac{1}{n^{\omega^{3/4}}}.$$

Таким образом,

$$J_1^{(1)} \leq \left(\int_{\|\bar{t}\| \leq n^{-\omega^{3/4}}} C_7^2 d\bar{t} \right)^{1/2} + \left(\int_{n^{-\omega^{3/4}} \leq \|\bar{t}\| \leq 1} C_8^2 \frac{p}{Q} \frac{1}{n^{2\omega^{3/4}}} \|\bar{t}\|^{-2} d\bar{t} \right)^{1/2} = O\left(n^{-\omega^{3/4}} \sqrt{\frac{p}{Q}}\right).$$

Согласно неравенству (6)

$$J_1^2 = O(T_{\nu p}^{-\nu+1}).$$

С помощью леммы 1 (используя тот факт, что семиинварианты r -го порядка χ_r и χ'_r соответственно величин ξ и $a\xi$ связаны между собой соотношением $\chi'_r = a^r \chi_r$) найдем оценки семиинвариантов в (5):

$$|\chi_r(i\bar{t})| = O\left(\frac{\|\bar{t}\|^r}{Q^{(r-2)/2}}\right), \quad r = 3, 4, \dots$$

Теперь мы легко получим, что

$$|P_r(i\bar{t})| = O\left(\sum_{l=1}^{r-1} \|\bar{t}\|^{r+2l} Q^{-(l+r)/2}\right). \quad (8)$$

Поэтому

$$J_1^{(3)} = \left(\int_{\|\bar{t}\| \leq 1} \|\bar{t}\|^{-2} \left| \exp\left(-\frac{\|\bar{t}\|^2}{2}\right) \sum_{r=1}^{\nu} P_r(i\bar{t}) \left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^r \right|^2 d\bar{t} \right)^{1/2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{pQ}}\right).$$

Из полученных оценок заключаем, что

$$J_1 = O\left(n^{-\omega^{3/4}} \sqrt{\frac{p}{Q}} + T_{\nu p}^{-(\nu+1)} + \frac{1}{\sqrt{pQ}}\right). \quad (9)$$

Применяя неравенство Минковского, оценим J_2 :

$$J_2 = \left(\int_{1 < \|\bar{t}\| \leq T} \left| f_p(\bar{t}) - \exp\left(-\frac{\|\bar{t}\|^2}{2}\right) \right|^2 d\bar{t} \right)^{1/2} \leq J_2^{(1)} + J_2^{(2)} + J_2^{(3)}.$$

Подынтегральные выражения в $J_2^{(i)}$, исключая $\|\bar{t}\|^{-2}$, такие же, как в $J_1^{(i)}$. Оценки для $J_2^{(1)}$ и $J_2^{(3)}$ получаются аналогично оценкам для $J_1^{(1)}$ и $J_1^{(3)}$:

$$J_2^{(1)} = O\left(\sqrt{\frac{p}{Q}} n^{-\omega^{3/4}} T^m\right), \quad J_2^{(3)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{pQ}}\right).$$

Далее,

$$J_2^{(2)} = \left(\int_{1 < \|\bar{t}\| \leq T} |\widehat{f}_p(\bar{t}) - g_{\nu p}(\bar{t})|^2 d\bar{t} \right)^{1/2} \leq \left(\int_{1 < \|\bar{t}\| \leq T_{\nu p}} \right)^{1/2} + \left(\int_{T_{\nu p} < \|\bar{t}\| \leq T} \right)^{1/2} = J'_1 + J'_2.$$

Согласно неравенству (6)

$$J'_1 = O(T_{\nu p}^{-(\nu+1)}),$$

$$J'_2 \leq \left(\int_{T_{\nu p} < \|\bar{t}\| \leq T} \left| f^p\left(\frac{A'\bar{t}}{\sqrt{p}}\right) \right|^2 d\bar{t} \right)^{1/2} + \left(\int_{T_{\nu p} < \|\bar{t}\| \leq T} |g_{\nu p}(\bar{t})|^2 d\bar{t} \right)^{1/2} = J''_1 + J''_2.$$

В интеграле J''_1 сделаем замену переменных $\bar{u} = A'\bar{t}/\sqrt{p}$ и применим к получающемуся выражению оценку (1) леммы 2 и неравенство

$$m^{(\nu+3)/2} = \left(\int_{K_d} |A\bar{\eta}_1|^2 d\bar{x} \right)^{(\nu+3)/2} \leq \int_{K_d} |A\bar{\eta}_1|^{\nu+3} d\bar{x} \leq C_9 Q^{(\nu+3)^2/\omega},$$

легко выводимое из (3) и леммы 3.

Имеем

$$\begin{aligned}
 J_1'' &\leq \left(\int_{(1-O(1/Q))T_{\nu p}/\sqrt{p} \leq \|\bar{u}\| \leq (1+O(1/Q))T/\sqrt{p}} C_{10} p^m |f(\bar{u})|^{2p} d\bar{u} \right)^{1/2} = \\
 &= O \left(p^{m/2} Q^{\alpha m} \left(1 - \frac{C_2}{Q^{2(\nu+3)/\omega}} \right)^2 \right) = O \left(\frac{Q^{m\alpha+(\nu+3)^2/\omega}}{p^{(\nu+3-m)/2}} \right).
 \end{aligned}$$

Здесь C_6 в выражении (7) для T выбрана таким образом, чтобы

$$\left(1 + O\left(\frac{1}{Q}\right) \right) 8m^{-(\nu+3)/(2(\nu+1))} C_6 \leq C_1,$$

где C_1 — постоянная из леммы 2.

В силу оценки (8)

$$J_2'' = \left(\int_{T_{\nu p} \leq \|\bar{t}\| \leq T} \left| \exp \left(-\frac{\|\bar{t}\|^2}{2} \right) \left(1 + O \left(\sum_{r=1}^{\nu} \frac{\|\bar{t}\|^{3r}}{(pQ)^{r/2}} \right) \right) \right|^2 d\bar{t} \right)^{1/2} = O(T_{\nu p}^{-(\nu+1)}).$$

Таким образом,

$$J_2 = O \left(\sqrt{\frac{p}{Q}} n^{-\omega^{3/4}} T^m + \frac{1}{\sqrt{pQ}} + T_{\nu p}^{-(\nu+1)} + \frac{Q^{m\alpha+(\nu+3)^2/\omega}}{p^{(\nu+3-m)/2}} \right). \quad (10)$$

Окончательно получим из (9) и (10), что

$$\rho(P_p^{(2)}, \Phi) = O \left(\ln^m T \left(\sqrt{\frac{p}{Q}} n^{-\omega^{3/4}} T^m + \frac{1}{\sqrt{pQ}} + T_{\nu p}^{-(\nu+1)} + \frac{Q^{m\alpha+(\nu+3)^2/\omega}}{p^{(\nu+3-m)/2}} + \frac{\ln T}{T} \right) \right).$$

Эта оценка справедлива и для $\rho(P_p^{(1)}, \Phi_\Lambda)$. Так как $\Phi_\Lambda(M) = \Phi(M) + O(1/Q)$, то

$$\rho(P_p^{(1)}, \Phi) = O \left(\rho(P_p^{(2)}, \Phi) + \frac{1}{Q} \right). \quad (11)$$

Далее займемся оценкой вклада $\bar{\zeta}_p^0$ в распределение S_n . Величины P и Q выберем так, что

$$|n - p(Q + N)| \leq p. \quad (12)$$

Поэтому количество слагаемых в $\bar{\eta}_{p+1}^0$ не превзойдет p и согласно неравенству Маркова и лемме 3 будем иметь

$$\text{mes} \left(\bar{x} : \frac{|\bar{\zeta}_p^0|}{\sqrt{p}} > \frac{N+1}{\sqrt{Q}} \right) \leq \sum_{j=1}^m \text{mes} \left(\bar{x} : \frac{|\bar{\zeta}_{pj}^0|}{\sqrt{p}} > \frac{N+1}{\sqrt{Q}} \right) = O \left(\frac{(p(N+1))^{\nu^2/\omega}}{(N+1)^\nu} \right),$$

где ζ_{pj}^0 — компоненты вектора $\bar{\zeta}_p^0$.

Полученная оценка необходима для того, чтобы оценить погрешность, возникающую при замене в (11) распределения $P_p^{(1)}$ вектора $\bar{\zeta}_p p^{-1/2}$ на распределение вектора $(\bar{\zeta}_p + \bar{\zeta}_p^0) p^{-1/2}$.

Так же, как в работе [7], получим

$$\text{mes} \left(\bar{x} : \frac{\bar{\zeta}_p + \bar{\zeta}_p^0}{\sqrt{p}} \in M \right) = \Phi(M) + O \left(\frac{N+1}{\sqrt{Q}} + \frac{(p(N+1))^{\nu^2/\omega}}{(N+1)^\nu} + \rho(P_p^{(1)}, \Phi) \right).$$

Из условия (12) следует, что

$$\sqrt{\frac{n}{pQ}} = 1 + O \left(\frac{N}{Q} \right).$$

Поэтому мы можем записать

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^i) = \frac{1}{\sqrt{pQ}} \sum_{i=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^i) + C_{11} \frac{N}{Q^{3/2} p^{1/2}} \sum_{i=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^i).$$

Неравенство Маркова и лемма 3 дают оценку

$$\text{mes} \left(\bar{x} : \left| \frac{C_{11} N}{Q^{3/2} p^{1/2}} \sum_{i=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^i) \right| > \frac{N+1}{\sqrt{Q}} \right) \leq C_{12} \frac{n^{\nu+\nu^2/\omega}}{Q^{2\nu} p^\nu}.$$

Это позволяет (см. [7]) оценить погрешность при замене распределения вектора $\frac{\bar{\zeta}_p + \bar{\zeta}_p^0}{\sqrt{P}}$ на распределение $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \bar{f}(\bar{x} W^i)$.

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \rho(G_n, \Phi) = O \left(\ln^m T \left(\sqrt{\frac{p}{Q}} n^{-\sqrt[4]{\omega^3}} T^m + \frac{1}{\sqrt{pQ}} + T_{\nu p}^{-(\nu+1)} + \frac{\ln T}{T} + \frac{Q^{m\alpha+(\nu+1)^2/\omega}}{p^{(\nu+3-m)/2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(p(N+1))^{\nu^2/\omega}}{(N+1)^\nu} + \frac{N+1}{\sqrt{Q}} + \frac{n^{\nu+\nu^2/\omega}}{Q^{2\nu} p^\nu} \right). \quad (13) \end{aligned}$$

Далее, выберем $\nu = \sqrt[3]{\omega}$, $p = \left[n^{(1-2\alpha)/(2(1-\alpha))} \right]$, а Q — из условия (12), учитывая, что $N = 2 \left[n^{1/\omega^{3/4}} \right]$. Так как

$$T = C_6 Q^{\alpha-2(\nu+3)/\omega} T_{\nu p} \geq \frac{C_6 Q^\alpha \sqrt{p}}{Q^{3(\nu+3)/\omega}},$$

мы перепишем (13) следующим образом:

$$\rho(G_n, \Phi) = O(n^{-1/(4(1-\alpha))+1/\sqrt[4]{\omega}}). \quad (14)$$

Отсюда вытекает оценка

$$\rho(G_n, \Phi) = O \left(\frac{1}{1 + \beta^{12/\omega}} n^{-1/(4(1-\alpha))+2/\sqrt[4]{\omega}} \right). \quad (15)$$

Доказательство этого перехода аналогично доказательству леммы 5 из [7].

Мы получили (14) при выполнении условия (1) из леммы 2. При $\alpha = 0$ необходимость этого условия отпадает. T будет меньше $T_{\nu p}$ и исчезнет интеграл J'_2 , для оценки которого необходимо условие (1). Подставив $\alpha = 0$ в (14), имеем

$$\rho(G_n, \Phi) = O(n^{-1/4+1/\sqrt[4]{\omega}}).$$

Получив соотношение (15), мы тем самым доказали, что оценка (1) леммы 2 верна при $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{2}{\sqrt[4]{\omega}}$ и $\gamma = \sqrt[12]{\omega}$. Из леммы 2 следует справедливость оценки (1), а из условия (1) следует равенство (14) при $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{2}{\sqrt[4]{\omega}}$. Подставив $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{2}{\sqrt[4]{\omega}}$ в (14), имеем

$$\rho(G_n, \Phi) = O\left(\frac{1}{n^{1/3-3/\sqrt[4]{\omega}}}\right).$$

Этот процесс последовательных приближений можно продолжить (см. [7]).

Окончательно получим

$$\rho(G_n, \Phi) = O\left(\frac{1}{n^{1/2-\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon = 3/\sqrt[8]{\omega}$, $\omega > (2m)^5$. Теорема доказана. □

Summary

F.G. Gabbasov, V.T. Dubrovin. Estimation of the Rate of Convergence in the Multidimensional Central Limit Theorem for Endomorphisms of Euclidean Space.

Let W be such a nonsingular integer square matrix of order d that $|\det W| > 1$; $f_i(x)$ are real-valued periodic in each argument Lipschitz-continuous functions defined on the unit hypercube in R^d . We consider m -dimensional vectors $(f_1(xW^k), \dots, f_m(xW^k))$, $k = 1, 2, \dots$ and obtain the estimate of order $O(n^{\varepsilon-1/2})$ (where ε is an arbitrarily small number) for the distance between the distribution of the normalized sum of these vectors and the normal distribution at all measurable convex sets from R^m .

Keywords: endomorphisms, limit theorem, rate of convergence.

Литература

1. *Леонов В.П.* Некоторые применения старших семинвариантов к теории стационарных случайных процессов. – М.: Наука, 1964. – 69 с.
2. *Постников А.Г.* Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1966. – Т. 82. – С. 3–112.
3. *Дубровин В.Т., Москвин Д.А.* О распределении дробных долей одного класса преобразований евклидовых пространств // Вероятностные методы и кибернетика. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1971. – Вып. 9. – С. 45–56.
4. *Дубровин В.Т.* Многомерная центральная предельная теорема для теоретико-числовых эндоморфизмов // Вероятностные методы и кибернетика. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1972. – Вып. 10. – С. 17–29.
5. *Дубровин В.Т.* Центральная предельная теорема для эндоморфизмов евклидовых пространств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 2. – С. 54–64.
6. *Дубровин В.Т., Москвин Д.А.* Центральная предельная теорема для сумм функций от слабозависимых случайных величин // Теория вероятности и её применение. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1979. – Т. XXIV, Вып. 3. – С. 553–563.

7. *Габбасов Ф.Г.* Многомерная центральная предельная теорема для сумм функций от последовательностей с перемешиванием // Литов. матем. сб. – 1977. – Т. XVII, № 4. – С. 83–98.
8. *Бижялис А.* О многомерных характеристических функциях // Литов. матем. сб. – 1968. – Т. VIII, № 1. – С. 21–40.
9. *Садикова С.М.* Расстояния между распределениями, связанные с их значениями на выпуклых множествах // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 4. – С. 787–789.
10. *Садикова С.М.* О многомерной центральной предельной теореме // Теория вероятности и её применения. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1968. – Т. XIII, № 1. – С. 164–170.

Поступила в редакцию
24.03.13

Дубровин Вячеслав Тимофеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

Габбасов Фарит Гаязович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *gabbasov@kgasu.ru*