

УДК 515.124.4

О ДЕЙСТВИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЫ НЕНУЛЕВЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ НА ПУНКТИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Е.Н. Сосов

Аннотация

Рассмотрено пунктированное пространство Лобачевского Λ в модели Бельтрами–Клейна. Получена явная формула для действия мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пространстве Λ , аналогичного действию указанной группы гомотетиями на пунктированном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: пространство Лобачевского, модель Бельтрами–Клейна, мультипликативная группа ненулевых вещественных чисел.

Введение

Пусть $\mathbb{E}$ – евклидово пространство размерности больше 1 над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, $B(O, 1)$ – открытый шар в $\mathbb{E}$ радиуса 1 с центром в фиксированной точке O . Точки внутри шара и на его границе будем задавать их радиусами-векторами, например, точка O задается нулевым радиусом-вектором 0 . Рассмотрим модель Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского [1–3]. В этой модели л-точка есть точка в $\Lambda = B(O, 1)$, л-прямая есть хорда в Λ , а расстояние между л-точками, заданными своими радиусами-векторами $x, y \in \Lambda$ относительно точки O , вычисляется по формуле

$$\rho(x, y) = k \operatorname{Arch} \frac{1 - (x, y)}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2}}, \quad (1)$$

где k – положительная константа, (x, y) – скалярное произведение радиусов-векторов x, y и x^2 – скалярный квадрат радиуса-вектора x [3, с. 5].

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $p, x \in \Lambda$. Определим точку $\lambda_p(x) \in \Lambda$ с помощью следующих трех условий [4–6].

1. $\rho(p, \lambda_p(x)) = |\lambda| \rho(p, x)$.
2. При $x \neq p$, $\lambda > 0$ точки $x, \lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p, x)$, проходящей через точки p, x , по одну сторону от точки p .
3. При $x \neq p$, $\lambda < 0$ точки $x, \lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p, x)$ по разные стороны от точки p .

Отображение

$$x \mapsto \lambda_p(x),$$

где λ пробегает множество всех ненулевых вещественных чисел, определяет действие мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского (точка $p \in \Lambda$ фиксирована).

Нетрудно проверить, что при $\lambda \neq 1$ точка $\lambda_p(x)$ делит ориентированный л-отрезок $[p, x]$ с началом в точке p и концом в точке x в отношении $\lambda : (1 - \lambda)$ [5, 6]. Отметим также следующие элементарные свойства отображения λ_p .

А. Для всех $p, x, y \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$\lambda_x(y) = (1 - \lambda)_y(x), \quad \rho(\lambda_p(x), \mu_p(x)) = |\lambda - \mu| \rho(p, x).$$

В. Для всех $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\mu \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\mu_x(y) = (\mu + \lambda(\mu - 1))_z(y),$$

где точка

$$z = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)_x(y)$$

делит ориентированный л-отрезок $[x, y]$ в отношении λ [5], [6, с. 79].

Напомним, что в модели Бельтрами–Клейна произвольное движение есть ограничение на открытый шар Λ проективного преобразования евклидова пространства, сохраняющего Λ [3, с. 7]. Это движение f можно представить в виде

$$f = g_a \circ U,$$

где U – ортогональное преобразование евклидова пространства $\mathbb{E}$ с фиксированной точкой O , суженное на шар Λ , а g_a – параллельный перенос в модели Бельтрами–Клейна из точки O вдоль направленного л-отрезка, определенного вектором a , такого, что $0 \leq |a| < 1$ [3, с. 7].

Параллельный перенос g_a можно представить в виде [3, с. 23, 24]

$$g_a : \Lambda \rightarrow \Lambda, \quad g_a(x) = \frac{((a, x) + a^2)a + (a^2x - (a, x)a)\sqrt{1 - a^2}}{a^2(1 + (a, x))}.$$

Параллельный перенос используется, например, в специальной теории относительности для интерпретации закона преобразования скорости частицы или закона сложения скоростей [7], [8, с. 10–12]. Это преобразование можно представить и в такой форме [4], [9, с. 44]

$$g_a(x) = (-1)_{(\frac{1}{2})_0(a)} \circ (-1)_0(x).$$

Хорошо известно, что в евклидовом пространстве группа всех движений является собственной подгруппой группы всех подобий, а в пространстве Лобачевского эти группы совпадают. Но группу всех движений пространства Лобачевского можно расширить, образовав конечные композиции движений с преобразованиями λ_p , когда точка p пробегает Λ и $\lambda > 0$. Получится сложная и недостаточно изученная группа преобразований. Ясно, что для изучения этой группы желательно иметь явное представление преобразования λ_p .

1. Основной результат

Явное представление преобразования λ_p указано в лемме 2 из [6, с. 84] в более общем случае геометрии Гильберта [5]. Там же доказано [6, с. 84], что это преобразование уменьшает расстояния при $0 < \lambda < 1$ и, следовательно, увеличивает расстояния при $\lambda > 1$. Но преобразование λ_p упростить в случае геометрии Лобачевского достаточно сложно. Еще один способ нахождения преобразования λ_p состоит в использовании представления [9, с. 25]

$$\lambda_p = g_p \circ \lambda_0 \circ g_{-p}$$

с учетом того, что

$$\lambda_0(x) = x \operatorname{cth} b \operatorname{th}(\lambda b),$$

где $b = \rho(0, x)/k$, $x \in \Lambda$ [5], [6, с. 86]. Такой способ приводит к очень большим вычислениям и нетривиальным преобразованиям. В модели Бельтрами–Клейна более простой способ нахождения преобразования λ_p реализован нами в следующей теореме.

Теорема. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $p, x \in \Lambda$. Тогда имеет место следующая формула

$$\lambda_p(x) = \frac{p \operatorname{ch} a \operatorname{sh}((1 - \lambda)c) + x \operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c)}{\operatorname{ch} a \operatorname{sh}((1 - \lambda)c) + \operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c)},$$

где $a = \rho(0, p)/k$, $b = \rho(0, x)/k$, $c = \rho(p, x)/k$.

Доказательство. Из определения точки $\lambda_p(x)$ следует, что ее радиус-вектор можно искать в виде

$$\lambda_p(x) = p + \mu(x - p),$$

где $\mu \in \mathbb{R}$. Подставим правую часть этого равенства в условие 1 и используем формулу (1) для расстояния. Тогда получим следующее уравнение относительно μ :

$$\frac{1 - (p, p + \mu(x - p))}{\sqrt{1 - p^2} \sqrt{1 - (p + \mu(x - p))^2}} = \operatorname{ch}(\lambda c).$$

Возведя обе части в квадрат и используя основное гиперболическое тождество, получим

$$((p, x - p)^2 + \operatorname{ch}^2(\lambda c)(1 - p^2)(x - p)^2)\mu^2 + 2\mu(1 - p^2)(p, x - p) \operatorname{sh}^2(\lambda c) - (1 - p^2)^2 \operatorname{sh}^2(\lambda c) = 0.$$

Найдем корни этого квадратного уравнения:

$$\mu_{1,2} = \frac{-(1 - p^2)(p, x - p) \operatorname{sh}^2(\lambda c) \pm \sqrt{\Delta}}{(p, x - p)^2 + \operatorname{ch}^2(\lambda c)(1 - p^2)(x - p)^2},$$

где $\Delta = (1 - p^2)^2(p, x - p)^2 \operatorname{sh}^4(\lambda c) + ((p, x - p)^2 + \operatorname{ch}^2(\lambda c)(1 - p^2)(x - p)^2)(1 - p^2)^2 \operatorname{sh}^2(\lambda c)$. Используя основное гиперболическое тождество, упростим числитель

$$(1 - p^2) \operatorname{sh}(|\lambda|c) (- (p, x - p) \operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c) \sqrt{(p, x - p)^2 + (1 - p^2)(x - p)^2}).$$

Теперь нетрудно упростить формулу для корней

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= \frac{(1 - p^2) \operatorname{sh}(|\lambda|c)}{(p, x - p) \operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c) \sqrt{(p, x - p)^2 + (1 - p^2)(x - p)^2}} = \\ &= \frac{(1 - p^2) \operatorname{sh}(|\lambda|c)}{(1 - p^2 - (1 - (p, x))) \operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c) \sqrt{(1 - (p, x))^2 + (1 - p^2)(1 - x^2)}} = \\ &= \frac{\operatorname{ch}^{-2} a \operatorname{sh}(|\lambda|c)}{(\operatorname{ch}^{-2} a - \operatorname{ch}^{-1} a \operatorname{ch}^{-1} b \operatorname{ch} c) \operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c) \sqrt{\operatorname{ch}^{-2} a \operatorname{ch}^{-2} b \operatorname{ch}^2 c + \operatorname{ch}^{-2} a \operatorname{ch}^{-2} b}} = \\ &= \frac{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c)}{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c) + \operatorname{ch} a (- \operatorname{ch} c \operatorname{sh}(|\lambda|c) \pm \operatorname{ch}(\lambda c) \operatorname{sh} c)} = \\ &= \frac{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c)}{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(|\lambda|c) + \operatorname{ch} a \operatorname{sh}((\pm 1 - |\lambda|)c)}. \quad (2) \end{aligned}$$

Если $\lambda = 1$, то $\mu = 1$ и в этом случае в формуле (2) должен быть верхний знак. Если $\lambda = -1$ и $p = 0$, то $\mu = -1$, $a = 0$, $c = b$ и в формуле (2) необходимо использовать нижний знак. Теперь нетрудно понять, что в формуле (2) верхний знак должен быть при $\lambda > 0$, а нижний знак – при $\lambda < 0$. Следовательно, получим формулу

$$\mu = \frac{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c)}{\operatorname{ch} b \operatorname{sh}(\lambda c) + \operatorname{ch} a \operatorname{sh}((1 - \lambda)c)}.$$

Таким образом, теорема доказана. $\square$

Из теоремы следует известная формула для середины λ -отрезка с концами p , $x \in \Lambda$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_p(x) = \frac{p \operatorname{ch} a + x \operatorname{ch} b}{\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b} = \frac{p\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-p^2}},$$

где $a = \rho(0, p)/k$, $b = \rho(0, x)/k$ [3, 5, 6]. Эту формулу можно применить, например, для нахождения радиуса-вектора r точки пересечения трех медиан треугольника через радиусы-векторы вершин треугольника p , x и y [3, с. 13]

$$r = \frac{p \operatorname{ch}(\rho(0, p)/k) + x \operatorname{ch}(\rho(0, x)/k) + y \operatorname{ch}(\rho(0, y)/k)}{\operatorname{ch}(\rho(0, p)/k) + \operatorname{ch}(\rho(0, x)/k) + \operatorname{ch}(\rho(0, y)/k)}.$$

Отметим, что отображение $2_0 : B(O, 1) \rightarrow B(O, 1)$ является изометрией модели Пуанкаре в шаре на модель Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского в том же шаре [3, с. 18].

Summary

E.N. Sosov. On the Action of the Multiplicative Group of Nonzero Real Numbers on the Pointed Lobachevsky Space.

We consider the pointed Lobachevsky space Λ . In terms of the Beltrami–Klein model, we obtain an explicit expression for the action of the multiplicative group of nonzero real numbers on the space Λ . This action is analogous to that of this group on the pointed Euclidean space.

Key words: Lobachevsky space, Beltrami–Klein model, multiplicative group of nonzero real numbers.

Литература

1. Широков П.А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. – М.: Наука, 1983. – 80 с.
2. Нут Ю.Ю. Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 311 с.
3. Сосов Е.Н. Геометрия Лобачевского и её применение в специальной теории относительности. Часть 1. Геометрия Лобачевского. – Казань: Казан. ун-т, 2012. – 38 с.
4. Сабинин Л.В. Одули как новый подход к геометрии со связностью // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233, № 5. – С. 800–803.
5. Сосов Е.Н. Об одном одуле в геометрии Гильберта // Изв. вузов. Матем. – 1995. – № 5. – С. 78–82.
6. Sosov E.N. Geometries of convex and finite sets of geodesic spaces. – arXiv:1011.6191v1 [math.MG]. – 2010. – 256 p.
7. Сабинин Л.В., Михеев П.О. О законе сложения скоростей в специальной теории относительности // Усп. матем. наук. – 1993. – Т. 48, № 5(293). – С. 183–184.

8. *Сосов Е.Н.* Геометрия Лобачевского и её применение в специальной теории относительности. Часть 2. Применение геометрии Лобачевского в специальной теории относительности. – Казань: Казан. ун-т, 2012. – 32 с.
9. *Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л.* Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим. – М.: Изд-во МГОУ, 2012. – 132 с.

Поступила в редакцию
02.11.12

Сосов Евгений Николаевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Evgenii.Sosov@ksu.ru*