УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 154, кн. 4 Физико-математические науки *2012*

УДК 514.762.33

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ МЕТРИКИ НА ТЕНЗОРНОМ РАССЛОЕНИИ ТИПА (2,0) НАД ГРУППОЙ ЛИ

Н.А. Опокина

Аннотация

В статье построены вертикальный и горизонтальный лифты левоинвариантных векторных полей. Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы горизонтальный лифт левоинвариантных векторных полей был левоинвариантным. Построены левоинвариантные вертикальное и горизонтальное распределения, а также левоинвариантная метрика g на T_0^2G из левоинвариантной метрики на базе G.

Ключевые слова: левоинвариантная метрика, тензорное расслоение над группой Ли, вертикальный и горизонтальный лифты, вертикальное и горизонтальное распределения.

---

1. Внутренние связности на T_0^2G

Пусть G – группа Ли размерности n. Мы будем использовать способ индексации компонент тензоров, введённый Б.Н. Шапуковым [1]. Пространство T_0^2 отождествляется с векторным пространством F размерности n^2 с помощью линейного изоморфизма $J : T_0^2 \to F$. Выбрав в F некоторый базис $\{e_\alpha\}$, положим $Je_{ij} = J_{ij}^\alpha e_\alpha$. Тогда в координатах

$$T^\alpha = J_{ij}^\alpha T^{ij}.$$

Здесь J_{ij}^α – некоторые константы, зависящие от выбора базисов и образующие невырожденную n^2-матрицу, где α означает номер строки, а совокупность индексов ij, занумерованных в некотором порядке, – номер столбца. С помощью обратной матрицы $J^{-1} = (J_\alpha^{ij})$ получим $T^{ij} = J_\alpha^{ij} T^\alpha$. При этом выполняются соотношения

$$J_{ij}^\alpha J_\beta^{ij} = \delta_\beta^\alpha, \quad J_\alpha^{ij} J_{km}^\alpha = \delta_k^i \delta_m^j.$$

Вследствие этого тензорное расслоение T_0^2M можно отождествить с векторным $E(M)$ с помощью линейного изоморфизма J над M

$$x^i = x^i, \quad T^\alpha = J_{ij}^\alpha T^{ij}. \tag{1}$$

Компоненты x^i, T^α образуют на расслоенном многообразии *адаптированные координаты* $(X^A) = (x^i, T^\alpha)$, где индексы пробегают следующие значения:

$$\begin{aligned} &\text{базисные} \ \ i,\, j,\, k,\, \ldots = 1, \ldots, n; \\ &\text{слоевые} \ \ \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \ldots = n+1, \ldots, N = n+n^2; \\ &\text{тотальные} \ \ A,\, B,\, C,\, \ldots = 1, \ldots, N = n+n^2. \end{aligned}$$

Пусть G – группа Ли с умножением

$$(x, y) \to z = f(x, y) = xy, \tag{2}$$

(U,Ψ) – карта в окрестности единичного элемента e группы Ли, в которой e имеет нулевые координаты, x^i – координаты точки $x\in U$. Если $x,\ y,\ z\in U$, то в этой окрестности групповую операцию (2) можно записать в координатах:

$$z^i=f^i(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n).$$

Здесь f^i являются аналитическими функциями своих аргументов. Функции $f^i(x,y)$ называются *групповыми функциями.* Они удовлетворяют очевидным соотношениям

$$f^i(x,e)=x^i,\quad f^i(e,y)=y^i,\quad \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_e=\left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j}\right)_e=\delta^i_j\,.$$

Обозначим через $L(x):G\to G$ и $R(x):G\to G$ соответственно левый и правый сдвиги на группе G, порожденные элементом x.

Рассмотрим тензорное расслоение типа (2, 0) над группой Ли G с проекцией $\pi:T^2_0G\to G$. Многообразие T^2_0G является группой Ли с умножением [2]

$$(x,T_x)\circ(y,T_y)=(xy,L_*(x)T_y+R_*(y)T_x). \tag{3}$$

В координатной записи

$$z^k=f^k(x^i,y^j),\quad T^{ij}_z=L^i_k(x)L^j_m(x)T^{km}_y+R^i_k(y)R^j_m(y)T^{km}_x, \tag{4}$$

где $(L^j_i(x))=(\partial_{y^j}f^i(x,y))$ – матрица дифференциала левого сдвига, применённого к элементу $y\in G$, $(R^j_i(y))=(\partial_{x^j}f^i(x,y))$ – матрица дифференциала правого сдвига, применённого к элементу $x\in G$. Используя введенный способ индексации, положим

$$L^\alpha_\beta(x)=J^\alpha_{km}L^k_i(x)L^m_j(x)J^{ij}_\beta,\quad R^\alpha_\beta(x)=J^\alpha_{km}R^k_i(x)R^m_j(x)J^{ij}_\beta. \tag{5}$$

Тогда операция умножения (3) примет вид:

$$z^k=f^k(x^i,y^j),\quad T^\alpha_z=L^\alpha_\beta(x)T^\beta_y+R^\alpha_\beta(y)T^\beta_x. \tag{6}$$

Из (3) следует, что дифференциал левого действия на T^2_0G в натуральном поле реперов имеет вид:

$$L_*(X)=\begin{pmatrix} L_*(x) & 0\\ \partial_y(R_*(y)\otimes R_*(y))_eT_x & L_*(x)\otimes L_*(x)\end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $L_*(x)$, $R_*(x)$ – дифференциалы левого и правого действия на группе G соответственно. Каждый из ненулевых блоков матрицы (7) имеет следующий координатный вид [2]

$$\begin{aligned}&L_*(x)=(L^i_j(x)),\\ &(\partial_y(R_*(y)\otimes R_*(y)))_eT_x=J^\alpha_{km}(\delta^m_j\partial_iL^k_s(x)+\delta^k_i\partial_jL^m_s(x))T^{ij}_x\equiv L^\alpha_{\beta s}(x)T^\beta_x,\\ &L_*(x)\otimes L_*(x)=(L^\beta_\alpha(x)).\end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим проекцию $p:T^2_0M\to M$. Тогда её дифференциал $p_*:T(T^2_0M)\to$ $\to TM$ есть морфизм касательных расслоений, который всякому вектору U в точке $X\in T^2_0M$ ставит в соответствие вектор $u=p_*U$ в точке $p(X)$. Возникает *вертикальное подрасслоение*

$$V(T^2_0M)=\ker p_*\subset T(T^2_0M)$$

размерности m^2, сечения которого называются *вертикальными векторными полями* на T^2_0M. Вертикальные подпространства образуют инволютивное распределение на многообразии T^2_0M.

Определение 1. Говорят, что расслоение T^2_0M снабжено внутренней связностью, если на расслоенном многообразии задано гладкое распределение $H(T^2_0M)$, дополнительное к вертикальному.

Указанное распределение принято называть горизонтальным [1]. Таким образом,
$$T(T^2_0M) = H(T^2_0M) \oplus V(T^2_0M).$$

Построим горизонтальное распределение $H(T^2_0G)$ на расслоении T^2_0G. Локально его можно задать проектируемыми векторными полями
$$\partial^H_i = \partial_i - \Gamma^\alpha_i(X)\partial_\alpha,$$
π-связанными с векторами ∂_i натурального поля реперов на базе, где $X \in T^2_0G$. Вместе с вертикальными векторными полями $\partial_\alpha = J^{ij}_\alpha \partial_i \otimes \partial_j$ они образуют адаптированное поле реперов на T^2_0G [3]. Двойственным образом это распределение задается базисом линейных форм
$$\omega^\alpha = dT^\alpha + \Gamma^\alpha_i(X)dx^i,$$
которые вместе с 1-формами dx^i образуют *адаптированное поле кореперов.* В том случае, когда функции $\Gamma^\alpha_i(X)$ линейно и однородно зависят от слоевых координат T^α, то есть
$$\Gamma^\alpha_i(x^k, T^\beta_x) = \Gamma^\alpha_{i\gamma}(x^k)T^\gamma,$$
говорят, что внутренняя связность линейна. Таким образом, внутренняя связность задается функциями $\Gamma^\alpha_{i\gamma}(x)$ – компонентами внутренней связности [3].

Рассмотрим группу Ли G. На всякой группе Ли, поскольку она является параллелизуемым многообразием, существуют канонические линейные связности. Рассмотрим левую связность $\widehat{\nabla}$, относительно которой абсолютно параллельны левоинвариантные векторные поля. Левая связность имеет нулевую кривизну, но ненулевое кручение [4]. Коэффициенты левой связности имеют вид
$$\widehat{\Gamma}^k_{ij}(x) = -\widetilde{L}^s_j(x)\partial_i L^k_s(x) = L^k_s(x)\partial_i \widetilde{L}^s_j(x), \tag{9}$$
где $(L^s_j(x))$ – матрица дифференциала левого сдвига на $L_*(x)$ на группе Ли G, $(\widetilde{L}^s_j(x))$ – матрица, обратная к матрице $(L^s_j(x))$.

Известно, что левая связность группы G однозначно определяет на расслоении T^2_0G внутреннюю связность с компонентами [5]
$$\widehat{\Gamma}^{ij}_{kpq}(x) = \delta^i_p\widehat{\Gamma}^j_{kq}(x) + \delta^j_q\widehat{\Gamma}^i_{kp}(x). \tag{10}$$

С учётом обозначений, введённых ранее, величины (10) можно записать также в виде
$$\widehat{\Gamma}^\alpha_{k\beta}(x) = J^\alpha_{ij}\widehat{\Gamma}^{ij}_{kpq}(x)J^{pq}_\beta, \tag{11}$$
где J^{pq}_β – компоненты обратной матрицы J^{-1}.

Рассмотрим правую связность $\widetilde{\nabla}$ на группе Ли G, относительно которой абсолютно параллельны правоинвариантные векторные поля. Правая связность имеет нулевую кривизну, но ненулевое кручение [4].

Известно [6], что правая связность на группе Ли является взаимной к левой связности. Пусть $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ – коэффициенты правой связности в натуральном поле реперов. Тогда
$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij}(x) = \widehat{\Gamma}^k_{ji}(x), \tag{12}$$

откуда коэффициенты правой связности в натуральном поле реперов равны

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij}(x) = -\widetilde{L}^s_i(x)\partial_j L^k_s(x). \tag{13}$$

Вычислим коэффициенты внутренней связности на T^2_0G, используя формулу (10). Имеем

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{i\beta} = J^\alpha_{km}J^{ps}_\beta(\delta^k_p\widetilde{\Gamma}^m_{is} + \delta^m_s\widetilde{\Gamma}^k_{ip}). \tag{14}$$

Тогда, учитывая (12) и (10), получим

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{i\beta} = J^\alpha_{km}J^{ps}_\beta(\delta^k_p\widetilde{\Gamma}^m_{is} + \delta^m_s\widetilde{\Gamma}^k_{ip}) = J^\alpha_{km}J^{ps}_\beta(\delta^k_p\widehat{\Gamma}^m_{si} + \delta^m_s\widehat{\Gamma}^k_{pi}) = \widehat{\Gamma}^\alpha_{\beta i}.$$

Отсюда следует

Предложение 1. *Внутренняя связность на T^2_0G, построенная из правой связности на базе G, является взаимной к внутренней связности (10), построенной из левой связности на G.*

2. Горизонтальный и вертикальный лифты векторных полей

Рассмотрим вертикальное распределение на тензорном расслоении T^2_0G. Для него верно следующее предложение.

Предложение 2. *Вертикальное распределение $V(T^2_0G) \subset T^2_0G$ левоинвариантно.*

Доказательство. Возьмём произвольный вектор $U \in V_E(T^2_0G)$ и применим к нему дифференциал левого сдвига (7). Тогда

$$U(X) = L_*(X)U = L^\alpha_\beta(x)U^\beta\partial_\alpha,$$

откуда следует, что $U(X) \in V_X(T^2_0G)$, то есть вертикальное распределение $V(T^2_0G) \subset T^2_0G$ левоинвариантно. □

Пусть $E_i(X) = e^H_i(X)$ – горизонтальный лифт левоинвариантного векторного поля $e_i(x)$ на G. Отображение горизонтального лифта, то есть линейный изоморфизм $H : T_xG \to H_X(T^2_0G)$, перестановочно с дифференциалом левого сдвига:

$$E_i(X) = e^H_i(X) = (L_*(x)\partial_i)^H = L_*(X)\partial^H_i.$$

Найдём условие, при котором $\{E_i\}$ являются левоинвариантными векторными полями. Условие левоинвариантности E_i

$$E_i(AX) = L_*(A)E_i(X), \tag{15}$$

где $A \in T^2_0G$. В координатах относительно натурального поля реперов E_i условие левоинвариантности имеет вид

$$E_i(X) = L^k_i(x)(\partial_k - \Gamma^\beta_{k\alpha}(x)T^\alpha_x\partial_\beta).$$

Тогда

$$L_*(A)E_i(X) = L^k_j(a)L^j_i(x)\partial_k - (L^\alpha_{\beta j}(a)T^\beta_a L^j_i(x) + L^\alpha_\beta(a)L^k_i(x)\Gamma^\beta_{k\gamma}(x)T^\gamma_x)\partial_\alpha. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$E_i(AX) = L^k_i(ax)(\partial_k - \Gamma^\alpha_{k\beta}(ax)T^\beta_{ax}\partial_\alpha). \tag{17}$$

Заметим, что в силу формулы (3)

$$T^{\beta}_{ax} = L^{\beta}_{\gamma}(a)T^{\gamma}_{x} + R^{\beta}_{\gamma}(x)T^{\gamma}_{a}.$$

Вследствие этого

$$E_i(AX) = L^k_i(ax)\partial_k - (L^k_i(ax)\Gamma^{\alpha}_{k\beta}(ax)L^{\beta}_{\gamma}(a)T^{\gamma}_{x} + L^k_i(ax)\Gamma^{\alpha}_{k\beta}(ax)R^{\beta}_{\gamma}(x)T^{\gamma}_{a})\partial_{\alpha}. \quad (18)$$

Полагая в формулах (16) и (18) $X = E = (e, 0)$ и сравнивая их, получим:

$$L^{\alpha}_{\gamma i}(a)T^{\gamma}_{a} = L^k_i(a)\Gamma^{\alpha}_{k\gamma}(a)T^{\gamma}_{a},$$

откуда

$$\Gamma^{\alpha}_{i\gamma}(a) = -\widetilde{L}^k_i(a)L^{\alpha}_{\gamma k}(a) = -\widetilde{L}^k_i(a)J^{\alpha}_{sm}(\delta^m_q\partial_p L^s_k(a) + \delta^s_p\partial_q L^m_k(a))J^{pq}_{\gamma} =$$
$$= J^{\alpha}_{sm}J^{pq}_{\gamma}(-\delta^m_q\widetilde{L}^k_i(a)\partial_p L^s_k(a) - \delta^s_p\widetilde{L}^k_i(a)\partial_q L^m_k(a))$$

Учитывая формулы (13) и (14), имеем

$$\Gamma^{\alpha}_{i\gamma}(a) = J^{\alpha}_{sm}J^{pq}_{\gamma}(\delta^m_q\widetilde{\Gamma}^s_{ip}(a) + \delta^s_p\widetilde{\Gamma}^m_{iq}(a)) = \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{i\gamma}(a), \quad (19)$$

где $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}(a)$ – коэффициенты правой связности на группе Ли G, $\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{i\gamma}(a)$ – коэффициенты внутренней связности на группе Ли T^2_0G. Получили следующий результат.

Теорема 1. *Для того чтобы горизонтальные лифты левоинвариантных векторных полей являлись левоинвариантными, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты внутренней связности совпадали с коэффициентами внутренней связности* $\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{i\gamma}$, *задаваемыми* (14).

Следствие 1. *Поле реперов* E_i *образует левоинвариантное поле реперов горизонтального распределения* $H(T^2_0G)$.

Для горизонтального распределения на тензорном расслоении T^2_0G верна следующая

Теорема 2. *Горизонтальное распределение* $H(T^2_0G)$, *определяемое связностью с коэффициентами* $\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{i\beta}$ (14), *является левоинвариантным.*

Доказательство. Пусть $U \in H_E(T^2_0G)$, то есть $U = U^i\partial^H_i(E)$. Заметим, что

$$\partial^H_i(E) = \partial_i(E) - \Gamma^{\alpha}_i(E)\partial_{\alpha}(E) = \partial_i(E),$$

так как коэффициенты линейной связности Γ^{α}_i в единице $E = (e, 0) \in T^2_0G$ равны нулю. Действуя на вектор U дифференциалом левого сдвига (7), получим

$$U(X) = L_*(X)U = L^i_j(x)U^j\partial_i + L^{\alpha}_{\beta j}(x)T^{\beta}_xU^j\partial_{\alpha}.$$

С учетом формулы (9) и предложения 1 получим

$$L^{\alpha}_{\beta s}(x)T^{\beta}_x = J^{\alpha}_{km}(\partial_p L^k_s(x)T^{pm}_x + \partial_q L^m_s(x)T^{kq}_x) =$$
$$= J^{\alpha}_{km}(\delta^m_q\partial_p L^k_s(x) + \delta^k_p\partial_q L^m_s(x))T^{pq}_x = -J^{\alpha}_{km}(\widehat{\Gamma}^k_{pi}(x)L^i_s(x)\delta^m_q + \widehat{\Gamma}^m_{qj}(x)L^j_s(x)\delta^k_p)T^{pq}_x =$$
$$= -J^{\alpha}_{km}(\widehat{\Gamma}^k_{pj}(x)\delta^m_q + \widehat{\Gamma}^m_{qj}(x)\delta^k_p)L^j_s(x)T^{pq}_x = -L^j_s(x)\widehat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta j}(x)T^{\beta}_x = -L^j_s(x)\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{j\beta}(x)T^{\beta}_x.$$

Тогда

$$U(X) = L^i_j(x)U^j(\partial_i - \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{i\gamma}(x)T^{\beta}_x\partial_{\alpha}) = L^i_j(x)U^j\partial^H_i = U^jE_j.$$

Отсюда следует, что вектор $U(X) \in H_X(T^2_0G)$. Значит, горизонтальное распределение левоинвариантно. □

Определим вертикальные векторные поля

$$E_\alpha(X) = J^{ij}_\alpha e_i(x) \otimes e_j(x). \tag{20}$$

В координатах они имеют вид $E_\alpha(X) = L^\beta_\alpha(x)\partial_\beta$.

Теорема 3. *Вертикальные векторные поля E_α, определённые формулой* (20), *являются левоинвариантными.*

Доказательство. Возьмём вертикальные вектора $E_\alpha(X) \in V_X(T^2_0G)$ и применим к ним дифференциал левого сдвига (7). В результате получим

$$L_*(A)E_\alpha(X) = L^\beta_\gamma(a)L^\gamma_\alpha(x)\partial_\beta = L^\beta_\alpha(ax)\partial_\beta = E_\alpha(AX).$$

□

Следствие 2. *Поле реперов E_α образует левоинвариантное поле реперов вертикального распределения $V(T^2_0G)$.*

Итак, мы построили левоинвариантное и адаптированное поле реперов $\{E_A = (E_i, E_\alpha)\}$, где

$$E_i(X) = L^j_i(x)\partial^H_j, \quad E_\alpha(X) = L^\beta_\alpha(x)\partial_\beta. \tag{21}$$

Найдём структурные уравнения. Рассмотрим сначала коммутатор $[E_\alpha, E_\beta]$. Учитывая определение коммутатора и вид базиса (21), получим

$$[E_\alpha, E_\beta] = [L^\gamma_\alpha(x)\partial_\gamma, L^\delta_\beta(x)\partial_\delta] = L^\gamma_\alpha(x)(\partial_\gamma L^\delta_\beta(x))\partial_\delta - L^\delta_\beta(x)(\partial_\delta L^\gamma_\alpha(x))\partial_\gamma = 0.$$

Вычислим коммутатор $[E_i, E_\alpha]$:

$$\begin{aligned}[E_i, E_\alpha] &= [L^j_i(x)\partial^H_j, L^\beta_\alpha(x)\partial_\beta] = \\ &= L^j_i(x)(\partial^H_j L^\beta_\alpha(x))\partial_\beta - L^\beta_\alpha(x)(\partial_\beta L^j_i(x))\partial^H_j + L^j_i(x)L^\beta_\alpha(x)[\partial^H_j, \partial_\beta] = \\ &= L^j_i(x)(\partial_j L^\beta_\alpha(x))\partial_\beta + L^j_i(x)L^\beta_\alpha(x)[\partial^H_j, \partial_\beta].\end{aligned}$$

Заметим, что

$$[\partial^H_j, \partial_\beta] = [\partial_j - \widetilde{\Gamma}^\gamma_{j\alpha}(x)T^\alpha\partial_\gamma, \partial_\beta] = \partial_\beta(\widetilde{\Gamma}^\gamma_{i\alpha}(x)T^\alpha)\partial_\gamma = \widetilde{\Gamma}^\gamma_{j\beta}(x)\partial_\gamma.$$

Учитывая последнее выражение, имеем

$$[E_i, E_\alpha] = L^j_i(x)(\partial_j L^\beta_\alpha(x))\partial_\beta + L^j_i(x)L^\beta_\alpha(x)\widetilde{\Gamma}^\gamma_{j\beta}(x)\partial_\gamma. \tag{22}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}[E_i, E_\alpha] &= C^j_{i\alpha}E_j + C^\beta_{i\alpha}E_\beta = C^j_{i\alpha}L^k_j(x)\partial^H_k + C^\beta_{i\alpha}L^\gamma_\beta(x)\partial_\gamma = \\ &= C^j_{i\alpha}L^k_j(x)(\partial_j - \widetilde{\Gamma}^\gamma_{k\delta}(x)T^\delta\partial_\gamma) + C^\beta_{i\alpha}L^\gamma_\beta(x)\partial_\gamma = \\ &= C^j_{i\alpha}L^k_j(x)\partial_j - C^j_{i\alpha}L^k_j(x)\widetilde{\Gamma}^\gamma_{k\delta}(x)T^\delta\partial_\gamma + C^\beta_{i\alpha}L^\gamma_\beta(x)\partial_\gamma.\end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с (22), имеем

$$C^j_{i\alpha}L^k_j(x) = 0,$$

$$C^j_{i\alpha}L^k_j(x)\widetilde{\Gamma}^\gamma_{k\delta}(x)T^\delta + C^\beta_{i\alpha}L^\gamma_\beta(x) = L^j_i(x)(\partial_j L^\gamma_\alpha(x)) + L^j_i(x)L^\beta_\alpha(x)\widetilde{\Gamma}^\gamma_{j\beta}(x),$$

откуда $C^j_{i\alpha}=0$ и

$$C^\beta_{i\alpha}L^\gamma_\beta(x)=L^j_i(x)(\partial_j L^\gamma_\alpha(x))+L^j_i(x)L^\beta_\alpha(x)\widetilde{\Gamma}^\gamma_{j\beta}(x). \tag{23}$$

Полагая в (23) $X=E$, получим

$$C^\beta_{i\alpha}=(\partial_i L^\beta_\alpha(x))_e+\widetilde{\Gamma}^\beta_{i\alpha}(e).$$

Вычислим структурные константы $C^\beta_{i\alpha}$

$$(\partial_i L^\beta_\alpha(x))_e=J^\beta_{ps}J^{km}_\alpha((\partial_i L^p_k(x))_e\delta^s_m+(\partial_i L^s_m(x))_e\delta^p_k);$$

и

$$\widetilde{\Gamma}^\beta_{i\alpha}(e)=J^\beta_{ps}J^{km}_\alpha(\widetilde{\Gamma}^p_{ik}(e)\delta^s_m+\widetilde{\Gamma}^s_{im}(e)\delta^p_k)=J^\beta_{ps}J^{km}_\alpha(-(\partial_k L^p_i(x))_e\delta^s_m-(\partial_m L^i_m(x))_e\delta^p_k).$$

Складывая $(\partial_i L^\beta_\alpha(x))_e$ и $\widetilde{\Gamma}^\beta_{i\alpha}(e)$, получим

$$\begin{aligned}C^\beta_{i\alpha}&=J^\beta_{ps}J^{km}_\alpha((\partial_i L^p_k(x))_e\delta^s_m+(\partial_i L^s_m(x))_e\delta^p_k-\\&-(\partial_k L^p_i(x))_e\delta^s_m-(\partial_m L^i_m(x))_e\delta^p_k))=J^\beta_{ps}J^{km}_\alpha(c^p_{ik}\delta^s_m+c^s_{im}\delta^p_k)=c^\alpha_{i\beta}.\end{aligned}$$

Вычислим последний коммутатор

$$\begin{aligned}[E_i,E_j]&=[L^k_i(x)\partial^H_k,L^m_j(x)\partial^H_m]=\\&=L^k_i(x)(\partial^H_k L^m_j(x))\partial^H_m-L^m_j(x)(\partial^H_m L^k_i(x))\partial^H_k+L^k_i(x)L^m_j(x)[\partial^H_k,\partial^H_m]=\\&=L^k_i(x)(\partial_k L^m_j(x))\partial^H_m-L^k_j(x)(\partial_k L^m_i(x))\partial^H_m+L^k_i(x)L^m_j(x)[\partial^H_k,\partial^H_m]=\\&=c^k_{ij}L^k_m(x)\partial^H_m+L^k_i(x)L^m_j(x)[\partial^H_k,\partial^H_m]=c^k_{ij}E_k+L^k_i(x)L^m_j(x)[\partial^H_k,\partial^H_m].\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}[\partial^H_k,\partial^H_m]&=[\partial_k-\widetilde{\Gamma}^\alpha_{k\beta}T^\beta\partial_\alpha,\partial_m-\widetilde{\Gamma}^\gamma_{m\delta}T^\delta\partial_\gamma]=\\&=-(\partial_k\widetilde{\Gamma}^\gamma_{m\delta})T^\delta\partial_\gamma+\widetilde{\Gamma}^\alpha_{k\beta}T^\beta\partial_\alpha(\widetilde{\Gamma}^\gamma_{m\delta}T^\delta)\partial_\gamma+(\partial_m\widetilde{\Gamma}^\alpha_{k\beta})T^\beta\partial_\alpha-\widetilde{\Gamma}^\gamma_{m\delta}T^\delta\partial_\gamma(\widetilde{\Gamma}^\alpha_{k\beta}T^\beta)\partial_\alpha=\\&=(\partial_m\widetilde{\Gamma}^\alpha_{k\beta}-\partial_k\widetilde{\Gamma}^\alpha_{m\beta}+\widetilde{\Gamma}^\gamma_{k\beta}\widetilde{\Gamma}^\alpha_{m\gamma}-\widetilde{\Gamma}^\gamma_{m\beta}\widetilde{\Gamma}^\alpha_{k\gamma})T^\beta\partial_\alpha=\widetilde{R}^\alpha_{\beta mk}T^\beta\partial_\alpha.\end{aligned}$$

Здесь $\widetilde{R}^\alpha_{\beta mk}$ – компоненты тензора кривизны внутренней связности (14), построенной из коэффициентов правой связности на базе [7]. Так как $\widetilde{R}^\alpha_{\beta mk}=0$, то

$$[E_i,E_j]=c^k_{ij}E_k.$$

Таким образом, установлен следующий результат

Предложение 3. *Коммутаторы векторных полей* (21) *имеют следующий вид:*

$$[E_i,E_j]=c^k_{ij}E_k,\quad [E_i,E_\alpha]=c^\beta_{i\alpha}E_\beta,\quad [E_\alpha,E_\beta]=0. \tag{24}$$

Из первого соотношения вытекает, что горизонтальное распределение инвалютивно [7]. Тогда, используя теорему Фробениуса [7], получим

Предложение 4. *Левоинвариантное горизонтальное распределение $H(T^2_0G)$, определяемое связностью с коэффициентами $\widetilde{\Gamma}^\alpha_{i\beta}$ (14), является вполне интегрируемым.*

3. Левоинвариантная метрика на тензорных расслоениях типа (2,0) групп Ли

Пусть $\{\partial_i\}$ – поле натуральных реперов на группе Ли G. Тогда векторные поля $e_i(x) = L_*(x)\partial_i$ образуют левоинвариантное поле реперов на G.

Определение 2. (Псевдо)риманова метрика $\widehat{g}$ произвольной сигнатуры на группе Ли G называется левоинвариантной, если она инвариантна при левых сдвигах, то есть если

$$L^*(x)\widehat{g}(u_y, v_y) = \widehat{g}(L_*^{-1}(x)u_{xy}, L_*^{-1}(x)v_{xy}), \tag{25}$$

где $u_y, v_y \in T_yG$ [8].

Чтобы задать левоинвариантную метрику $\widehat{g}$, достаточно задать ее в единице группы, то есть в формуле (25) положить $y = e$. Тогда в любой точке $x \in G$ её компоненты в натуральном поле реперов равны [9]

$$\widehat{g}_{ij}(x) = \widehat{g}_{km}(e)\widetilde{L}_i^k(x)\widetilde{L}_j^m(x), \tag{26}$$

где $(\widetilde{L}_i^k(x))$ – матрица, обратная к матрице дифференциала левого сдвига на группе G. В левоинвариантом поле реперов $\{e_i(x)\}$ левоинвариантная метрика имеет постоянные компоненты, которые определяются следующим образом:

$$\widehat{g}_{ij} = (e_i, e_j).$$

Тогда в этом поле реперов левонвариантная метрика имеет вид

$$\widehat{g} = \widehat{g}_{ij}d\omega^i d\omega^j,$$

где $\omega^i = \widetilde{L}_*(x)dx^i$ образуют базис левоинвариантных 1-форм на G.

Определим скалярное произведение на левоинвариантном горизонтальном распределении $H(T_0^2G)$:

$$(E_i(X), E_j(X)) = (e_i^H(X), e_j^H(X)) = (e_i(x), e_j(x)) \circ \pi(X) = \widehat{g}_{ij}. \tag{27}$$

Мы построили метрику на горизонтальном распределении, которая является горизонтальным лифтом метрики $\widehat{g}$. Будем её обозначать как $\widehat{g}^H$.

Теперь определим скалярное произведение на левоинвариантном вертикальном распределении $V(T_0^2G)$:

$$\begin{aligned}(E_\alpha(X), E_\beta(X)) &= J_\alpha^{ij}J_\beta^{km}(e_i(x)\otimes e_j(x), e_k(x)\otimes e_m(x)) = \\ &= J_\alpha^{ij}J_\beta^{km}(e_i(x), e_k(x))(e_j(x), e_m(x)) = J_\alpha^{ij}J_\beta^{km}\widehat{g}_{ik}\widehat{g}_{jm}.\end{aligned} \tag{28}$$

Мы построили метрику на вертикальном распределении, которая является вертикальным лифтом метрики $\widehat{g}$. Будем её обозначать как $\widehat{g}^V$.

Пусть $(E_i, E_\alpha) = 0$, то есть горизонтальное и вертикальное распределения ортогональны. Построим метрику g на тензорном расслоении T_0^2G следующим образом:

$$g = \begin{pmatrix} \widehat{g}^H & 0 \\ 0 & \widehat{g}^V \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Таким образом, на основе метрики $\widehat{g}$ построена метрика g на тензорном расслоении, которая в левоинвариантном адаптированном поле реперов (21) имеет постоянные компоненты

$$g = \begin{pmatrix} \widehat{g}_{ij} & 0 \\ 0 & \widehat{g}_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Эта метрика на тензорном расслоении T^2_0G в левоинвариантном адаптированном поле реперов (21) имеет вид

$$g = \widehat{g}_{ij}\, d\Omega^i d\Omega^j + \widehat{g}_{\alpha\beta}\, d\Omega^\alpha d\Omega^\beta, \tag{31}$$

где $\Omega^i = \widetilde{L}^i_j(x)dx^j$, $\Omega^\alpha = \widetilde{L}^\alpha_\beta(x)(dT^\beta + \widehat{\Gamma}^\beta_{\gamma i}(x)T^\gamma_x dx^i)$ – левоинвариантные 1-формы. Из способа построения этой метрики вытекает

Теорема 4. *Метрика* (31) *является левоинвариантной.*

Подставим левоинвариантные формы Ω^i, Ω^α в (31). Тогда получим

$$\begin{aligned} g = {}& \widehat{g}_{ij}\widetilde{L}^i_k(x)\widetilde{L}^j_m(x)dx^k dx^m + \\ &+ \widehat{g}_{\alpha\beta}\widetilde{L}^\alpha_\gamma(x)\widetilde{L}^\beta_\delta(x)(dT^\gamma + \widehat{\Gamma}^\gamma_{\omega k}(x)T^\omega_x dx^k)(dT^\delta + \widehat{\Gamma}^\delta_{\eta m}(x)T^\eta_x dx^m) = \\ &= (\widehat{g}_{ij}\widetilde{L}^i_k(x)\widetilde{L}^j_m(x) + \widehat{g}_{\alpha\beta}\widetilde{L}^\alpha_\gamma(x)\widetilde{L}^\beta_\delta(x)\widehat{\Gamma}^\gamma_{\omega k}(x)\widehat{\Gamma}^\delta_{\eta m}(x)T^\omega_x T^\eta_x)dx^k dx^m + \\ &+ 2\widehat{g}_{\alpha\beta}\widetilde{L}^\alpha_\gamma(x)\widetilde{L}^\beta_\delta(x)\widehat{\Gamma}^\gamma_{\omega k}(x)T^\omega_x dx^k dT^\delta + \widehat{g}_{\alpha\beta}\widetilde{L}^\alpha_\gamma(x)\widetilde{L}^\beta_\delta(x)dT^\gamma dT^\delta. \end{aligned}$$

Из определения левоинвариантной метрики следует, что

$$\widehat{g}_{ij}\widetilde{L}^i_k(x)\widetilde{L}^j_m(x) = \widehat{g}_{ij}(x).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{\alpha\beta}\widetilde{L}^\alpha_\gamma(x)\widetilde{L}^\beta_\delta(x) &= J^{ij}_\alpha J^{km}_\beta \widehat{g}_{ik}\widehat{g}_{jm} J^\alpha_{ps} J^{tq}_\gamma L^p_t(x) L^s_q(x) J^\beta_{cd} J^{lr}_\delta L^c_l(x) L^d_r(x) = \\ &= J^{tq}_\gamma J^{lr}_\delta \widehat{g}_{ik} L^i_t(x) L^k_l(x) \widehat{g}_{jm} L^j_q(x) L^m_r(x) = J^{tq}_\gamma J^{lr}_\delta \widehat{g}_{tl}(x)\widehat{g}_{qr}(x) = \widehat{g}_{\gamma\delta}(x). \end{aligned}$$

Значит, левоинвариантная метрика (31) в натуральном поле реперов имеет вид

$$\begin{aligned} g = {}& (\widehat{g}_{ij}(x) + \widehat{g}_{\alpha\beta}(x)\widehat{\Gamma}^\gamma_{\omega i}(x)\widehat{\Gamma}^\delta_{\eta j}(x)T^\omega_x T^\eta_x)\, dx^i dx^j + \\ &+ 2\widehat{g}_{\alpha\beta}(x)\widehat{\Gamma}^\alpha_{\gamma i}(x)T^\gamma_x\, dx^k dT^\beta + \widehat{g}_{\alpha\beta}(x)\, dT^\alpha dT^\beta. \end{aligned}$$

Summary

N.A. Opokina. Left-Invariant Metrics on a Tensor Bundle of Type (0,2) over a Lie Group.

In this paper, we construct vertical and horizontal lifts of left-invariant vector fields. We establish necessary and sufficient conditions for the horizontal lift of a left-invariant vector field to be a left-invariant field. From a left-invariant metric on G, we build a left-invariant metric on T^2_0G.

Key words: left-invariant metric, tensor bundle over a Lie group, vertical and horizontal lifts, left-invariant vertical and horizontal distributions.

Литература

1. *Шапуков Б.Н.* Тензорные расслоения // Памяти Лобачевского посвящается: Сб. науч. ст. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1992. – С. 104–125.

2. *Опокина Н.А.* Касательные и тензорные расслоения типа (2,0) над группой Ли // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2005. – Т. 147, кн. 1. – С. 138–147.

3. *Постников М.М* Лекции по геометрии. Семестр 4. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1988 – 496 с.

4. *Шапуков Б.Н.* Задачи по группам Ли и их приложениям. – М.: НИЦ «РХД», 2002. – 256 с.

5. *Опокина Н.А.* Левая связность на тензорном расслоении типа (2,0) над группой Ли // Изв. вузов. Матем. – 2006. – № 11. – С. 77–82.

6. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. – М.: Едиториал УРРС, 2004. – 362 с.

7. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. – 344 с.

8. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр 5. Риманова геометрия. – М.: Факториал, 1998. – 496 с.

9. *Гаврилов С.П.* Геодезические левоинвариантных метрик на связной двумерной неабелевой группе Ли // Гравитация и теория относительности: Сб. ст. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1981. – Вып. 18. – С. 28–44.

Поступила в редакцию
18.06.12

Опокина Надежда Анатольевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и экономической информатики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *opnadin@mail.ru*