

УДК 517.98

О РАСШИРЕНИИ АЛГЕБРЫ ТЕПЛИЦА

Т.А. Григорян, Е.В. Липачева, В.А. Тепоян

Аннотация

В работе исследованы C^* -расширения алгебры Теплица с помощью изометрических операторов. Показано, что в случае, когда алгебра Теплица действует неприводимо, все такие расширения порождают одну и ту же алгебру, то есть нет нетривиальных расширений алгебры Теплица. Приведены примеры нетривиальных расширений алгебры Теплица в случае, когда ее представление приводимо.

Ключевые слова: инверсная полугруппа, инверсное представление, алгебра Теплица, π -расширение, инверсное π -расширение, C^* -алгебра.

Введение

В своей известной работе [1] Кобурн доказал теорему о том, что все изометрические представления полугруппы \mathbb{Z}_+ неотрицательных целых чисел порождают C^* -алгебры, канонически изоморфные алгебре Теплица. Многие авторы обобщили эту теорему на более широкий класс полугрупп. Дуглас [2] показал, что все изометрические неунитарные представления любого положительного конуса вещественных чисел \mathbb{R} порождают канонически изоморфные алгебры. Мерфи [3] доказал эту теорему для положительных конусов абелевых групп с полным порядком. С другой стороны, Мерфи [3] и Джанг [4] показали, что теорема неверна для полугруппы $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$. Изометрические представления полугруппы $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$ были изучены в работах [5–7].

В настоящей работе введено понятие π -расширения полугруппы неотрицательных целых чисел \mathbb{Z}_+ (см. определение 1). Исследованы свойства C^* -алгебр, порожденных π -расширением полугруппы \mathbb{Z}_+ . Введено также понятие инверсного π -расширения полугруппы \mathbb{Z}_+ (см. определение 3). Доказано, что если π – неприводимое представление полугруппы \mathbb{Z}_+ , то у \mathbb{Z}_+ нет нетривиального инверсного π -расширения. В случае, когда π – приводимое представление, существует неинверсное π -расширение. С другой стороны, показано, что для любого изометрического представления \mathbb{Z}_+ всегда существует неинверсное π -расширение.

В работе также исследованы расширения алгебры Теплица, порожденные инверсными π -расширениями полугруппы \mathbb{Z}_+ . Показано, что среди таких расширений есть расширения, представляющие собой башню вложенных друг в друга алгебр Теплица, индуктивный предел которых есть C^* -алгебра, рассмотренная в работе Дугласа [2].

1. Необходимые сведения

Рассмотрим изометрическое представление полугруппы \mathbb{Z}_+ неотрицательных целых чисел $\pi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow B(H)$, где $B(H)$ – множество всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H . Обозначим через $\text{Is}(H)$ полугруппу всех изометрических операторов из $B(H)$.

Определение 1. Подполугруппу $M \subset \text{Is}(H)$ назовем π -расширением полугруппы \mathbb{Z}_+ , если

- 1) $\pi(\mathbb{Z}_+) \subset M$;
- 2) $\pi(i)T = T\pi(i)$ для T из M и i из \mathbb{Z}_+ .

Всюду в статье, где не оговаривается противное, рассматривается неприводимое представление $\pi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow B(H^2)$, где $H^2(S^1, d\mu)$ – пространство Харди интегрируемых с квадратом комплекснозначных функций на единичной окружности S^1 по мере Хаара μ , спектр которых лежит в \mathbb{Z}_+ .

Оператор $\pi(n)$ есть мультипликативный оператор умножения на функцию $e^{in\theta}$, то есть $\pi(n) : H^2 \rightarrow H^2$ и $\pi(n)f(e^{i\theta}) = e^{in\theta}f(e^{i\theta})$.

Ортонормированная система функций $1, e^{i\theta}, e^{i2\theta}, \dots$ в H^2 является базисом, оператор $\pi(1)$ – оператором сдвига на этом базисе: $\pi(1)e^{in\theta} = e^{i(n+1)\theta}$. Поэтому C^* -подалгебра алгебры $B(H^2)$, порожденная операторами $\pi(1)$ и $\pi^*(1)$, есть алгебра Теплица.

Инверсные расширения алгебры Теплица исследованы в разд. 5.

2. Инверсные представления

Инверсная полугруппа P – это полугруппа, в которой каждый элемент x имеет единственный *инверсный* элемент x^* такой, что выполняются равенства

$$xx^*x = x, \quad x^*xx^* = x^* \quad (1)$$

Обозначим через Δ_S множество всех изометрических представлений полугруппы S . Для $\pi \in \Delta_S$ определим S^π как полугруппу, порожденную операторами $\pi(i)$ и $\pi^*(i)$, где $i \in S$.

Определение 2. Представление $\pi \in \Delta_S$ назовем *инверсным*, если S^π является инверсной полугруппой.

Регулярным изометрическим представлением называется отображение

$$\pi : S \rightarrow B(l^2(S)), \quad i \mapsto \pi(i),$$

заданное следующим образом:

$$(\pi(i)f)(j) = \begin{cases} f(k), & \text{если } j = i + k \text{ для некоторого } k \in S; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

C^* -алгебра, порожденная регулярным изометрическим представлением полугруппы S , называется *приведенной полугрупповой C^* -алгеброй* и обозначается $C_{\text{red}}^*(S)$ [8–10].

Теорема 1 [11, 12]. *Регулярное представление полугруппы S является инверсным.*

Приведем пример неинверсного представления.

Пусть $\pi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow B(H^2)$ – представление полугруппы \mathbb{Z}_+ , описанное в разд. 1, такое, что $\pi(n)$ есть оператор-мультипликатор умножения на функцию $e^{in\theta}$.

Каждая внутренняя функция $\Phi(z)$ также определяет изометрический оператор-мультипликатор $T_\Phi : T_\Phi f = \Phi f$.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{\pi} : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow B(H^2)$ – представление, отображающее $(n, 0)$ на $e^{in\theta}$ и $(0, m)$ на Φ^m , где Φ – любая внутренняя функция, не принадлежащая $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^\infty$. Тогда $\tilde{\pi}$ – неинверсное представление, то есть $(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)^{\tilde{\pi}}$ – неинверсная полугруппа.*

Доказательство. Произвольная внутренняя функция имеет следующий вид: $\Phi(z) = B(z)S(z)$, где $B(z)$ – произведение Бляшке, а $S(z)$ – внутренняя сингулярная функция. В общем случае $B(z)$ в нуле равняется нулю, поэтому найдется такое n , что $\Phi(z) = z^n B_1(z)S(z)$, где $B_1(z)$ – произведение Бляшке и $B_1(0) \neq 0$. Зафиксируем это n . Заметим, что $\tilde{\pi}(k, m) = \pi(k)T_{\Phi}^m$.

Нам достаточно показать, что [13]

$$\tilde{\pi}(0, 1)\tilde{\pi}^*(0, 1)\tilde{\pi}(n+1, 0)\tilde{\pi}^*(n+1, 0) \neq \tilde{\pi}(n+1, 0)\tilde{\pi}^*(n+1, 0)\tilde{\pi}(0, 1)\tilde{\pi}^*(0, 1),$$

или

$$T_{\Phi}T_{\Phi}^*\pi(n+1)\pi^*(n+1) \neq \pi(n+1)\pi^*(n+1)T_{\Phi}T_{\Phi}^*. \quad (2)$$

Вычислим левую и правую части неравенства (2) от функции $e^{in\theta}$. Поскольку $\pi^*(n+1)(e^{in\theta}) = 0$, очевидно, что $T_{\Phi}T_{\Phi}^*\pi(n+1)\pi^*(n+1)(e^{in\theta}) = 0$.

Рассмотрим $T_{\Phi}^*e^{in\theta}$. Покажем, что все коэффициенты Фурье этой функции в разложении в ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$, кроме нулевого коэффициента, равны 0. Для этого вычислим скалярное произведение на элементы $e^{ik\theta}$, где $k > 0$

$$(e^{ik\theta}, T_{\Phi}^*e^{in\theta}) = (\Phi e^{ik\theta}, e^{in\theta}) = (e^{ik\theta} B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}), 1) = \int_{S^1} e^{ik\theta} B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}) d\mu = 0.$$

Теперь подсчитаем нулевой коэффициент в этом разложении:

$$\begin{aligned} (1, T_{\Phi}^*e^{in\theta}) &= (\Phi, e^{in\theta}) = (e^{in\theta} B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}), e^{in\theta}) = \\ &= (B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}), 1) = \int_{S^1} B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}) d\mu = B_1(0)S(0). \end{aligned}$$

Таким образом, $T_{\Phi}^*e^{in\theta} = B_1(0)S(0)1$. Отсюда

$$T_{\Phi}T_{\Phi}^*e^{in\theta} = B_1(0)S(0)\Phi = B_1(0)S(0)e^{in\theta} B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}),$$

тогда

$$\pi^*(n+1)T_{\Phi}T_{\Phi}^*e^{in\theta} = \pi^*(1)B_1(0)S(0)B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}) \neq 0,$$

следовательно, $(\pi(n+1)\pi^*(n+1)T_{\Phi}T_{\Phi}^*)(e^{in\theta}) \neq 0$.

Итак, выполнено неравенство (2) и поэтому $\tilde{\pi}$ – неинверсное представление. \square

3. π -расширение полугруппы \mathbb{Z}_+

Лемма 1. Для всякого изометрического оператора из π -расширения полугруппы \mathbb{Z}_+ существует единственная внутренняя функция Φ такая, что этот изометрический оператор совпадает с оператором-мультипликатором умножения на функцию Φ .

Доказательство. Пусть T – некоторый изометрический оператор из π -расширения полугруппы \mathbb{Z}_+ . Обозначим $\mathcal{Q}_0 = TH^2 \subset H^2$. Покажем, что \mathcal{Q}_0 инвариантно относительно сдвигов $\pi(1)$. Поскольку T коммутирует с $\pi(1)$, то $\pi(1)\mathcal{Q}_0 = \pi(1)TH^2 = T\pi(1)H^2 \subset TH^2 = \mathcal{Q}_0$.

Тогда, по теореме Берлинга [14], если $\mathcal{Q}_0 \neq 0$, то существует внутренняя функция Φ такая, что $\mathcal{Q}_0 = \Phi H^2$, причем Φ единственна с точностью до постоянного множителя.

Рассмотрим $\Phi' = T \cdot 1$. Поскольку $\|(T \cdot 1)h\|$ совпадает с $\|h\|$ для любого h из H^2 , то Φ' – внутренняя функция, причем $Th = T_{\Phi'}h$, $h \in H^2$.

Таким образом, по теореме Берлинга получаем, что всякий изометрический оператор T представляется через единственную внутреннюю функцию. \square

Через $C_\pi^*(\mathbb{Z}_+)$ обозначим C^* -алгебру, порожденную изометрическим представлением π , описанным в разд. 1; через $C_\pi^*(M)$ – C^* -алгебру, порожденную полугруппой $M \subset \text{Is}(H^2)$.

Если M – π -расширение полугруппы \mathbb{Z}_+ , то по лемме 1 каждому изометрическому оператору $T \in M$ соответствует единственная внутренняя функция Φ такая, что оператор T есть оператор-мультипликатор умножения на Φ . Обозначим $M' = \{\Phi; T_\Phi \in M\}$.

Теорема 3. Пусть M – π -расширение полугруппы \mathbb{Z}_+ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $C_\pi^*(\mathbb{Z}_+) = C_\pi^*(M)$;
- 2) M' – подполугруппа полугруппы конечных произведений Бляшке.

Доказательство. Пусть M' – подполугруппа полугруппы конечных произведений Бляшке. Докажем, что $C_\pi^*(\mathbb{Z}_+) = C_\pi^*(M)$.

Каждое конечное произведение Бляшке определяет изометрический оператор-мультипликатор и равномерно аппроксимируется конечными линейными комбинациями функций $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^\infty$. Поэтому если $B(z)$ – конечное произведение Бляшке, то оператор T_B принадлежит алгебре $C_\pi^*(\mathbb{Z}_+)$. Следовательно, $C_\pi^*(\mathbb{Z}_+) = C_\pi^*(M)$.

Теперь докажем обратное. Пусть $T \in M$. Тогда оператору T соответствует некоторая внутренняя функция $\Phi \in M'$ такая, что для любого $h \in H^2$: $Th = \Phi h$. Поскольку $C_\pi^*(\mathbb{Z}_+) = C_\pi^*(M)$, то $T \in C_\pi^*(\mathbb{Z}_+)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация мономов W_i , состоящих из степеней $\pi(1)$ и $\pi^*(1)$, такая, что

$$\|T - \sum_{i=1}^l \lambda_i W_i\| < \varepsilon.$$

Легко проверить, что моном W_i можно записать в виде произведения $\pi(n)\pi^*(m)$.

Подставляя $W_i = \pi(n_i)\pi^*(m_i)$ в приведенное выше неравенство, получим

$$\|T - \sum_{i=1}^l \lambda_i \pi(n_i)\pi^*(m_i)\| < \varepsilon.$$

Пусть $m_0 = \max_{i=1, \dots, l} \{m_i\}$. Тогда

$$\|T\pi(m_0) - \sum_{i=1}^l \lambda_i \pi(n_i)\pi^*(m_i)\pi(m_0)\| < \|T - \sum_{i=1}^l \lambda_i \pi(n_i)\pi^*(m_i)\| \cdot \|\pi(m_0)\| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|T\pi(m_0) - \sum_{i=1}^l \lambda_i \pi(n'_i)\| < \varepsilon.$$

Так как оператор T является оператором-мультипликатором умножения на Φ , а оператор $\pi(n)$ – на функцию $e^{in\theta}$, то

$$\|\Phi e^{im_0\theta} - \sum_{i=1}^l \lambda_i e^{in'_i\theta}\| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\|\Phi - \sum_i \lambda_i e^{i(n'_i - m_0)\theta}\| < \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, функция Φ равномерно аппроксимируется непрерывными функциями, и следовательно, сама является непрерывной функцией на окружности. Поскольку любая внутренняя функция, непрерывная на окружности, является конечным произведением Бляшке, получаем, что Φ – конечное произведение Бляшке. \square

4. Инверсное π -расширение

Обозначим через \mathbb{Z}_+^π инволютивную полугруппу, порожденную $\pi(\mathbb{Z}_+)$ и $\pi(\mathbb{Z}_+)^*$. Отметим, что \mathbb{Z}_+^π – бициклическая полугруппа. Все неприводимые представления этой полугруппы полностью описаны в работе [15]. Пусть M – π -расширение полугруппы \mathbb{Z}_+ . Обозначим через M^* полугруппу, порожденную M и M^* .

Определение 3. π -расширение полугруппы \mathbb{Z}_+ называется инверсным, если M^* – инверсная полугруппа.

Пусть $\pi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow B(H^2)$ – представление полугруппы \mathbb{Z}_+ , описанное в разд. 1. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. M^* инверсна тогда и только тогда, когда $M^* = \mathbb{Z}_+^\pi$.

Доказательство. Пусть $M^* = \mathbb{Z}_+^\pi$. Каждый элемент полугруппы \mathbb{Z}_+^π записывается в виде произведения $\pi(n)\pi^*(m)$. Инверсным к нему будет представление $\pi(m)\pi^*(n)$. Поэтому \mathbb{Z}_+^π , а следовательно и M^* – инверсные полугруппы.

Обратно, пусть $M^* \neq \mathbb{Z}_+^\pi$. Тогда каждый изометрический оператор $T \in M \setminus \pi(\mathbb{Z}_+)$ по лемме 1 представляется через единственную внутреннюю функцию: $T = T_\Phi$. По аналогии с доказательством теоремы 2 можно показать, что в этом случае M^* – неинверсная полугруппа. \square

Рассмотрим произвольное изометрическое представление $\pi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow B(H)$. Обозначим $H_0 = \ker \pi^*(1)$. Ясно, что H_0 – гильбертово подпространство в H .

Теорема 5. Пусть $\pi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow B(H)$ – изометрическое представление полугруппы \mathbb{Z}_+ такое, что подпространство $H_0 = \ker \pi^*(1)$ не является одномерным. Тогда существует инверсное π -расширение M полугруппы \mathbb{Z}_+ такое, что \mathbb{Z}_+^π является собственной инволютивной подполугруппой инволютивной полугруппы M^* .

Доказательство. Покажем, что π является приводимым изометрическим представлением.

Обозначим $H_1 = \pi(1)H_0, \dots, H_n = \pi(n)H_0, \dots$. Подпространства H_0, H_1, H_2, \dots попарно ортогональны. Действительно, проверим, что $H_n \perp H_m$ при $m > n$. Имеем $(\pi(n)h_0, \pi(m)h_0) = (\pi^*(m-n)h_0, h_0) = 0$.

Таким образом, $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$, причем подпространство H_0 , а следовательно, и $H_n, n > 0$, не являются одномерными.

Пусть $\{e_0^{(j)}\}, j = 1, 2, \dots$, – конечный или бесконечный базис в H_0 . Пусть $e_n^{(j)} = \pi(n)(e_0^{(j)})$. Тогда $\{e_n^{(j)}\}, j = 1, 2, \dots$, – базис в $H_n, \{e_n^{(j)}\}, j = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$, – базис в H .

Рассмотрим подпространство в H с базисом $\{e_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$. На этом базисе оператор $\pi(1)$ действует как оператор сдвига: $\pi(1)(e_n^{(j)}) = e_{n+1}^{(j)}$.

Подпространство H является пространством Харди, обозначим его через H_j^2 .

Таким образом, пространство H представляется в виде прямой суммы, конечной или бесконечной, подпространств Харди $H = \bigoplus_j H_j^2$, причем представление π является на каждом из H_j^2 неприводимым.

Так как H_0 не является одномерным подпространством, прямая сумма $\bigoplus_j H_j^2$ содержит по крайней мере два слагаемых. Зафиксируем два пространства Харди H_1^2 и H_2^2 с базами $\{e_n^{(1)}\}_{n=0}^\infty$ и $\{e_n^{(2)}\}_{n=0}^\infty$ соответственно.

Рассмотрим оператор $T \in B(H)$, который на $H_1^2 \oplus H_2^2$ действует следующим образом:

$$T(e_n^{(1)}) = e_n^{(2)}; \quad T(e_n^{(2)}) = e_{n+1}^{(1)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$T = \pi(1)$ на H_j^2 ($j \neq 1, j \neq 2$). Заметим, что $\pi(1) = T^2$ на $H_1^2 \oplus H_2^2$.

Отсюда следует, что $\pi(1)T = T\pi(1)$, $\pi^*(1)T^* = T^*\pi^*(1)$, но $T^*\pi(1) \neq \pi(1)T^*$, $T\pi^*(1) \neq \pi^*(1)T$.

Пусть M – полугруппа, порожденная $\pi(\mathbb{Z}_+)$ и оператором T . Очевидно, что она является π -расширением полугруппы \mathbb{Z}_+ и $\mathbb{Z}_+^\pi \subsetneq M^*$.

Отметим, что M^* является инверсной полугруппой. Это следует из того, что любой моном в M^* имеет вид $T^k T^{*l} \pi(n) \pi^*(m) T^s T^{*p}$, а инверсным к нему будет моном $T^p T^{*s} \pi(m) \pi^*(n) T^l T^{*k}$. \square

5. Инверсные расширения алгебры Теплица

Пусть даны две сингулярные внутренние функции

$$\Phi_1 = \exp \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} \quad \text{и} \quad \Phi_t = \exp t \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1},$$

где t – некоторое положительное вещественное число.

Функции Φ_1 соответствует изометрический оператор-мультипликатор T_{Φ_1} , функции Φ_t – оператор T_{Φ_t} .

Заметим, что изометрические операторы T_{Φ_1} и T_{Φ_t} , $t > 0$, отображают пространство Харди H^2 снова в H^2 , то есть

$$T_{\Phi_t} = PT_{\Phi_t} \quad \text{и} \quad T_{\Phi_1} = PT_{\Phi_1},$$

где P – проектор из $L^2(S^1 d\mu)$ на $H^2(S^1 d\mu) = H^2$.

Сопряженным оператором, например, к оператору T_{Φ_t} является $T_{\Phi_t}^* = PT_{\Phi_t^{-1}} = PT_{\Phi_t^{-1}}$. Операторы $T_{\Phi_t}^*$ и $T_{\Phi_1}^*$ не являются изометрическими.

По теореме Кобурна [1] C^* -алгебра, порожденная изометрическим оператором T_{Φ_1} , канонически изоморфна алгебре Теплица. Через \mathcal{T}_1 обозначим C^* -алгебру Теплица, порожденную оператором T_{Φ_1} , через \mathcal{T}_t – C^* -алгебру Теплица, порожденную T_{Φ_t} .

Рассмотрим C^* -алгебру, порожденную операторами T_{Φ_1} и T_{Φ_t} . Обозначим ее $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_t})$. Ясно, что $\mathcal{T}_1 \subset C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_t})$.

Если t – положительное рациональное число, то справедлива следующая теорема.

Лемма 2. Пусть $t = m/n$, где m и n – взаимно простые числа. Тогда $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_t}) \cong \mathcal{T}_{1/n}$, где $\mathcal{T}_{1/n}$ – C^* -алгебра Теплица, порожденная оператором $T_{\Phi_{1/n}}$.

Доказательство. Очевидно, что справедливы равенства $T_{\Phi_{m/n}} = T_{\Phi_{1/n}}^m$ и $T_{\Phi_1} = T_{\Phi_{1/n}}^n$. Это означает, что $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_{m/n}}) \subseteq \mathcal{T}_{1/n}$.

С другой стороны, если m и n – взаимно простые числа, то из *алгоритма Евклида* следует, что существуют целые числа k и l такие, что

$$nk + ml = 1 \quad \text{или} \quad k + \frac{lm}{n} = \frac{1}{n}.$$

Возможны два случая:

- 1) $k > 0, l < 0$;
- 2) $k < 0, l > 0$.

Проверим, что в первом случае $T_{\Phi_{1/n}} = (T_{\Phi_{m/n}}^*)^{|l|} T_{\Phi_1}^k$, а во втором случае $T_{\Phi_{1/n}} = (T_{\Phi_1}^*)^{|k|} T_{\Phi_{m/n}}^l$.

Действительно, например, в первом случае имеем

$$(T_{\Phi_{m/n}}^*)^{|l|} T_{\Phi_1}^k = (PT_{\Phi_{-m/n}})^{|l|} T_{\Phi_1}^k = \underbrace{(PT_{\Phi_{-m/n}})(PT_{\Phi_{-m/n}}) \dots (PT_{\Phi_{-m/n}})}_{|l|} T_{\Phi_1}^k.$$

Поскольку

$$T_{\Phi_{-m/n}} T_{\Phi_1}^k = T_{\Phi_{-m/n}} T_{\Phi_k} = T_{\Phi_{k-(m/n)}} \quad \text{и} \quad k - \frac{m}{n} > 0,$$

то $PT_{\Phi_{-m/n}} T_{\Phi_1}^k = T_{\Phi_{k-(m/n)}}$.

Аналогично,

$$PT_{\Phi_{-m/n}} T_{\Phi_{k-(m/n)}} = T_{\Phi_{k-(2m/n)}},$$

и т. д. В итоге получаем

$$(PT_{\Phi_{-m/n}})^{|l|} T_{\Phi_1}^k = T_{\Phi_{k-(l|m/n)}} = T_{\Phi_{k+(lm/n)}} = T_{\Phi_{1/n}}.$$

Это означает, что $\mathcal{T}_{1/n} \subseteq C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_{m/n}})$.

Таким образом, получаем $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_{m/n}}) \cong \mathcal{T}_{1/n}$. \square

Из леммы 2 следует, что C^* -алгебра $\mathcal{T}_{1/n}$ является инверсным расширением C^* -алгебры \mathcal{T}_1 :

$$\mathcal{T}_1 \subset C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_{m/n}}) \cong \mathcal{T}_{1/n}.$$

Как и при доказательстве леммы 2, можно показать, что

$$\mathcal{T}_{1/n} \subset C^*(T_{\Phi_{1/n}}, T_{\Phi_{m/n^2}}) \cong \mathcal{T}_{1/n^2},$$

и для любого k

$$\mathcal{T}_{1/n^k} \subset C^*(T_{\Phi_{1/n^k}}, T_{\Phi_{m/n^{k+1}}}) \cong \mathcal{T}_{1/n^{k+1}}.$$

Таким образом, получаем последовательность C^* -алгебр Теплица

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_{1/n} \subset \mathcal{T}_{1/n^2} \subset \mathcal{T}_{1/n^3} \subset \dots,$$

в которой каждая следующая C^* -алгебра является инверсным расширением предыдущей.

Теорема 6. *Индуктивный предел C^* -алгебр Теплица*

$$\mathcal{T}_1 \xrightarrow{j} \mathcal{T}_{1/n} \xrightarrow{j} \mathcal{T}_{1/n^2} \dots,$$

где j – вложение, порождает C^* -алгебру, изоморфную $C_{\text{red}}^*(\mathbb{Q}_+^{(n)})$, где $\mathbb{Q}^{(n)}$ – полугруппа рациональных чисел, порожденная числами вида m/n^k , где $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, а $\mathbb{Q}_+^{(n)} = \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}^{(n)}$.

Рассмотрим теперь случай, когда t – иррациональное положительное число. Пусть Γ – группа, порожденная числами $m + nt$, всюду плотная в \mathbb{R} , где $m, n \in \mathbb{Z}$. Обозначим $\Gamma_+ = \Gamma \cap \mathbb{R}_+$.

Теорема 7. Пусть $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_t})$ – C^* -алгебра, порожденная T_{Φ_1} и T_{Φ_t} . Тогда $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_t})$ канонически изоморфна $C_{red}^*(\Gamma_+)$.

Доказательство. Пусть представление $\pi : \Gamma_+ \rightarrow B(H^2)$ задано следующим образом:

$$m + nt \mapsto \begin{cases} T_{\Phi_1}^m T_{\Phi_t}^n, & \text{если } n > 0, m > 0; \\ (T_{\Phi_1}^*)^{|m|} T_{\Phi_t}^n, & \text{если } n > 0, m < 0; \\ (T_{\Phi_t}^*)^{|n|} T_{\Phi_1}^m, & \text{если } n < 0, m > 0. \end{cases}$$

Нетрудно показать, так же как и при доказательстве теоремы 2, что

$$\pi(m + nt) = T_{\Phi_{m+nt}},$$

поэтому очевидно, что $T_{\Phi_{m+nt}}$ является изометрическим оператором-мультипликатором умножения на внутреннюю функцию Φ_{m+nt} ($m + nt > 0$). Заметим, что $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_t})$ порождается изометрическим представлением π .

Таким образом, из теоремы Дугласа [2] следует, что $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_t})$ канонически изоморфна $C_{red}^*(\Gamma_+)$. \square

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору С.А. Григоряну за полезные обсуждения и ценные указания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-97016).

Summary

T.A. Grigoryan, E.V. Lipacheva, V.A. Tepoyan. On the Extension of the Toeplitz Algebra.

We study the C^* -extensions of the Toeplitz algebras with the assistance of isometric operators. It is shown that in the case when the Toeplitz algebra acts irreducibly, all such C^* -extensions generate the same algebra, i.e., there is no non-trivial extension of the Toeplitz algebra. We provide the examples of the non-trivial extensions of the Toeplitz algebra in the case when its representation is reducible.

Key words: inverse semigroup, inverse representation, Toeplitz algebra, π -extension, inverse π -extension, C^* -algebra.

Литература

1. *Coburn L.A.* The C^* -algebra generated by an isometry // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73. – P. 722–726.
2. *Douglas R.G.* On the C^* -algebra of a one-parameter semigroup of isometries // Acta Math. – 1972. – V. 128, No 1. – P. 143–152.
3. *Murphy G.J.* Ordered groups and Toeplitz algebras // J. Operator Theory. – 1987. – V. 18, No 2. – P. 303–326.
4. *Jang S.Y.* Uniqueness property of C^* -algebras like the Toeplitz algebras // Trends Math. – 2003. – V. 6, No 2. – P. 29–32.
5. *Raeburn I., Vittadello S.T.* The isometric representation theory of a perforated semi-group // J. Operator Theory. – 2009. – V. 62, No 2. – P. 357–370.

6. *Grigoryan S.A., Teroyan V.H.* On isometric representations of the perforated semigroups // Lobachevskii J. Math. – 2013. – V. 34, No 1. – P. 85–88.
7. *Teroyan V.H.* On isometric representations of the semigroup $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$ // J. Contemp. Math. Anal. – 2013. – V. 48, No 2. – P. 51–57.
8. *Jang S.Y.* Reduced crossed products by semigroups of automorphisms // Korean Math. Soc. – 1999. – V. 36. – P. 97–107.
9. *Григорян С.А., Салахутдинов А.Ф.* C^* -алгебры, порожденные полугруппами // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 10. – С. 68–71.
10. *Jang S.Y.* Generalized Toeplitz algebras of a certain non-amenable semigroup // Bull. Korean Math. Soc. – 2006. – V. 43, No 2. – P. 333–341.
11. *Aukhadiev M.A., Teroyan V.H.* Isometric representations of totally ordered semigroups // Lobachevskii J. Math. – 2012. – V. 33, No 3. – P. 39–243.
12. *Григорян С.А., Салахутдинов А.Ф.* C^* -алгебры, порожденные полугруппами с сокращением // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 51, № 1. – С. 16–25.
13. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 286 с.
14. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
15. *Арзуманян В.А.* $*$ -представления инверсных полугрупп // Изв. Академии наук Арм. ССР. – 1978. – Т. 13, № 2. – С. 107–113.

Поступила в редакцию
28.09.12

Григорян Тамара Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

E-mail: tkhorkova@gmail.com

Липачева Екатерина Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

E-mail: elipacheva@gmail.com

Тепоян Вардан Акопович – аспирант кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

E-mail: tepyan.math@gmail.com