УДК 517.518.235

НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ С ТОЧЕЧНО СИНГУЛЯРНЫМ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ВЕСОМ

М.Р. Тимербаев, Н.В. Тимербаева

Аннотация

В работе рассматриваются пространства Соболева с весом, принимающим бесконечные значения в некоторых внутренних точках двумерной области. Для функций этих пространств доказывается неравенство Харди. Устанавливаются теоремы вложения в весовые пространства Лебега и теоремы о перенормировках.

Ключевые слова: неравенство Харди, весовые пространства Соболева, теоремы вложения, теоремы о перенормировках.

Введение

Неравенства типа Харди находят многочисленные применения в вопросах анализа: в теории функциональных пространств, в теории аппроксимации пространств функций, при исследовании интегральных и дифференциальных уравнений и анализе сходимости приближенных методов для этих уравнений.

Относительно интегрального неравенства Харди [1, с. 289] с весовой функцией справедлив следующий результат [2, с. 120]:

Теорема 1. *Пусть* $f(x)$, $\mu(x) \geq 0$ *на* $(0,c)$, μ *абсолютно непрерывна на* $[0,c]$, *причем* $\mu'(x) > 0$, $\mu(0) = 0$, $1 < p < \infty$. *Тогда для* $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_0^c \mu'(x)\left(\frac{F(x)}{\mu(x)}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^c \mu'(x)^{1-p} f(x)^p\,dx.$$

Классическое неравенство Харди получается отсюда при $\mu(x) = x$. Часто это неравенство применяется для степенных весовых функций $\mu(x) = x^\alpha$. Имеются обобщения неравенства Харди на многомерные области интегрирования, где в качестве весовых функций берутся подходящие степени расстояния от точки области до ее границы.

Настоящая работа посвящена доказательству неравенства типа Харди для функций из пространства Соболева с весом, стремящимся к бесконечности при приближении к некоторой точке внутри двумерной области. На основе этого неравенства устанавливаются свойства пространств Соболева с весом указанного типа, такие как теоремы вложения и теоремы об эквивалентных нормировках.

1. Весовые пространства

В этом разделе вводятся пространства Лебега и Соболева с весом, который может иметь особые точки внутри области. Такие пространства возникают при описании решений дифференциальных уравнений с сингулярностью в коэффициентах дифференциального оператора и/или в правой части. По теории пространств Соболева с весом, сингулярные точки которого лежат на границе области, имеется обширная литература (см., например, монографии [3, 4] и ссылки в них).

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < d\}$ – круг радиуса d, $\Omega_0 = \Omega \setminus \{0\}$. Если $\rho(x)$ – некоторая положительная почти всюду функция на Ω, называемая весом, то мы можем определить весовое пространство Лебега $L_{2,\rho}(\Omega)$ как пространство измеримых по Лебегу функций с конечной нормой

$$|u|_{0,\rho} = |u|_{0,\rho,\Omega} = \left(\int\limits_\Omega |\rho(x)u(x)|^2\,dx \right)^{1/2} = |\rho u|_0 = |\rho u|_{0,\Omega}.$$

Тогда через $H^1_\rho(\Omega)$ обозначим множество функций с конечной полунормой $|u|_{1,\rho} = |\nabla u|_{0,\rho} = |\rho \nabla u|_0$. Если $\rho(x) \equiv 1$, то вместо $H^1_\rho(\Omega)$ будем писать $H^1(\Omega)$. Всюду далее мы считаем, что весовые функции имеют вид $\rho(x) = \rho_1(|x|)$, где $\rho_1 : (0, d] \to (0, +\infty)$ – некоторая монотонная непрерывная функция. Более того, допуская вольность в обозначениях, но упрощая запись, мы будем ρ_1 отождествлять с ρ, то есть если $x \in \Omega$ и $t = |x|$, то $\rho(x) = \rho(t)$. Поскольку особенность такого веса (обращение в нуль или бесконечность) может быть лишь в точке $x = 0$, вне окрестности нуля градиент функции из $H^1_\rho(\Omega)$ интегрируем с квадратом. Поэтому для таких весов в качестве нормы пространства $H^1_\rho(\Omega)$ можно взять, например, норму $\|u\|_{1,\rho} = |u|_{1,\rho} + |u|_{0,D}$, где $D \subset \Omega_0$ – любой компакт ненулевой меры в $\mathbb{R}^2$. Различный выбор D приводит лишь к эквивалентным нормам, как будет показано ниже (см. теорему 5).

Хорошо известно, что для функций $u \in H^1(\Omega)$ и фиксированной точки $z \in \Omega$ нельзя определить значение (или «след») $u(z)$ как линейный непрерывный функционал на $H^1(\Omega)$. Другими словами, дельта-функция δ_z, сосредоточенная в z и действующая по формуле $(\delta_z, u) = u(z)$, не является элементом сопряженного пространства $H^1(\Omega)'$. Однако при определенных условиях на весовую функцию $\rho(x)$ для функций $u \in H^1_\rho(\Omega)$ можно корректно определить значение функции $u(0)$ в сингулярной точке $z = 0$, то есть при определенных условиях роста $\rho(x)$ в окрестности $z = 0$ будем иметь включение $\delta_0 \in H^1_\rho(\Omega)'$. Выясним эти условия.

Введем следующие функции:

$$\omega_0(s) = \int\limits_s^d \frac{1}{t\rho^2(t)}\,dt, \quad \omega(x) = \omega_0(|x|). \tag{1}$$

Лемма 1. *Функция ω принадлежит пространству $H^1_\rho(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\omega(0) < \infty$.*

Доказательство. Имеем

$$\nabla\omega(x) = \omega_0'(|x|)\nabla|x| = -\frac{x}{|x|^2\rho^2(x)},$$

откуда для $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |x| > \varepsilon\}$

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\rho(x)\nabla\omega(x)|^2\,dx = 2\pi \int\limits_\varepsilon^d \frac{dt}{t\rho^2(t)} = 2\pi\omega_0(\varepsilon).$$

Предельным переходом по $\varepsilon \to 0$ получаем требуемое утверждение. □

Замечание 1. Из условия $\omega(0) < \infty$ следует, что $\rho(0) = +\infty$. В этом случае пространство $H^1_\rho(\Omega)$ непрерывно вложено в $H^1(\Omega)$.

Лемма 2. *Если $\omega(0) = \infty$, то найдется такая неотрицательная непрерывная в Ω_0 функция $u \in H^1_\rho(\Omega)$, что $u(0) = \infty$.*

Доказательство. Условие леммы означает, что функция $\dfrac{1}{\sqrt{t}\rho(t)}$ не принадлежит пространству $L_2(0,d)$. Следовательно, найдется такая неотрицательная функция $v_0 \in L_2(0,d)$, что $\displaystyle\int\limits_0^d \frac{v_0(t)}{\sqrt{t}\rho(t)}\,dt = \infty$. Положим

$$u_0(s) = \int\limits_s^d \frac{v_0(t)}{\sqrt{t}\rho(t)}\,dt \quad \text{и} \quad u(x) = u_0(|x|).$$

По построению $u(x)$ неотрицательна и всюду непрерывна в Ω, за исключением точки $x = 0$, в которой она принимает бесконечное значение. Кроме того, поскольку $\sqrt{t}\rho(t)u_0' = -v_0 \in L_2(0,d)$ и $|\nabla u(x)| = |u_0'(|x|)|$, то

$$\int\limits_\Omega |\rho(x)\nabla u(x)|^2\,dx = 2\pi\int\limits_0^d t\rho^2(t)|u_0'(t)|^2\,dt = 2\pi\int\limits_0^d |v_0(t)|^2\,dt < \infty,$$

то есть $u \in H^1_\rho(\Omega)$. □

Лемма 3. *Если $\omega(0) < \infty$, то для любой функции $u \in H^1_\rho(\Omega)$ и любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{|x|<\varepsilon} |u|\,dx \le c\varepsilon^2\|u\|_{1,\rho}, \tag{2}$$

где постоянная c не зависит от u и ε.

Доказательство. Положим

$$\sigma(s) = \int\limits_0^s \frac{dt}{t\rho^2(t)}. \tag{3}$$

Для произвольной функции $u \in H^1_\rho(\Omega)$ при $s,t \in (0,d)$ оценим в полярных координатах $|u(t,\varphi) - u(s,\varphi)|$, используя неравенство Коши – Шварца:

$$|u(t,\varphi) - u(s,\varphi)| = |\int\limits_s^t \partial_r u(r,\varphi)\,dr| \le \sqrt{\sigma(d)}\left(\int\limits_0^d r\rho^2(r)|\partial_r u(r,\varphi)|^2\,dr\right)^{1/2}.$$

Интегрируя по угловой координате и снова используя неравенство Коши – Шварца для интеграла по φ, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} |u(t,\varphi) - u(s,\varphi)|\,d\varphi \le \sqrt{2\pi\sigma(d)}\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^d r\rho^2(r)|\partial_r u(r,\varphi)|^2\,dr\,d\varphi\right)^{1/2} \le c|u|_{1,\rho},$$

откуда $\int\limits_0^{2\pi} |u(s,\varphi)|\,d\varphi \le \int\limits_0^{2\pi} |u(t,\varphi)|\,d\varphi + c|u|_{1,\rho}$. Умножим это неравенство на t и проинтегрируем по $(0,d)$:

$$\frac{d^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} |u(s,\varphi)|\,d\varphi \le \|u\|_{L_1(\Omega)} + c\frac{d^2}{2}|u|_{1,\rho} \le c_1\|u\|_{1,\rho}.$$

Наконец, умножая последнее неравенство на s и интегрируя по интервалу $(0,\varepsilon)$, будем иметь

$$\int\limits_{|x|<\varepsilon} |u|\,dx \le c_2\varepsilon^2\|u\|_{1,\rho}.$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*
(i) $\delta_0 \in H^1_\rho(\Omega)'$;
(ii) $\omega \in H^1_\rho(\Omega)$;
(iii) $\omega(0) < \infty$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений (ii) и (iii) доказана в лемме 1. То, что (i) влечет (iii), следует из леммы 2. Осталось показать, что из (iii) вытекает (i). Рассмотрим регуляризацию дельта-функции вида

$$(f_\varepsilon, v) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int\limits_{|x|<\varepsilon} v\,dx.$$

Ясно, что $f_\varepsilon \to \delta_0$ при $\varepsilon \to 0$ в пространстве распределений $D'(\Omega)$. Из оценки (2) следует, что для $v \in H^1_\rho(\Omega)$ $|(f_\varepsilon, v)| \le \dfrac{c}{\pi}\|v\|_{1,\rho}$, то есть последовательность $\{f_\varepsilon\}$ ограничена в $H^1_\rho(\Omega)'$, а значит, из нее можно выделить подпоследовательность $\{f_{\varepsilon_n}\}$, слабо сходящуюся к некоторому предельному функционалу $f \in H^1_\rho(\Omega)'$, который, очевидно, совпадет с δ_0. $\square$

Примерами весовых функций ρ, удовлетворяющих условию $\omega(0) < \infty$, являются

1) $\rho(t) = t^{-\alpha}$, $\alpha > 0$;
2) $\rho(t) = \ln^\alpha \dfrac{2d}{t}$, $\alpha > \dfrac{1}{2}$;
3) $\rho(t) = \sqrt{\ln\dfrac{2d}{t}}\ln^\alpha\left(\ln\dfrac{2d}{t}\right)$, $\alpha > \dfrac{1}{2}$;
4) $\rho(t) = t^\alpha \exp\dfrac{\beta}{t^\gamma}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta, \gamma > 0$.

2. Неравенство Харди

Всюду далее в работе рассматривается случай $\omega(0) < \infty$. Как уже отмечалось выше, в этом случае имеет место непрерывное вложение $H^1_\rho(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Кроме того, корректно определено подпространство $\dot{H}^1_\rho(\Omega) = \{u \in H^1_\rho(\Omega) : u(0) = 0\}$.

Переформулируем теорему 1 в случае $p = 2$ в другом, более удобном для нас виде:

Лемма 4. *Пусть весовая функция* $\nu(t)$ *такова, что* $\dfrac{1}{\nu} \in L_2(0,d)$. *Тогда для любой функции* $u \in \dot{H}^1_\nu(0,d)$ *имеет место оценка*

$$\int_0^d \left|\frac{\nu}{\theta}u\right|^2 dt \le 4\int_0^d |\nu u'|^2\,dt, \quad \text{где} \quad \theta(s) = \nu^2(s)\int_0^s \frac{dt}{\nu^2(t)}.$$

Это утверждение получается из теоремы 1 заменой в ней f на $|u'|$, $\mu(s)$ на $\int_0^s \nu^{-2}\,dt$ и учетом неравенства $|u(s)| \le F(s) = \int_0^s |u'(t)|\,dt$.

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема 3. *Для любой функции* $u \in \dot{H}^1_\rho(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\int_\Omega |\lambda(x)u(x)|^2\,dx \le 4\int_\Omega |\rho(x)\nabla u(x)|^2\,dx, \tag{4}$$

где $\lambda(t) = \dfrac{\rho(t)}{\mu(t)}$, $\mu(t) = t\rho^2(t)\sigma(t)$, *а* $\sigma(t)$ *определяется соотношением* (3). *Множитель* 4 *в этом неравенстве неулучшаем.*

Доказательство. Применяя лемму 4 для $\nu(t) = \sqrt{t}\rho(t)$, оценим в полярных координатах

$$\int_0^d t\left|\frac{\rho(t)}{t\rho^2(t)\sigma(t)}u(t,\varphi)\right|^2 dt \le 4\int_0^d r|\rho\partial_r u(r,\varphi)|^2\,dr.$$

Интегрируя по φ, получим

$$\int_0^{2\pi}\int_0^d t\left|\frac{\rho(t)}{t\rho^2(t)\sigma(t)}u(t,\varphi)\right|^2 dt\,d\varphi = \int_\Omega |\lambda(x)u(x)|^2\,dx \ \le$$

$$\le\ 4\int_0^{2\pi}\int_0 dr|\rho\partial_r u(r,\varphi)|^2\,dr\,d\varphi \le\ 4\int_0^{2\pi}\int_0^d r|\rho\partial_r u(r,\varphi)|^2 + \frac{1}{r}|\rho\partial_\varphi u(r,\varphi)|^2\,dr\,d\varphi\ =$$

$$=\ 4\int_\Omega |\rho(x)\nabla u(x)|^2\,dx.$$

Теорема доказана. □

Вес $\lambda = \dfrac{\rho}{\mu}$ в теореме 3 в определенном смысле является предельно максимальным. Кроме того, $1 \notin L_{2,\lambda}(\Omega)$, то есть $\lambda \notin L_2(\Omega)$. Действительно,

$$\int_\Omega \lambda^2(|x|)\,dx = 2\pi\int_0^d \frac{dt}{t\rho^2(t)\sigma^2(t)} = 2\pi\int_0^d \frac{\sigma'(t)}{\sigma^2(t)}\,dt \ge \frac{2\pi}{\sigma(d)}\int_0^d (\ln\sigma(t))'\,dt = +\infty,$$

так как $\sigma(0) = 0$. В то же время $1 \in H^1_\rho(\Omega)$ по определению. Поэтому дополнительное условие $u(0) = 0$ при получении оценки (4) существенно.

Приведем примеры интегральных оценок с сингулярными в точке $x = 0$ весами (всюду $u(0) = 0$).

Пример 1. Пусть $\rho(t) = t^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Тогда $\sigma(t) = \dfrac{t^{2\alpha}}{2\alpha}$, $\mu(t) = \dfrac{t}{2\alpha}$ и неравенство (4) примет вид:

$$\int\limits_{\Omega} ||x|^{-\alpha-1}u(x)|^2\,dx \le \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\Omega} ||x|^{-\alpha}\nabla u(x)|^2\,dx.$$

Пример 2. Для $R > d$ положим $\rho(t) = \ln^{\alpha}\dfrac{R}{t}$, $\alpha > 1/2$. В этом случае $\sigma(t) = \dfrac{1}{2\alpha-1}\ln^{2\alpha-1}\dfrac{R}{t}$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\ln^{\alpha+1}(R/|x|)}{|x|}\,u\right|^2 dx \le \frac{4}{(2\alpha-1)^2}\int\limits_{\Omega}\left|\ln^{\alpha}\frac{R}{|x|}\,\nabla u(x)\right|^2 dx.$$

3. Вложение в весовое L_2 и эквивалентные нормировки

Пусть, как и выше, $\mu(t) = t\rho^2(t)\sigma(t)$. Теорему 3 можно трактовать как теорему вложения (непрерывного, но не компактного!) подпространства $\dot{H}^1_{\rho}(\Omega)$ в $L_{2,\lambda}(\Omega)$, где $\lambda = \dfrac{\rho}{\mu}$, причем константа вложения 2 в оценке неулучшаема:

$$|u|_{0,\lambda} \le 2|u|_{1,\rho}.$$

Однако все пространство $H^1_{\rho}(\Omega)$ не вкладывается в $L_{2,\lambda}(\Omega)$ хотя бы потому, что, как уже отмечалось выше, $1 \in H^1_{\rho}(\Omega)$ и $1 \notin L_{2,\lambda}(\Omega)$.

Справедлива

Теорема 4. *Пусть вес $\nu \le c\lambda$ ($c > 0$ – постоянная). Для того чтобы имело место непрерывное вложение $H^1_{\rho}(\Omega) \subset L_{2,\nu}(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_{\Omega}\nu^2(|x|)\,dx < \infty$, то есть чтобы $\nu \in L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Необходимость сразу следует из того, что $1 \in H^1_{\rho}(\Omega)$. Далее, для произвольной функции $u \in H^1_{\rho}(\Omega)$ запишем разложение $u(x) = u(0) + (u(x) - u(0))$. При этом постоянная $u(0)$ принадлежит $L_{2,\nu}(\Omega)$ по условию теоремы, а функция $u - u(0)$ принадлежит $\dot{H}^1_{\rho}(\Omega) \subset L_{2,\lambda}(\Omega) \subset L_{2,\nu}(\Omega)$. Таким образом, $u \in L_{2,\nu}(\Omega)$. Это доказывает достаточность. □

Пространство $H^1_{\rho}(\Omega)$ можно трактовать как пространство с нормой графика [5] оператора градиента:

$$H^1_{\rho}(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \nabla u \in L_{2,\rho}(\Omega)\}.$$

Теорема 2.7 о перенормировках пространств с нормой графика работы [5] в нашем случае примет вид:

Теорема 5. *Пусть p – непрерывная на $H^1_{\rho}(\Omega)$ полунорма такая, что $p(1) > 0$. Тогда норма $\|u\| = p(u) + |u|_{1,\rho}$ эквивалентна норме $\|u\|_{1,\rho}$.*

Следствие 1. *Норма $\|u\| = |u(0)| + |u|_{1,\rho}$ эквивалентна норме $\|u\|_{1,\rho}$.*

Заключительное замечание. Все представленные в работе результаты справедливы, конечно, и для областей более общего вида, а также если имеется несколько сингулярных точек; в оценке (4) теоремы 3 в этом случае точная постоянная 4 заменится на некоторую другую постоянную, зависящую от геометрии области и взаимного расположения сингулярных точек весовой функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00667-а, 12-01-00955-а).

Summary

M.R. Timerbaev, N.V. Timerbaeva. Hardy Inequality with a Singular Weight inside a Domain.

We consider Sobolev spaces with singular weights at some internal points of a 2D-domain. For the functions of these spaces, Hardy inequality is proved. Embedding theorems for weighted Sobolev spaces and theorems on equivalent renorming are obtained.

Key words: Hardy inequality, weighted Sobolev spaces, embedding theorems, equivalent renorming theorems.

Литература

1. *Харди Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: ИЛ, 1948. – 456 с.
2. *Соболев С.Л.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. – М.: Наука, 1989. – 254 с.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
4. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
5. *Тимербаев М.Р.* Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева. I // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 5. – С. 55–65.

Поступила в редакцию
07.05.12

Тимербаев Марат Равилевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *marat.timerbaev@ksu.ru*

Тимербаева Наиля Вакифовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *timnell@mail.ru*