

УДК 517.546

О ГРАДИЕНТЕ КОНФОРМНОГО РАДИУСА ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Л.А. Аксентьев, А.Н. Ахметова

Аннотация

Статья посвящена исследованию квазиконформности отображения области под действием градиента конформного радиуса. Доказано, что для областей с выпуклыми границами градиент конформного радиуса осуществляет квазиконформное отображение. Получены новые оценки коэффициента квазиконформности градиента конформного радиуса для указанных областей.

Ключевые слова: квазиконформное отображение, конформный радиус, градиент конформного радиуса, выпуклая область.

Пусть D – односвязная область комплексной плоскости, граница которой содержит более одной точки. По теореме Римана существует конформное отображение $f : E = \{\zeta : |\zeta| < 1\} \mapsto D$. *Конформным радиусом* области D в точке $z = f(\zeta)$ называется величина

$$R(D, z) = |f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2). \quad (1)$$

Градиент конформного радиуса определяется формулой

$$\nabla R(D, z) = \frac{\partial R(D, z)}{\partial x} + i \frac{\partial R(D, z)}{\partial y} = 2R_{\bar{z}}, \quad z = x + iy \in D, \quad (2)$$

$$R_{\bar{z}} = \frac{\sqrt{f'}}{\sqrt{f'}} \left(\frac{\bar{f}''}{f'} \frac{1 - |\zeta|^2}{2} - \zeta \right). \quad (3)$$

Инициатива в исследовании введенной градиентной функции принадлежит Ф.Г. Авхадиеву и К.-Й. Виртсу [1, 2]. Ими изучено множество значений градиента конформного радиуса и установлена диффеоморфность градиентного отображения области D с выпуклой границей. Отмечены исключительные случаи нарушения диффеоморфности во всей области, а также случаи нарушения взаимной однозначности граничных элементов (прямолинейные участки границы и угловые точки).

Для градиента конформного радиуса в случае области с выпуклой граничной кривой справедливо неравенство $|R_{\bar{z}z}|^2 - |R_{\bar{z}\bar{z}}|^2 \geq 0$, переписывая которое в виде

$$\left| \frac{(R_{\bar{z}})_{\bar{z}}}{(R_{\bar{z}})_z} \right| \leq 1, \quad (4)$$

придем к истолкованию диффеоморфности в терминах квазиконформности отображения, осуществляемого функцией $R_{\bar{z}}$. Детали такого истолкования представлены в настоящей работе в виде трех теорем и двух примеров. Эти результаты частично содержатся в [3, 4] и являются продолжением [5, 6] и дополнением к [1, 2].

В основу исследования положено понятие квазиконформности [7, с. 13], согласно которому диффеоморфное отображение [1] $\nabla R(D, z)$ является K -квазиконформным, если $\nabla R(D, z)$ удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$(\nabla R)_{\bar{z}} = \mu(z, \bar{z})(\nabla R)_z, \quad z \in D,$$

для которого

$$\sup_{z \in D} |\mu(z, \bar{z})| = \frac{K-1}{K+1} < 1 \quad (1 \leq K < \infty).$$

1. Пусть $D(\alpha) = \{z : |\arg z| < \alpha\pi/2\}$, $\alpha \in (0, 1]$, и $D(0) = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$. Имеет место

Теорема 1. *Градиент (2) конформного радиуса (1) для любого компактного подмножества выпуклой области $D = f(E)$, отличной от $D(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, осуществляет квазиконформное отображение.*

Для угловой области $D(\alpha)$, $\alpha \in (0, 1]$, и полосы $D(0)$ по всей области справедливо тождество $\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}(D, z)}{R_{zz}(D, z)} \right| \equiv 1$, то есть градиентное отображение вырождается на каждом компакте из $D(\alpha)$ и $D(0)$.

Справедлива точная оценка коэффициента квазиконформности по всему классу S^0 выпуклых функций $f(r\zeta)$, $\zeta \in E$, $0 < r < 1$, вида

$$\sup_{f(\zeta) \in S^0} K(f(r\zeta)) = \frac{1+r^2}{1-r^2}.$$

Доказательство. Необходимое и достаточное условие выпуклости области D [8, с. 166] – конформного образа круга E под действием функции $z = f(\zeta)$ – записывается в виде

$$\operatorname{Re} \zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \geq -1, \quad \zeta \in E. \quad (5)$$

Если $\Phi_0(\zeta)$ осуществляет однолистное отображение круга E на полуплоскость $\{\operatorname{Re} w > -1\}$, то в силу (5) функция $\Phi_0^{-1} \left(\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right) = \tilde{\varphi}(\zeta)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца [8, с. 319] и имеют место соотношения $|\tilde{\varphi}(\zeta)| \leq 1$, $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Поэтому $\tilde{\varphi}(\zeta) = \zeta\varphi(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$ – регулярная функция в E , и справедлива цепочка неравенств

$$|\tilde{\varphi}(\zeta)| \leq |\zeta| \implies \frac{|\tilde{\varphi}(\zeta)|}{|\zeta|} \leq 1 \implies |\varphi(\zeta)| \leq 1.$$

Таким образом, $\varphi(\zeta)$ – функция, удовлетворяющая условиям обобщенной леммы Шварца [8, с. 319].

Так как $\Phi_0(\zeta) = \frac{2\zeta}{1-\zeta}$, то $\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \Phi_0(\tilde{\varphi}(\zeta)) = 2 \frac{\zeta\varphi(\zeta)}{1-\zeta\varphi(\zeta)}$, и следовательно,

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = 2 \frac{\varphi(\zeta)}{1-\zeta\varphi(\zeta)}. \quad (6)$$

Вычислим производные

$$R_{\bar{z}\bar{z}} = \sqrt{\frac{f'(\zeta)}{f'^3(\zeta)}} \frac{1-|\zeta|^2}{2} \{f(\zeta), \bar{\zeta}\},$$

$$R_{\bar{z}z} = \frac{1}{|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)} \left(\left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \frac{1-|\zeta|^2}{2} - \bar{\zeta} \right|^2 - 1 \right).$$

Умножив на R модули этих производных, с учетом (6) запишем

$$\begin{aligned} R|R_{\bar{z}z}| &= \frac{(1-|\zeta|^2)^2}{2} |\{f(\zeta), \zeta\}| = \\ &= \frac{(1-|\zeta|^2)^2}{2} \left| \left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right)^2 \right| = \frac{|\varphi'|(1-|\zeta|^2)^2}{|1-\zeta\varphi|^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R|R_{\bar{z}z}| &= 1 - \left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \frac{1-|\zeta|^2}{2} - \bar{\zeta} \right|^2 = \\ &= 1 - \left| \frac{2\varphi(\zeta)}{1-\zeta\varphi(\zeta)} \frac{1-|\zeta|^2}{2} - \bar{\zeta} \right|^2 = \frac{(1-|\zeta|^2)(1-|\varphi(\zeta)|^2)}{|1-\zeta\varphi(\zeta)|^2}. \end{aligned}$$

Составляя отношение полученных выражений, будем иметь

$$\left| \frac{R_{\bar{z}z}}{R_{zz}} \right| = \frac{1-|\zeta|^2}{1-|\varphi(\zeta)|^2} |\varphi'(\zeta)|.$$

По обобщенной лемме Шварца знак равенства в неравенстве $|\varphi'(\zeta)| \leq \frac{1-|\varphi(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}$

достигается на экстремальной функции вида $\varphi(\zeta) = e^{i\alpha} \frac{\zeta+a}{1+\bar{a}\zeta}$, $|a| < 1$. Эта

функция определит тождество $\left| \frac{R_{\bar{z}z}}{R_{zz}} \right| \equiv 1$. Выясним, для каких функций f оно справедливо. Для этого подставим экстремальную функцию φ , удовлетворяющую условиям леммы Шварца, в (6) и разложим правую часть полученного равенства на простейшие дроби. Будем иметь

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2(\zeta+a)e^{i\alpha}}{1+(\bar{a}-ae^{i\alpha})\zeta-e^{i\alpha}\zeta^2} = -e^{i\alpha/2} \frac{2t+2ae^{i\alpha/2}}{(t-t_1)(t-t_2)} = e^{i\alpha/2} \left(\frac{A}{t-t_1} + \frac{B}{t-t_2} \right),$$

где $t = e^{i\alpha/2}\zeta$ и

$$t_1 = -i \operatorname{Im}\{ae^{i\alpha/2}\} + \sqrt{1 - \operatorname{Im}^2\{ae^{i\alpha/2}\}} \in \partial E,$$

$$t_2 = -i \operatorname{Im}\{ae^{i\alpha/2}\} - \sqrt{1 - \operatorname{Im}^2\{ae^{i\alpha/2}\}} \in \partial E,$$

причем $t_1 \neq t_2$, так как $\operatorname{Im}^2\{ae^{i\alpha/2}\} \neq 1$, если $|a| < 1$.

Решая систему

$$\begin{cases} A+B=-2, \\ At_2+Bt_1=2ae^{i\alpha/2}, \end{cases}$$

найдем

$$A = \frac{2t_1+2ae^{i\alpha/2}}{t_2-t_1} = -1-\beta, \quad B = -2-A = -1+\beta,$$

где

$$\beta = \frac{\operatorname{Re}\{ae^{i\alpha/2}\}}{\sqrt{1 - \operatorname{Im}^2\{ae^{i\alpha/2}\}}} \in \mathbb{R}.$$

Тогда, интегрируя соотношение

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = e^{i\alpha/2} \left(\frac{-1-\beta}{\zeta e^{i\alpha/2} - t_1} + \frac{-1+\beta}{\zeta e^{i\alpha/2} - t_2} \right),$$

получим

$$\ln f'(\zeta) = \ln \left(C \left(\frac{\zeta e^{i\alpha/2} - t_2}{\zeta e^{i\alpha/2} - t_1} \right)^{\beta-1} \frac{1}{(\zeta e^{i\alpha/2} - t_1)^2} \right),$$

поэтому

$$f(\zeta) = \begin{cases} C_1 \left(\frac{\zeta e^{i\alpha/2} - t_2}{\zeta e^{i\alpha/2} - t_1} \right)^\beta + C_2 & \text{при } \beta \neq 0, \\ C_3 \ln \frac{\zeta e^{i\alpha/2} - t_2}{\zeta e^{i\alpha/2} - t_1} + C_4 & \text{при } \beta = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Первая функция (в случае $\beta \neq 0$) в (7) будет отображать единичный круг на угловую область раствора $\pi\beta$, вторая (в случае $\beta = 0$) – на линейно преобразованную горизонтальную полосу.

Для указанных функций достигается знак равенства в оценке для $|\varphi'(\zeta)|$, и квазиконформное отображение вырождается. Поэтому будем называть эти функции исключительными и обозначим класс выпуклых функций без исключительных функций вида (7) через $\tilde{S}^0$.

Поскольку для каждой функции $f(\zeta) \in \tilde{S}^0$ справедливо соотношение

$$\max_{|\zeta| \leq r} \left[\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - |\varphi(\zeta)|^2} |\varphi'(\zeta)| \right] < 1,$$

где функция φ определяется по f из (6), то в области $D_r = f(E_r)$, $E_r = \{\zeta : |\zeta| < r\}$, получим

$$k_1(f(\zeta), E_r) = \sup_{z \in D_r} \left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{zz}} \right| < 1.$$

Поэтому любой компакт, предварительно помещенный в область D_r , будет квазиконформно отображаться градиентом (2) конформного радиуса (1). Дополнительно отметим, что

$$\sup_{f \in \tilde{S}^0} k_1(f(\zeta), E_r) = 1$$

с достижением $k_1(f(\zeta), E_r) = 1$ на исключительных функциях, не входящих в $\tilde{S}^0$.

Первая часть теоремы 1 доказана.

Для доказательства второй части перейдем в равенстве (6) к r -линиям уровня и перепишем его в виде

$$r \frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)} = 2r \frac{\varphi(r\zeta)}{1 - r\zeta\varphi(r\zeta)}. \quad (8)$$

Так как

$$R(D_r, z) = r|f'(r\zeta)|(1 - |\zeta|^2), \quad R|R_{\bar{z}\bar{z}}| = \frac{r^2|\varphi'(r\zeta)|(1 - |\zeta|^2)^2}{|1 - r\zeta\varphi(r\zeta)|^2},$$

$$R|R_{zz}| = \frac{(1 - |\zeta|^2)(1 - r^2|\varphi(r\zeta)|^2)}{|1 - r\zeta\varphi(r\zeta)|^2},$$

то

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{zz}} \right| = r^2 \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - r^2|\varphi(r\zeta)|^2} |\varphi'(r\zeta)| \leq r^2 \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - r^2|\varphi(r\zeta)|^2} \frac{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}{1 - r^2|\zeta|^2} \leq r^2.$$

Легко показать, что знак равенства достигается только в предположении, что $\varphi(\zeta) = e^{i\alpha}\zeta$ и $\zeta = 0$.

Введем коэффициент

$$k_2(f(r\zeta), E) = r^2 \max_{|\zeta| \leq 1} \left[\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - r^2 |\varphi(r\zeta)|^2} |\varphi'(r\zeta)| \right] \leq r^2,$$

который определит квазиконформность градиента $\nabla R(D_r, z)$. Отметим также, что

$$\max_{f \in S^0} k_2(f(r\zeta), E) = r^2 < 1,$$

так как при $z = \ln \frac{1 + r\zeta}{1 - r\zeta}$ имеем

$$R(D_r, z) = 2r \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - r^2 \zeta^2|}$$

и

$$|\mu(\zeta, \bar{\zeta})| = \frac{r^2(1 - |\zeta|^2)}{1 - r^4 |\zeta|^2} \leq |\mu(0, 0)| = r^2 = k_2 \left(\ln \frac{1 + r\zeta}{1 - r\zeta}, E \right).$$

□

Приведем пример с коэффициентом квазиконформности $\frac{1 + k_2(f(r\zeta), E)}{1 - k_2(f(r\zeta), E)}$, меньшим, чем $\frac{1 + r^2}{1 - r^2}$.

Пример 1. Пусть область D представляет собой квадрат с отображающей функцией [8, с. 77]

$$f(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{(1 - \zeta^4)^{1/2}}.$$

Конформный радиус для области D_r с

$$z = f(r\zeta) = \int_0^{r\zeta} \frac{d\zeta}{(1 - r^4 \zeta^4)^{1/2}}$$

записывается в виде

$$R(\zeta) = r \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - r^4 \zeta^4|^{1/2}},$$

поэтому

$$\begin{aligned} R_{\bar{z}}(\zeta) &= \frac{r^4 \bar{\zeta}^3 - \zeta}{(1 - r^4 \zeta^4)^{1/4} (1 - r^4 \bar{\zeta}^4)^{3/4}}, \\ R_{\bar{z}z}(\zeta) &= \frac{3r^3 \bar{\zeta}^2 (1 - |\zeta|^2)}{(1 - r^4 \zeta^4)^{1/4} (1 - r^4 \bar{\zeta}^4)^{5/4}}, \\ R_{zz}(\zeta) &= -\frac{1 - r^8 |\zeta|^6}{r(1 - r^4 \zeta^4)^{3/4} (1 - r^4 \bar{\zeta}^4)^{3/4}}. \end{aligned}$$

Составляя отношение вторых производных по модулю, после сокращений будем иметь

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{zz}} \right| = \frac{3r^4 |\zeta|^2 (1 - |\zeta|^2)}{1 - r^8 |\zeta|^6} r^4,$$

Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{k}_2(r) &= \sup_{0 \leq |\zeta| \leq 1} \left| \frac{R_{\bar{z}z}}{R_{zz}} \right| = r^4 \max_{0 \leq u \leq 1} \frac{3u(1-u)}{1-r^8u^3} = \\ &= r^4 \frac{3u_0(1-u_0)}{1-r^8u_0^3} < r^4, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < u_0 < 1.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sup_{0 \leq |\zeta| \leq 1} \left| \frac{R_{\bar{z}z}}{R_{zz}} \right|_{r=1} = \max_{0 \leq |\zeta| \leq 1} \frac{3|\zeta|^2(1-|\zeta|^2)}{1-|\zeta|^6} = \frac{3}{1/|\zeta|^2 + 1 + |\zeta|^2} \Big|_{|\zeta|=1} = 1.$$

С другой стороны,

$$\tilde{k}_1(\rho) = \left| \frac{R_{\bar{z}z}}{R_{zz}} \right|_{r=1, |\zeta| \leq \rho} = \frac{3|\zeta|^2(1-|\zeta|^2)}{1-|\zeta|^6} \Big|_{|\zeta| \leq \rho} \leq \frac{3\rho^2}{\rho^4 + \rho^2 + 1},$$

причем $\tilde{k}_2(r) < \tilde{k}_1(r)$, так как

$$r^4 < \frac{3r^2}{r^4 + r^2 + 1}.$$

По-видимому, и в общем случае для любой выпуклой области $D = f(E)$ будем иметь $k_2(f(r\zeta), E) < k_1(f(\zeta), E_r)$, $0 < r < 1$.

2. Рассмотрим теперь класс функций Σ^0 , которые отображают $E^- = \{|\zeta| > 1\}$ на области D^- , $\infty \in D^-$, представимые как внешность некоторой замкнутой выпуклой линии и характеризующиеся выпуклостью вниз поверхности конформного радиуса. Имеет место

Теорема 2. *Градиент (2) конформного радиуса $R(f(E^-), f(\zeta))$ для любого компактного подмножества области $D^- = f(E^-)$ с конечным выпуклым дополнением осуществляет квазиконформное отображение.*

Существуют точные оценки аналогов величин k_1 и k_2 для двух видов квазиконформных отображений.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, приведем следующий результат, который легко получить с помощью принципа гиперболической метрики [8, с. 326].

Лемма 1. *Если функция $\varphi(\zeta)$ регулярна во внешности E^- единичного круга E и $\varphi(E^-) \subset E^-$, то для производной этой функции справедлива оценка*

$$|\varphi'(\zeta)| \leq \frac{|\varphi(\zeta)|^2 - 1}{|\zeta|^2 - 1}, \quad \zeta \in E^-. \quad (9)$$

Равенство достигается только для функций

$$\varphi(\zeta) = e^{i\alpha} \frac{1 + \bar{a}\zeta}{\zeta + a}, \quad a \in E^-,$$

в любой точке $\zeta \in E^-$.

Доказательство теоремы 2. Необходимое и достаточное условие выпуклости границы области D^- , полученной из E^- действием функции f , имеет вид (5).

Как в доказательстве предыдущей теоремы, получим подчинение $\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \prec \Phi_0 = \frac{2}{\zeta - 1}$. Тогда $\Phi_0^{-1}\left(\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right) = \varphi(\zeta)$, $\varphi(\infty) = \infty$. Повторяя выкладки, проведенные ранее, получаем

$$\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \Phi_0(\varphi(\zeta)) = \frac{2}{\varphi(\zeta) - 1}, \quad (10)$$

откуда имеем

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2}{\zeta(\varphi(\zeta) - 1)}.$$

Учитывая, что в данном случае конформный радиус определяется выражением

$$R(D^-, z) = |f'(\zeta)|(|\zeta|^2 - 1), \quad |\zeta| > 1, \quad z = f(\zeta), \quad (11)$$

подсчитаем вторые производные. Будем иметь

$$\begin{aligned} R |R_{\bar{z}z}| &= 1 - \left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \frac{|\zeta|^2 - 1}{2} + \bar{\zeta} \right|^2 = \\ &= 1 - \frac{|\varphi(\zeta)|^2 |\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 |\varphi(\zeta) - 1|^2} = \frac{(|\zeta|^2 - 1)(|\zeta \varphi(\zeta)|^2 - 1)}{|\zeta|^2 |\varphi(\zeta) - 1|^2}, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{1}{2} \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} (|\zeta|^2 - 1) + \bar{\zeta} = \frac{|\zeta|^2 - 1}{\zeta(\varphi(\zeta) - 1)} + \bar{\zeta} = \frac{|\zeta|^2 \varphi(\zeta) - 1}{\zeta(\varphi(\zeta) - 1)}.$$

Далее,

$$R |R_{\bar{z}z}| = \frac{(|\zeta|^2 - 1)^2}{2} |\{f(\zeta), \zeta\}|,$$

$$\begin{aligned} \{f(\zeta), \zeta\} &= -\frac{2}{\zeta^2(\varphi(\zeta) - 1)} - 2 \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta(\varphi(\zeta) - 1)^2} - 2 \frac{1}{\zeta^2(\varphi(\zeta) - 1)^2} = \\ &= -2 \frac{\varphi(\zeta) + \zeta \varphi'(\zeta)}{\zeta^2(\varphi(\zeta) - 1)^2} = -2 \frac{(\varphi(\zeta)\zeta)'}{\zeta^2(\varphi(\zeta) - 1)^2}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\left| \frac{R_{\bar{z}z}}{R_{zz}} \right| = \frac{|(\varphi\zeta)'|(|\zeta|^2 - 1)}{|\varphi\zeta|^2 - 1}.$$

Поскольку $|\varphi\zeta| \geq |\varphi| > 1$, то, применяя лемму 1 к функции $\zeta\varphi(\zeta)$, придем к соотношению $|R_{\bar{z}z}/R_{zz}| \leq 1$.

По лемме 1 равенство здесь достигается на экстремальной функции $\zeta\varphi(\zeta) = e^{i\alpha} \frac{1 + a\zeta}{\zeta + a}$, приводящей к $\varphi(\zeta)$ с нулем первого порядка в ∞ . В соотношении (10) функция $1/\varphi(\zeta)$ должна иметь нуль второго порядка. Поэтому для рассмотренного в теореме класса функций Σ^0 отношение $|R_{\bar{z}z}/R_{zz}|$ не обращается в 1 ни в одной точке D^- , то есть

$$k_1(f(\zeta), E_r^-) = \max_{|\zeta| \geq r} \frac{|(\varphi\zeta)'|(|\zeta|^2 - 1)}{|\varphi\zeta|^2 - 1} < 1.$$

Поэтому любой компакт, предварительно помещенный в область $D_r^- = f(E_r^-)$, $E_r^- = \{\zeta : |\zeta| > r > 1\}$, будет отображаться градиентом конформного радиуса квазиконформно, причем

$$\sup_{f \in \Sigma^0} k_1(f(\zeta), E_r^-) < 1, \quad 1 < r < \infty, \quad \text{и} \quad \sup_{f \in \Sigma^0} k_1(f(\zeta), E^-) = 1.$$

Переходя теперь к r -линиям уровня, получим

$$r \frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)} = \frac{2}{\zeta(\varphi(r\zeta) - 1)},$$

а значит,

$$\left| r \frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)} \frac{|\zeta|^2 - 1}{2} + \bar{\zeta} \right|^2 - 1 = \frac{(|\zeta|^2 - 1)(|\zeta\varphi(r\zeta)|^2 - 1)}{|\zeta|^2|\varphi(r\zeta) - 1|^2},$$

$$\{f(r\zeta), \zeta\} = -2 \frac{(\varphi(r\zeta)\zeta)'}{\zeta^2(\varphi(r\zeta) - 1)^2}.$$

Учитывая неравенство (9), будем иметь

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{zz}} \right| = \frac{|(\varphi(r\zeta)\zeta)'|(|\zeta|^2 - 1)}{|\zeta|^2|\varphi(r\zeta)|^2 - 1} \leq 1.$$

Достижение знака равенства в последнем неравенстве невозможно. Поэтому

$$k_2(f(r\zeta), E^-) = \max_{|\zeta| \geq 1} \frac{|(\varphi(r\zeta)\zeta)'|(|\zeta|^2 - 1)}{|\zeta|^2|\varphi(r\zeta)|^2 - 1} < 1,$$

причем

$$\sup_{f \in \Sigma^0} k_2(f(r\zeta), E^-) = 1 \quad \text{при } r \geq 1.$$

□

3. Области D , $\infty \in \partial D$, разбиваются на два класса. Один характеризуется выпуклостью линий уровня, близких к граничной кривой, и этот случай отражен в теореме 1, а другой – невыпуклостью таких линий. Во втором случае при замене линий уровня, связанных с окружностями $|\zeta| = r$, на линии уровня, связанные с окружностями $|\zeta + r| = 1 - r$, квазиконформность градиента конформного радиуса сохраняется всюду внутри области, за исключением бесконечно удаленной точки. Этот эффект отражает

Теорема 3. *А) Градиент (2) конформного радиуса $R(D, z)$ для любой замкнутой конечной области, включенной в $D = \tilde{f}(E)$, $\tilde{f}(-1) = \infty$ (причем $\mathbb{C} \setminus D$ – выпуклое множество), осуществляет квазиконформное отображение.*

В) В частности, утверждение А справедливо для градиента конформного радиуса $R(\tilde{f}(\tilde{E}_r), \tilde{f}(\omega))$ в случае области $\tilde{f}(\tilde{E}_r)$, $\tilde{E}_r = \{\omega : |\omega + r| \leq 1 - r\}$, $0 < r < 1$.

Так как $\{\omega : |\omega + r| \leq 1 - r\} \Leftrightarrow \{\zeta : \operatorname{Re} \zeta \geq \rho\}$, $\rho = \frac{1-r}{r}$, $\zeta = \frac{1-\omega}{1+\omega}$, то удобнее вести речь о поверхности конформного радиуса

$$R(f(P), f(\zeta)) = 2 \operatorname{Re} \zeta |f'(\zeta)|, \quad f(\zeta) = \tilde{f}\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right), \quad (12)$$

построенной над полуплоскостью $P = \{\zeta : \operatorname{Re} \zeta > 0\}$ (соответствующие отображающие функции $f(\zeta)$ образуют класс $\Sigma^0(P)$). Поэтому для доказательства теоремы 3 понадобится еще один частный случай принципа гиперболической метрики.

Лемма 2. *Если функция $\varphi(\zeta)$ регулярна в полуплоскости P и $\varphi(P) \subset P$, то для производной φ' функции φ справедлива оценка*

$$|\varphi'(\zeta)| \leq \frac{\operatorname{Re} \varphi(\zeta)}{\operatorname{Re} \zeta}, \quad \zeta \in P,$$

равенство в которой достигается лишь для функций

$$\varphi(\zeta) = \frac{ai\zeta + b}{-c\zeta + id}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0,$$

в любой точке $\zeta \in P$.

Доказательство теоремы 3. Необходимое условие выпуклости граничной линии в данном случае имеет вид

$$\operatorname{Re} \left(\frac{f''(i\eta)}{f'(i\eta)} \right) \geq 0, \quad (13)$$

поэтому из геометрических соображений

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \varphi(\zeta), \quad (14)$$

где $\varphi(\zeta)$ — функция, удовлетворяющая условиям леммы 2.

Перейдем к вычислению производных конформного радиуса (12). Имеем

$$R_{\bar{z}}(\zeta) = \frac{\sqrt{f'(\zeta)}}{f'(\zeta)} \left(\sqrt{f'(\zeta)}(\zeta + \bar{\zeta}) \right)'_{\bar{\zeta}} = \frac{\sqrt{f'(\zeta)}}{\sqrt{f'(\zeta)}} \left(\frac{\overline{f''(\zeta)}}{f'(\zeta)} \operatorname{Re} \zeta + 1 \right),$$

$$\begin{aligned} R_{\bar{z}\bar{z}}(\zeta) &= \frac{\sqrt{f'(\zeta)}}{f'(\zeta)} \left(\frac{1}{\sqrt{f'(\zeta)}} \left(\frac{\overline{f''(\zeta)}}{f'(\zeta)} \operatorname{Re} \zeta + 1 \right) \right)'_{\bar{\zeta}} = \\ &= \frac{\sqrt{f'(\zeta)}}{\sqrt{f'^3(\zeta)}} \left(\left(\frac{\overline{f''(\zeta)}}{f'(\zeta)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{f''(\zeta)}}{f'(\zeta)} \right)^2 \right) \operatorname{Re} \zeta = \frac{\sqrt{f'(\zeta)}}{\sqrt{f'^3(\zeta)}} \{ \overline{f'(\zeta)}, \bar{\zeta} \} \operatorname{Re} \zeta \end{aligned}$$

и поэтому

$$R|R_{\bar{z}\bar{z}}| = 2|\{f(\zeta), \zeta\}| \operatorname{Re}^2 \zeta.$$

С учетом (14) перепишем последнее выражение в виде

$$R|R_{\bar{z}\bar{z}}| = 2 \left| \varphi'(\zeta) - \frac{\varphi^2(\zeta)}{2} \right| \operatorname{Re}^2 \zeta.$$

Так как

$$\begin{aligned} R_{\bar{z}\bar{z}}(\zeta) &= \frac{1}{f'(\zeta)\sqrt{f'(\zeta)}} \left(\sqrt{f'(\zeta)} \left(\frac{\overline{f''(\zeta)}}{f'(\zeta)} \operatorname{Re} \zeta + 1 \right) \right)'_{\zeta} = \\ &= \frac{1}{2|f'(\zeta)|} \left(\left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right|^2 \operatorname{Re} \zeta + \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} + \frac{\overline{f''(\zeta)}}{f'(\zeta)} \right), \end{aligned}$$

то

$$R R_{\bar{z}\bar{z}} = \left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \operatorname{Re} \zeta + 1 \right|^2 - 1.$$

С учетом (14) имеем

$$R R_{\bar{z}\bar{z}}(\zeta) = |\varphi(\zeta) \operatorname{Re} \zeta + 1|^2 - 1 = |\varphi(\zeta)|^2 \operatorname{Re}^2 \zeta + 2 \operatorname{Re} \zeta \operatorname{Re} \varphi(\zeta).$$

Взяв отношение вторых производных, получим

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{zz}} \right| = \frac{2 \operatorname{Re} \zeta \left| \varphi' - \frac{\varphi^2}{2} \right|}{|\varphi|^2 \operatorname{Re} \zeta + 2 \operatorname{Re} \varphi} \leq \frac{\operatorname{Re} \zeta (2|\varphi'| + |\varphi|^2)}{|\varphi|^2 \operatorname{Re} \zeta + 2 \operatorname{Re} \varphi} \leq \frac{\operatorname{Re} \zeta \left(2 \frac{\operatorname{Re} \varphi}{\operatorname{Re} \zeta} + |\varphi|^2 \right)}{|\varphi|^2 \operatorname{Re} \zeta + 2 \operatorname{Re} \varphi} = 1.$$

Достижение знака равенства в неравенстве

$$|\varphi'(\zeta) - \varphi^2(\zeta)/2| \leq |\varphi'(\zeta)| + |\varphi(\zeta)|^2/2$$

имеет место, когда $\varphi'(\zeta)$ и $-\varphi^2(\zeta)/2$ имеют одинаковое значение аргумента. Пусть $\varphi'(\zeta)(\zeta) = R_1 e^{i\theta}$, $-\varphi^2(\zeta)/2 = R_2 e^{i\theta}$, тогда функция $\frac{\varphi'(\zeta)}{-\varphi^2(\zeta)/2} = \frac{R_1}{R_2}$ является вещественной аналитической функцией, положительной во всей полуплоскости, что возможно тогда и только тогда, когда $R_1/R_2 \equiv 2\alpha > 0$. Решением дифференциального уравнения $\frac{\varphi'(\zeta)}{-\varphi^2(\zeta)/2} = 2\alpha$ будет функция $1/\varphi(\zeta) = \alpha\zeta + b$. Среди всех таких функций выберем те, которые переведут правую полуплоскость на себя, именно, $\varphi(\zeta) = 1/(\alpha\zeta + i\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Из (14) получаем $f(\alpha, \zeta) = C_1(\alpha\zeta + i\beta)^{(1+\alpha)/\alpha} + C_2$.

Для любой замкнутой области $\bar{G}_\rho \subset \bar{D}$, которая является образом полосы $\{\zeta : 0 \leq \operatorname{Re} \zeta \leq \rho\} = f^{-1}(\bar{G}_\rho)$, будем иметь

$$k_1(f(\zeta), f^{-1}(G)) = \max_{\zeta \in f^{-1}(G)} \frac{2 \operatorname{Re} \zeta |\varphi' - \varphi^2/2|}{|\varphi|^2 \operatorname{Re} \zeta + 2 \operatorname{Re} \varphi} \equiv \psi(\rho, f) < 1, \quad (15)$$

но

$$\sup_{f \in \Sigma^0(P) \setminus \{f(\alpha, \zeta)\}} \psi(\rho, f) = 1.$$

Оценку (15) можно конкретизировать, включив G в область $\tilde{f}(\tilde{r}E)$ при некотором $\tilde{r} \in (0, 1)$.

Области $f(P)$, полученные преобразованием полуплоскости P с помощью функций $f(\zeta) \in \Sigma^0(P)$, не исчерпываются конечными областями с выпуклыми границами. Поэтому для области $f(P)$ не существует аналога коэффициента k_2 из доказательства теорем 1 и 2. $\square$

Взаимодействие выделенных классов, связанных с теоремами 1 и 3, иллюстрирует

Пример 2. Возьмем класс функций

$$z = f(a, \alpha; \zeta) = (\zeta + a)^\alpha, \quad \zeta \in P, \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < 2,$$

и исследуем для него множество значений градиента конформного радиуса.

Правая полуплоскость P отображается введенной функцией на выпуклую область при $0 < \alpha \leq 1$ и на область с выпуклым дополнением до полной плоскости при $1 \leq \alpha < 2$.

Так как $f'(a, \alpha; \zeta) = \alpha(\zeta + a)^{\alpha-1}$, то $R = \alpha|\zeta + a|^{\alpha-1}(\zeta + \bar{\zeta})$ и

$$\begin{aligned} R_{\bar{z}} &= \frac{1}{f'} \alpha(\zeta + a)^{(\alpha-1)/2} \left[\frac{\alpha-1}{2} (\bar{\zeta} + a)^{(\alpha-3)/2} (\zeta + \bar{\zeta}) + (\bar{\zeta} + a)^{(\alpha-1)/2} \right] = \\ &= \left(\frac{\zeta + a}{\bar{\zeta} + a} \right)^{(\alpha-1)/2} \frac{1}{2(\bar{\zeta} + a)} [(\alpha-1)\zeta + (\alpha+1)\bar{\zeta} + 2a] = \nabla R/2. \end{aligned}$$

После нетрудных выкладок получим

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{\bar{z}z}} \right| = \frac{\operatorname{Re} \zeta}{\operatorname{Re} \zeta + 2a/(\alpha + 1)}.$$

При $a = 0$ имеем $|R_{\bar{z}\bar{z}}/R_{\bar{z}z}| = 1$. Если $a \neq 0$, то

$$k_1 = \max_{z \in \bar{G}_\rho} \left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{\bar{z}z}} \right| = \frac{\rho}{\rho + 2a/(\alpha + 1)},$$

где $\bar{G}_\rho$ – та часть замкнутой области $\bar{D}$, которая при действии $f(a, \alpha; \zeta)$ соответствует полосе $\{0 \leq \operatorname{Re} \zeta \leq \rho\}$ или части $\{\omega : |\omega| \leq 1, |\omega - r| \geq 1 - r\}$ замкнутого единичного круга $\{|\omega| \leq 1\}$, причем $\rho = \frac{2}{1-r}$.

Определим граничные точки градиента. Для этого представим

$$\begin{aligned} \nabla R(i\eta) &= \left(\frac{a + i\eta}{a - i\eta} \right)^{(\alpha-1)/2} \frac{(\alpha - 1)i\eta + (\alpha + 1)(-i\eta) + 2a}{a - i\eta} = \\ &= 2 \left(\frac{a + i\eta}{a - i\eta} \right)^{(\alpha-1)/2} = 2e^{i(\alpha-1) \arctg(\eta/a)}. \end{aligned}$$

Когда η изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, точка $\nabla R(i\eta)$ (то есть конец этого вектора с началом в нуле) будет двигаться по дуге окружности радиуса 2 с центром в 0 от $2e^{-i(\alpha-1)\pi/2}$ до $2e^{i(\alpha-1)\pi/2}$, не выходя за пределы дуги окружности между этими точками.

Теперь нужно найти образы бесконечно удаленной точки при различных подходах к ней. Для этого подсчитаем пределы $\nabla R(re^{i\beta})$ при $r \rightarrow \infty$, когда фиксированная величина β находится в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \nabla R(re^{i\beta}) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{re^{i\beta} + a}{re^{-i\beta} + a} \right)^{(\alpha-1)/2} \frac{(\alpha - 1)re^{i\beta} + (\alpha + 1)re^{-i\beta} + 2a}{a - i\eta} \right] = \\ &= e^{i\beta(\alpha-1)} e^{i\beta} [(\alpha - 1)e^{i\beta} + (\alpha + 1)e^{-i\beta}] = (\alpha - 1)e^{i\beta(\alpha+1)} + (\alpha + 1)e^{i\beta(\alpha-1)} = \varphi(\beta). \end{aligned}$$

Если β будет изменяться от $-\pi/2$ до $\pi/2$, то точка $\varphi(\beta)$ опишет дугу циклоиды между крайними точками $2ie^{-i\alpha\pi/2}$ (при $\beta = -\pi/2$) и $-2ie^{i\alpha\pi/2}$ (при $\beta = \pi/2$) (см. рис. 1).

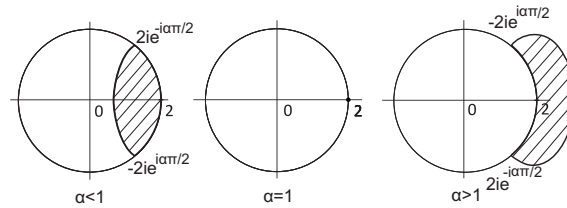


Рис. 1

Граничная кривая не зависит от $a \neq 0$. Если $a = 0$, то при $\alpha < 1$ образ вырождается во внутреннюю дугу циклоиды, при $\alpha > 1$ образ вырождается во внешнюю дугу циклоиды. Точечный образ при $\alpha = 1$ сохраняется для любых a .

Частными видами граничных линий с параметрическим представлением

$$z = (a + i\eta)^\alpha, \quad -\infty < \eta < +\infty, \quad a > 0,$$

являются параболы

$$z = (a + i\eta)^2 \Leftrightarrow \{x = a^2 - \eta^2, y = 2a\eta\} \Leftrightarrow y^2 = -4a^2(x - a^2) \quad (\text{при } \alpha = 2)$$

и гиперболы

$$z = (a + i\eta)^{1/2} \Rightarrow a + i\eta = (x + iy)^2 \Leftrightarrow a = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy \quad (\text{при } \alpha = 1/2).$$

Summary

L.A. Aksentyev, A.N. Akhmetova. On the Gradient of the Conformal Radius of a Plane Domain.

This paper studies the quasi-conformality of domain mapping by the gradient of the conformal radius. It is proved that the gradient of the conformal radius realizes quasi-conformal mapping for domains with convex boundaries. For these domains we obtain new estimates of the quasi-conformality coefficient of the conformal radius gradient.

Key words: quasi-conformal mapping, conformal radius, gradient of the conformal radius, convex domain.

Литература

1. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. The conformal radius as a function and its gradient image // Israel J. Math. – 2005. – V. 145. – P. 349–374.
2. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. Schwarz-Pick type inequalities. – Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2009. – 156 p.
3. Ахметова А.Н. Свойства конформного радиуса и теоремы единственности для внешних обратных краевых задач: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Казань, 2009. – 105 с.
4. Akhmetova A. Quasiconformal mappings associated with Gahov's equation in inverse boundary value problems // 21th Int. Workshop on Operator and Applications, TU Berlin, Book of abstracts. – 2010. – P. 4–5.
5. Аксентьев Л.А., Ахметова А.Н. Об отображениях, связанных с градиентом конформного радиуса // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 6. – С. 60–64.
6. Аксентьев Л.А., Ахметова А.Н. Об отображениях, связанных с градиентом конформного радиуса // Мат. заметки. – 2010. – Т. 87, № 1. – С. 3–12.
7. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 133 с.
8. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 630 с.

Поступила в редакцию
07.10.10
Переработанный вариант
08.12.11

Аксентьев Леонид Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Leonid.Aksentev@ksu.ru*

Ахметова Альбина Наилевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева.

E-mail: *achmetowa@inbox.ru*